数学辞海

MATHEMATICS DICTIONARY

第一卷

山 西 教 育 出 版 社
中国科学技术出版社
东 南 大 学 出 版 社

如果你有数学問題，
而不好意思发問，
你可以从本書获得解答。
一九八八年八月書祝
数学辭海成功
陳省身



学习、研究、运用、发展数学，让中国数学赶上国际先进水平，促进社会主义現代化建设

吴大任

个人的进步和完美与国家的繁荣和富强是紧密相连的

杨 [illegible]

長江納众水百折不回頭碧海能容物滔滔向海流

數學辭海出版紀念

李國平並書





《数学辞海》总编辑委员会

《数学辞海》第一卷编辑委员会

《数学辞海》第一卷各分支学科编辑委员会

序

当我们向着日益临近的21世纪走去的时候，一部巨著——《数学辞海》将要面世了。这是我国200余所高等院校、科研机构，数以千计的数学家、数学工作者共同劳动的结晶，是一件影响深远的大事。

还是在本世纪同上一世纪交接的1900年，希尔伯特就以23个数学问题作为送旧迎新的礼物，高瞻远瞩地指引着20世纪数学发展的若干重要进程。如今，20世纪的帷幕行将落下，我们惊喜地看到，在这百年间，数学已经发生了多么巨大的变化！人们对数学的认识更深刻了，数学的分支更多了，数学的广度和深度，都远远超出了本世纪初的预料。异军突起的新科学和新技术，诸如计算机科学、航天技术、生命工程、数字通信以及新能源的开发、新材料的应用等，无不需要数学，社会科学和人文科学的经济、教育、语言、考古等领域，也开始与数学结下不解之缘。所有这些学科在向数学索取的同时，也都在某一方面推动和改变着数学。数学已经发展成为内涵广泛的数学科学。数学是大自然的语言，又是人类社会生活中各种关系的高度概括。数学在现实世界中获取模型，扩大了自己的外延，同时展现了新的内涵、新的抽象。如果说古希腊和古代中国的数学只是涓涓细流，那么，今天之数学已经汇成了波流浸灌的长江大河。

一个人可以学贯中西，但无法懂得现代数学的方方面面，而社会变革的进程和新技术的浪潮却迫使人们学习和应用更多的数学。解决这个矛盾的办法之一，自然是编纂一部大型的数学工具书。《数学辞海》正是在这样的时代需求背景之下应运而生的。有了这种巨大的推动力量，它才能克服种种艰难曲折，从第一页稿纸，发展成为我们所见到的这部别具一格的鸿篇巨制。

为什么这本书能使作者们激动，愿意竭诚为之构筑，又能吸引读者，使之企足而待呢？这是由于数学自身的地位和价值，它在实践中的巨大作用和自身的美。

数学首先是人们生活和生产的工具。马克思非常赞同康德的这样一句话："一门科学，只有当它成功地应用数学时，才算达到了完善的地步。"事实上，数学被使用的程度，往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。很难设想，在一个低技术的国家，会产生高深的数学，而高技术的社会形态，必有与之相适应的数学水平。毫无疑问，在科学技术飞速发展的当今世界，对数学的需求将与日俱增。

其次，数学又是一种文化形态。古往今来，人们在数学这块沃土上耕耘，收获了许多硕果。这些美好的硕果，本身就是一首首动人的诗篇，闪耀着智慧的光芒。一般人都会欣赏艺术，然而，当一个人只要具有基础的数学知识，同样可以对一道经典的数学名题和某个优美的解法叹为观止。人们还概括了大量实际模型的抽象数学，通过形式推演，以得出

系统的理论，再应用到更广泛的总体上去。数学的这种以简驭繁的本领决定于它的高度概括性。正是由于概括，数学形成了包含各个学科的优美结构。数学的发展推动了自然结构观的发展，它有力地带动了其他学科，大大加速了人类文明史的进程。

数学的作用，还在于它有着独特的培育人的功能。数学是每个人必须学习的基础学科。从小学到中学，数学的学时最多，除了因为数学是一切科学的基础和工具之外，更因为数学有着独特的思维教育和智力开发的作用。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新的特征，集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。所以，学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练，被称为“思想的体操”。

为了全面地反映古今中外的数学成果、体现数学的多种功能，本书既兼顾传统数学和现代数学，又兼顾抽象的基础数学和具体的应用数学。考虑到广大数学教育工作者的需求，本书还将初等数学和高等数学相对地进行了划分，并按习惯将某些分支学科集中列卷，此外还编纂了包含数学史与数学教育等分支学科的专卷，也系统地介绍了中国的古算。这样编纂的《数学辞海》将会充分地显示数学的工具意义、文化意义和教育意义。愿这部国人自编的《数学辞海》既能为国家经济建设服务，又能在民族文化建设中起到应有的作用。

《数学辞海》是改革开放的产物，又将为改革开放服务。人们或许没有想到，这部巨著竟出自民办的编写组织。编纂者来自大江南北、长城内外、海峡两岸，在历时 10 余年间，数百所大专院校、科研机构的千余名专家学者日夜辛劳、自愿奉献，在《数学辞海》中编织着自己的理想和愿望。社会各界积极赞助，有识之士慷慨捐赠，海外同胞亦纷纷来电来函表示支持，用他们的心意渲染着文化建设的宏图。在这个民办写作团体中，人们互相信任、互相支持、互相勉励，充满了成就事业的认同感、紧迫感。这一写作经验也清楚地说明：在共同的愿望下，民办科研也是一条坦途。这是《数学辞海》编写过程中给我们的一个十分有益的启示。

像一切事物一样，《数学辞海》还不会达到绝对完善的境界。相反，这部反映浩如烟海的数学知识，动员了如此巨大力量而编纂的大型著作，首次面世时，一定会有许多不足之处，例如整体结构、条目收集、词义诠释、词类归属等，都还会有需要进一步推敲、商榷的地方。数学是极为严谨的科学，《数学辞海》必将在众多专家的严谨尺度之下，逐版改进。我们今天为之高兴的是，将来可能成为传世之作的《数学辞海》已有了良好的雏形，我们准备将它作为迎接新世纪的礼物，奉献给关心它、需要它的广大读者。

程民德

1998 年 6 月

凡　　例

一、编　排

1. 全书包括数学科学的100余个分支学科或专题项目，按照从初等数学到高等数学，从古典数学到现代数学，从理论数学到应用数学的原则，将整个数学科学划分为6卷编辑出版(参见《数学辞海》六卷本内容划分方案)。

2. 各卷正文均按数学知识的结构体系编排，同一分支学科(或同一专题项目)的条目相对集中，一般按知识本身的结构、层次、逻辑等关系确定其先后顺序，而数学史部分，如数学家、数学名著、数学期刊、数学团体等，则分别按其出生、出版、创刊、成立的年代先后顺序编排。

3. 各卷目录标题分为三级：一级标题为一个分支学科或一个知识门类。一级标题之下，则按知识构成设若干个二级标题。例如，第一卷中的“数学分析”为一级标题，下设六个二级标题——“实数理论”、“变量与函数”、“极限理论”、“微分学”、“积分学”和“无穷级数”；又如，第六卷中的“中国数学史”为一级标题，下设四个二级标题——“中国古代数学史”、“中国古代数学著作”、“中国古算名词术语”和“中国数学家”。三级标题为具体条目名称。

4. 同一卷中不同分支学科之间的内容有重复时，其知识主题一般地只在一处设条目；不同卷中的学科内容有重复时，其知识主题在各相关部分均设条目，但在释文内容上各有侧重。

二、条　目

1. 条目的标题一般为一个词，如“圆”、“群”、“环”、“函数”、“矩阵”、“向量”、“方程”等，也有的是一个词组，如“勾股定理”、“常微分方程的通解”、“哥德巴赫猜想”、“希尔伯特第6问题”等。

2. 条目设立的条件：1) 独立的知识主题或已形成的固定概念；2) 能够应用准确的、人们习惯和易于理解的词标引；3) 便于读者快速查阅。

3. 条目的分类：条目按其释文的长短分为五类：特长条目(3000字左右)、长条目(1000—3000字)、中条目(300—1000字)、短条目(300字以内)和参见条目。

4. 本书所收的数学名词术语，力求与“全国自然科学名词审定委员会”公布的《数学名词》(科学出版社，1993)保持一致。外国人名的中文译名，力求与《中国大百科全书·数学卷》和梁宗巨主编的《数学家传略词典》(山东教育出版社，1989)中的译名保持一致。未出现在上述著作中的外国人名的中文译名，则采用数学界的约定译名或用习惯译法译出的译名。

三、释　文

1. 本书条目的释文，以文字叙述为主，并采用规范化的现代汉语，力求科学、准确、简明、通俗，杜绝教材式语言和口语，释文开头不再重复条目的标题。

2. 释文开头一般要求破题，然后给出严格的数学定义，并尽量阐明该条目内容的历史沿革及其在本分支学科或知识门类中的地位、作用、发展趋势等，以增强释文的科学性和可读性。

3. 一词多义的释文，用①…②…③…分项叙述，某个条目的释文需由其他条目释文补充说明的，采

用“参见”的方式，被参见的条目标题需加引号，条目标题前加“参见”字样，并置于圆括号之内。

4. 对常见的异名同义词，只给出一种条目标题的释文，其余异名条目亦列人正文，但不再写释文，给出释文的条目标题加引号，条目标题前加“即”字样。例如：矢量(vector)即“向量”；全纯函数(holomorphic function)即“解析函数”；正则函数(regular function)即“解析函数”。

5. 每一个条目标题后，一般在圆括号内标注有对应的英文。凡外国人名(日本人除外)在条目的释文中第一次出现时，在其中文译名后的圆括号内标注有相应的外文原名的姓和名的首字母，并用逗号隔开。例如，欧几里得(Euclid)、牛顿(Newton,I.)、高斯(Gauss,C.F.)。同一外国人名在条目的释文中第二次出现时，不再标注外文。在日本人名、中国人名、中国古代数学史、中国古代数学著作、中国古算名词术语等条目标题后，一般在圆括号内标注汉语拼音。

6. 如果条目乙的基本定义已经完全包括在条目甲的释文之中，那么条目乙只作为“参见条目”保留，所参见的条目标题需加引号，并在条目标题前加“见”字样，而释文不再重复。例如，在条目“线性变换”的释文中，已给出“单位变换”、“恒等变换”和“零变换”的定义，则上述三个条目就作为“参见条目”予以保留，并分别表示为：单位变换(unit transformation)见“线性变换”；恒等变换(identity transformation)见“线性变换”；零变换(null transformation)见“线性变换”。

四、索　引

1. 本书每一卷正文之后，均附有三种索引，即条目笔画索引、条目音序索引和条目西文索引。索引中条目标题后面的数字，表示该条目在正文中的页码。

2. 在条目笔画索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按 一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇀(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，㇏(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩“亅”外)归为 乛(折)。第一字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 在条目音序索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

4. 在条目笔画索引和条目音序索引中，凡第一字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在两种索引的最后。西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画或音序排列。

5. 在条目西文索引中，按条目标题的起首西文字母顺序排列；条目标题的西文缩写，按一个词排列。凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。没有西文译名的条目，未收进条目西文索引。

6. 在各卷索引之后，还附有本卷涉及到的中外人名译名对照表，以供读者查阅。

目　录

《数学辞海》六卷本内容划分方案

第一卷

数学
算术
初等代数
平面几何
平面三角
立体几何
球面几何
平面解析几何
空间解析几何
初等数论
高等代数
高等几何
数学分析
集合论
形式逻辑
布尔代数
概率论与统计学初步
数学符号表

第二卷

数学
组合学
线性与多重线性代数
群及其推广
李群与李代数
环与代数
模与同调代数
序与格
范畴论与代数 K 理论
域论与伽罗瓦理论
数论
代数几何
微分几何学
凸集几何与距离几何
一般拓扑学
代数拓扑学与流形拓扑学
奇点理论与突变理论
数学符号表

第三卷

数学
实变函数论
复变函数论
多复变函数论
测度论
泛函分析
变分法
函数逼近论
调和分析
流形上的分析
位势论
凸分析
非标准分析
小波分析
分形几何
常微分方程
偏微分方程
积分方程
动力系统
特殊函数
数学符号表

第四卷

数学
数学基础
数理逻辑
计算数学
概率论
随机过程
统计学
经济数学
生物数学
数学物理与理论物理
模糊数学
数学符号表

第五卷

数学
运筹学
系统理论
控制理论
通信与信息理论
画法几何与工程图学
计算机科学
数理语言学
力学
天文学
测绘学
数学符号表

第六卷

数学
中国数学史
外国数学史
数学符号史
数学团体与研究机构
数学竞赛与数学奖
数学期刊
数学教育
数学哲学
数学名题与猜想
珠算
数学发展史年表

第一卷条目目录

说明：该目录由本卷所属各分支学科或专题项目的全部条目（包括给出释文的条目及其参见条目）组成，按知识结构顺序编排，即按条目在正文中出现的先后顺序排列.

算术

整数

命数法

小　数

分　　数

运　　算

计量单位

比 及 比 例

应 用 问 题

初 等 代 数

数 系

代 数 式

根式、指数与对数

不 等 式

方 程

第一卷条目目录

函数与数列

排列组合与二项式定理

平 面 几 何

平面几何的基础知识

三 角 形

多 边 形

比例与相似形

圆

几何变换与轨迹

尺规作图

以人名、特征命名的定理

面　积

平 面 三 角

一般概念

三角函数

三角式的变形

反三角函数

三角方程与三角不等式

解 三 角 形

立 体 几 何

立体几何的基础知识

空 间 角

多 面 体

旋 转 体

球

变 换

体积与表面积

空间图形的内外接和内外切

球 面 几 何

球面图形

球面三角

平 面 解 析 几 何

坐 标 法

直线与圆

圆锥曲线

平面曲线

空间解析几何

向量与坐标

平面与空间直线

二次曲面的一般理论

曲面与空间曲线

初 等 数 论

整数的整除性

同 余 式

连 分 数

数论函数

高 次 剩 余

原根和指数

多项式的性质

素数分布

不 定 方 程

高 等 代 数

多 项 式

行 列 式

矩 阵

线性方程组

二次型与双线性型

线 性 空 间

线性变换与 λ 矩阵

欧几里得空间

高 等 几 何

仿射几何

射影几何

几何基础

非欧几里得几何

数 学 分 析

实 数 理 论

变量与函数

极限理论

微 分 学

积分学

无穷级数

集　　合　　论

集合及其运算

关　系

映　　射

有序集和序结构

序　数

基　　数

公理与悖论

形 式 逻 辑

形式逻辑的基本规律

概 念

判 断

推　理

证 明

布 尔 代 数

布尔代数的基本概念

布尔代数的代数理论

特殊布尔代数

布尔函数与方程

命题代数

开关代数

概率论与统计学初步

随机事件与概率

随机变量与分布函数

随机变量的数字特征

大数定律与中心极限定理

统计学概论

参数估计与假设检验

方差分析与回归分析

数　　学

数学(mathematics)　数学一词来自希腊文 $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\chi\eta'$，其字根 $\mu\alpha'\theta\eta\mu\alpha$ 意义为知识、科学，它非常恰当地反映这个领域的广泛性与普遍性. 从历史上看，数学常常用其某个侧面来表示：中国古代用算学来强调其计算技术方面，而西方多用几何学一词代表数学，以显示欧几里得(Euclid)的《几何原本》传统，而实际上，其中也包括数论和量论的内容. 随着时间的流逝，数学的内容不断地扩大，在17—18世纪直至19世纪，被包括在数学领域内的许多学科和分支已经独立出去，而在各学科的边界又不断创造和衍生出一系列新的学科，这些新学科现在已融合而成面向21世纪的庞大的数学科学领域，它是一个具有内在统一性的科学技术群. 以下从四个方面进行论述：

1. 数学的对象和特点. 数学中最原始的对象是数与形. 自然数已经是相当抽象的概念，它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土中抽象出数1来，而且还要由数1得出更一般数的概念. 有了自然数的概念还会遇到基数和序数的矛盾. 至于记数法和位值制都是中国对人类文明的伟大创造，这种伟大创造绝不仅仅是对自然界的认识和对哲学思辨的产物，它真正体现数学的成就. 数学另一个原始对象是形，它更为直观，甚至长期以来人们也把它当成自然科学的对象，尽管柏拉图(Plato)早就说过，三角形属于理念的世界. 当然现在数学的空间远远超出现实的空间，数学中的"形"也不限于人们感官能摸得着、看得见的东西，它是更抽象的概念，如高维空间、无穷集合、群、拓扑等是任何其他学科都不研究的对象. 数学作为一门模式科学，应该归入更广泛的符号和形式科学类. 这一类似乎应该介于哲学类与具体科学，即自然科学与社会科学之间. 它的姊妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成型的一般系统学. 有意思的是，有些数学家也认为"数学是一种语言"、"数学可还原为逻辑"、"数学是一种普遍方法"等，这些说法尽管有些偏颇，但毕竟触到数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系. 数学的本质特征是：

1) 数学是一种普遍语言. 这种观点可以追溯到莱布尼茨(Leibniz, G. W.)，他首先提出科学与哲学的两大目标，其中第一个就是找出一种普遍文字，首先是一种符号及变元表示的符号语言. 正如吉布斯(Gibbs, J. W.)所说的"数学是一种语言". 吉布斯不仅是19世纪最伟大的统计热力学大师之一，而且也是向量分析的开创者及传播者. 在19世纪90年代，英国著名的杂志《自然》上掀起的一场大辩论中，向量最终取代四元数而成为物理学普遍使用的概念. 19世纪和20世纪之交，向量分析成为数学、物理学的有效工具，更确切地说，成为描述各种现象的语言. 数学概念的产生及其符号化反映了数学的进步，算术运算的符号化及向符号代数过渡，几何学的代数化，微分、积分运算的符号化，函数的符号及行列式、矩阵、向量、张量等概念的符号化，复数的表示，算子演算以及符号逻辑等都是数学的重要进展. 在这个意义下数学对象是一个符号集合. 单纯的符号集合，正如裸的集合一样，没有结构，没有什么可说的，没有什么意思，而只有它具有形式结构(语法学)，有一定的解释(模型——语义学)，有一定变换、生成、操作、运用方式(语用学)，它才能变得丰富多彩起来. 数学作为一种普遍语言有自己的特点，比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性，而比起通常语言来有外延的确定性. 数学不仅是一种语言，它还是一种精密语言. 正因为如此，它常被称为精密科学. 数学之所以精密，不单是因为其数量表示，还在于它越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念，如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等. 对于许多直观概念，也只有在数学上才能得到很好处理，如连续性、对称性、随机性乃至信息控制、策略、对策、决策等. 数学还明确了一些对立的范畴，如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等. 还有重要的元概念：如结构、构造、存在、模型、等价等. 这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中，使论述确切及精密. 许多常用概念也只有在数学上得到澄清才算有深刻的认识.

2) 数学是一种普遍方法. 从古到今，对许多问题求出解答的过程中，人们或多或少产生一种方法的意识. 而这种方法概念，又以数学中的算法概念为摹本. 在这个意义下，数学充分显示其作为操作技术的特性. 虽然精确的算法概念一直到20世纪30年代才有确切定义，但模糊的概念很早就有，而且也是数学追寻的主要目标之一. 中国的数值运算及方程求解、欧几里得辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法，都使人认识到算法是一种有限的指令，可以机械地运行，从而对一类问题得出确定的解答. 许多几何作图问题以及求积问题也要求发现广义的"算法"来求解问题. 笛卡儿(Descartes, R.)把算法推向普遍方法论的高度，他十分明确地考虑造出普遍方法

来解决科学问题，特别是数学问题，对此他称为普遍数学．正是这种对方法的普遍考虑使他发明代数方法研究几何问题，从而创立解析几何学．波利亚（Polya，G.）把笛卡儿的方案总结如下：

任意问题

$\xrightarrow{①}$数学问题

$\xrightarrow{②}$代数问题

$\xrightarrow{③}$解方程组 $\begin{cases} P_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0, \\ P_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{④}$解方程 $P(x)=0$，

其中第③，④步无非是数学，第②步并没有一般方法，第①步则困难更大．莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他第二大目标．笛卡儿在几何方面实现这个目标，而莱布尼茨则在逻辑上制定一个方案．数学作为一种普遍方法，总是不断跨越已有的领域，深入到未知的世界中去，并且不断创造新的数学对象．17—18世纪，无穷及无穷小进入数学，把代数运算规则向无穷领域推广，这就导致数学分析的形式，并且构成方法上的大飞跃．19世纪由实分析向复分析过渡，再次加大分析方法的威力．

3）数学是一种普遍思想原则．数学发展过程中由于不断一般化、不断抽象化造成自己的普遍思想原则．对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一是1918年诺特（Noether，(A.)E.）首先提出的，而群论方法在量子力学、原子-分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性也是外尔（Weyl，C. H. H.）首先得出的．群论方法至今仍广泛应用在科学的各方面，而不仅仅是上述领域及固体物理．数学中另一个重要原则是极值原则或变分原理，最早除了哲学的思辨之外，首先提出的是费马（Fermat，P. de），这些原则也是其后许多物理理论的基础，如哈密顿原理．

4）数学是一种理性思维框架．20世纪之前，科学的支柱主要是理论和实验（包括观察和测量），数学和计算包括在理论当中．实际上，17世纪的科学革命推动近代科学的产生，完全依赖于理性与经验的结合．它们的哲学根源是笛卡儿的唯理主义与培根（Bacon，R.）的经验主义，他们也是近代哲学之父．确切地讲，笛卡儿把认识论置于本体论之上，把哲学从神学的奴仆地位解放出来，成功地实行思想的解放，直接推动近代科学的产生，其中，理论概念、数学工具与观察实验结合在一起是牛顿（Newton，I.）科学革命的催生婆．牛顿成就其伟业不仅在于他提出正确的理论概念（特别是力），而且在于他提供了数学工具（微积分）及分析框架，尽管当时还是用欧几里得的几何系统．其后科学的重大进步，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环．第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步使得科学计算与理论和实验鼎足而三，并列为科学的三大支柱．近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论形成的始作俑者．这特别表现在1974年，纤维丛理论成为规范场理论的标准表述．其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成新兴理论框架，实际上数学已成为科学发展第四根支柱．对于生命科学、心理科学、社会科学，这种现象早已不是新事物．数理经济学以及对策论是这方面的最典型的例子．

2．数学的分科及其主要问题．数学不是一般意义上的自然科学或社会科学，它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中．从古到今，数学中所包含的对象、学科及分支变化多端．中世纪除了算术及几何学之外，天文学及乐理也是数学的分支．到17世纪，木工、石工、建筑、火器、占星术等都是数学的内容．从那时起，静力学、动力学、光学、地图绘制法等仍然被看成大数学的一部分，尽管它们早已成为独立学科．数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征了．除此之外，许多基础的数学学科，它们的内容也有很大的改变，甚至于面目全非了．经典代数学主要研究代数方程的求解，而经过几次变化，现代代数学主要研究代数结构．这样一来，数学的统一尽管多次被提起，但是总难以概括全部数学．因此，时至今日，数学仍然是具有多样性对象也具有多种目标的学科，尽管它们之间有着千丝万缕的联系．人们把数学归结为相互关联的六大范畴，其中前三个可以说是数学的技术方面，后三个可以说是数学的理论方面．

1）操作技术．大部分最早的数学问题属于解决“如何”的技术问题．最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面，后来逐步形成特殊的及一般的数学问题．在解决这些问题的过程中，形成了算法以及操作步骤的概念．在计算过程中，形成了算术，特别是解数值代数方程的算法．到近代，这推动符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算法以及代数综合方法的代数方法，从而形成无穷小演算及解析几何学．其后各个数学分支也提出相应的算法问题，例如拓扑学中计算同调群、同伦群等．从这个意义上讲，数学在本来意义上是一种计算技术，或更广一点讲是操作技术．而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤，以求得问题的解决．应该说，这是一种富有创造性的研究工作．以计算为例，就是由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件，它一直是数学研究的重要内容．除计算之外，还有测量、绘图、统计、运筹等操作，以及相应的和衍生的各种问题．例如古典几何有许多几何作图问题，特别是用圆规、直尺的几何三大问题，

以及更一般的作图方法. 为了解决这些问题，还要发明许多技术，如各种投影技术，它们至少在过去都属于大数学范围之内. 在数学分析的范围内，级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

2）技术理论. 对数学操作的对象，应该有些认识，其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题、无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题，特别是方法的评价问题等. 这样就形成与操作技术有关但又高一层次的学科，如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图逼近理论、可解性及稳定性理论等.

3）操作对象理论. 它的目标不是指向对象本身，而是指向技术，指向求解的方法. 例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等. 它们涉及的不是单个方程，而是一类的对象，因此首要问题是分类问题. 然后再对每一类研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等，微分方程的定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决“如何”的技术问题，而以下三大范畴才是解决“什么”的理论问题.

4）对象理论. 理论是对确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究. 典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等. 以数论为例，重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等. 按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等. 按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等，也包括数论中的丢番图方程理论. 函数论与算子论一开始也是表示问题，特别是无穷级数及无穷乘积表示，然后是积分表示等，其次涉及值分布等可以说是计数问题，另外还有刻画及分类问题. 几何图形有许多性质与关系方面的问题，如度量性质以及相交、属于等关系，也有刻画及分类问题.

5）结构理论. 结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟，这样划分是因为结构理论必须建立在集合的基础之上. 按照布尔巴基学派的观点，原始的结构可以划为三大类，研究它们各自的结构就形成结构数学的主要分支：① 代数结构：主要是群、环、域、模，它们分别构成群论、环论、域论、模论；② 序结构：主要是格，它们构成格论；③ 拓扑结构：主要是拓扑空间，它们构成一般拓扑学的研究对象. 这些抽象的研究对象有两个来源：一是从过去研究的具体对象抽象化，特别是公理化而成，如群、域以及拓扑空间这些抽象结构衍生出来. 新结构的产生有如下的几种途径：① 增减公理；② 复合结构；③ 多重结构；④ 混合结构. 研究这些抽象对象的目标是搞清楚它们的结构并加以分类. 所谓结构，就是元素（或它们的集合）和元素之间的关系. 结构数学的主要问题大致可分为互相关联的四类问题：① 刻画问题；② 分类问题；③ 结构问题；④ 实现问题.

6）元理论. 元数学理论是对数学本身进行反思的产物，长期属于哲学的范畴. 它讨论数学概念、数学理论的合理性以及数学方法的合法性问题. 19 世纪末之前，对于数是什么以及非欧几何问题，特别是数学分析的严格性的争论均属于这个范畴. 19 世纪末，集合论的建立，现代公理方法的提出，符号逻辑的形成，以及关于数学基础问题的论战，最终导致作为一门数学分支的数理逻辑的形成. 由于哥德尔（Gödel，K.）的工作，数理逻辑成为包括模型论、公理集合论、递归论和证明论（原始的和狭义的元数学）四大分支的数学领域，其后分别形成构造性数学和计算复杂性理论等新兴学科. 除了以集合论为基础的现代数学之外，范畴论也成为一门元理论，在数学中有着有效的应用.

3. 数学的发展和演化. 数学的内容及范围随时间不同而不同，因此有言：“数学无非就是它的历史.”数学史大致可如下分期：前史时期；古代及中世纪时期（从公元前 4 世纪到 16 世纪末）；近代前期（17—18 世纪）；近代后期（19 世纪）；现代时期（20 世纪）. 每一个时期的特点简要分析如下：

1）前史时期. 前史时期的数学主要是民族数学或文化数学，在各种文化的发展过程中，各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术，包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等，基本上属于实用技术. 这些知识是零散的，而且反映出较大的文化差异. 另外，也出现了神秘的占星术、数秘术、占卜术等，其中有个别涉及数学的内容，如二进制等. 各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽.

2）古代及中世纪时期. 数学经过长时期的发展之后，正式成为一门学科，其主要标志是：① 建立数的表示及计算方法；② 对于一些问题有较系统的方法. 这使数学技术部分初步形成. 而欧几里得《几何原本》的问世，则使理论数学有了一个原型. 各国数学发展状况有所不同，古代数学的主要领域是算术与几何，希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题. 这些问题对以后的数学发展有很大的影响，但不一定很重要，比较重要的数学是计算，特别是解方程. 中国、印度、阿拉伯的数学，偏重于计算及实际问题的解决.

3）近代前期. 近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学. 它一下子使建立在几何及算术上的算法登上了一个新台阶，不仅使它的应用范围大大扩大，成为发展科学技术的有力工具，而且也向理论提出一系列问题. 这就导致

19 世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生，出现数学多样化和理论化的时代. 17 世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立，虽然大大扩大了数学技术库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态. 数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题. 微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算. 接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效.

4）近代后期. 19 世纪数学是近代数学的成熟时期，也是数学真正作为自为的理论科学产生的时期，但是伴随操作理论（如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论）、操作对象理论（如代数方程理论、常微分方程理论），数学技术本身也大有提高，特别是傅里叶展开、积分变换，尤其是复分析的建立. 19 世纪的数学可以说是数学对象化与多样化时期，一方面把数学由主要是操作技术转变为理论的时期，另一方面也为 20 世纪现代数学奠定了基础. 这样，数学对象理论真正形成，数学成为一种自在的科学而不再仅是自然科学或技术的语言和工具了.

5）现代时期. 20 世纪的数学是从 19 世纪数学多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论. 一方面集合论之上产生了结构数学的庞大领域，另一方面集合论的基础问题产生了元数学. 数学新对象的形成，产生结构的多样性，导致理论的多样性，并且 19 世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展，加上新的应用数学、计算数学等领域，数学日趋专门化、多样化. 但意想不到的是，从 20 世纪 70 年代起，各个领域之间新关系不断发现，新一轮的统一性正在形成之中. 当代数学前沿的大多数学科是 20 世纪上半叶形成的，其中主要是抽象代数学（包括群论、环及代数理论、域论、格论、整体李群理论、代数群论、同调代数以及各种衍生结构）、一般拓扑学、测度和积分理论、泛函分析（包括线性拓扑空间理论、算子代数理论等）、组合及代数拓扑学、整体微分几何、多复变函数论、动力系统理论、随机过程理论等. 对于 19 世纪开创的新领域——代数数论、代数几何学、黎曼几何学和局部李群理论，也在结构数学的框架中获得重大突破，成为当代数学的前沿.

20 世纪后期形成的一些领域，如微分拓扑学、大范围分析、K 理论、非交换几何等，也可在其中看到其萌芽. 除了纯粹数学领域的扩大与深化之外，20 世纪的应用数学和计算数学的面貌也发生了根本的改变. 一方面数学应用的范围已从 20 世纪之前的经典力学、天文学与测地学以及数学物理等领域扩展到几乎所有自然科学、工程技术、社会科学、人文科学的分支，并越来越起着举足轻重的作用；另一方面，一批新的应用数学领域产生出来，成为具有相对独立的分支，构成大数学科学的组成部分. 它们一方面与实际问题有密切的关系，另一方面它们也形成独立的数学研究方向，其中最典型的是 19 世纪末 20 世纪初形成的数理统计，它们同应用概率一起在近半个世纪已经成为与经典数学平起平坐的学科领域. 另外一个数学领域——组合数学几乎与数学的历史一样悠久，但只是近半个多世纪才逐步成熟及独立. 第二次世界大战之后，一些新的应用数学领域独立出来，特别是运筹学诸分支，后来纳入管理科学的学科群中. 与工程技术密切相关的系统科学、控制理论与自动化科学、信息科学也得到空前的发展.

20 世纪科学技术史中头等重要的事件是电子计算机的诞生. 它对整个社会的冲击是怎么估计也不过分的. 从计算机的设计制造到大规模应用，处处离不开数学，同时也开辟了新的数学领域. 它们可以归纳成两大部分：一是计算机科学，它指未来计算机的发展；一是计算数学，它指计算机在科学计算和工程技术中的大规模计算. 计算机的不断普及和改进对数学也造成不可忽视的影响. 它给数学家提出一系列算法问题，并形成一套行之有效的算法，如单纯形方法及其种种改进，有限元方法及其衍生算法等，对算法的分析，如收敛速度、误差传播及稳定性等问题形成数值分析分支. 近年来，计算机由数值运算过渡到符号运算，形成计算机代数重要分支，特别是吴文俊的机械化数学纲领在机器证明方面是一大突破.

4. 数学的社会功能. 数学是最古老的科学部门，它的诞生和发展反映人类文明的进步. 数学从一开始就与社会实践活动密切相关，从计数、土地丈量、器物制造、产品分配，一直到商业贸易、宗教活动等都向数学提出问题，并要求逐步解决和方法逐渐进步，最后形成相对定型的数学方法和学科. 从此，各种社会活动与数学的应用密不可分. 随着社会的进步，特别是近代科学技术的进步和新兴产业日新月异，数学也越来越成为科学技术发展的基础. 从 17 世纪到 19 世纪，数学与力学、天文学、物理学、大地测量学、航海术就密不可分，互相促进地平行发展着. 对于机械工程、建筑工程设计、电机工程等技术领域的发展，数学也起着决定性的作用. 20 世纪数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位. 数学物理、数学化学、生物数学、数理经济学、数理地质学、数理语言学、数值天气预报、数学考古等一系列边缘学科的出现，表明数学的应用已突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 随着科学数值化趋势的增长，数学在提高全民素质，培养适应现代化需

要的各级人才方面还具有特殊的教育功能.数学科学,已成为推进人类文明的不可缺少的重要因素,数学正越来越直接地为人类生活与物质生产做出更大的贡献.数学应用具有以下特点:

1)纯粹数学几乎所有的分支都获得应用.在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学分支离实际应用似乎还很遥远,而今拓扑学(特别是扭结理论)已成为生物学中了解*DNA*结构的有效工具.在物理学中,拓扑不变量正在成为物理的量,正如一些群的不变量是物理的量一样.数论也曾被认为是最纯粹、最缺乏应用的数学分支,但如今数论方法在计算机科学、密码技术、卫星信号传输、p进量子场论等许多方面发挥着重要的有时甚至是关键的作用,并通过与数值分析相结合开辟着更广的应用途径.事实上,仅就在理论物理中的应用而言,涉及的数学除了经典的分支与方法(如数学物理方程、傅氏分析、无穷维空间论、群论、概率统计等),还包括了微分拓扑、微分几何、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学、非线性数学、计算数学等,几乎覆盖了核心数学的整个领域.

2)几乎所有的科技领域都在应用数学,并越来越多地应用更高深的数学.数学在力学、物理学中的应用是经受了历史考验的,而当今数学的应用则早已突破这一传统的范围,正在向包括从粒子物理到生命科学,从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军.除了自然科学,经济学及过去认为不适用数学的社会学、历史学等社会科学领域,数学方法也都在崭露头角.随机分析应用于金融决策而引起的经济学理论的进展,提供了特别令人鼓舞的例证.与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成交叉学科.与数学有关的词大量出现在各门学科之前后,如"数学的"、"数理的"、"计量的"、"统计的"、"计算的"以及"……数学"、"……统计学"等.学科成熟的社会标志是学会、协会的建立,期刊与连续出版物的问世,以及课程的设置,专业会议的召开等.例如,《数学化学杂志》于20世纪80年代创刊,《数理经济学杂志》于20世纪70年代创刊,生物数学的期刊出现更早.次一级的学科如"数学分类学"的著作早在20世纪80年代就问世了.值得注意的是纯粹数学中的一些前沿与其他科学的许多前沿领域的快速结合,这反映了科技领域中数学渗透的空前深度.可以这样说,没有这些前沿数学就没有当代理论物理学的一些前沿领域,如超弦理论、超引力理论等.事实上,仅仅像弦理论这样的物理学热门分支所用到的数学,就涉及微分拓扑学、代数几何学、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等.凝聚态物理中分类晶体结构中的"缺陷"以及液晶理论,都用到某些齐性空间中同伦群的计算,而这即使对代数拓扑学家来说也是极难的问题.数理经济学中一般均衡理论的建立、发展,也用到了微分拓扑学的基本定理与彻底的公理化方法.经济学家德布鲁因(de,Bruijn,N.G.)这方面的工作获得了诺贝尔奖.

3)数学在生产技术中的应用变得日趋直接.以往数学工具直接用于生产技术的例子虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的.常常是先应用于其他科学,再由这些科学提供技术进步的基础.近半个世纪来,数学科学与生产技术的相互作用方式正在悄悄地改变,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益.例如,以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;以调和分析为基础发展起来的小波分析直接应用于通信与石油勘探等广泛的技术领域,这在20年前是不能想象的;现代医学扫描技术(*CT*扫描、核磁共振成像等)主要也是建立在拉东积分理论的基础之上,这方面的例子举不胜举.此外,现代大规模生产的管理决策、产品质量控制也密切依赖于数学中的线性规划算法(单纯形法与新兴的内点法)及统计方法.近年来,以数学建模为核心的工业数学成为一个蓬勃发展的应用数学领域也绝不是偶然的,产业部门的工程技术人员与数学工作者携手合作,解决影响甚至决定生产过程的形形色色的数学问题,反之,许多挑战性问题也刺激纯数学的发展.

4)数学在学科发展中的份额及力度越来越大.一些著名的数学家认为,数学是一种关键的、普遍适用的、赋予人以能力的技术.从某种意义上来讲,"高技术本质上是一种数学技术".对此,一般人还只在科学计算的层面来理解.而实际上,数学方法是不同于理论方法及计算方法的第四个普遍适用的方法和技术.这种情况从20世纪70年代以来已初露端倪,在21世纪将成为科学研究的重要组成部分,而且也许是最富创造性的部分,这特别表现在形成概念及理论框架方面.实际上,当前的动力系统的研究(分叉、吸引子)、孤立子、混沌等已成为许多领域的通用语言及工具,而更艰深的数学将在未来更为普及.

执　笔　胡作玄
审　阅　吴文俊　程民德　徐利治

初等数学(elementary mathematics)　数学的对象和方法较简单、较基础的部分.它以研究常量及不变空间形式为其基本内容.通常认为初等数学包括算术、初等几何(平面的和立体的)、初等代数、平面三角、解析几何(平面的和空间的)、球面几何与球

面三角等学科. 它是一切数学学科的基础,现代社会生活、生产和科学研究各个方面都离不开它,它的一些基本理论和方法已是中、小学数学课程的主要内容. 在世界上,从远古时代起至公元前5世纪,是算术和初等几何形成的时期. 初期的数学是与生产和生活实践直接相关的,人们从实践中提取出来的许多单个法则和经验公式还没有形成具有逻辑关系的系统,算术和几何也还没有分开,彼此紧密地交错着,这是数学的萌芽时期. 这些在埃及、巴比伦、中国和印度的史料中都有记载.

数学成为一门独立的、纯理论的科学,是从公元前2世纪形成的初等几何开始的. 古希腊在这方面做出了突出的贡献,欧几里得(Euclid)利用公理化方法完成的《几何原本》、阿基米德(Archimedes)的著作和阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))的《圆锥曲线》等,使数学特别是几何学达到了顶峰. 在《几何原本》中,欧几里得利用欧多克索斯(Eudoxus,(C))的比例论完成了相似形的理论,并利用欧多克索斯的穷竭法证明了三棱锥的体积公式以及与圆面积和球体积有关的命题. 阿基米德用穷竭法完成了圆面积和球体积公式的证明. 初等几何以它科学的逻辑演绎推理体系和丰富完整的内容而成为一门典型的理论数学. 与算术和初等代数不同,从一开始就将其理论建立在若干公理的基础之上是初等几何的特点,最早用于建立几何的这种公理化方法的意义远不止于初等数学,它已成为建立各种数学理论的一种最基本的方法,公理化方法还被应用在力学和理论物理等学科中.

算术和初等代数的发展有所不同. 希腊人在这个领域也做了不少工作,《几何原本》中有3卷是有关数与计算的. 其后在中国、印度和阿拉伯的数学中引进了零和负数,建立了数制和运算法则以及代数方程和方程组的解法等,从而逐渐形成了算术和初等代数的主要内容——关于数的形式运算的一般学说. 中国的包括《九章算术》在内的算经十书,印度的阿耶波多第一(Āryabhata,I)的《阿耶波多历数书》、婆罗摩笈多(Brahmagupta)的《婆罗摩修正历数书》和阿拉伯的阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī,M. ibn M.)的《代数学》都是这方面的代表作,初等代数区别算术的根本特点在于用符号代替数,这在数学向更高的抽象层次发展中是一个质的飞跃. 16世纪,法国韦达(Viete,F.)的关于符号代数的著作《分析方法入门》,他不仅用字母表示未知量和未知量的乘幂,而且用来表示一般的系数,他的名著《论方法的检查与订正》是方程论发展中的一个重要里程碑. 其中有3次和4次方程的解法,他还发现了根与系数的关系. 至此,算术和初等代数的基本轮廓已经确定. 但是,算术的公理却直到19世纪才提出,这以后它的理论体系才趋于完善.

平面三角和球面三角分别论述了平面上和球面上三角形的边与角这两类几何量间的数量关系. 而球面几何是球面三角的几何基础,它们基本上属于几何的范围,主要是由于实际生产和生活中计算方面的需要(特别是测量和天文方面)而发展起来的,并且在应用中逐步地得到完善. 中国刘徽在《海岛算经》中所述的全部是关于高度、深度和距离的诸种测量的方法,希腊西奥多修斯(Theodosius (B))的《球面学》是关于球面几何的内容. 德国的雷格蒙塔努斯(Regiomontanus J.)从事天文学和数学研究,他的著作《论一般三角形》对平面三角和球面三角进行了系统地阐述.

17世纪,笛卡儿(Descartes,R.)、费马(Fermat,P. de)创立了解析几何. 笛卡儿对普遍科学的追求引导他创立了解析几何,他的数学著作《几何学》就是作为其哲学著作《方法论》的附录之一而出版的. 他通过引进坐标而得出解决几何问题的方程. 并用代数方法加以研究,由此得出了几何的各种性质,他将曲线看做动点的轨迹,初步有了变量的思想. 费马的重要论文《平面与立体轨迹引论》是他试图重写阿波罗尼奥斯《论平面轨迹》而获得的研究成果,他致力于用解析形式对轨迹问题进行一般性研究,他独立于笛卡儿发现了解析几何的一般原理. 费马与笛卡儿的解析几何的侧重点有所不同,费马侧重于不定方程解的作图,而笛卡儿则着重于代数方程的构造. 解析几何完成了"形"与"数"的结合,于是几何概念可用代数来表示,几何的目标可通过代数的方法达到. 反过来,给代数语句以几何的解释,可以直观地掌握那些语句的意义. 解析几何是初等数学与高等数学的桥梁,它为微积分的创立做好了准备,为17世纪科学的发展,尤其为物理学的研究提供了有力的工具.

数学包含初等数学和高等数学两大部分,这种分法只是相对的,它们之间并无严格的分界线. 虽然初等数学的基本内容在17世纪微积分诞生之前已基本形成,其丰富的内容和理性思维方式也已体现了数学的基本特征,即它的抽象性、逻辑的严谨性和应用的广泛性. 但它的内涵和外延是随着时代的前进而改变的. 解析几何、集合论以及初等函数等进入初等数学,也已超出了"常量数学"的局限. 另外与算术有同样古老历史的数论,就其整体而言属于高等数学. 高等代数中的方程论,现代数学中的组合论,以及许多高等数学学科的初等部分,都有这种情况. 虽说初等数学总体上已经定型,但其中仍有新的研究课题,也还不断出现新的结果. 例如高等数学问题的初等证明研究;数学竞赛活动;以及计算机的普及等也都为初等数学增添了活力. 随着数学的发展,还

将有新的内容补充到初等数学中去.

在理论方面,初等数学是整个数学的"土壤"的源泉,许多高等数学分支都从这里发育成长.对欧几里得的《几何原本》中"第五公设"(即平行公理)能否被证明的研究,导致了非欧几何的诞生;关于高次方程公式解的问题,由伽罗瓦(Galois,E.)完全解决了五次及五次以上方程用根式求解一般不可能的问题,为解决此问题他提出的群论使代数学发展到了一个高的层次.至今只须初等数学知识就能理解的许多问题仍是高等数学研究的课题,如著名的"哥德巴赫猜想",再如困惑了几代数学家的"费马大定理",经过了三个多世纪才在1995年被解决.这些已被解决了的和正在研究的问题,他们的工作意义不仅在于证明本身,更重要的是其研究中的思想和方法大大地丰富和发展了数学学科,甚至在某种意义上推动了数学的发展.

在计算方面,实际上一切有意义的数学计算最后都归结为初等数学的计算,甚至是算术的计算.社会生活、生产以及科学研究中各方面的计算都是如此.电子计算机和数字技术的发展,更使许多原来并非计算性的问题,可以用算术的计算及逻辑运算来解决,扩大了初等数学应用的范围.总之,初等数学是人类生存和发展所不可缺少的一门科学.

撰　稿　朱恩宽　常心怡　　**审　阅**　裘光明

三角学(trigonometry)　简称三角.数学的一门分支学科.包括平面三角和球面三角两部分.分别研究平面或球面上三角形边和角的关系、三角函数及其性质与应用.三角学史称三角法、三角术、测角术、八线学等.

三角学(拉丁文 Trigonometria)一词,最先是由皮蒂斯楚斯(Pitiscus,B.)创用的.皮蒂斯楚斯由希腊词 *τρίωυογ*(三角形)与 *μετρεῖγ*(测量)组合而成,原意是三角形的测量.他的三角学的论著是世界上第一次以三角学命名的著作.古代埃及人和希腊人在生活或生产实践中,早已认识到三角形诸元素间具有的关系.希腊罗德岛的喜帕恰斯(Hipparchus,(R))以发现岁差著称,提出用经纬度表示地理位置的方法和地图投影的方法.同时,为了天文观测的需要,他曾做出第一个与目前使用的三角函数表相仿的弦表.喜帕恰斯采用的是在一个固定的圆内,以不同的圆心角所对应的弦长来造表,并采用巴比伦人的60进制,去计算给定度数的圆弧$\overset{\frown}{AB}$所相应的弦AB的长.就是说,喜帕恰斯所得的一系列弦值并不是现在意义下的弦值,而是全弦值.不过,他实际上已揭示了圆弧与圆弦在量值上的对应关系,他的工作对三角学的发展具有一定的作用.后来,托勒密(Ptolemy)继承喜帕恰斯的成就,加以整理发挥,编入自己的《天文集》.该书原名《数学汇集》,共13卷,其中包含有系统的三角理论和从0°到90°每隔(1/2)°的弦表,他将圆周分为360等分,仍以60进制新建立了度、分、秒的量角单位,使表中的计算准确到秒.根据该表,应用内插法可以用同样的准确度求出任意弧的弦长.托勒密还得到过下列诸公式:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x),$$

或与之形异实同的类似公式,并根据不等式

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\pi}{2}>\alpha>\beta>0\right)$$

进行内插计算等.这些贡献都是十分可贵的.

在中世纪初叶至12世纪,印度人吸收了古希腊的天文学知识,对三角学也进行了研究.与希腊人不同的是,他们不再计算对应圆心角的全弦的长,而开始使用半弦,相当于现在的正弦线.当时曾制作出一个正弦表,其方法是:先用勾股定理算出一些特殊角30°,45°,60°,90°的正弦,然后用半角公式计算出较小角度的正弦.在这方面,印度的阿耶波多第一(Āryabhata,Ⅰ)所做的贡献是不可磨灭的,而且他认为圆弧与弦长应用同一单位来度量.换句话说,阿耶波多第一已承认了曲线(圆弧)与直线(弦)可以有相同的度量单位.这里包含着弧度制的思想,与托勒密有显著的不同.必须指出,阿耶波多第一虽然已直接触及正弦,但他并没有给出名称.正弦这个名称是12世纪欧洲人翻译阿拉伯数学著作时开始使用的,它与印度人当初的半弦的名称已有相当差距.

从7世纪至15世纪的数百年间,中亚细亚各民族中涌现出一批数学家,他们不但吸取和保存了希腊与印度的数学精华,而且有所创新.在三角方面有突出贡献的阿尔·巴塔尼(al-Battānī),他采用半弦代替托勒密的全弦,这显然是受印度人的影响.并从

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=D,$$

推得
$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{1+\mathrm{D}^2}}.$$

借此求出α的值.这是希腊人所不知道的.他还发现了球面三角形边的余弦定理:

$$\cos a=-\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

并给直阴影(地面上直立一杆所得的日影)及反阴影(水平插在墙上的杆投影在墙上的影)分别取名余切及正切,还制造出0°到90°每隔1°的余切表.另一位在三角方面有突出贡献的阿布·瓦法(Abul-Wefa)曾发现月球的二均差,他计算了每隔10′的正弦表

和正切表，并首次引入正割及余割的概念. 纳西尔丁·图西(Nasīr al-Din, al-Tūsī)指出：由球面三角形的三个角可以求得三边；或由球面三角形的三边求得三个角. 这个事实可作为平面三角与球面三角差异的重要标志. 纳西尔丁·图西致力于三角学方面的研究，总结了前期数学家的成就，很希望让三角学能脱离天文学而独立成为数学的一个分支，但可惜在他的一生中未能实现.

直到 15 世纪，雷格蒙塔努斯(Regiomontanus, J.)于 1464 年完成了他的《论一般三角形》. 这在欧洲是一本系统的三角学论著，包括平面三角和球面三角两部分，其中取半径 $r=6\times10^5$ 和 $r=10^7$，造出了相当精密的正弦表. 三角学从此才正式脱离了天文学而独立地成为数学的一个分支. 令半径等于 10^5，做出每隔 $10''$的正弦、正切及正割表的工作，是由雷蒂库斯(Rhaeticus, G. J.)开始做的，但这项工作在当时全靠手算，花了 12 年的时间，直到他死后才由其弟子奥托(Otho, V.)于 1596 年完成并发表于世. 1613 年，由皮蒂斯楚斯加以修订，重新出版. 到此为止，三角函数表已相当精密. 而它的效用和必要性在后来发现对数时才完全显露出来. 三角学逐步引起一些著名数学家的重视，使其内容逐渐得到充实和完善. 韦达(Viete, F.)使三角学进一步系统化，他给出了正切定理

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}$$

与差化积定理

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

还给出用 $\sin\varphi$,$\cos\varphi$表示 $\sin n\varphi$和 $\cos n\varphi$的恒等式. 这些都极大地丰富了刚独立不久的三角学，使它的内容趋于丰实. 棣莫弗(De Moivre, A.)给出了棣莫弗定理：$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx$($n$ 为正有理数). 后来，欧拉(Euler, L.)又在 1748 及 1749 年证明了 n 是实数时棣莫弗定理也能成立. 欧拉的显著功绩是发现三角函数，他在《无穷小分析引论》中指出："三角函数是一种函数线与圆半径的比值". 并指出，若令圆半径为单位长，那么所有的三角函数就可大为简化. 欧拉的这个定义是极其科学的，它使三角学从静态的只是研究三角形解法的狭隘天地中解放了出来，有可能去反映现实世界一切可用三角函数反映的运动或变化过程. 事实上，经欧拉引进三角函数之后，原来意义下的正弦等概念都可以脱离几何图形去进行自由的运算，一切关系式也将很容易地从三角函数的定义出发而导出. 欧拉不仅引进了三角函数的定义，还引入了弧度制，并把直线与圆弧的度量单位统一起来. 另外，他还发现了欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,$$

欧拉公式把三角函数同指数函数联系起来. 欧拉在三角学方面的贡献深受世人称赞.

中国对三角知识的研究渊源较早. 据《史记·夏本记》记载，大禹就曾利用过直角三角形的边角关系对山川地势进行测量.《周髀算经》中，已开始重视对直角三角形各边比的研究. 由刘徽撰写的《海岛算经》，全部内容都是有关高度和距离的各种测量方法，因所搜集的多是利用两次或多次测量所得的数据，故被称为重差术. 从这些史料可以看出，中国古代的三角学虽然多数是直观的、经验性的，但却能解决三角学范围内的实际问题. 三角学较完整的内容在明朝崇祯四年(1631)已从国外引入. 当年由邓玉函(Terrenz, J.)、汤若望(Von Bell, J. A. S.)与徐光启合编出中国第一部三角学《大测》(1631 年). 同年，徐光启等又编出《测量全义》(1631 年)，其中包含平面三角和球面三角的论述. 引人注意的是，当时三角学在欧洲尚无完善本. 到了 1653 年，由薛凤祚与穆尼阁(Smogolenski, J.-N.)合编了《三角算法》一书. 从此，"三角"一词在中国便取代了"大测"，而成为了这一学科的名称.

撰　稿　杨志青　　　审　阅　刘增贤

代数学(algebra)　简称代数. 数学中用以研究数的关系、性质和运算法则的分支学科.

代数学可以溯源于丢番图(Diophantus)的《算术》一书. 用字母代表未知数的这种数学思想，同十进制记数法一样，来源于印度. 在文艺复兴时期由阿拉伯传到欧洲. "代数"这一术语来源于公元 9 世纪，阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī, M. ibn M.)的阿拉伯文的论著《移项和消去的科学》，其标题的第二个词的拉丁文音译 al-jabr 后来演变成为 algebra，这就是拉丁文的"代数学". 对于公元 17 世纪以前的数学，代数学是指用字母代表一般的数，到 17 世纪中期大体上形成了现代的代数符号体系.

韦达(Viete, F.)是第一个有意识地、系统地使用字母的人，他确立了用字母记一般表达式的符号的方法. 笛卡儿(Descartes, R.)对于字母表示法的发展也做了不少工作. 从这个时候开始，实际上把代数学理解为关于字母计算，关于由字母构成的公式的变换，以及求解代数方程等的科学. 通常所说的初等代数大致就是在这个意义下的代数学. 中国古代《九章算术》中第八章"方程"已研究了线性方程组的解法，第九章"勾股"中已有一元二次方程的解法. 王孝通所著《缉古算术》中已给出了高次方程近似根的求解法；13 世纪，秦九韶也给出了高次方程近似根

的求法.在欧洲,16世纪意大利数学家们发现了三次和四次方程的代数解法.据传,塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)在大约1535年宣布他发现了三次方程的代数解法.后来,卡尔达诺(Cardano,G.)从塔尔塔利亚那里骗得了解三次方程的诀窍,于1545年发表在他的代数学著作《大衍术》里.三次方程被解决后不久,一般四次方程由卡尔达诺的学生费拉里(Ferrari,L.)成功地解决并发表在《大衍术》中.但人们寻求五次及以上方程的根式解均告失败,直到19世纪中叶才得出否定的解答.

在18和19世纪,代数学的研究对象主要是多项式、一元代数方程的理论、多元线性方程组的理论以及矩阵和行列式理论.1797年,高斯(Gauss,C.F.)在赫尔姆施泰特大学的博士论文中,给出了代数基本定理的完善证明.1824年,阿贝尔(Abel,N.H.)证明了不可能用根式解一般五次方程,但是阿贝尔并没有给出一个准则,用来判定一个具体数字系数的高次代数方程能否用根式求解.1828年后的两年内,伽罗瓦(Galois,É.)彻底解决了用根式解代数方程可解性的判定问题,他还注意到根的置换群的性质与代数方程的关系,发现了伽罗瓦群.此后,他又极其巧妙地应用置换群这一工具,证明了系数为复数的一般代数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0\neq0)$,当 $n\geqslant5$ 时,不能用根式求解.这样他就彻底解决了这个在长达200多年的使数学家们伤透脑筋的问题.

此后,代数学的主流进入了群论或用群论方法进行研究的时代.在当时数学的算术化、公理化构造的气氛中,逐步发展成为20世纪的抽象代数学.19世纪末20世纪初,韦伯(Weber,H.)的三卷《代数教程》被认为是代数学的标准著作.施泰尼茨(Steinitz,E.)于1910年发表的《代数域论》就是这个历史阶段的初期里程碑.20世纪30年代初,范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)根据诺特(Noether,A.E.)和阿廷(Artin,E.)的讲稿写成《近世代数学》.这部书的修订本,改名为《代数学》,综合总结了从伽罗瓦到范·德·瓦尔登100年来抽象代数学方面的工作,对于抽象代数学的传播和发展起了巨大的推动作用.《代数学》至今仍是人们学习代数的一本好书,尽管从那以后,代数研究有了长足的发展,但人们还是可以从这本书中吸取营养.

现代代数学的主要研究对象是各种代数系统的内在规律,它们在同构意义下的不变量及分类问题.在这个概念下的代数学称为抽象代数或近世代数.众所周知,数是数学研究的最基本的对象,数的最基本的运算是加、减、乘、除.但是,数并不是研究数学的惟一对象,而且所遇到的许多运算也不全是数的普通加、减、乘、除.例如,向量、多项式、函数、矩阵和线性变换等,它们虽然都不是数,却也可以类似于数那样来进行运算.特别是,尽管这些研究对象千差万别各有自己的特性,但是从运算的角度看,它们都有许多共同的性质.于是,从一般集合出发,研究其中元素间各种运算的种种性质,就具有非常重要的意义.因为它们的抽象性,从而它们的结论和方法不仅可以渗透到数学的各个分支,而且在其他学科,例如,在试验设计、电子技术以及物理、化学中都有重要应用.

一个抽象集合,如果有一种或数种代数运算,常称为一个代数系统.代数学发展到今天,其主要任务就是研究各种代数系统的种种性质.由于代数系统中运算个数以及对运算所附加条件限制的不同,从而产生了各种各样不同的代数系统,其中最原始最基本的代数系统有半群、群、环、域、格、模等.它所研究的内容极为丰富和广泛.这样一来.古老的代数学在新的基础上以全新的面貌和更加旺盛的活力飞速地向前发展着.

数、多项式和矩阵的出现是为了刻画一些物理量和几何量,诸如长度、面积、速度、空间中点的位置、平面的运动和几何变换等.然而,当人们企图刻画对称性,无论是物理学现象中还是数学世界中(尤其是几何图形中)的对称性时,都无法用单个的数、多项式和矩阵去刻画.因此,为了刻画对称这一概念,人们发现了群.群最早就是研究代数方程根的对称性质而产生的一个概念.它是研究对称性的有力工具.由于物理、几何中对称这一概念的特殊重要性,因而使群这个代数学的重要分支成为近代数学极其深刻也极其重要的概念之一.类似地,环、域、模等也是刻画物理现象和几何性质的数学工具.在各类代数系统的研究中,起基本作用的是同类中两个代数系统的同构及其推广——同态等概念.一般地,对任何一个代数系统的研究都可以包括这样一些问题:同构、同态、子系统、特殊子系统和商系统,以及系统的合成与分解、自同构群等.由于抽象代数的研究对象——代数系统的一般性,又由于代数运算贯穿在任何数学理论和应用问题里,所以抽象代数学的研究在数学中是具有基本意义的,它的理论和方法渗透到与它相近的各个不同数学领域中,形成一些有新面貌和新内容的数学领域(例如代数数论、代数几何、李群和李代数等),并对某些其他学科领域(如理论物理、晶体学等)也有重大的影响.反过来,数学中各分支以及其他科学领域的理论发展和应用的需要,也推动和促进了抽象代数学在深度和广度上更加迅速发展.

自20世纪40年代中叶起,泛代数、同调代数、范畴等新领域被建立和发展起来,它们都是在抽象代数学中起统一作用的概念.同调代数是继代数拓

扑发展而形成的一门新的代数理论，在 20 世纪 60 年代得到迅速发展，现在已成为代数学中不可缺少的重要组成部分．它的兴起不仅对于群、环、李代数等代数学中诸多分支的研究起着非常重要的作用，而且也是解决其他数学领域中诸多问题的有力工具．另外，同调代数在数论和群论中以及在代数几何学和代数拓扑学中都有重要作用．范畴的概念和理论于 1945 年由麦克莱恩(Maclane，S.)和艾伦伯格(Eilenberg，S.)最早提出，并引进到同调代数中．现在，范畴的语言和基础部分已渗透到数学的诸多邻域，并对数学的许多分支，例如代数几何学、代数拓扑学、微分几何学以及函数论的深刻发展起了重要作用．近年来，由于电子技术的发展和电子计算机的广泛应用，抽象代数学的一些成果和方法已经直接应用到工程技术中，如代数编码学、语言代数学、代数自动机理论等．新的应用代数学的理论，也相继产生和发展．同时，它又是离散数学的重要组成部分，并对组合数学的蓬勃发展起着重要作用．这些新的应用推动了近代应用代数学的形成和完善．代数学之所以发展到现代的这种形式，很大程度上应归功于 20 世纪 20 年代末期的德国学派的代表诺特、阿廷、克鲁尔(Krull，W.)和范·德·瓦尔登等．此外，法国的布尔巴基学派对抽象代数理论的系统化作了决定性的工作．华罗庚等人在代数学的发展和传播中也做出了显著的贡献．

群论是代数学的重要分支之一．它不仅在数学本身，而且在结晶学、理论物理、量子化学以及代数编码学、自动机理论等方面都有重要应用．有限群论是群论的重要的和基础的部分，而有限单群又是有限群结构的基石，因此，它长期是群论研究的中心问题．有限交换单群的情况很简单，因为有限交换群 $G\neq\{e\}$ 是单群当且仅当 G 与素数阶循环群同构．而寻求所有非交换有限单群即其分类问题，经过几代人的努力，终于在 20 世纪 80 年代得到解决．这是 20 世纪数学的一个重大成就．非交换有限单群共分以下三类：第一类，$n(n\geqslant 5)$ 次交代群 A_n；第二类，Lie 型单群和 Lie 型群；第三类，26 个零星单群，其中最大的一个常称为魔群，其阶为 $2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$，其乘积约为 10^{54}．有限单群分类问题的解决影响深远，群论中有些长期存在的问题而由于它的解决而得到解决．

撰　稿　杨子胥　谢邦杰
审　阅　万哲先　刘绍学　裘光明

几何学(geometry)　简称几何．数学中研究空间形式及其相互关系的分支学科．

几何学起源很早，并且与测量有密切的关系．相传公元前两千多年，埃及尼罗河经常泛滥，水退后需重新整修农田，测定地界，几何便在这种土地测量的需要中产生．几何一词的拉丁文名称 geometria，按字义分析就是由 geo(土地)和 metria(测量)组成的．古代的人很早就知道并积累了许多简单的几何知识．中国石器时代的陶器和殷周的青铜器上都有精美的几何图案．早在上古时期，中国先民就已利用规矩制作方圆．《周髀算经》和《九章算术》中已有计算图形面积的记载．世界上现存最古的数学书《阿梅斯杂录》是公元前 1700 年，古埃及阿梅斯(Ahmes)手抄的，里面载有许多耕地面积和仓库容积的求法及有关金字塔的几何问题．公元前 7—8 世纪，这些耕地面积、仓库容积的测量和计算方法传入希腊，由于柏拉图(Plato)创立的 Academia(学术)学园的成员：斯皮尤西波斯(Speusippus)、克森诺克拉底(Xenocrates，(C))、亚里士多德(Aristotle)、欧几里得(Euclid)等人的研究，使几何从地积、体积测量和计算中抽象了出来，逐渐形成一门系统的独立学科．特别是欧几里得将丰富而零散的几何材料，运用逻辑方法，采用公理化的方式加以系统整理，建立了一个完整的几何体系，撰写成一部《原本》流传至今，被人们称为欧几里得几何，常简称欧氏几何．几何这个名称是徐光启在翻译欧几里得所著《原本》时，译为《几何原本》，后来就泛称研究平面和空间图形的学科为几何，沿用至今．

文艺复兴之后的欧洲，代数学有了迅速的发展，几何学开始摆脱和代数学的隔离状态．17 世纪，笛卡儿(Descartes，R.)认为数与图形之间有着密切关系，采用代数方法研究几何问题，建立坐标系，创建了解析几何，并促进了微积分的发展．18 世纪，由于微积分在几何方面的应用，又开辟了微分几何这一领域，同时还产生了射影几何与工程制图中使用的画法几何．由于数学家们对欧几里得第五公设的长时期的研讨，罗巴切夫斯基(Лобачевский，Н. И.)于 1826 年改变欧氏第五公设，而创立了一个新的几何系统——非欧几何(更准确地称为罗巴切夫斯基几何)．1854 年，黎曼(Riemann，(G. F.)B.)推广了空间概念，开创了几何学的另一广阔领域——黎曼几何．随着爱因斯坦广义相对论的建立，黎曼几何得到了很大的发展，成为现代微分几何的基础．

19 世纪末，希尔伯特(Hilbert，D.)发表了《几何基础》．他用近代观点建立了严密的欧几里得几何公理体系，使得《几何原本》中的公理体系真正完善，并且使数学公理法基本形成，促使数理逻辑的发展，这种影响也扩大到其他数学分支的领域．19 世纪中叶以后，几何学发展很快，新种类不断涌现．1827 年，克莱因(Klein，(C.)F.)就当时存在的各种新几何

的发展做出总结，指出它们在结构上的一般规律．克莱因用变换群的观点作为几何分类的基础．在这种观点下，几何学被看做是关于图形在某种变换群下不变性质的理论．如通常的初等几何是研究图形在正交变换（合同变换）群作用下的不变性质（如长度、角度等）．同样，射影几何是研究在射影变换下的不变性质，而拓扑学则是研究拓扑变换下的不变性质．克莱因用变换群把几何分类的观点，是他在德国埃尔朗根大学的就职演说中提出的，通常称为埃尔朗根纲领．它对近代几何思想以至数学思想有深远影响．

20 世纪以来，几何学的迅速发展，产生和形成众多的几何学，如射影微分几何、整体微分几何、仿射微分几何、一般空间微分几何以及代数几何、计算几何和拓扑学等．由于拓扑学的渗入，使几何学出现了新面貌，由局部问题向整体理论发展，特别是正在蓬勃发展的内容丰富的现代微分几何，在物理学和数学其他分支中有着重要应用．近代计算机的飞速发展，对几何学古老的和最新的分支均有极大影响，计算机的快速计算能力，即使圆周率 π 达到几乎可说是要多精确都可以的地步，又以专业数学家尚还不太愿意接受的方式证明了困扰专业和业余数学家一个多世纪的地图四色问题．计算机并以机器证明和计算机作图丰富了各种几何学的内容．机器证明最先是从证明经典几何学的已知定理开始的．计算机作图既把历来数学家所设想到的几何图象更为形象化地表现出来，又促成已知几何内容（例如极小曲面）的新发展，特别值得提到的是促成曼德尔勃罗特（Mandelbrot，B.）于 1975 年创立“分形”这个新概念，由此出现了分形几何等尚有待发展的新的几何学内容．中国和各国的华人几何学家为改善、丰富、发展几何学做出了许多重要贡献．

撰　稿　晚成国　裘光明　　**审　阅**　黄正中

解析几何（analytic geometry）　亦称坐标几何．在坐标系中用代数方法研究图形性质的学科．按图形属于平面或空间而分为平面解析几何或空间解析几何．其内容包括坐标系的建立，运用代数的计算解决平面上或空间中的几何问题，并系统地研究一次和二次的曲线及曲面．

坐标方法起源于古代．中国战国时代的石申制成世界上最早的星表《石氏星经》，就是运用坐标的思想记录了 100 多颗恒星的方位．古希腊的阿波罗尼奥斯（Apollonius，(P)）曾用两条互相垂直的直线作为研究圆锥曲线的基准，他的《圆锥曲线论》是一部最早关于椭圆、抛物线和双曲线的论著．14 世纪，在奥尔斯姆（Oresme，N.）的著作中，已有关于经纬度与函数图形表示的萌芽．他用数组表示点的位置，以图线表示因变量与自变量的关系．用代数形式表示几何命题的方法也很早就出现了．中国古代勾股测量提出了开平方的要求．刘徽的《海岛算经》（即《九章重差图》）、李冶的《测圆海镜》十二卷（1248）都涉及了几何问题的代数解法．1593 年，韦达（Viete，F.）已将古希腊著作中出现的几何形式的恒等关系用代数形式表示出来了．这些坐标思想和代数方法为创立解析几何提供了一定的基础．

17 世纪初，处于文艺复兴时代的欧洲，天文、力学、技术的迅速发展，要求数学用运动变化的观点研究问题．笛卡儿（Descartes，R.）受到奥尔斯姆思想的影响，从古代的天文和地理的经纬线制度中得到启发，于 1637 年出版了《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》，书中第三个附录《几何学》集中体现了笛卡儿的变量思想和坐标方法，为创立解析几何奠定了基础．他在平面上引进坐标系，建立了点与数组 (x,y) 的一一对应关系．进而将曲线看做动点的轨迹，并用含有 x，y 的方程表示，形成他关于几何图形与代数方程互相表达的思想．于是几何问题转化成代数方程，通过代数运算，又可发现许多出乎意料的几何结果，使古典几何中许多难度较大的问题的解法大为简化．与笛卡儿同一时代的费马（Fermat，P. de）也是解析几何的创建者．在他的《平面与立体轨迹引论》（写于 1629 年，到 1679 年才出版）中，解析地定义了许多新的曲线，阐述了解析几何的基本原理：“只要在最后的方程里，出现了两个未知数，就得到了一个轨迹……”．在很大程度上，笛卡儿从轨迹开始，找出它的方程．费马则从方程出发，来研究轨迹．如何实现这两个转化，正是贯穿于解析几何始终的两个基本问题．

解析几何经历了从对平面曲线的研究发展到对空间曲线、曲面的研究过程．虽然笛卡儿曾提到过立体解析几何，但他没有详细阐述．1679 年，拉伊尔（La Hire，P. de）对三维坐标几何作了探讨．1700 年以后，该领域才有了系统发展．1715 年，约翰第一·伯努利（Bernoulli，Johann Ⅰ）首次引入三个坐标平面，初步确定了曲面能用三个变量的方程表示的思想．1731 年，克莱罗（Clairaut，A.-C.）首次解析地论述非平面的空间曲线．后来，欧拉（Euler，L.）大大推进了此领域的研究．笛卡儿关于变量的思想和坐标方法，使函数概念获得了新生，牛顿（Newton，I.）、莱布尼茨（Leibniz，G. W.）的微积分随之出现，数学由常量数学进入到变量数学的新时期．当时代数和解析作为数学方法是混用的．所以，运用代数方法的几何称为解析几何，而被认为是代数方法扩展的微积分则称为无穷小量解析，后来解析即分析一词独立成为指包括所有建立在极限过程上的数学．1748

年，欧拉在他的《无穷小分析引论》一书中，给出了现代形式下的解析几何的系统叙述．普吕克（Plücker，J.）对解析几何有突出的贡献．他的《解析几何的发展》（1828、1831）、《解析几何的体系》（1834）等著作，进一步完善了解析几何．他将点坐标发展为线坐标，从而为普吕克射影几何对偶原理的解析证明提供了基础．还导致了线几何学、圆几何学、维数论的产生和发展．

解析几何的理论和方法改变了整个数学的面貌，它的作用远远超过了笛卡儿的期望．从此对几何图形的研究进入到系统的定量研究．如抛射体的运动，行星的椭圆形轨道的发现，齿轮和凸轮的制造，透镜的设计等都需要数量知识，代数变得比几何更为重要．将坐标几何的方法与微积分结合起来研究光滑的曲线和曲面便形成了古典微积分几何学．从维数上将平面（二维）、空间（三维）解析几何向高维乃至无穷维推广，形成了高维点几何学和泛函分析．解析几何理论还被应用于希尔伯特公理系统的相容性证明和初等几何的机器证明之中．在中国，第一本关于解析几何与微积分方面的书是由李善兰与伟烈亚力（Wylie，A.）合译的《代微积拾级》18 卷（1859年），前 9 卷为解析几何．当时，他将解析几何译为代数几何，后又有代形合参、经纬几何、狄嘉尔形学等，各有借意．至 1935 年，在《数学名词》中正式审定为解析几何学．

坐标几何（coordinate geometry）　即“解析几何”．

撰　稿　吕德正　　审　阅　刘增贤

高等数学（higer mathematics）　相对于初等数学而言，数学的对象及方法较为复杂的一部分．一般认为，16 世纪以前发展起来的各个数学学科总的是属于初等数学的范畴，因而，17 世纪以后建立的数学学科基本上都是高等数学的内容．由此可见，高等数学的范畴无法用简单的几句话或列举其所含分支学科来说明．

19 世纪以前确立的几何、代数、分析这三大数学分支中，前两个都原是初等数学的分支，其后又发展了属于高等数学的部分，而只有分析从一开始就属于高等数学．分析的基础——微积分被认为是“变量数学”的开始，因此，研究变量是高等数学的特征之一．原始的变量概念是物质世界变化的诸量的直接抽象，现代数学中的变量包含了更高层次的抽象．如数学分析中研究的限于实变量，而其他数学分支所研究的还有取复数值的复变量和向量、张量形式的，以及各种几何量、代数量，还有取值具有偶然性的随机变量、模糊变量和变化的（概率）空间——范畴和（随机）过程．描述变量间依赖关系的概念由函数发展到泛函、变换以至于函子．与初等数学一样，高等数学也研究空间形式，只不过它具有更高层次的抽象性，并反映变化的特征，或者说是在变化中研究它．例如，曲线、曲面的概念已发展成一般的流形．按照埃尔朗根纲领，几何是关于图形在某种变换群下不变性质的理论，这也就是说，几何是将各种空间形式置于变换之下来研究的．

无穷进入数学，这是高等数学的又一特征．现实世界的各种事物都以有限的形式出现，无穷是对它们的共同本质的一种概括．所以，无穷进入数学是数学高度理论化、抽象化的反映．数学中的无穷以潜无穷和实无穷两种形式出现．在极限过程中，变量的变化是无止境的，属于潜无穷的形式．而极限值的存在又反映了实无穷过程．最基本的极限过程是数列和函数的极限．数学分析以它为基础，建立了刻画函数局部和总体特征的各种概念和有关理论，初步成功地描述了现实世界中的非均匀变化和运动．另外一些形式上更为抽象的极限过程，在别的数学学科中也都起着基本的作用．还有许多学科的研究对象本身就是无穷多的个体，也就说是无穷集合，例如群、环、域之类及各种抽象空间．这是数学中的实无穷．能够处理这类无穷集合，是数学水平与能力提高的表现．为了处理这类无穷集合，数学中引进了各种结构，如代数结构、序结构和拓扑结构（参见“数学”）．另外还有一种度量结构，如抽象空间中的范数、距离和测度等，它使得个体之间的关系定量化、数字化，成为数学的定性描述和定量计算两方面的桥梁．上述结构使得这些无穷集合具有丰富的内涵，能够彼此区分，而变得异彩纷呈，并由此形成了众多的数学学科．

数学的计算性方面．在初等数学中甚至占了主导的地位．它在高等数学中的地位也是明显的，高等数学除了有很多理论性很强的学科之外，也有一大批计算性很强的学科，如微分方程、计算数学、统计学等．在高度抽象的理论装备下，这些学科才有可能处理现代科学技术中的复杂计算问题．

除了数学基础、集合论、数理逻辑这样一些基础性学科之外，数学分为初等数学与高等数学两大部分．它们有共同的基础，而彼此之间并没有严格的界线．它们都是人类文明在不同发展阶段的产物，但并不像某些事物那样，后发展起来的可以代替古老的．随着人类文明的进步，数学中某些局部的、繁琐的成果或工作可能被淘汰，而其总体仍然是有用的，并必将向着更加综合和抽象、结构更多样化的方向发展下去．

撰　稿　常心怡　　审　阅　徐利治　裘光明

算　　术

算术(arithmetic)　数学的一个基础分支.它以自然数和非负分数为主要对象.算术的内容包括两部分,一部分讨论自然数的读法、写法和它的基本运算,这一部分包括进位制和记数法,主要是十进位制,其他的进位制与十进位制仅是采用的基数不同,都可以仿照十进位数的原理和原则进行计算.算术的另一部分包括算术运算的方法与原理的应用.如分数与百分数计算,各种量及其计算,比和比例,以及算术应用题.

算术的起源可以追溯到远古时代,中国商代(约公元前16世纪—约公元前1066)甲骨文中已有数字的记载,古人用算筹记数和进行加、减、乘、除运算,称为筹算.1983—1984年间,在湖北省江陵出土的竹简《算术书》(约成书于公元前150年)是中国现存的最古的算术书,书中已有分数(分乘、合分、经分)、面积(里田、禾田)和与当时社会有关的一些计算.公元1世纪后半叶成书的《九章算术》,其内容已是多方面的.书中在算术方面主要有分数运算、比例问题和盈不足算法;在几何方面主要是面积(方田)、体积(商功)计算问题;在代数方面主要有一次方程组解法、负数概念的引入及其加减法法则、开平方、开立方、一般二次方程解法等.此书在隋唐时期(公元581—907)已传入朝鲜、日本.古代中国从公元1世纪到7世纪间,成书的还有《周髀算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《张丘建算经》、《海岛算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》等,共计十部算术书,统称算经十书.这是中国古代算术发展的成果.

在国外,算术一词的拉丁文arithmetica来源于希腊文 ᾱριθμητικ′η,它是由 ᾱριθμεῖγ (数 shǔ),ᾱριθμὸs(数 shù)和 τεχγη′(技术)演变而来,原意是数和数数的技术(或学问).埃及人阿梅斯(Ahmes),用僧侣字体写的草纸书,记载了公元前3500年左右人类已掌握的算术知识,共记载了85个问题,包括整数和分数的运算法则,以及一些应用题的解法.巴比伦人约在公元前3000—前2100年之间,已有丰富的算术知识,美索不达米亚的考古学家发掘了50万块用楔形文字刻写的粘土书板,有300多块被鉴定为纯数学书板,记录有十进法和六十进法混合的记数法与整数的加、减、乘、除运算,以及一些面积、体积的计算,并以3为圆周率计算圆面积等.罗马人用记号Ⅰ,Ⅴ,Ⅹ,L,C,D,M来表示1,5,10,50,100,500,1000,并用算盘进行整数运算.印度人创造了印度-阿拉伯数字和留传至今的位置记数法.

在欧洲,文艺复兴引起对教育和商业的重视.17世纪以前出版了不下300种算术书,这些课本可分为两类:一类是教会学校用的拉丁文算术课本;另一类是普通学校培养商业人才,用本国文字写的算术课本.早期的代表作如《特雷维索算术》,1478年出版于特雷维索城,另一代表作是16世纪雷科德(Recorde,R.)写的算术课本《技艺的根据》,印了29版之多.

18世纪,计算方法和记数法已经发展为现代的形式.19世纪,算术发展到公理化阶段,格拉斯曼(Grassmann,H.G.)提出一个公理系统来定义加法和乘法的运算,由此推出其他算术命题.1891年,佩亚诺(Peano,G.)提出了五条公理,从而为自然数奠定了理论基础.算术的进一步发展,又形成了数论和代数学两个独立的数学分支.而当今把"算术"一词用来专指基础教育中,小学阶段的一个教学科目.

整　　数

数字(number)　亦称数码.数学中最基本的概念之一.指用以记数的符号或文字.当今世界各国通用的数字是阿拉伯数字.同数学的产生、形成与发展相类似,数字的产生、形成与统一也经历了一个漫长的年代,并且由于受到经济、文化和地理位置的限制,各民族相对独立地创造了自己的文字,包括用以记数的文字数字或符号数字.公元前四五千年左右,生活在尼罗河流域的古埃及人创造了一种十进制象形文数字,史称古埃及数字;生活在两河流域的苏美尔人和巴比伦人创造了一种六十进制的数字,史称巴比伦数字;远古时代,生活在中美洲的玛雅人也创造了一种数字,史称玛雅数字.生活在黄河流域的中华民族曾创造了灿烂的古代文化,并形成以商代的甲骨文数码和西周的钟鼎文数码为代表的中国数字.到唐代前后已形成汉字数码一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,百,千,万等.随着数学知识,特别是数字计算发展的需要,逐渐产生了一套不同于文字数字的符号数字.例如,13世纪以前,流行于欧洲各国的罗马数字;由印度人创造,后来传到阿拉伯和欧洲的符号数字,即阿拉伯数字:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9等十个数字符号以及十进制记数法.由于阿拉伯数字具有简便、易懂等特点,因而逐步被世界各民族所采用,成为世界各国的通用数字.

数码(digit)　即"数字".

数(number)　数学中最基本的概念之一.它是由人类生活和生产实践的需要,逐步形成和发展起来的,也是人类文化的伟大创造之一.在人类文化发展的最初阶段,为了计量物体的个数,人们自然用手指或其他事物,与被计量的物体进行逐一比较,即对应原理的初始意义,逐渐产生了正整数的概念.正整数系是人类掌握的第一个数系.随着社会生产的发展和人类生活的需要,数的概念不断推广.例如,由于分配和测量的需要而引进正分数;为了表示没有,便产生了数"零";由于度量线段时出现无公度的情况(如正方形的对角线与边长之比)而引进了无理数;又由于表示相反意义的量的需要而引进负数.早在公元1世纪后半叶成书的中国《九章算术》里就出现了负数,并有正负数的加减法则,13世纪中,又知道了正负数相乘的法则.欧洲人在古代解方程时也遇到了负数,但负数的四则运算法则直到17世纪才正式建立.虚数则是在16世纪解二次与三次方程时引入的.当时只是作为一种记号,直到18世纪才被数学界所公认.总之,数概念的推广及数系的扩充,经历了漫长的年代,直到19世纪末,才由佩亚诺(Peano,G.)、康托尔(Cantor,G.(F.P.))、戴德金(Dedekind,(J.W.)R.)和外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))等人完成了数系理论的建立工作,从而推动了现代数学的蓬勃发展.另外,数还可作动词用,是查点物体个数的过程.

计数(count)　亦称数数.算术的基本概念之一.指数事物个数的过程.计数时,通常是手指着每一个事物,一个一个地数,口里念着正整数列里的数1,2,3,4,5等,和所指的事物进行一一对应,这种过程称为计数.上述逐个地计算事物的方法,称为逐一计数.若按几个一群的方法计数,则称为分群计数.

逐一计数(successive count)　见"计数".

分群计数(count by groups)　亦称按群计数.计数的一种方式.计数时,不一定逐一去数,而是按每几个一群,一群一群地数的计数方法.例如,常用每五个一群地数,一五,二五10,三五15,四五20……一直数下去,便得到计数的结果(参见"计数").

按群计数(count by groups)　即"分群计数".

计数公理(axiom for count)　亦称计数原则.即数数的原则:

1.数事物时,只要每个事物都数到,并且每个事物只数一次,数的结果是惟一确定的一个数,它与数的次序无关.

2.数事物时,可用其他事物代替要数的事物(两事物间是一一对应的),然后再数,数的结果不变.

3.数事物时,数到最后一个数,就是数的结果.

但是数的进程是无限的.如果再有要数的事物,则还要继续数下去,即自然数可以无限制地数下去.

计数原则(principle of count)　即"计数公理".

甲骨文数码(numerals on bones or tortoise shells of Chinese Shang Dynasty)　中国古代的一种数码.指中国商代(约公元前16世纪—约公元前1066)刻于兽骨与龟甲上的数码.在中国,文字出现很早,而数字的出现更早.在西安半坡新石器时代文化遗址中发现的陶器刻符就有数字,经考证这些陶器距今已有六七千年.在河南省安阳出土的商代殷墟甲骨文(刻于兽骨、龟甲上的古代文字)中就有许多数字,经考证和整理如下:

一 二 三 亖 ㄨ ∩ 八 十 ⅄ ...
1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　20　30

40　50　60　70　80　90　100　200　300　400　500　600

800　900　1 000　2 000　3 000　4 000　5 000　6 000　8 000　10 000　30 000

这就是中国古代甲骨文数码.

钟鼎文数码(numerals on ancient Chinese bronze objects)　亦称金文数码.中国古代的一种数码.指中国西周时代,铸于铜钟和鼎上的数码.西周(约公元前1066—公元前771)时代,铜铸工艺已有很大发展,常在铜器上铸有金文(青铜器铭文,又称钟鼎文)中的数字,与甲骨文数码基本相同,仅有少数数码有差别,现排列如下:

一 二 三 亖 四 ㄨ ∩ 十 八 九
1　2　3　4　5　6　7　8　9

10　20　50　60　100　500　1 000　10 000

这就是中国古代钟鼎文数码.

金文数码(numerals on ancient Chinese bronze objects)　即"钟鼎文数码".

中国数字(Chinese numerals)　人类最重要、最常用的数字之一.常指中国从汉代筹算至明代商业所用数字.汉代(公元前206—公元220年)取消了甲骨文中使用的合文(如30表为"ш",它是用20"∪"和10"|"写在一起的数字符号,称合文数字),并广泛采用算筹作为计算工具(已出土的算筹有竹制、木制、骨制、玉制、象牙制等多种材料制成的)进行计算,称为筹算法.筹算法中用算筹表示数,记录下来就是筹算数码,它有横式和纵式两种:

横式	一	二	三	亖	𝍤	⊥	⊥̲	≟	≡̲
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅲ|	Ⅲ‖	T	Π	╥	Ш
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

筹算数码的特点是只用上面的这 18 个符号，通过位值制就可表示出任何数．具体计数时个位数用纵式，十位数用横式，以后纵横相间，遇零留空位．例如 25018 记为

‖ ≣ 　 — ╥
纵 横 纵(空位) 横 纵

在汉代，由于商业经济的迅速发展，为了确保账目中的数字难于更改或出差错，又创造了会计体数字，沿用至今，即今天在财政及银行系统中还在普遍使用的大写数字，也是目前所见的常用最繁的数字，现排列如下：

壹	贰	叁	肆	伍	陆	柒	捌	玖	拾	佰	仟	万	零
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000	0

在明代，为了商业记账的简易，又将过去曾用的筹算数字加以改造，形成了商业体数字，直到 20 世纪中叶还有商家使用，现排列如下：

〡 —	‖ =	‖‖ ≡	〤	〥	〦	〧	〨	〩	十	百	千	万	〇
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000	0

还有一种在过去木版印刷书籍中常见的数字：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万	零
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000	0

这是自秦汉（约公元前 221—约公元前 206，约公元前 206—公元 220 年）以来就定型了，一直沿用至今．以上所说的各种数字（包括甲骨文、金文数字）统称中国数字．

筹算数码（rod-arithmetic numerals）　见“中国数字”．

古埃及数字（ancient Egyptian numerals）　古代人类最重要、最基本的数字之一．指古埃及人创造的一种十进制象形文数字．约公元前 4000 年，埃及就已有了相当发达的文化，当时已有了象形文字．现在尚存于英国牛津博物馆的埃及王室的权标；存于莫斯科国立普希金造型艺术博物馆里的莫斯科数学纸草书；存于英国博物馆的莱因德纸草书；存于法国卢佛尔博物馆的罗林纸草书（尼罗河三角洲上生长的一种形似芦苇的植物，把茎逐层撕开为薄片，古代用以著书，称纸草书），上面都写有古埃及的象形文字，或另一种僧侣文字．象形文数字形如下图：

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　20

30　100　200　1000　2 000　10 000　100 000　1000 000　10 000 000

古埃及象形文数字用的是十进制记数法．由于没有位值制，所以数的记法比较麻烦，有多少个单位就要重复多少次，如 24 记为 ∩∩||||．像 986 这个数，需要用 23 个符号来表示．除了象形文数字外，古埃及还有宗教文字，一般称为僧侣文．下面列出僧侣文的数字：

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

20　30　40　50　60　70　80　90　100　200

300　400　500　600　700　800　900　1 000　2 000　3 000

4 000　9 000　10 000　100 000

$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{5}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{1}{7}$　$\frac{1}{8}$　$\frac{1}{9}$　$\frac{2}{3}$

象形文数字（hieroglyph numerals）　见“古埃及数字”．

僧侣文数字（monks and priests style numerals）　见“古埃及数字”．

巴比伦数字（Babylonian numerals）　古代人类最重要、最基本的数字之一．指古巴比伦人创造的一种楔形数字．它是六十进位制的数系，这种数系实际上是一种混合数系．在这个数系的六十进位的记法中，每一个 60 以下的数是用十进制的记法表出．巴比伦数字排列如下：

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

11　25　30　38(=40−2)　81　100(=60+40)

中东地区的底格里斯河与幼发拉底河流域，也是人类文明的摇篮之一．先后居住在这里的苏美尔人、巴比伦人和波斯人等，曾经创造了灿烂的古代文化．早在公元前四五千年，苏美尔人就创造了一种文字，后经波斯人和巴比伦人在使用中发展，使这种文字更系统、完善．早期的巴比伦人把用粘土制造的泥板作为书写工具，用一支硬笔把文字压印在湿的粘土书板上，然后在阳光下晒干或烧干，使其坚硬耐久，便于长期保存．由于字形像楔子，故称为楔形文字．在保存下来的大量泥板书中，人们了解到古巴比伦人所创造的巴比伦数字．但在早期的泥板书中还没有零的符号．因此，这个六十进制数的位值制是不完善的．后来，约在公元前 200 年的泥板书中出现了零的符号，但只表空位，还未能在计算中得到应用．

古希腊数字（ancient Greek numerals）　古代人类最重要、最基本的数字之一．指古希腊人创造的一种字母数字．地中海沿岸是古代文化发达地区之

一，远在公元前五六世纪，雅典取得希腊城邦的领导地位，经济生活高度繁荣，创造了古代希腊文明，在商业、经济、政治的交往中，建立了古希腊文化，产生了数字. 现在所发现的最早载有古希腊数字的是刻在公元前 450 多年的一块石碑上的，现将考证整理后的古希腊数字排列如下：

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	ΔΔ	ΔΔΔ	ΔΔΔΔ	𐅄	𐅄Δ	𐅄ΔΔ	𐅄ΔΔΔ	𐅄ΔΔΔΔ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
H	HH	HHH	HHHH	𐅅	𐅅H	𐅅HH	𐅅HHH	𐅅HHHH
100	200	300	400	500	600	700	800	900
X	XX	XXX	XXXX	𐅆	𐅆X	𐅆XX	𐅆XXX	𐅆XXXX
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
M	MM	MMM	MMMM	𐅇	𐅇M	𐅇MM	𐅇MMM	𐅇MMMM
10 000	20 000	30 000	40 000	50000	60000	70 000	80 000	90 000

从表中可以看出，古希腊数字采用了十进制，并用大写希腊字母表示 5，10，100，…，如用字母“Γ”表示 5；用字母“Δ”表示 10；用字母“H”表示 100；用字母“X”表示 1000；用字母“M”表示 10000. 这些表数首的字母都是古希腊文表示该数的单词的头一个字母. 后来，在亚历山大后期，希腊人又采用了一种字母数字，即所谓爱尼亚人的希腊数系，就是字母数系. 古代的叙利亚人和以色列也用这种数字，现将古希腊的字母数系按顺序排列如下：

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30

μ	ν	ξ	ο	π	ϙ	ρ	σ	τ
40	50	60	70	80	90	100	200	300

υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
400	500	600	700	800	900

这个字母数系，仍以 10 为数基，用 27 个文字（即 24 个希腊字母，和 3 个当时作废的字母）表示数. 最初是用大写字母表示数，后来又改用小写字母表示. 上面所列表数的是小写字母，其中当时用以表数的 3 个作废的字母分别是：ϛ(表 6，读 digamma)，ϙ(表 90，读 koppa)和 ϡ(表 900，读 sampi). 使用这些符号的例子，如 $\iota\beta=12$；$\kappa\alpha=21$；$\sigma\mu\zeta=247$. 还用加上一横或重音符号的办法表示更大的数.

罗马数字(Roman numerals)　古代人类最重要、最基本的数字之一. 指古罗马人创造的一种符号数字. 约在公元前 500 年左右，罗马人在古希腊数字的影响下，逐渐创立了自己的数字符号. 以符号 I，Ⅱ，Ⅲ，Ⅲ 分别表示一、二、三、四个物体；表示五个物体就伸出一只手，画成 V 形，意思指大拇指与食指张开的形状；表示十个物体就伸出两只手，画成 V V 形，后来又画成一只手向上，一只手向下的 X 形. 这就是罗马数字的雏形. 为了表示较大的数，用符号 C 表示 100，C 是拉丁字“centum”(100)的头一个字母；用符号 M 表示 1000，M 是拉丁字“mille”(1000)的头一个字母；又采用符号 L 与 D 分别表示 50 和 500，逐步形成了罗马数字的 7 个基本符号：I (1)，V (5)，X (10)，L(50)，C(100)，D(500)，M(1000)，它们中最小的数字是 I 表示 1，最大的数字是 M 表示 1000. 较常见的是钟表面上用罗马数字表示的 12 个数字：

I	II	III	IV	V	VI
1	2	3	4	5	6
VII	VIII	IX	X	XI	XII
7	8	9	10	11	12

在欧美常可见到用罗马数字表示的年数，例如，1999 用罗马数字表示是 MCMXCIX. 公元前 146 年，罗马人灭亡了古希腊，公元前 30 年建立了罗马帝国，在地中海沿岸推行罗马数字，直到 13 世纪前，欧洲各国都盛行罗马数字. 由于罗马数字没有表示零的符号，亦不是位值制的数系，因此，记数和计算都十分复杂(参见“罗马记数法”). 当时会做简单乘法的人就算得上是一位数学专家了. 当 12 世纪阿拉伯数字引入后，罗马数字在数学上就逐渐被淘汰了，现在只在一些特殊的场合下应用，如时钟面上的钟点、文章的标题编序等.

玛雅数字(Maya numerals)　古代人类最重要、最基本的数字之一. 指美洲的玛雅人所创造的一种奇特数字. 它基本上是 20 进制的数系，只是从第二位到第三位是 18 进制的，可能由于法定的玛雅年是 360 日. 这种数字只有三个符号，即用点“・”表示 1；用横线“—”表示 5；用卵形“⬭”表示零以扩大数的倍数. 对于 20 以内做数基的数，都能简单地用点和短线表示. 玛雅数字分列如下：

1　2　3　4　5　6　7

8　9　10　11　12　13　14

15　16　17　18　19　20　0

对于较大的数，玛雅人采用竖写的方法，例如：

$$=6(18)(20^2)+0(18)(20)+14(20)+7$$

$$=43487.$$

16 世纪初，西班牙探险队来到墨西哥的尤卡坦，发现了在公元前后曾经生活在中美洲的古代民族玛雅人的这个有趣的数系.

阿拉伯数字(Arabic numerals)　亦称印度-阿拉伯数字. 是现在全世界通用的数字. 阿拉伯数字有 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 共 10 个，其中最小的数字是 0，最大的数字是 9. 它们是由印度人创造的，而不是由阿拉伯人发明的. 古代的印度人学习了古巴比伦的

六十进位法，创造了从0到9的10个数字和十进制记数法. 公元8世纪时，这些印度数字传到了阿拉伯，并几经演变，才形成了现在通用的形式. 12世纪又从阿拉伯传到了欧洲. 欧洲人称这10个数字为阿拉伯数字，一直沿用至今. 实际上应称为印度-阿拉伯数字. 阿拉伯数字具有简便、独立、清楚、易懂的特点，所以通行于世界. 在中国直到19世纪末才广泛使用.

印度-阿拉伯数字(Indian-Arabic numerals)　即“阿拉伯数字”.

自然数(natural number)　亦称非负整数. 数系中最基本的一种数. 即0，1，2，3，…表示的数，它是从数数过程中产生的. 作为数数的结果，自然数反映了被数事物的个数，这是自然数作为基数的特点；作为数数的过程，自然数又反映了被数事物的先后顺序，以及自然数的无限性，这是自然数作为序数的特点. 如果一个事物也没有，就形成了“0”的概念，0比1还小，所以可以排在自然数列的最前面. 数1是自然数的单位，从0开始，以后逐个加1，这样无限的进行下去就可以得到全体自然数. 所以，自然数集合是无限的，对于任一个确定的自然数，总还存在比它更大的自然数. 从自然数的产生进程可以知道：每个自然数都是表示一类对等集合的共同特征的符号. 或者说，每一个自然数都是一类对等集合的标记. 例如自然数0是无事物可数这样一类对等集合(空集)的标记，自然数1是以月亮为代表的一类对等集合的标记；自然数2是以一个人的眼睛为代表的一类对等集合的标记……由于自然数不是无限集合的标记，因此，可以认定：自然数是一类对等的有限集合的标记，或者说，自然数表示有限集合中元素的个数. 根据两集合之间的对等与包含关系，可以给出两个自然数大小关系的定义：设自然数a与b分别代表有限集合A与B的元素的个数，那么：

1. 若A对等于B，则称a等于b，记为$a=b$.

2. 若A对等于B'，且$B'\subset B$，则称a小于b，记为$a<b$.

3. 若$A\supset A'$，且A'对等于B，则称a大于b，记为$a>b$.

由此定义可知：对于任意两个自然数a与b，三种关系：$a=b$，$a>b$，$a<b$必有一种且仅有一种成立. 这个结论称为自然数的三歧性，或称为自然数的全序性. 随着社会生产力的发展，对自然数的研究也提出了更高的要求，根据自然数的基数和序数的特点，产生了自然数的两种严格理论：自然数的基数理论和序数理论. 它们是进一步定义实数的基础. 这些理论是在19世纪中、末叶分别由佩亚诺(Peano, G.)和康托尔(Cantor, G. (F. P.))完成的. 在数学理论的发展中自然数集的定义并不包含0，1993年开始新的国家标准定义自然数集N含0，这样做一方面是为了推行国际标准化组织(ISO)制定的国际标准，以便与之早日相衔接；另一方面，0还是十进位数数字{0，1，2，…，9}中最小的数，有了0，减法运算$a-a$仍属于N，其中$a\in$N.

非负整数(nonnegative integer)　即“自然数”.

正整数(positive integer)　自然数的一部分. 即非零自然数.

整数(integer)　数系中最基本的一种数. 即正整数、零、负整数的统称. 自然数都是整数，但整数不一定都是自然数.

自然数集(set of natural numbers)　一种特定的集合. 指全体自然数的集合. 常用符号N表示. 自然数集有如下性质：

1. 在自然数集N中，有一个最小的自然数0；在N中除去0之后，其余的自然数构成的数集称为正整数集，常用符号N_+(或N^*)表示，1在N_+中是最小的元素；在N和N_+中都没有最大的自然数；它们都是无限集.

2. 自然数1通常称为单位.

3. 在N或N_+中，任取一数在它上面加单位1，所得的数称为该数的后继数. 从最小元素开始逐个加1，这样无限地进行下去，就可得到该数集中所有其他元素，最小元素不是任何元素的后继数.

4. 1可整除任何自然数，其商仍为原自然数，所以1是任何自然数的约数.

5. 0加任何自然数，其和仍是原来那个自然数，1乘任何自然数，其积仍是原来那个自然数，所以自然数都是1的倍数.

6. 1不是质数，也不是合数.

7. 如果0具有性质P，则任何具有性质P的自然数的后继数都具有性质P(此即归纳原则，是完全归纳法的原理).

8. 在自然数集N中的数，可以按顺序一个一个地数下去，所以自然数集是可数集.

9. 在自然数集N中的任意两个元素都可以比较大小，所以自然数集是有序集.

10. 在自然数集N中，加法与乘法两种运算，总可以实施，即自然数的和与积仍是自然数.

11. 在自然数集N中的加法、乘法运算满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律.

12. 在自然数集N中的加法、乘法运算满足消去律：

$m+k=n+k\Rightarrow m=n\quad(m,n,k\in \mathrm{N})$，

$m\cdot k=n\cdot k\Rightarrow m=n\quad(m,n\in \mathrm{N};k\in \mathrm{N}_+)$.

13. 自然数集的任一非空子集必存在一个最小的自然数，此结论称为最小数原理.

正整数集(set of positive integers)　见“自然数集”.

后继数(successor number)　见“自然数集”.

最小数原理(principle of the minimum number) 见“自然数集”.

编号(numbering)　算术的基本概念之一. 指使自然数集中若干相继元素构成的子集,与某物体集合之间建立一一对应的关系. 在数物体时,常从自然数 1 开始(有时也从其他数开始),使每个物体都与一个不相同的自然数相对应,且这些自然数又是相继的. 像这样把每个物体附着一个自然数,称为对这些物体的编号. 在编号以后,每一物体都有自己的号码,则物体的差别可根据它们不同的号码来确定. 编号在生活、生产、科研等方面有广泛的应用. 如旅店对房间的编号(不一定从 1 编起);某县考生的考号(亦非从 1 起),常划给一个考号段,要求在规定的考号段内进行编号.

佩亚诺公理(Peano axiom)　关于自然数理论的公理系统. 1889 年,佩亚诺(Peano,G.)对自然数给出一个公理化的处理方法,他证明自然数的性质可以在很少几条公理的基础上展开. 佩亚诺公理系统是满足下列五条公理的三元组$\langle \mathrm{N},S,e\rangle$,其中 N 是一非空集合,$S:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$ 是映射,$e\in\mathrm{N}$ 是一个特殊的元素:

1. $e\in\mathrm{N}$,即 e 是 N 的元素.

2. $a\in\mathrm{N}\Rightarrow S(a)\in\mathrm{N}$,即如果 a 是 N 的元素,则 $S(a)$也是 N 的元素.

3. $S(a)=S(b)\Rightarrow a=b$,即每个元素若有前任(指 S 下的原象),则是惟一的.

4. $a\in\mathrm{N}\Rightarrow S(a)\neq e$,即特殊元素 e 不是 N 中任何元素的后继(指 S 下的象).

5. N 的任何子集 A,如果包含 e,并且对 S 封闭,则 $A=\mathrm{N}$.

公理 5 亦称归纳公理,是数学归纳法的理论根据.

满足以上公理的 N,被称为自然数集合,N 中的元素称为自然数,e 称为幺元(或单位元). 不难验证,当人们把直觉上的自然数集合$\{0,1,2,3,\cdots\}$记为 N_0,$S_0(a)$定义为 $a+1$,$e=1$,则$\langle \mathrm{N}_0,S_0,1\rangle$满足 1～5;反之亦可证明任何满足佩亚诺公理的集合与直觉上的自然数集合 N_0 同构.

自然数的基本顺序律(law of basic order of natural numbers)　自然数比较大小的基本定律. 比较自然数的大小时,有如下基本顺序律:

1. 全序性. 若 $a,b\in\mathrm{N}$,则 $a>b,a=b,a<b$,三者必有且仅有一种能成立(即自然数的三歧性).

2. 传递性. 若 $a,b,c\in\mathrm{N}$,且 $a\geqslant b,b\geqslant c$,则 $a\geqslant c$.

3. 反对称性. 若 $a,b\in\mathrm{N}$,且 $a\geqslant b$,又 $a\leqslant b$,则必有 $a=b$.

自然数的三歧性(trichotomy of natural numbers)　见“自然数的基本顺序律”.

自然数的序数定义(ordinal definition of natural numbers)　自然数定义的方式之一. 序数是在数数的过程中产生的. 所谓数数,就是把被数事物的集合与自然数集合(标准集合)之间建立一一对应的关系. 如果被数事物是有限集,就是与自然数集的前面片断(子集合)建立一一对应关系;如果被数事物是无限集合,就是与全体自然数建立一一对应关系. 被数事物集合中的每个元素的位置就是一个自然数. 被数事物的位置顺序若为:第 0 个,第 1 个,第 2 个,第 3 个……第 n 个……则 $0,1,2,3,\cdots,n,\cdots$就称为序数. 数学的发展要求将自然数的一些基本性质抽象为公理化体系. 1889 年,佩亚诺(Peano,G.)首先给出公理形式的自然数定义. 佩亚诺以后,又有人改述自然数的公理定义,如雅各布森(Jacobson,N.)和格列尔特(Gellert,W.)都曾给出过不同的公理形式的自然数定义.

自然数的基数定义(Cardinal definition of natural numbers)　自然数定义的方式之一. 每一个有限集合中的元素个数都对应着一个自然数. 在同一类有限集合中,它们具有一个共同的特征,就是所含元素的个数相同. 例如,三支铅笔,三头牛,三架飞机是同一类对等集合,它们的共同特征是 3,数量 3 就是它们的基数,所以,用以表示事物数量多少的自然数,就是基数. 一般地说,把对等的有限集合所具有的共同特征,称为这类对等集合的基数. 因此,有限集合的基数,就是自然数. 但是,自然数集合是无限的,对一切能与自然数集建立一一对应关系的无限可数集合的基数,规定为$\aleph_0$(读作阿勒夫零,$\aleph$是希伯来文的第一个字母). 有了自然数的基数定义,就可定义数的顺序及其四则运算,即可建立自然数的基数理论,甚至建立自然数的公理体系(参见“佩亚诺公理”).

零(zero)　既是一个基本的概念,又是一个独立的数. 在数字产生的初始阶段,人们在计数时,常常遇到没有事物的情况,逐步形成用符号“0”来表示没有,这是零的原始概念. 零是第一个阿拉伯数字,在记数法中,当一个数的某些数位上一个计数单位也没有时(即空位,历史上有采用空格表示的),就在这些数位上用 0 表示,例如,八十记为 80,三百零二记为 302 等. 零是一个整数,而且是一个偶数. 在零不算自然数时,常把 0 添加在自然数之前,称为扩大的自然数列. 在集合论中,把零纳入自然数列. 零不是正数,也不是负数,而是惟一的中性数:零比任何正数小,比任何负数大,它是正数、负数的界限.

零作为一个独立的数,不仅可以表示没有,而且具有非常确定的内容. 在计量中,0℃(摄氏 0 度)不能理解成没有温度,而是实际温度的计量结果;0 还可作刻度的起点、坐标原点、东西经度和南北纬度的分界线等. 零在运算中起很重要的作用:零与任何数的

和仍是这个数，即 $a+0=0+a=a$；任何数减零仍是这个数，零减去任何数所得的差则是这个数的相反数，即 $a-0=a, 0-a=-a$；零与任何数的积，规定为零，即 $a\cdot 0=0\cdot a=0, 0\cdot 0=0$；零除以任何数(不包括零)还得零，即 $0\div a=0$；但零不能作除数.因为在除法中，假设除数是零，则会出现两种情况：

1.被除数不为零，根据除法定义，任何数与零相乘的积必为零，不可能得到这个不为零的被除数，所以商不存在.

2.被除数也是零，根据除法定义，任何数与零相乘的积都是零，所以商不确定.因而，零没有倒数.另外，还规定：一个非零的数的零次幂等于 1，即 $a^0=1(a\neq 0)$；零的阶乘是 1，即 $0!=1$.

自然数列(sequence of natural numbers)　一种独特的集合.指将全体自然数按照从小到大的顺序排成的一列数.自然数列有以下性质：

1.有始：自然数列最前面的一个自然数是 0.

2.良序：在自然数列里，每两个自然数都可以比较大小.因此，自然数列是一个良序集合.

3.无界：在自然数列里，对于任何一个自然数都存在比它大的自然数.

自然数与自然数列这两个概念是有区别的，自然数列指的是 0，1，2，3，…这一列有顺序的数的全体，它是一个无限集合，而自然数只是这个集合中的元素.

非负整数列(sequence of nonnegative integers)　即“自然数列”.

命 数 法

命数法(numeration)　算术的基本概念之一.指给数命名的方法.当今世界各国通用的命数法是根据十进制来命名的，因此就称它为十进制命数法.中国采用的十进制命数法的规律是：

1.一到十各数，各用一个名称，就是一、二、三、四、五、六、七、八、九、十.

2.十一至十九的数，不命新的名称，就是把十和不满十的数结合起来，如十一、十二等.

3.十和十加起来叫二十，同理，三个十叫三十、五个十叫五十等.

4.几个十和不满十的数结合起来叫几十几，如二十三.

5.十个十命名叫一百，四个百叫四百，六个百、五个十与三，叫六百五十三.

6.十个百，命名叫一千，十个千，命名叫一万.

7.万以上的十个万、一百个万、一千个万都不命名，十个一万叫十万、十个十万叫百万、十个百万叫千万.

8.十个千万命名亿，一亿、十亿、百亿、千亿不命名，万亿命名叫兆，十兆(十万亿)、百兆(百万亿)、千兆(千万亿)也不命名，万兆命名叫京，十京(十万万亿)、百京(百万万亿)、千京(千万万亿)也不命名，即京以上的数不再命新名.中国古时在京以上的数级还有垓、秭、穰、沟、涧、正、载、极等.从万以后的数位名称都是万进位，即万万为亿，万亿为兆，万兆为京.古时候中国对高数位的进制不够统一，有个、十、百、千、万、亿六个数位名称，也有记载都是十进位的.如十万为亿，十兆为京等.

国际上许多国家采用的命数法与中国不同.首先是命名到千字为止而没有万字，万称为十千；其次是高位的数命名的有相当于千千(即百万)，千千千(即十亿)，千千千千(即万亿)等的字；第三，在记述多位数时，按三位分节，即自个位向左，每隔三位用一个逗号分开，如 2，103，872，941，亦可用每隔三位空半格的三位空格分节法，如 2 103 872 941.中国在工程技术中常以百万为兆，并在记数时规定用此三位空格分节法，都是借用国际上的这种习惯.

十进制命数法(decimal system numeration)　见“命数法”.

记数(number representation)　算术的基本概念之一.指用数码表示计数的结果.由于数制的不同和数码符号的不同，记数的方法也是不同的.现在国际通用的是印度-阿拉伯数字，采用十进制记数法记数.

记数法(system of notation)　算术的基本概念之一.指书面写数的方法.当今世界各国通用的是十进制记数法，其具体记法是：从左边最高位起，顺次写出各级、各位的数，如三百零四万五千零二，记为3045002.它是由下面的步骤写成的：

百万	十万	万	千	百	十	个
3	0	4	5	0	0	2

其中，从右边开始向左，第一位是个位，表示单位一的个数的数字；第二位是十位，表示单位十的个数的数字；第三位是百位，表示单位百的个数的数字；依次类推，第七位是百万位，表示单位百万的个数的数字.同时应注意，满十的必须写成二位数，满百的必须写成三位数，满千的必须写成四位数……根据数的位置原则，如果某位是零时，必须用“0”填上这个数位.用十进制记数法记数，有时还采用下面的形式，将各个数位上的计数单位的和表示一个数.例如

5487=5 个千+4 个百+8 个十+7 个一.

有时也把计数单位表示为 10 的幂的形式.例如

$$5487=5\times 10^3+4\times 10^2+8\times 10^1+7\times 10^0.$$

对于任意基数 b，$n+1$ 位数写成一般式为

$$A=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b^1+a_0b^0\quad(b^0=1).$$

十进制记数法(notation of decimal system) 见“记数法”与“十进制”.

罗马记数法(Roman notation) 一种古老的记数法.指通行于古罗马的一种特殊的十进制记数法.罗马数字只有七个符号:Ⅰ,Ⅴ,Ⅹ,L,C,D,M.它们依次代表1,5,10,50,100,500,1000.罗马数字中没有代表零的符号,也没有进位制法则.它的每一位上的数各有两个符号,一个表示该位的单位数,一个表示该位的中间数,如个位数的Ⅰ,Ⅴ,十位数的Ⅹ,L,百位数的C,D,记数规则如下:

1.高位在左,低位在右,例如151记为CLⅠ,1515记为MDXV.

2.任一位的非1非5的数都可用该位的符号写出,小于5的数用并列的单位数记,大于5的数先用中间数记5,再用并列的单位数记大出的数,例如

347记为CCCXXXXⅦ,

2869记为MMDCCCLXⅧ.

3.为了简化在记任一位中的4或9时出现4个并列的单位符号,可使用称为减法原则的记数规则:把一个单位数记在同位的中间数前表示4,把一个单位数记在高一位的单位数前表示9,例如949记为CMXLIX,这种减法原则在古罗马和中世纪很少使用,到近代才普遍使用.

4.在记大数时,可在所记数的上面加一条横线表示这个数扩大一千倍,加两条横线表示这个数扩大百万(即千千)倍等,例如

$\overline{\text{XCV}}=95\times1000=95000$,

$\overline{\overline{\text{LIV}}}=54\times1000\times1000=54000000$.

罗马记数法的写、读、计算都不方便,早已被淘汰,而只是在一些特殊场合下作记数用.

科学记数法(scientific notation) 国际通用的一种记数法.它是十进制记数法的书写形式之一.将一个数记成$a\times10^n$的形式,其中$1\leqslant a<10$,n比原数的整数位数少1.这种记数法在科学技术中经常使用,故称科学记数法.科学记数法在天文、地理、物理、化学、气象、宇航、经济、统计等近代科学技术中使用十分方便,特别是一些较大或较小的数据.当$n>0$时,则用于记录一些较大的数据.例如:

真空中光速(约)

$300000\text{km/s}=3\times10^5\text{km/s}$;

地球表面积(约)

$511000000\text{km}^2=5.11\times10^8\text{km}^2$;

月球质量(约)

$73500000000000000000000000\text{g}$

$=7.35\times10^{25}\text{g}$.

当$n<0$时,则用于记录较小的纯小数数据,$-n$为原数中第一个非零数字前面零的个数(包含小数点前面那一个零).例如,氧原子的质量为

$0.00000000000000000000000167339\text{g}$

$=1.67339\times10^{-24}\text{g}$.

用科学记数法也可以表示负数,若a为负数,且$1\leqslant|a|<10$.例如,

$-0.00092=-9.2\times10^{-4}$.

随着科学技术的发展,科学记数法的应用范围越来越广泛.

数的简写(simple writing of number) 算术的基本概念之一.指数的简便书写方法.为了简便,常把较大的整数,写成用万或亿作单位的数,例如,将170000,500000000,3820000000改写时,把末尾(万或亿位以下)的零去掉,加上万或亿字,有时还可保留小数位,即170000=17万,500000000=5亿,3820000000=38.2亿.

读数法(reading method of number) 算术的基本概念之一.指口头读出数的命名的方法.读数法有两种:

1.按照数的横列自左至右把各个数字依次读出来,如3045002读作三零四五零零二,这种读法在读纯小数或记录时用,称其为简读法,可用于十进数和非十进数的读数.

2.按照数的横列自右至左,以四位为一级或三位为一节,然后从左至右读数,称其为分级读数法或分节读数法,统称繁读法,这种读法一般用于读十进整数.

中国习惯使用十进制读数法,并采用四位分级的法则,即从个位起,每四个计数单位作为一级:

个位、十位、百位、千位称为个级;

万位、十万位、百万位、千万位称为万级;

亿位、十亿位、百亿位、千亿位称为亿级等.

这种按四位一级的法则确定数位的方法,称为数位分级.数位分级列表如下:

…	兆级	亿级	万级	个级	级名
…	千百十兆 兆兆兆 位位位位	千百十亿 亿亿亿 位位位位	千百十万 万万万 位位位位	千百十个 位位位位	数 位

根据以上分级原则,十进制读数法的法则如下:

1.四位以内的数,可以顺着位次,从最高位读起,例如1987读作一千九百八十七.

2.四位以上的数,先从右向左四位分级,然后从高级起,顺次读出各级里的数和它们的级名,例如

$\underset{\text{亿级}}{\underline{38}}\ \underset{\text{万级}}{\underline{4375}}\ \underset{\text{个级}}{\underline{9001}}$

读作三十八亿四千三百七十五万九千零一.

3.一个数末尾有0,不论有几个都可不读,分级

后任一级末尾有零，也可不读，在需要读出时，不论有几个 0，均只读一个零，中间有 0 的，也不论连续有几个 0，需要读出时均只读一个零，例如

4003	0005
万级	个级

读作四千零三万零五；

9	0050	8000
亿级	万级	个级

读作九亿零五十万八千.

国际上许多国家没有"万"这个名称，因此，他们读数的原则不是四位分级，而是三位分节. 中国在写数时，也采用三位分节的方法，但在读数时，中国没有用三位分节的读法.

十进制读数法(reading method of decimal number)　见"读数法".

简读法(simple reading rule)　见"读数法".

繁读法(complex reading rule)　见"读数法".

数位分级(grade of digit positional)　见"读数法".

数级(number grade)　命数法术语. 四位分级中的个级、万级、亿级……与三位分节中的个级、千级、密级……统称为数级(参见"数位顺序表").

数位分节(separating period of a number position)　国际通行的记数和读数法则. 在记、读多位数(4 位及 4 位以上的数字)时，从数字的右边向左边每三位分为一节，把数位分成若干节，节与节之间用逗号分开或空半个阿拉伯数字的位置. 这种按三位一节的法则确定数位的方法，称为数位分节(参见"数位顺序表"). 例如 1982 年，中国普查人口数，全国总计 1031882511 人，就是按数位分布规定书写的. 使用数位分节记数在每节之间用逗号分开时，这个逗号称为分节号.

分节号(sign of separation period)　见"数位分节".

进位制(scale)　数的进位法则. 在记数和读数时，按照确定的法则，自右向左完成两个相邻数位之间的进位，而各个数位上的单位，又都等于它右边相邻数位上单位的固定整数倍，这种确定数的进位法则称为进位制，而这个固定的整倍数，就称为进位制的基数，也称为进位制的底数或进位制的进率. 进位制的基数可以是 1 以外的任何自然数. 采用不同的基数，就得到不同的进位制. 基数是 10，2 或 8 时，分别称为十进位制、二进位制或八进位制. 现在世界各国(包括中国在内)通用的是十进位制.

进位制的基数(base number of a scale)　见"进位制".

进位制的底数(base number of a scale)　见"进位制".

进位制的进率(scale ratio of a scale)　见"进位制".

数位顺序表(digit positional table in order)　命数法术语. 指数位顺序的分类法则. 即按照由小到大的顺序把计数单位从右到左排成的表格. 整数的数位顺序表为：

京　级	兆　级	亿　级	万　级	个　级	级名
⋮ 百十京 ⋮ 京京 ⋮ 位位位	千百十兆 兆兆兆 位位位位	千百十亿 亿亿亿 位位位位	千百十万 万万万 位位位位	千百十个 位位位位	数 位

表中级名和数位是按中国四位分级的读数和记数习惯列出的，而国际通用的读数和记数法是三位分节制，国际整数的数位顺序表为：

级　名	数　位	对应的数和英文名	
个　级 units grade	个　位	1	one
	十　位	10	ten
	百　位	100	hundred
千　级 thousand grade	千　位	1 000	thousand
	十千位	10 000	ten thousand
	百千位	100 000	hundred thousand
密　级 million grade	密　位	1 000 000	million
	十密位	10 000 000	ten million
	百密位	100 000 000	hundred million

在百密位(100 000 000)以上的高单位数的命名习惯，美国和英国是有差别的，现列表如下：

与命名对应的数	美　　国		英　　国	
	数　位	命　名	数　位	命　名
10^{9}	别　位	billion	千密位	thousand million
10^{10}	十别位	ten billion	十千密位	ten thousand million
10^{11}	百别位	hundred billion	百千密位	hundred thousand million
10^{12}	垂　位	trillion	别　位	hillion
10^{13}	十垂位	ten trillion	十别位	ten billion
10^{14}	百垂位	hundred trillion	百别位	hundred billion
10^{15}		quadrillion	千别位	thousand billion
10^{16}		ten quadrillion	十千别位	ten thousand billion
10^{17}		hundred quadrillion	百千别位	hundred thousand billion
10^{18}		quintillion	垂　位	trillion

比 10^{18} 更大的高单位数的命名列简表如下：

命　名	美国的对应数	英国的对应数
sextillion	10^{21}	10^{36}
septillion	10^{24}	10^{42}
octillion	10^{27}	10^{48}
…	…	…

小数的数位顺序见“小数数位顺序表”.

数位(digit positional)　命数法术语. 指各个不同的记数单位所占的位置. 在记数时，按照一定的顺序把各个数字排列在固定的位置上，一个数字占有一个位置，以区别它们的单位，这些位置都称为数位. 相对来说，左边的数位高于右边的数位. 例如，在十进位制记数中，六万一千三百七十五记为

6	1	3	7	5
万位	千位	百位	十位	个位

以上是一个五位数，每位数字各占一个数位，十位对个位来说是高位，对百位来说，它又是低位.

位数(digit capacity)　命数法术语. 表示一个整数占有数位的个数. 一个整数含有几个数字(左边最高位上的数字不是 0)，就称为几位数. 例如 1，3，9 都是一位数，12，25 都是两位数，105，380 都是三位数，如此类推. 四位以上的数，通常称为多位数.

位值制(position system)　亦称位置制. 命数法术语. 指确定数字值的一种原则. 数字有二值，一是位置值，一是数字值. 数字值是数字本身所表示的值. 例如数字 6，就是表示 6 个单位. 位置值是数字本身与其位置结合起来所表示的值. 例如 626 这个数中，左边的 6 表示 6 个百，右边的 6 表示 6 个一. 这种对于一个数字，由其本身和位置结合起来确定数值的原则称为位值制，也称位值原则. 在位值制记数法中，由于所取进率的不同而有所不同，其中十进位制记数法是最常用的一种.

位置制(position system)　即“位值制”.

数字值(digit value)　见“位值制”.

位值原则(position principle)　即“位值制”.

位值记数法(positional notation)　亦称位值制记数法. 常用的一种记数法. 按照位值制建立的记数法，称为位值记数法(参见“位值制”). 十进制记数法、二进制记数法和八进制记数法等，都是位值记数法，而罗马记数法则不属于位值记数法.

十进制(decimal system)　亦称十进位制. 当今世界各国通用的记数进位制. 在计数时，每相邻两个单位之间的进率都是十，即逢十进一的法则，称为十进制. 中国古代和古希腊都是采用十进制来计数和记数. 现在世界通用的数字是印度-阿拉伯数字，即以 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 十个数字记数. 在计算时采用逢十进一，即低位上的数大于或等于 10 而小于 20 时往高位上加 1，低位上的数大于或等于 20 而小于 30 时往高位加 2，以此类推(参见“记数法”). 采用十进制计数法的数，称为十进制数或十进数. 在数的使用中涉及不同进位制时，为了区别它们，常用符号$(\ )_{10}$表示十进数. 十进数可以同其他进制的数(如二进数、八进数)互化(参见“二进制”与“八进制”).

十进数(decimal number)　见“十进制”.

逢十进一(carry one on ten)　命数法术语. 指十进数相加时的一句口诀. 最初是在筹算和珠算中进行两数相加时使用. 当两数的同一低位上两个数字之和≥10 时，在两数之和的低位上记下超过 10 的余数，并向邻接的高位上进一. 这是逢十进一的本源. 后来在笔算加法中也引用这一口诀. 但必须注意到在多个数同时相加时，必然会出现同位数之和≥20 的情形，这时就要活用这一口诀，看其所超过的 10 的倍数而在邻接的高位进此倍数.

二进制(binary system)　特殊的记数进位制之一. 在位值制记数法中，每相邻两个单位之间的进率为二，即依据“逢二进一，退一当二”的法则，以 0，1 两个数字记数，这种记数法称为二进位制记数法，或二进制记数法，简称二进制. 由于二进制只用 0 和 1 两个数字记数，因而是最简单的记数制. 用二进制记下的数称为二进位数或二进数. 二进数用符号$(\ )_2$表示，或将(2)记于二进数的右下角来表示. 如对二进数 1100 记为$(1100)_2$，或记为$1100_{(2)}$. 二进数的一般形式是：

$$
\begin{aligned}
&K_n\cdots K_1K_0.K_{-1}\cdots K_{-m(2)}\\
&=K_n\cdot 2^n+\cdots+K_1\cdot 2^1+K_0\cdot 2^0\\
&\quad +K_{-1}\cdot 2^{-1}+\cdots+K_{-m}\cdot 2^{-m},
\end{aligned}
$$

式中 K_i 是 0 或 1，m，n 为非负整数. 现将 10 以内的十进数和二进数的对照列表如下：

十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
二进制	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

二进制的计数方法很早就有了，它的形成也是有历史背景的，就像十进数那样，数数要靠十个指头帮助，就自然形成了十进制记数法. 如果用两只手或两只足来帮助记数，也自然地会形成二进制记数法. 事实上在澳洲和非洲的一些最原始的民族中，使用的就是二进制数，独立的数字只有一和二，其他的都是复合数. 例如，三说成二、一，四说成二、二，五说成二、二、一，六说成二、二、二，超过六，则统称为堆. 中国古代周朝(前 1066—前 221)的易经中，就记载了用不断开的横线“—”和断开的横线“--”来表示明和

暗、天和地、雌和雄等两类相反的状态．这里“—”相当于二进数中的1，而“--”相当于二进数中的0．易经中的八卦就是用三位二进制数表示的，即：

☷ ☶ ☵ ☴ ☳ ☲ ☱ ☰

000　001　010　011　100　101　110　111

据说八卦传入欧洲，引起了莱布尼茨（Leibniz，G．W．）的强烈兴趣，他研究它，并从中获得宝贵启示，帮他悟出了文明世界最早的二进制数学．他曾于1698年预言道：“利用0与1两数作计算虽很冗长，但从后果上来看，对科学研究确很重要，而且定会引出一些新的发现，这些发现在以后对于数的实际应用，特别是在几何学上，是有益处的．这种情况之所以产生，是因为在把数化成最简单的数，如0和1时，结果就显露出一种绝妙的排列次序．”莱布尼茨对中国古老文化结晶之一的八卦是那样赞赏，他曾把他发明的计算机的复制品寄赠中国当时的康熙皇帝，并在寄赠的信中向康熙建议中国建立科学院，希望与中国学者共同研究八卦，进行文化交流，发掘这古老的文化宝藏，以促进科学的发展．可惜这一宝贵建议，对于当时闭关自守的中国是无法实现的．

尽管二进制数在历史上早就出现了，然而用它表示数时书写冗长，显得很不方便，因而长时间未能引起人们的注意．直到1946年，第一台电子计算机问世，二进数被用来作为计算机的基本数，从此二进制才为人们广泛重视．由于电子计算机是由各种电子元件组成，而电子元件只有导通与断开两种不同的物理稳定状态，从而用二进制容易表达．然而二进制的致命弱点是用它表示的数书写很冗长，为解决这个矛盾，电子计算机除采用二进制作为它的基本数系外，还常用到八进制、十六进制等．这些数制的运算以及它们之间的互相转换，便成了电子计算机的数字基础，故又有电脑数字之称．

二进制记数法（binary notation）　见“二进制”．

二进数（binary number）　见“二进制”．

二进数加法（addition of binary numbers）　二进数的计算方法之一．指计算二进数的和的方法．由于在二进制记数法中，任何相邻两数位之间的进率为2，所以加法按逢二进一，减法按退一当二的法则进行计算，列举如下：

1．二进制加法表如下：

+	0	1
0	0	1
1	1	10

2．加法算式举例，计算 $1110010_{(2)}+100111_{(2)}$．

$$\begin{array}{r} 1110010 \\ +)\quad 100111 \\ \hline 10011001 \end{array}$$

所以 $1110010_{(2)}+100111_{(2)}=10011001_{(2)}$．

3．减法算式举例，计算

$10011001_{(2)}-1110010_{(2)}$．

$$\begin{array}{r} 10011001 \\ -)\quad 1110010 \\ \hline 100111 \end{array}$$

所以 $10011001_{(2)}-1110010_{(2)}=100111_{(2)}$．

二进数主要用于电子计算机，但在电子计算机中进行减法运算时，为了避免因不够减而产生退位的运算，就引入补数，化为加法来计算．若 $x_{(2)}+y_{(2)}=10^n_{(2)}$，则 $y_{(2)}$ 称为 $x_{(2)}$ 的补数，也就是要凑一个数 $y_{(2)}$，使与 $x_{(2)}$ 相加后为 $10^n_{(2)}$，n 为二进数 $x_{(2)}$ 的位数．总之 $y_{(2)}$ 加到 $x_{(2)}$ 上能使 $x_{(2)}$ 的各位非零数1都通过进位消失而变为0．例如，$x_{(2)}=1010110$ 右起第二个数位是第一次出现1，这时取 $y_{(2)}$ 的右两位为10（即与 $x_{(2)}$ 的右两位相同），于是 $x_{(2)}+y_{(2)}$ 中的右起第二位相加时，要进1，故 $y_{(2)}$ 的其余数位的数码应取与 $x_{(2)}$ 同一数位上的与之不同的数码，即 $y_{(2)}$ 的右起第三位为0（$x_{(2)}$ 的右起第三位为1），第四、五、六、七位分别为1，0，1，0（$x_{(2)}$ 的右起第四、五、六、七位各为0，1，0，1），得 $y_{(2)}=0101010_{(2)}=101010_{(2)}$．根据上例的分析，求补数的方法归纳如下：

1．观察 $x_{(2)}$ 的各位数字，从右第一位起到第一次出现1的数位为止，这时 $x_{(2)}$ 的补数 $y_{(2)}$ 在相同数位上应取与 $x_{(2)}$ 中同样的数码，如上例 $x_{(2)}=1010110$，从右第一位到第一次出现1为止的各位为10，则 $y_{(2)}$ 中的最末两位数码也应为10．

2．$y_{(2)}$ 的其余数位的数码，应取与 $x_{(2)}$ 相同数位上不同的数码，如上例 $x_{(2)}=1010110$ 中的其余数位的数码，即从右起第三位到最后一位的数码为10101，则 $y_{(2)}$ 中与之对应的各数位应取和 $x_{(2)}$ 中对应数位上不同的数码，即 $y_{(2)}$ 的其余数位应取01010．又如 $x_{(2)}=1001010_{(2)}$，则 $y_{(2)}=0110110_{(2)}=110110_{(2)}$．有了补数，减法可化为加法进行，其公式为：被减数－减数＝被减数＋补数$-10^n_{(2)}$．式中的补数是指减数的补数，n 是减数的二进制位数．例如前面的减法中，计算 $10011001_{(2)}-1110010_{(2)}$．可改为 $10011001_{(2)}-1110010_{(2)}=10011001_{(2)}+1110_{(2)}-10000000_{(2)}=100111$．如此就避免了退位计算，比直接相减更为简单明了．

二进数减法（subtraction of binary numbers）见“二进数的加法”．

二进数乘法（multiplication of binary numbers）　二进数的计算方法之一．指计算二进数的积

的方法. 二进数的乘、除法和十进数的乘除法是很相似的,只需按二进数乘法表进行计算,其乘法表如下:

×	0	1
0	0	0
1	0	1

1. 乘法算式举例,计算 $110010_{(2)}\times1011_{(2)}$.

```
         1 1 0 0 1 0
   ×)        1 0 1 1
   ------------------
         1 1 0 0 1 0
       1 1 0 0 1 0
+)   1 1 0 0 1 0 0
---------------------
   1 0 0 0 1 0 0 1 1 0
```

所以 $110010_{(2)}\times1011_{(2)}=1000100110_{(2)}$.

2. 除法算式举例,计算 $1000100110_{(2)}\div1011_{(2)}$.

```
                   1 1 0 0 1 0
         ----------------------
1 0 1 1 ) 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0
            1 0 1 1
         ----------------------
              1 1 0 0
              1 0 1 1
         ----------------------
                    1 0 1 1
                    1 0 1 1
         ----------------------
                          0
```

所以 $1000100110_{(2)}\div1011_{(2)}=110010_{(2)}$.

上述二进数除法中的被除数是从第一例乘法的乘积中来的,因此,正好能整除. 应当知道,二进数的除法并非全都能整除,当不能整除时,也和十进数除法一样地可以保留余数. 由上述各例可见,二进数的乘法,是由加法与移位来实现的. 二进数的除法,是由减法与移位来实现的,而减法又是引入补数转化为加法来实现的. 因此,电子计算机进行四则运算都归结为加法和移位来实现.

二进数除法(division of binary numbers)　见"二进数的乘法".

二进数的特点(feature of binary numbers)　二进数的基本特征. 指二进数与其他进位制相比的独特之处. 这可以说是电子计算机之所以使用二进数的原因所在. 二进数有以下几个特点:

1. 运算简单. 对于任何一种进位制,比如 r 进位制在进行数值的四则运算时,都必须记住从 0 到 $r-1$ 这 r 个数之间的加法表和乘法表. 二进数的加法表和乘法表是最简单的,因而使得二进数的四则运算法则以及求补数等都比其他进位制数简单. 这样,就会使计算机的运算器小一些,控制线路也简单一些.

2. 易于实现. 电子计算机是由各种电子元件组成,而电子元件只有导通与断开两种不同的物理稳定状态,正好与二进制中的 1 与 0 相对应,从而二进制易于用电子元件来实现. 如果在电子计算机中采用 r 进位制,则要求计算机的元件具有 r 种的物理稳定状态来表示 r 个数码. 制造有三种或三种以上的物理稳定状态的电子元件是复杂而困难的,而且可靠性也难于达到预期要求.

3. 节省设备. 以十进制与二进制在计算机中所用的元件数量来比较. 假设每一数位上的每一数码都用一个元件. 在十进制中,为了表示小于 1000 的所有正整数,需 3 个数位,每个数位需 10 个元件,共需 $3\times10=30$ 个元件;由于 $2^{10}=1024$,这样,在二进制中,为了表示小于 1024 的所有正整数,需十个数位. 每个数位需 2 个元件,共需 $2\times10=20$ 个元件. 所以,二进制比十进制少用元件.

4. 便于利用逻辑代数知识. 在逻辑线路中通常用 0 和 1 分别代表电路的断和通;变数 x,y 等代表动合开关(控制设备启动后成通路的称为动合开关);$\bar{x},\bar{y}$ 等代表静合开关(控制设备启动后成断开的称为静合开关);$x\wedge y$ 和 $x\vee y$ 分别代表 x 和 y 的串联和并联,这样就可以把任何串联、并联开关电路和逻辑代数里的某个公式对应起来. 于是二进数的运算就可用逻辑线路来实现,还可以借助于逻辑代数来分析综合电子计算机中的逻辑电路.

二进数与十进数的互化(mutual conversion between binary number and decimal number)　一种算术运算. 指二进数与十进数的相互转换方法. 任何一个十进数都可以惟一地化成一个二进数;同样,任何一个二进数也可以惟一地化成一个十进数,其化法如下:

1. 化十进数为二进数. 可用二进数的基数 2 连续去除十进数,直到商是 0 为止,反序取余数依次排列,就是要求的二进数. 例如,把 $23_{(10)}$化成二进数:

```
2 | 2 3       余数  ↑   二 进 数 的
2 | 1 1   …… 1       右起第一位数字
   2 | 5   …… 1       右起第二位数字
   2 | 2   …… 1       右起第三位数字
   2 | 1   …… 0       右起第四位数字
       0   …… 1       右起第五位数字
```

故得 $23_{(10)}=10111_{(2)}$.

2. 化二进数为十进数. 先将二进数写成基数为 2 的幂的和式,再按照十进数的计算法则算出结果. 例如,把 $10111_{(2)}$化成十进数:

$$10111_{(2)}=1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$$
$$=16+0+4+2+1=23_{(10)},$$

故得 $10111_{(2)}=23_{(10)}$.

八进制(octal system)　特殊的记数进位制之一.在位值制记数法中,依据逢八进一的法则,使用0,1,2,3,4,5,6,7 八个数字记数,这种记数法称为八进制记数法或八进位制记数法,简称八进制或八进位制.用八进制记下的数称为八进数或八进位数.八进数可用符号$(\ )_8$来表示.将一个十进数化为八进数,可用基数8连续去除十进数,反序取余数就是要求的八进数.例如,把$(321)_{10}$化为八进数:

除式	余数	八进数的
8 | 3 2 1		
8 | 4 0	…… 1	右起第一位数字
8 | 5	…… 0	右起第二位数字
0	…… 5	右起第三位数字

所以$(321)_{10}=(501)_8$.

反之,任何一个八进数,都可以写作基数为8的幂的和的形式,再按十进数的计算法则算出结果,就得到对应的十进数.例如,把$(501)_8$化成十进数:

$$(501)_8=5\times8^2+0\times8^1+1\times8^0=(321)_{10}.$$

八进数的每个数码,与二进数中每三位一节的数码之间可列出如下的八进数与二进数的数字对照表:

八进数	0	1	2	3	4	5	6	7
二进数	000	001	010	011	100	101	110	111

利用上表就不难完成二进数与八进数之间的换算.例如$(1\,010\,001\,110)_2=(1216)_8$.

八进制记数法(octal notation)　见"八进制".

八进数(octal number)　见"八进制".

幂的和式(sum of powers)　数的一种表达式.指将正有理数(大于1)分解成幂指数的和.如果正整数$r(r>1)$表示数的进位制的基数,则一个r进数S可以表示成

$$\begin{aligned}S&=K_n\cdot r^n+K_{n-1}\cdot r^{n-1}+\cdots+K_1\cdot r^1\\&\quad+K_0\cdot r^0+K_{-1}\cdot r^{-1}+\cdots+K_{-m}\cdot r^{-m}\\&=\sum_{i=n}^{-m}K_i\cdot r^i,\end{aligned}\tag{1}$$

式中K_i是$0,1,\cdots,r-1$中的任何一个数码,m,n为非负整数,则上面的(1)式称为幂的和式.

幂的和式有下面特点:

1.每一个数码K_i和一个固定的基数幂r^i相对应,r^i称为相应数位上的位置值或权,上面(1)式亦称为数S按权的展开式,有时也书写成缩写式:$K_nK_{n-1}\cdots K_1K_0.K_{-1}\cdots K_{-m}$,为了区别进位制,一般要求在缩写式的右下足标注上基数r,如$K_nK_{n-1}\cdots K_1K_0.K_{-1}\cdots K_{-mr}$或$(K_nK_{n-1}\cdots K_1K_0.K_{-1}\cdots K_{-m})_r$,但通常对十进数的标注省略不写.

2.r进位制有一个固定的基数r,它的每一数位可能取r个不同的数码,计数时按"逢r进一,退一当r"的进退位原则进行.在r进制中高数位的权是相邻低数位的权的r倍,对r进制小数来说,小数点左移一位后,缩小到原数的$1/r$,右移一位后,则扩大到原数的r倍.将r进数化为十进数,使用幂的和式是很方便的,只需将r进制的幂的和式按十进数的方法进行计算就可以得到.

数制的转换(conversion of different notations of a number)　命数法术语.指不同进位制数的转换法.由于数的基数不同就产生了各种不同进位制的数,将基数为$r(r>1$,且为整数)的数,通过确定的法则化成基数为$s(s>1,s\neq r$,且为整数)的数,称为数制的转换.

1.r进数化为十进数.任何一个r进数$K_n\cdots K_1K_0.K_{-1}\cdots K_{-m(r)}$先写成幂的和式,即

$$\begin{aligned}&K_n\cdots K_1K_0.K_{-1}\cdots K_{-m(r)}\\&=K_n\cdot r^n+\cdots+K_1\cdot r+K_0\cdot r^0\\&\quad+K_{-1}\cdot r^{-1}+\cdots+K_{-m}\cdot r^{-m},\end{aligned}$$

再按十进数的计算法则进行运算,就可惟一地化为十进数.

2.十进数化为r进数.任何一个十进数都可惟一地化成r进数:

1)如果所要化的十进数是正整数,其化法是:用r进数的基数r连续去除十进数,直到商是0为止,反序取余数依次排列,就得到与之等值的r进数.这种方法称为r进取余法.

2)如果所要化的十进数是正的纯小数,可惟一地化成r进正纯小数.这时有两种可能情况,一种可能是化成有限r进正纯小数,另一种可能是化成r进无限正纯小数.当能化成有限r进正纯小数时,其化法是:用r进数的基数r连续去乘十进数的小数部分,直到乘积的小数部分全部是0为止,然后顺次取出每次所乘得的积中的整数部分的数字,依次排列为r进数中的正纯小数中的有效数字.这种方法称为r乘取整法.例如,将十进小数0.375化为六进数,

乘式	积的整数部分	六进制的小数部分的
0.375		
×) 6		
2.250	… 2	左起第一位有效数字
×) 6		
1.500	… 1	左起第二位有效数字
×) 6		
3.000	… 3	左起第三位有效数字

所以$0.375_{(10)}=0.213_{(6)}$.

若用r连续去乘十进数的小数部分无限次,均不能使积的小数部分全为0,这样的十进正纯小数就只可能化成无限r进正纯小数.只好根据实际要

求进行取舍，求得近似值. 例如，将十进小数 0.2375 化为八进数，

	积的整数部分	八进数的小数部分的
0.2375 ×）　8		
1.9000 …	1	左起第一位有效数字
×）　8		
7.2000 …	7	左起第二位有效数字
×）　8		
1.6000 …	1	左起第三位有效数字
×）　8		
4.8000 …	4	左起第四位有效数字
×）　8		
6.4000 …	6	左起第五位有效数字

所以 $0.2375_{(10)}=0.17146_{(8)}$.

如果一个数既有非零整数部分又有小数部分，应将整数部分和小数部分分别进行换算，然后合并，即可得到结果. 例如，将十进数 12.375 化为二进数，

$$12.375 = 12 + 0.375$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$1100.011_{(2)} \leftarrow 1100_{(2)} + 0.011_{(2)}$$

所以 $12.375_{(10)}=1100.011_{(2)}$.

此外，十进数化为二进数，还可以利用八进数与二进数的数字对照表（参见“八进制”）来进行，较为方便. 例如 $12.375_{(10)}=14.3_{(8)}=001100.011_{(2)}=1100.011_{(2)}$. 因此，十进数化为二进数常使用此法，称为“十→八→二”转换法. 如果需要将 r 进数化为 s 进数（$r\neq s\neq 10$），一般是先将 r 进数化为十进数，再由十进数化为 s 进数.

关系符号(relational symbols)　常用的数学符号之一. 指在算术中表示两个数、两个式子或数与式之间数量关系的符号. 算术中常用的关系符号有两类：

1. 表示相等与不等关系的符号，如等号、不等号、近似等号等.

2. 表示大小关系的符号，如大于号、小于号、不大于号、不小于号等.

等号(equal sign)　关系符号之一. 指表示两个数、两个式子或数与式相等的符号，记为“＝”，读作“等于”. 例如 $2+3=5$，$2x=3$，$a+b=c$ 等. 以符号“＝”作等号是雷科德(Recorde, R.)于 1557 年在《砺智石》中第一次使用的. 他用一对等长的平行线段作为等号是这样解释的：“再也没有别的两件东西比它们更相等了”，但等号使用的推广却很缓慢. 17 世纪后，经莱布尼茨(Leibniz, G. W.)的推广，才为人们广泛使用.

不等号(sign of inequality)　关系符号之一. 指表示两个数、两个式子或数与式子不相等的符号. 记为“≠”，读作“不等于”. 如 $2\neq 3$，$a+b\neq c$ 等.

近似等号(sign of approximately equal)　亦称约等号. 关系符号之一. 指表示两个数量近似地相等的符号. 记为“≈”或“≐”，读作“近似于”或“约等于”. 例如 $\pi\approx 3.1416$，$1\div 7\doteq 0.142857$ 等.

约等号(sign of approximately equal)　即“近似等号”.

大于号(sign of greater than)　关系符号之一. 指表示左边的数量大于右边数量的符号，记为“＞”，读作“大于”，如 $3>2$，$a>b$，$x+y>z$ 等. 第一个使用＞和＜表示大于和小于的是哈里奥特(Harriot, T.)，在他死后 10 年的 1631 年，发表了他著的《实用分析术》，在其中首次见到使用＞和＜表示大于和小于. 至于≯，≤，≮，≥等符号的出现，则是近代的事.

小于号(sign of less than)　关系符号之一. 指表示左边的数量小于右边数量的符号，记为“＜”，读作“小于”. 如 $2<3$，$a<b$，$x+y<z$ 等.

大于或等于号(sign of greater than or equal)　亦称不小于号. 关系符号之一. 指表示左边的数量大于或等于（即不小于）右边的数量的符号，记为“≥”，读作“大于等于”（“大于或等于”），也可记为“≮”，读作“不小于”. 如 $\pi\geq 3$（$\pi\nless 3$），$x^2\geq 0$（$x^2\nless 0$）等.

不小于号(sign of not less than)　即“大于或等于号”.

小于或等于号(sign of less than or equal)　亦称不大于号. 关系符号之一. 指表示左边的数量小于或等于（即不大于）右边数量的符号. 记为“≤”，读作“小于等于”（“小于或等于”），也可记为“≯”，读作“不大于”. 如 $\sqrt{3}\leq 2$（$\sqrt{3}\ngtr 2$），$a\leq b$（$a\ngtr b$），$R^2\leq 1$（$R^2\ngtr 1$）等.

不大于号(sign of not greater than)　即“小于或等于号”.

算术符号(arithmetical sign)　一类最基本的数学符号. 在算术里为了使推理清晰，运算简捷，所引用的字母和符号统称为算术符号. 常用的算术符号可分为运算符号、关系符号、逻辑符号、顺序符号四类.

运算符号(sign of operation)　常用的数学符号之一. 指按照运算法则进行加、减、乘、除、乘方、开方等运算时所使用的数学符号. 算式中常用的运算符号有六个，即加号、减号、乘号、除号、乘方号和开方号（或称根号）.

加号(sign of addition)　基本运算符号之一. 指代表加法运算的符号“＋”，读作“加”，表示把一数加于另一数之意. 加号在横式中常写于被加的两数之间. 如 $a+b$ 表示 a 与 b 相加. 首先运用符号“＋”表示加法运算的是德国人（参见“减号”）.

减号(sign of subtraction)　基本运算符号之

一. 指代表减法运算的符号“－”，读作“减”，表示把一数从另一数中减去之意. 减号在横式中常写于被减数和减数之间. 如 $a-b$ 表示从被减数 a 中减去 b. 加减运算是人类社会出现最早的运算，中国古代是用算筹进行运算，一般不记录计算过程，所以中国的古算书中没有表示加减运算的符号. 在 15 世纪末到 16 世纪间，意大利人曾用 $\bar{p}$ 或 p 表示加，用 $\tilde{m}$ 或 m 表示减. 利用“＋”和“－”分别表示加和减是从德国人开始的. 在德累斯顿城图书馆还存有 1484 年拉丁语代数手抄本，其中就使用了这种符号. 第一次在印刷图书中使用符号＋、－表示加减运算的是瓦德曼(Wadmann, J.)，他于 1489 年在莱比锡出版的德文《简章和速算》一书中采用了这种符号. 1631 年，第一个用“±”表示现代意义的加或减是奥特雷德(Oughtred, W.). 减号在现在也用作表示负数的负号或表示一个数的相反数的符号.

乘号(sign of multiplication)　基本运算符号之一. 指代表乘法运算的符号“×”或“·”，读作“乘”，表示两个数相乘之意. 16 世纪，施蒂费尔(Stifel, M.)于 1544 年出版的《综合算术》一书中，用字母 M(乘法的第一字母)表示乘，用 D(除法的第一字母)表示除. 第一次用符号“×”表示乘的是奥特雷德(Oughtred, W.)，在他 1613 年出版的《数学入门》中使用了“×”作乘号. 1698 年，莱布尼茨(Leibniz, G. W.)提出反对用“×”作乘号，他认为“×”易和 x 相混，他建议用符号“·”作乘号. 最早用“·”作乘号的是哈里奥特(Harriot, T.)，当时并未推广，在莱布尼茨提出使用以后，才开始广泛使用. 在中国，用符号“×”或“·”作乘号都可以，一般在字母前或括号前的乘号可省略.

除号(sign of division)　基本运算符号之一. 指代表除法运算的符号“÷”，另外，代表比的符号“:”和分数中的分数线符号“—”都有除的意义. “÷”读作“除以”，表示一个数除以另一个数之意. 如 $a \div b$ 表示被除数 a 除以除数 b 所得之商. 除号“÷”是雷恩(Rahn, J. H.)在 1659 年发表的一本代数学中最先使用的，史称雷恩记号. 莱布尼茨(Leibniz, G. W.)于 1684 年，在他的一篇论文中第一次使用符号“:”作除号，与当时流行的比号相同.

乘方号(sign of power)　基本运算符号之一. 指代表乘方运算的符号“a^m”，读作“a 的 m 次方”，它表示数 a 自乘 m 次，即 a^m 表示以 a 为底数的 m 次幂. 例如 a^2 读作 a 平方，a^3 读作 a 立方. 丢番图(Diophantus)用 Δ^r 表示 x^2，用 k^r 表示 x^3，算是最早的乘方号. 中国古代数学文献第一次使用“幂”字是在刘徽的《九章算术》注中. 一数自乘，中国古代称之为方，“乘方”一词是宋代以后开始使用的. 1484 年，许凯(Chuquet, N.)在他所著的《算术三篇》中，首先采用了 12^3，10^5 和 120^8 表示 $12x^3$，$10x^5$ 和 $120x^8$ 的指数符号，并引进了零指数和负指数的符号，他用 12^0 表示 $12x^0$，用 7^{1m}表示 $7x^{-1}$. 但是，他的著作在当时来说内容太深，没有被当时的欧洲数学界所接受，亦未对他的同辈人产生多大的影响，许凯著的书也是在他死后的 19 世纪才出版. 1636 年，休姆(Hume, J.)用罗马数字表示指数，把 A^3 写成 A^{iii}. 1637 年，经笛卡儿(Descartes, R.)的改进和推广成为现在通用的符号.

开方号(sign of evolution)　亦称根号. 基本运算符号之一. 指代表开方运算的符号“$\sqrt[n]{\quad}$”，它表示把一个数开 n 次方，特别当 $n=2$ 时称为开平方；当 $n=3$ 时称为开立方. 根指数 2 通常省略不写. 例如 $\sqrt[n]{a}$ 表示把 a 开 n 次方，读作“a 的 n 次方根”；$\sqrt[3]{a}$ 表示把 a 开立方，读作“a 的立方根”. 1220 年，斐波那契(Fibonacci, L.)最早用符号℞表示平方根号，他是取拉丁文 Radix(平方根)头尾两个字母合并而来. 1637 年，笛卡儿(Descartes, R.)在他的著作《几何学》中第一次用 $\sqrt{\quad}$ 表示根号. 他是取 root(方根)的第一字母和括线的符号“—”结合在一起的合成符号.

根号(radical sign)　即“开方号”.

开平方(extraction of square root)　见“开方号”.

开立方(extraction of cubic root)　见“开方号”.

顺序符号(sign of order)　常用的数学符号之一. 指用来确定运算顺序的符号. 常用的顺序符号有：—、( )、[ ]、{ }，他们分别称为括线、小括号(或圆括号)、中括号(或方括号)、大括号(或花括号). 在计算过程中确定的顺序是：先算括线，次算小括号，再次中括号，最后算大括号. 最先用括线表示运算顺序的是许凯(Chuquet, N.)，他在 1484 年写的《算术三篇》中，把横线加在要先算的式子下面. 1646 年，斯霍滕(Schooten, F. van)把括线加在要先算的式子之上. 最早使用小括号( )的是施蒂费尔(Stifel, M.)，但他的手稿没有印刷. 最早使用小括号的是克拉维乌斯(Clavius, C.)于 1608 年在意大利出版的数学书中. 17 世纪，沃利斯(Wallis, J.)的著作《无穷的算术》中，开始出现中括号[ ]. 1591 年，韦达(Viéte, F.)的著作中开始应用大括号. 直到 18 世纪后半期，所有括号才在全世界通用.

括号(brackets)　亦称括弧. 常用的数学符号之一. 指用来规定运算顺序的符号. 包括大括号{ }，中括号[ ]，小括号( )(参见“顺序符号”).

括弧(brackets)　即“括号”.

括线(vinculum)　见“顺序符号”.

小括号(round brackets)　见“顺序符号”.

中括号(square brackets)　见“顺序符号”.

大括号(brace)　见“顺序符号”.

逻辑符号(logical symbol)　常用的数学符号之一.指在演算和推理过程中,为了使数学命题的表达简洁、准确,而引用的符号语言.在算术中采用的逻辑符号有三种:

1.命题结构符号.符号“∵”、“∴”读作“因为”、“所以”.在一个以数学式子表述的推演过程中,常把符号“∵”写于依据条件之前,把符号“∴”写于得出的结论之前,以表述条件和结论之间的逻辑关系.若用普通语言叙述数学命题时,也常采用“如果……,那么……”或“若……,则……”的形式.

2.蕴涵符号.符号⇒或→,读作“推出”,如 $A\Rightarrow B$ 表示可以由 A 推出 B 之意.

3.等价符号.亦称等值符号.符号⇔,读作“等价”或“等值”,如 $A\Leftrightarrow B$ 表示可以由 A 推出 B,亦可由 B 推出 A 之意,即是 A 和 B 是等价的.

命题结构符号(propositional structure symbol)　见“逻辑符号”.

蕴涵符号(implication symbol)　见“逻辑符号”.

等价符号(equivalence symbol)　见“逻辑符号”.

等值符号(equivalence symbol)　即“等价符号”.

等式(equality)　见本卷《初等代数》同名条.

等量公理(axioms of equality)　见本卷《初等代数》同名条.

小　　数

小数(decimal)　亦称十进小数.数系中最基本的一种数.指非整数的(实)数的一种表示方式,该数 α 必可表示成 $\alpha=a+\alpha_0$,a 是整数,而且 $0<\alpha_0<1$.由于整数通常使用十进位制,在小数中也借用十进数的10个数字表示 α_0.因此,小数的统一形式是 $\alpha=a+\alpha_0=a.a_1a_2a_3\cdots$,这里 a 表示数 α 的整数部分,整数部分 a 后的圆点称为小数点,小数点后表示小于1的 α_0 的部分称为小数部分,其中的 $a_i(i=1,2,3,\cdots)$ 都是从0到9的10个数字,即不大于9的整数.依照十进数每向左进一位,位值增大10倍,每向右退一位,位值缩小为1/10的规则,小数部分数字位值也遵循这一规则,按小数点前一位的位值为1,小数点后第一位位值是1/10,第二位位值是 $1/10^2$,第三位位值是 $1/10^3\cdots$,因此,小数的值用分数式表示是

$$a+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots$$

小数部分的数位自小数点起依次称为十分位、百分位、千分位……(参见“小数位顺序表”).如小数2.7读作二又十分之七,0.306读作零又千分之三百零六.对于小数 $a.a_1a_2a_3\cdots$,如果存在正整数 i,使得从 a_i 起向右,不再出现非零的数字,则此小数称为有限小数或有尽小数,否则称为无限小数或无尽小数.在写出有限小数时,可以只写到最后一个不为0的数位,或最多只写出一部分为0的数位,而略去其后所有的0,因此,通常用到见到的一般都是有限小数,如1.414,9.50.由此可见,整数也可表示成小数,只不过是有限小数罢了.有限小数用分数式表示只需有限项,所以一定可以化成分数,无限小数有这样的性质:对于任意正整数 j,一定存在大于 j 的正整数 k,使得 $a_k\neq 0$.无限小数可分为“循环小数”和“无限不循环小数”两种.循环小数可以化成分数,即是有理数,如 $1/3=0.3333\cdots$;无限不循环小数是无理数,如 $\pi=3.14159\cdots$.

中国刘徽最早创用十进小数记数法.在刘徽注《九章算术》的《少广》章开方术下面有:“微数无名者以为分子,其一退十为母,其再退以百为母,退之弥下,其分弥细……”即把不尽根用十进分数表示.刘瑾(约1300年)著《律吕成书》中,将106368.6312表示成

丨 □ ⊥ ||| ⊥ ⊤|||
十 万 千 百 十 忽　⊥ ||| 一 ||
　　　　　　　　十 百 千 万
　　　　　　　　分 分 分 分

把小数部分降低一格,这是世界上最早的小数表示法.在中国之外,最早应用十进制分数的是阿尔·卡西(al-Kāshī,G. al-D. J. M.),他在《算术之钥》一书中使用了十进分数,且给出了小数的运算法则.在欧洲,斯蒂文(Stevin,S.)的《论十进》一书,于1585年在莱顿出版,第一次明确地陈述了小数理论,提倡用十进制小数来书写分数.斯蒂文采用的记号,把小数32.57记为

$$3\overset{⓪}{2}\overset{①}{5}\overset{②}{7}\quad 或 \quad 3\ 2⓪\,5①\,7②,$$

现在通用的小数点“.”,则是克拉维乌斯(Clavius,C.)于1593年创用的.还曾沿用过以逗号表示小数点的记法.

十进小数(decimal fraction)　即“小数”.

小数点(decimal point)　见“小数”

十进小数记数法(decimal fraction notation)　见“小数”.

无限小数(infinite decimal)　见“小数”.

有限小数(finite decimal)　见“小数”.

小数位(decimal place)　算术术语.指小数记数法的位置顺序.十进小数的小数部分,相邻两数之间的进率也是10.小数部分的各位称小数位,从小数点后面第一位起分别称为十分位、百分位、千分位

……也称小数第一位、小数第二位、小数第三位……它们的计数单位分别为1/10,1/100,1/1000,…中国古代对小数也采用命名记数法,据《孙子算经》上卷记载:"蚕所生吐丝为忽,十忽为秒,十秒为毫,十毫为厘,十厘为分."此种命名法在刘徽注《九章算术》中已有.直至明、清时代,命名从十分位开始称为分、厘、毫、丝、忽、微、纤、沙、尘、渺、漠……

小数位顺序表(ordered positional table of the decimal places)　小数数位顺序分类法则.按照由小到大的顺序把小数计数单位从右到左排在表格中,称为小数位顺序表,列表如下:

	整数部分	小数点	小数部分
数位名称	…万千百十个 …位位位位位	.	十分位　百分位　千分位　万分位　…
计数单位	…万千百十个		$\frac{1}{10}$　$\frac{1}{100}$　$\frac{1}{1000}$　$\frac{1}{10000}$　…

小数点移动(shift of the decimal point)　算术术语.指小数点向左或向右的变动.小数是按照位值原则,并以小数点作为定位标准来写出的,因此移动小数点的位置就会引起数位的变化,从而小数的大小也随着发生变化.其变化规律是:

1.把小数点向右移动一位,数值就扩大到原数的10倍,小数点向右移动$n(n\in\mathrm{N})$位,数值就扩大到原数的10^n倍.

2.把小数点向左移动一位,数值就缩小到原数的1/10,小数点向左移动$n(n\in\mathrm{N})$位,数值就缩小到原数的$1/10^n$.

纯小数(pure decimal)　常见的一种小数.指整数部分为零的小数.纯小数小于1.如0.25,0.314都是纯小数.

带小数(mixed decimal)　亦称混小数.常见的一种小数.指整数部分不为零的小数.带小数的值大于等于1.如2.25,31.728都是带小数.

混小数(mixed decimal)　即"带小数".

小数读法(reading method of decimals)　一种读数法.指读小数的方法.有两种读法:

1.小数的本源读法,按照小数的原意读出.如1.7读作"一又十分之七".

2.小数的形式读法,按照小数的书写形式和顺序读出数字和小数点.整数部分仍按整数读法,小数点简读作点,小数部分顺次读出各数位上的数字.遇到零按其个数一一读出.如13.15读作"十三点一五";0.0025读作"零点零零二五".

用10的方幂表示小数(representation of decimal by the powers of 10)　表示小数的一种方法(参见"小数").设某一个小数B的整数部分有$m+1$位数字,小数部分有n位数字,则小数B可表示为:

$$B=a_m\cdot 10^m+a_{m-1}\cdot 10^{m-1}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0\cdot 10^0+b_1\cdot 10^{-1}+b_2\cdot 10^{-2}+\cdots+b_{n-1}\cdot 10^{-(n-1)}+b_n\cdot 10^{-n}.$$

例如,$23.4012=2\times 10+3\cdot 10^0+4\times 10^{-1}+0\times 10^{-2}+1\times 10^{-3}+2\times 10^{-4}$.

小数大小比较(comparison of decimals)　比较小数大小的方法.其具体作法如下:比较两个正小数的大小,先看它们的整数部分,整数部分大的小数就大;整数部分相同的,十分位上的数字大的那个小数就大;十分位上的数字也相同时,依次比较百分位、千分位上的数字等.

循环小数(recurring decimal)　无限小数的一种特殊形式.对一个无限小数$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$(参见"小数"),若能找到两个正整数$s\geqslant 0,t>0$,使得$a_{s+i}=a_{s+kt+i}(i=1,2,\cdots,t;k=1,2,\cdots)$成立,则称此无限小数为循环小数,记为$0.a_1a_2\cdots a_s\dot{a}_{s+1}\cdots\dot{a}_{s+t}$.对于一个循环小数而言,满足上式的$s,t$值有无数多个,如果取其中最小的$s,t$值,则称$a_{s+1}a_{s+2}\cdots a_{s+t}$为这个循环小数的循环节;$t$称为循环节的长度;若最小的$s=0$,则这循环小数称为纯循环小数;如果最小的$s>0$,则相应的循环小数称为混循环小数,并把小数点之后至循环节之前的部分$a_1a_2\cdots a_s$称为非循环节.任何一个循环小数必可化为分数,其化法是:

1.纯循环小数化分数.设$0.\dot{a}_1\dot{a}_2\cdots\dot{a}_t$是循环节等于$t$的纯循环小数,其中$a_i(i=1,2,\cdots,t)$都是不大于9的非负整数,但在$a_1,a_2,\cdots,a_t$中至少有一个非零数.令$x=0.\dot{a}_1\dot{a}_2\cdots\dot{a}_t$,则有

$$\begin{aligned}10^t x&=10^{t-1}a_1+10^{t-2}a_2+\cdots\\&\quad+a_t+0.a_1\cdots a_ta_1\cdots a_t\cdots\qquad(1)\\&=a+x,\end{aligned}$$

式中$a=10^{t-1}a_1+10^{t-2}a_2+\cdots+a_t$是正整数,若令$b=10^t-1$,由于$t\geqslant 1$,所以$b$是正整数,由(1)式得

$$x=\frac{a}{10^t-1},$$

即$0.\dot{a}_1\dot{a}_2\cdots\dot{a}_t=a/b$.

2.混循环小数化分数.设$0.a_1a_2\cdots a_s\dot{a}_{s+1}\cdots\dot{a}_{s+t}$是混循环小数,则有

$$0.a_1a_2\cdots a_s\dot{a}_{s+1}\cdots\dot{a}_{s+t}=0.a_1a_2\cdots a_s+\frac{0.\dot{a}_{s+1}\cdots\dot{a}_{s+t}}{10^s}.$$

由于$0.a_1a_2\cdots a_s$是有限小数,所以$0.a_1a_2\cdots a_s=a/b$.式中a,b都是正整数,$(a,b)=1,a<b$.由于$0.\dot{a}_{s+1}\cdots\dot{a}_{s+t}$是一个纯循环小数,所以有$0.\dot{a}_{s+1}\cdots\dot{a}_{s+t}=c/d$,其中$c,d$都是正整数.综上所述可得

$$0.a_1a_2\cdots a_s\dot{a}_{s+1}\cdots\dot{a}_{s+t}=\frac{10^s ad+bc}{10^s bd}.$$

关于有理数表为循环小数,有如下结论:

1. 有理数 a/b 中，$0<a<b$，$(a,b)=1$，能表示成纯循环小数的充分必要条件是 $(b,10)=1$.

2. 有理数 a/b 中，$0<a<b$，$(a,b)=1$，$b=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot b_1$，$(b_1,10)=1$ $(b_1\neq 1)$，且 α,β 是不全为 0 的非负整数，则 a/b 可表为混循环小数，其中非循环节的位数是 $u=\max(\alpha,\beta)$.

循环节(recurring period)　见“循环小数”.

循环节长度(length of recurring period)　见“循环小数”.

循环小数的读法(method of reading recurring decimals)　一种读数法. 指读循环小数的一种方法. 即先按一般的小数读，然后加读循环节. 例如 $1.\dot{3}$读作“一点三，三循环”；$7.1\dot{3}\dot{6}$读作“七点一三六，三六循环”；$0.9\dot{8}0\dot{7}$读作“零点九八零七，八零七循环”.

纯循环小数(pure recurring decimal)　见“循环小数”.

混循环小数(mixed recurring decimal)　见“循环小数”.

无限不循环小数(infinite irrecurring decimal)　见“小数”.

小数加法法则(addition rule of decimals)　小数基本运算法则之一. 指小数竖式加法的运算方法. 由于小数的记数原则与整数相同，每个数位表示不同的计数单位，所以，几个小数相加，必须把加数的相同数位对齐(也就是把小数点对齐)，然后按整数加法法则计算，和的小数点与加数的小数点对齐. 小数部分的末尾有零可以去掉. 小数加法适合交换律和结合律.

小数减法法则(subtraction rule of decimals)　小数基本运算法则之一. 指小数竖式减法的运算方法. 两个小数相减，把它们的相同数位对齐(也就是把小数点对齐)，从右向左各数位依次相减，如果某位上不够减，必须从邻近的高位数字中借 1 当 10，加到本位数字中相减，差的小数点也和它们的小数点对齐. 如果差的小数部分的末尾有零，可以去掉零.

小数乘法法则(multiplication rule of decimals)　小数基本运算法则之一. 指小数竖式乘法的运算方法. 整数和小数相乘或小数和小数相乘，可以先不管它们的小数点，按照整数乘法法则计算，在所得的乘积里记上小数点，积的小数部分的位数等于两个乘数里小数部分的位数和. 小数乘法适合乘法交换律、乘法结合律和乘法关于加法的分配律.

小数除法法则(division rule of decimals)　小数基本运算法则之一. 指小数竖式除法的运算方法. 小数除法有三种情况：

1. 除数是整数，被除数是小数时，按整数除法法则进行，商的小数点应与被除数的小数点对齐.

2. 除数与被除数都是小数时，先把除数和被除数的小数点向右移动相同的位数，使除数变为整数，然后按整数除法法则进行演算，商的小数点与被除数的小数点对齐.

3. 整数与整数相除，不能整除时，先在被除数个位的后面添写小数点，在小数点后面添写零，然后按小数除以整数的法则进行运算，商的小数点与被除数中所添的小数点对齐.

小数化为百分数(change decimal into percentage)　小数的一种恒等变形. 指将小数化成百分数的方法. 其具体作法如下：把小数点向右移动两位，位数不够时用零补足，然后与百分号并列. 如 $0.25=25\%$，$2.1=210\%$.

小数化分数(change decimal into fraction)　小数的一种恒等变形. 指将小数转换成分数的方法. 其具体作法如下：化有限小数为分数，可先按最末一位小数的小数位把它改写成分母是 10^n $(n\in\mathbf{N})$ 的十进分数，然后通过约分化为最简分数. 例如

$$0.019=\frac{19}{1\,000},\quad 2.05=\frac{205}{100}=\frac{41}{20}=2\,\frac{1}{20}.$$

纯循环小数化分数(change pure recurring decimal into fraction)　见“循环小数”.

混循环小数化分数(change mixed recurring decimal into fraction)　见“循环小数”.

小数和分数的混合运算(mixed operation of the decimal and fraction)　一种算术运算. 指将小数与分数一起进行四则运算. 在小数、分数四则混合运算中，可以将其中的小数化为分数，也可以将分数化为小数，用哪种方法比较简便，要作具体分析：一般地，作小数与分数的加减混合运算时，把分数化成小数后，再进行加减运算比较简便. 如果分数不能化成有限小数，就把小数化成分数进行计算；作小数与分数的乘除混合运算时，把小数化成分数后，再进行乘除运算比较简便.

分　数

分数(fraction)　数系中最基本的一种数. 指把单位 1 平均分成若干份，表示其中的一份或几份的数. 如果把单位 1 平均分成 n 份 $(n\in\mathbf{N}_+)$，表示其中一份的数，记为

$$\frac{1}{n}\text{ 或 }1/n,$$

读作“n 分之一”；表示其中 m 份的数，记为

$$\frac{m}{n}\text{ 或 }m/n,$$

读作"n 分之 m"($m\in\mathrm{N}, n\in\mathrm{N}_+$). m 称为分子，n 称为分母，中间的横线称为分数线. $1/n$ 称为 m/n 的分数单位，也称为单位分数. 分数 m/n，既可以看成把 m 个单位，平均分成 n 份，表示其中一份的数；也可以看成把单位 1 平均分成 n 份，每份为 $1/n$，表示 m 个 $1/n$ 的数. m/n本身是一个数，当 $n=1$ 时，$m/n=m/1=m$；当 $m=0$ 时，规定$m/n=0/n=0$. 于是，任何整数都可以看成是分母为 1 的分数，所以全体自然数和零组成分数集合的子集合. 分数和除法的关系是$m\div n=m/n$，除法中的被除数相当于分数中的分子，除数相当于分母，除号相当于分数线. 但分数与除法是有区别的，分数是一个数，而除法是一种运算. 公元前 2100 年，古巴比伦人记数时采用六十进制，曾有如下记载：

$$\sin 1°=\frac{1}{60}+\frac{1}{60^2}+\frac{1}{60^3}.$$

这是世界上出现最早的分数. 中国古代最早出现分数在《左传》中有记载：国王对诸侯封地做了这样的规定："大都不过三国之一，中五之一，小九之一."意思是诸侯的都城最大不得超过周朝国都的三分之一，中等的不超过五分之一，小的不超过九分之一.

分子(numerator)　见"分数".

分母(denominator)　见"分数".

分数线(fraction stroke)　见"分数".

分数单位(fraction unit)　见"分数".

单位分数(unit fraction)　即"分数单位".

真分数(proper fraction)　分数的形式之一. 分子小于分母的分数. 任何一个真分数都小于 1.

假分数(improper fraction)　分数的形式之一. 分子不小于(即等于或大于)分母的分数. 任何一个假分数都不小于 1.

带分数(mixed fraction)　假分数的另一书写形式. 把整数与真分数相加的和式，省去加号，写成两个加数并列形式. 例如，

$$2\frac{3}{5}\text{表示 }2+\frac{3}{5}\text{的意义.}$$

带分数的读法是在整数与分数部分之间加读一个"又"字，例如，

$$2\frac{3}{5}\text{读作"二又五分之三".}$$

任何一个带分数都可以化成假分数；反之，任何一个假分数也可以化成带分数.

十进分数(decimal fraction)　分数的一种特殊形式. 指分母是 10^n(n 为自然数)的分数. 例如，

$$\frac{3}{10},\ \frac{17}{10^2},\ \frac{2\,461}{10^3}.$$

十进分数的计数单位是

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \cdots,\ \frac{1}{10^n},\ \cdots$$

任何一个十进分数都可以表示成各个计数单位(包括整数部分的计数单位和十进分数的计数单位)之和的形式. 例如，

$$\frac{32156}{10^3}=3\times10+2\times1+1\times\frac{1}{10}+5\times\frac{1}{10^2}+6\times\frac{1}{10^3}.$$

一般地，对一个十进分数 $k/10^m$(k 是整数，m 是自然数)，设分子 k 的各位数字依次是 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0, b_1, b_2, \cdots, b_{m-1}, b_m$($n$ 为整数)，把 k 表示成各个计数单位之和的形式为 $k=a_n\cdot10^{n+m}+a_{n-1}\cdot10^{n+m-1}+\cdots+a_0\cdot10^m+b_1\cdot10^{m-1}+\cdots+b_m$，则

$$\frac{k}{10^m}=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots+a_0+b_1\cdot\frac{1}{10}+\cdots+b_m\cdot\frac{1}{10^m}.$$

分数的基本性质(basic properties of a fraction)　分数的基本特征. 它的内容是分数的分子与分母同乘以或同除以一个不为零的自然数，分数的值不变，即

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}\ (m\in\mathrm{N}_+),$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}\ (m\in\mathrm{N}_+).$$

扩分(expansion of a fraction)　分数的基本概念之一. 指分数的一种恒等变形. 根据分数的基本性质，把分数的分子和分母同乘以相同的整数(零除外)称为扩分. 在扩分中，分数的值保持不变.

分数大小比较(comparison of fractions)　分数的一种运算法则. 即比较分数大小的方法. 设 a/b，c/d 是两个分数，a, b, c, d 都是正整数，把它们的分子与分母交叉相乘，两个分数间的大小可按以下法则确定：

$$\text{若 } ad<bc,\ \text{则}\frac{a}{b}<\frac{c}{d};$$

$$\text{若 } ad=bc,\ \text{则}\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$

$$\text{若 } ad>bc,\ \text{则}\frac{a}{b}>\frac{c}{d}.$$

在特殊情况下，可用以下简便方法比较大小：

1. 同分母的两个分数，分子大的分数较大.
2. 同分子的两个分数，分母小的分数较大.

通分(reduction of a fraction to a common denominator)　分数的基本概念之一. 把几个异分母分数，分别化成和原来分数值相等的同分母分数的运算称为通分. 通分的方法是先求出原来几个分数的分母的最小公倍数，然后把各分数化成用这个最小公倍数作公分母的分数. 即把各个分母的最小公倍数分别除以各个分数的原分母，所得的商乘各自的分子，就得到同分母分数，根据分数的基本性质，它们和原分数的分数值保持不变.

公分母(common denominator)　一种特殊的分母.分数通分后,几个分数的相同分母称为公分母(参见“通分”).

约分(reduction of a fraction)　分数的基本概念之一.把一个分数的分子和分母分别除以它们的非 1 公约数,将其化成与原分数值相等的分数的运算称为约分.约分的结果,通常都要约成最简分数.约分的方法有两种:

1.逐次约分法.当分子、分母的非 1 公约数不止一个时,把分数的分子和分母逐次除以它们的公约数,直到得出一个最简分数为止.

2.一次约分法.把分数的分子和分母分别除以它们的最大公约数,就得到最简分数.

世界最早的分数约分运算,首推中国古代的《九章算术》,该书中记载的约分法则是:“可半者半之,不可半者,副置分母子之数,以少减多,更相减损,求其等也,以等数约之.”译为今文为:分子、分母都是偶数时,应都用 2 除;如果不都是偶数,该用辗转相减的方法,从较大的数减去较小的数,最后得到一个余数和减数相等,这就是所求的最大公约数.这种辗转相减求最大公约数的方法和欧几里得(Euclid)的辗转相除法,在理论上是一致的.

最简分数(irreducible fraction)　亦称既约分数,又称不可约分数.一种分数名称.指分子与分母互质的分数.

既约分数(irreducible fraction)　即“最简分数”.

不可约分数(irreducible fraction)　即“最简分数”.

可约分数(reducible fraction)　亦称非既约分数.一种分数名称.指分子与分母的最大公约数大于 1 的分数.

分母的补因数(complementary factor of a denominator)　分数运算中的一种术语.指在分数的扩分运算时,按分数的基本性质将分子、分母扩大的运算过程中,用原分母去除扩大后的分母所得的商(即分子、分母同时扩大的那个倍数).例如,在通分运算时,用某个分数的分母去除各分母的最小公倍数,所得的商就是该分数分母的补因数(参见本卷《初等数论》中的“补因数”).

繁分数(complex fraction)　一种分数名称.指分数的分子或分母之中含有分数的分数.任何繁分数都可以根据分数的基本性质,化为简分数.如

$$\frac{\frac{4}{6}}{9},\quad \frac{1}{\frac{2}{3}},\quad \frac{\frac{5}{6}}{2-\frac{1}{3}}$$

等都是繁分数.还有一种形式较繁的分数称为连分数(参见本卷《初等数论》中的“连分数”).

繁分数化简(reduction of a complex fraction)　分数的一种恒等变形.指将繁分数转换成简分数的方法.一般有两种方法:

1.把分子与分母位置上的算式,分别进行计算,各得出一个分数,最后两分数相除即得.如

$$\frac{\frac{5}{6}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{3}}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}.$$

2.把分子与分母同乘以所有分母的最小公倍数,最后化简.如

$$\frac{\frac{5}{6}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}\times 6}{\frac{5}{3}\times 6}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

简分数(simple fraction)　一种分数名称.相对于繁分数来说,分子与分母都是一个正整数的分数.

算术数(arithmetic number)　亦称非负有理数.算术的基本概念之一.正整数、零、正分数(或正小数)统称算术数.正小数包括有限正小数与无限循环正小数.

非负有理数(nonnegative rational number)　即“算术数”.

分数加法(addition of fractions)　分数的基本运算之一.指求两个分数的和的运算.

分数加法的运算法则是:

1.同分母分数相加,把分子相加的和作为和的分子,原分母仍作和的分母.

2.异分母分数相加,先通分化为同分母后,再按同分母分数相加的法则进行.

3.带分数相加,把各个加数中的整数部分相加所得的和作为和的整数部分,再把各个加数中的分数部分相加所得的和作为和的分数部分,若得的分数部分为假分数,要化为整数或带分数,并将其整数再加入整数部分;或者把全部加数中的带分数先化为假分数,再按分数加法的法则求和,然后将结果仍化为带分数或整数.

4.每次加得的和,都要约分化成最简分数;如果所得的和是假分数,要化成整数或带分数.

分数加法适合交换律和结合律.

中国是世界上系统叙述分数运算最早的国家,《九章算术》第一章《方田》中,就有比较完整的分数计算方法,将分数加法称为合分,其法则是:“母互乘子,并以为实,母相乘为法,实如法而一.”实即分子,法即分母,这段话译为今文是:两分数的分子与分母交换相乘加在一起作和的分子,而将分母相乘作和的分母.若用现代的符号可写为

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}.$$

在国外最早建立分数加法运算的是鲁多尔夫(Rudolff,C.),他在1530年发表的德文著作中,把加法运算

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

写成下面格式

$$\frac{\begin{array}{cc}8 & 9\\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4}\end{array}}{12}\text{,得 }\frac{17}{12},$$

他把公分母12写在下面,相应的新分子写在上面,相加得17/12,可见他已掌握了通分的方法.欧洲直到17世纪,多数的书在计算分数相加时都不要求用最小公倍数.只有温盖特(Wingate,E.)所著初等算术课本给出了最小公分母的求法.

分数减法(subtraction of fractions)　分数的基本运算之一.指求两个分数的差的运算.分数减法是分数加法的逆运算.

分数减法的运算法则是:

1.同分母分数相减,分母不变,分子相减所得的差作为差的分子.

2.异分母分数相减,先通分,化为同分母的分数后,再按同分母的减法法则进行运算.

3.带分数相减,先将各带分数化为假分数,再通分化为同分母的分数,然后按同分母分数相减的法则进行运算,最后的差化为带分数或整数.

4.差不是最简分数时,要通过约分化为最简分数.

最早的分数减法运算见于中国古代的《九章算术》.该书称分数减法为减分,其法则是:"母互乘子,以少减多,余为实,母相乘为法,实如法而一."用现代的数学符号可表示为

$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}\quad(bc\geqslant ad).$$

分数乘法(multiplication of fractions)　分数的基本运算之一.指求两个分数的积的运算.

分数乘法的运算法则是:

1.分数乘以分数,分子相乘所得的积作积的分子,分母相乘所得的积作积的分母.

2.分数乘以整数与整数乘以分数,都可以把整数看成是1为分母的分数,按分数与分数相乘的法则进行运算.

3.乘数中有带分数时,先把带分数化为假分数,然后按分数与分数相乘的法则进行运算.

4.积是可约分数时,要约分化为最简分数.

分数乘法的含义:

1.分数乘以整数的含义:若 a/b 是任意一个分数,k 是大于1的整数,那么 $(a/b)\cdot k$ 就是求 a/b 的 k 倍.

2.分数乘以分数的含义:

1) 分数乘以 $1/n$.若 a/b 是任意一个分数,n 是大于1的整数,那么 $a/(bn)$ 是 a/b 分成 n 等份中的一分,即 $a/(bn)$ 是 a/b 的 $1/n$.

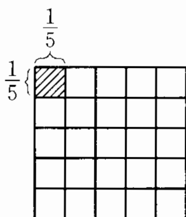
2) 分数乘以 m/n.若 a/b 是任意一个分数,n,m 都是大于1的整数,那么 $(a/b)\cdot(m/n)=(am)/(bn)=[a/(bn)]\cdot m$,而 $a/(bn)$ 表示把 a/b 分成了 n 等份,所以,一个分数 a/b 乘以分数 m/n,就是求把 a/b 分成了 n 等份以后的 m 个等份,也就是求 a/b 的 n 分之 m 是多少.

分数乘法适合交换律、结合律、乘法对加法的分配律.

最早的分数乘法运算见于中国古代的《九章算术》.该书称分数乘法为乘分,其法则是:"母相乘为法,子相乘为实,实如法而一."译为今文是:分母相乘作积的分母,分子相乘作积的分子.用现代的数学符号可表示为

$$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}.$$

在欧洲,汤斯托尔(Tonstall,C.)在1522年发表的用拉丁文写的算术书中,说明 $1/5\times1/5$ 时,先将正方形垂直地均分成5个长条,然后在水平地均分成5个长条(如图),这样就分成了25个小正方形,其中每一个小正方形即



$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}.$$

分数除法(division of fractions)　分数的基本运算之一.是分数乘法的逆运算,即求两个分数的商的运算.只要除数不是零,分数除法运算总可以施行,并且运算的结果是惟一的.

分数除法的运算法则是:

1.两个分数相除时,用被除数的分子与除数的分母的积作商的分子,用被除数的分母与除数的分子的积作商的分母.

2.被除数与除数中有带分数时,先化为假分数,再按上述法则进行除法运算,商要化为带分数.

3.商数若非最简分数时,要进行约分,化成最简分数.

分数除法的含义:因为分数除法是分数乘法的逆运算,所以从分数乘法的含义可以推出分数除法的含义.a/b 除以 m/n,就是要求一个数 x/y,使得 $(x/y)\cdot(m/n)=a/b$,或者说使得 $(m/n)\cdot(x/y)=a/b$,前者的意义是,计算 $(a/b)\div(m/n)$,就是已知一个数的 m/n 是 a/b,求这个数;后者的意义是,计算 $(a/b)\div(m/n)$,就是求 a/b 是 m/n 的几分之几.由于

整数可以看做以 1 为分母的分数，所以整数除法的含义，也被包括在分数除法的上述两种含义之内，了解分数除法的含义，可以解决已知一个数的几分之几是多少，求这个数的问题；和已知两个数，求一个数是另一个数的几分之几的问题，整数除法的运算性质以及商的变化规律也适用于分数除法.

最早的分数除法运算见于中国古代的《九章算术》.该书称分数除法为经分，其法则是："法分母乘实(为实)，实分母乘法(为法)，实如法而一."译为今文是：除数的分母乘被除数的分子为商的分子，除数的分子乘被除数的分母为商的分母. 用现代的数学符号可表示为

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{bc}{ad}.$$

倒数(reciprocal)　与一分数有特殊关系的数. 乘积是 1 的两个分数，互称为倒数. 但是零没有倒数. 非零任意数 a 的倒数是$1/a$. 非零分数 a/b 的倒数是 b/a.

分数问题(fraction problem)　一种算术问题. 指用分数计算来解答的应用题. 它分为简单分数应用题和复合分数应用题两类.

分数化小数(change of fraction into decimal)　一种恒等变形. 指将分数通过一定的法则化为小数的运算. 因为每一个假分数，都可以化为整数或一个整数与一个真分数的和，而每个真分数又可以通过约分化为最简分数，所以，研究分数化小数，只需研究最简分数化小数.

分数化小数可分为三种情况：

1. 分数化为有限小数. 一个最简分数能化为有限小数的充分必要条件是分母的质因数只有 2 和 5.

2. 分数化为纯循环小数. 一个最简分数能化为纯循环小数的充分必要条件是分母的质因数里没有 2 和 5. 其循环节的位数等于能被该最简分数的分母整除的最小的 99…9 形式的数中 9 的个数.

3. 分数化为混循环小数. 一个最简分数能化为混循环小数的充分必要条件是分母既含有质因数 2 或 5，又含有 2 和 5 以外的质因数. 化成的混循环小数中，不循环的位数等于分母里的因素 2 或 5 的指数中较大的一个；循环节的位数，等于能被分母中异于 2，5 的因子整除的最小的 99…9 形式的数中，数 9 的个数.

百分数(percentage)　一种特殊分数. 指分母是 100 的分数，或表示一个数是另一个数的百分之几的数. 百分数分母常用符号"%"表示，称为百分号，并写成分子与百分号并列的形式. 例如 5%、1.5%，读作百分之五、百分之一点五. 百分数在日常生活、工农业生产、统计工作和科学研究等方面具有广泛应用.

百分号(sign of percent)　见"百分数".

百分比(percent)　亦称百分率. 分数术语. 表示两个量的比. 当比值写成百分数形式时，这个比值称为这两个量的百分比. 百分比亦表示部分占总体的百分数. 在实际应用中，百分率因其所表示的数量关系不同而有不同的名称，如发芽率、成活率、及格率、合格率、出粉率、出油率、出勤率、增长率、命中率、利率、物体的纯度等. 例如，

$$\text{发芽率} = \frac{\text{发芽种子数}}{\text{种子的总数}} \times 100\%.$$

百分率(percent)　即"百分比".

百分点(point of percent)　分数术语. 在显示经济指标时，经常使用百分点. 例如某工厂第二季度的生产值比第一季度增长 15.5%，第三季度又增长 6 个百分点，增长率就成为 21.5%.

成数(number of tenth)　亦称十分数. 一种特殊分数. 表示一数是另一个数的十分之几的数. 例如，今年增产二成，就是增产 2/10；又如三成五就是 3.5/10，即 35%."折扣"与成数有类似的意义. 如某商品打八折就是收原价的 8/10，九五折就表示收原价的 95%，即 9.5/10. 不过成数常用于增加(如粮食增产)，而折数常用于减少(如某物价按九折出售).

折扣(discount)　见"成数".

千分数(per mille)　一种特殊分数. 表示一个数是另一个数的千分之几的数. 类似于百分数，千分号记为"‰"，千分数大多在人口增长和银行利率等方面应用.

千分号(sign of per mille)　见"千分数".

千分比(per mille)　亦称千分率. 分数术语. 表示两个量的比. 当比值写成千分数形式时，这个比值称为这两个量的千分比.

千分率(per mille)　即"千分比".

百分数化小数(change of percentage into decimal)　分数的一种恒等变形. 指将百分数通过一定的法则化为小数的运算. 只要把百分号去掉，将小数点向左移动两位，就将原来的百分数化为小数了. 例如，将 36%的百分号去掉，并把小数点向左移动两位，得 36%=0.36.

百分数化分数(change of percentage into fraction)　分数的一种恒等变形. 指将百分数通过一定的法则化为分数的运算. 即先把百分数改写成分数，能约分的要约成最简分数. 例如，

$$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

分数化为百分数(change of fraction into percentage)　分数的一种恒等变形. 指将分数通过一定的法则化为百分数的运算. 一般先把分数化成小数，再将小数点向右移两位，与百分号并列. 例如

$\frac{1}{4}=0.25=25\%$，$\frac{1}{3}\approx 0.333=33.3\%$，

有时也可以把分母扩为100.

百分数问题(percentage problem)　一种算术问题.专指有关百分数的应用题.

运　　算

运算(operation)　亦称演算.数学的基本概念之一.指数的一些计算规则.算术中有加、减、乘、除、乘方、开方六种运算.其中加、减、乘、除是从两个已知数得出第三个数的运算,称为二元运算;乘方、开方是从一个已知数得出另一个数的运算,称为一元运算.得出的数称为运算结果.若已知运算结果,反求原数(一元运算)或两个原数之一(二元运算)的计算规则,称为原运算的逆运算,此时把原运算称为直接运算.一元运算的逆运算仍是一元运算;对二元运算的逆运算,总假定两个原数之一也是已知数,因此,逆运算仍是从两个已知数得出一个数(未知的一个原数)的运算,即仍是二元运算.一个运算的逆运算是以原运算为其逆运算的,即这两个运算是互逆的.算术中通常把加法、乘法和乘方看做直接运算,而把减法、除法和开方分别看成是它们的逆运算.这样三对运算是互逆的(参见本卷《集合论》同名条).

演算(calculation)　即"运算".

一元运算(unary operation)　见"运算".

二元运算(binary operation)　见"运算".

直接运算(direct operation)　见"运算".

逆运算(inverse operation)　见"运算".

运算等级(operation grade)　算术的基本概念之一.在算术运算中,根据其运算的难易程度划分的运算级别,称为运算等级.算术中的直接运算和逆运算的等级划分如下:

运算级别	直接运算	逆　运　算	
一级运算	加　法	减　法	
二级运算	乘　法	除　法	
三级运算	乘　方	开方	求对数

对于上述运算,有时还采用高级运算与低级运算两个相对概念来加以区分.例如,二级运算对一级运算来说,它是高级运算,但对三级运算来说,它又是低级运算.

一级运算(one-level operation)　见"运算等级".

二级运算(two-level operation)　见"运算等级".

三级运算(three-level operation)　见"运算等级".

算式(arithmetic expression)　简称式.算术的基本概念之一.指把数或表示数的字母用运算符号或关系符号连结起来的式子.算式分横式与竖式.

计算(calculation)　数学的基本概念之一.指根据算式中含有的数(或字母)和运算符号,求出算式的结果.计算和运算在适用范围上略有不同:计算可以用笔算,也可以用口算,还可以借助算盘、数表或电子计算机等计算工具辅助计算,计算的对象一般是数.

表算(tabular arithmetic)　特殊的计算方法之一.指利用已经制作好的数表,用查表的方法进行计算.例如利用平方根表求平方根;利用对数表进行计算等.

口算(mental arithmetic)　亦称心算.数的运算形式之一.指在计算过程中,不写出竖式,也不需要借助计算工具,中间运算的结果保留在记忆中,直接通过思维活动说出计算结果的一种算法.口算和笔算不同,在进行加、减、乘、除等口算时,往往从高位算起,计算方法也往往要根据数的特点灵活选择(参见"笔算").

心算(mental arithmetic)　即"口算".

笔算(mantal computation)　常用的计算方法之一.指用笔书写演算过程的计算方法.笔算要求写出竖式,计算时有严格、固定的顺序,有明确的计算法则.在进行加法、减法、乘法运算时,都可从低位算起,计算过程和结果都要求书面保留下来.笔算可利用计算工具辅助计算,在中国古代学习数学时,曾运用算筹、算盘等计算工具辅助笔算;近代则利用数表、计算尺等计算工具辅助笔算;现代多使用电子计算机(器)辅助笔算.

验算(checking computations)　一种特殊的算法.指检验运算的过程与结果是否正确的方法.为了易于发现错误,最好不采用原来的解题思路或方法.例如,可以用逆运算法则去检查原运算是否正确;可以用还原的方法去检查原来的推理是否有误;可以用问题中的事理去检查所列的算式是否正确等.

运算律(operational rule)　亦称运算法则.一种运算遵循的普遍法则,称为这一运算的运算律.加法与乘法的交换律和结合律,以及乘法对于加法的分配律,统称基本运算律.

基本运算律(law of basic operation)　见"运算律".

算术运算顺序(order of arithmetic operations)　算术运算的基本规则.指一个算式中包含多种运算时,运算先后次序的约定.其内容如下:

1.算式中不包含括号时,遇到同级运算,按从左到右的顺序进行运算;含有不同级的运算,先做高级运算,再做低级运算,即先乘方、开方,其次是乘法、除法,最后才是加法和减法.

2. 算式中包含括号时，先做括线下的运算，次做小括号内的运算，再做中括号内的运算，最后做大括号内的运算. 同一括号内的运算，则按上一条的规定顺序进行运算.

简便运算(short method of the calculation) 亦称简捷运算，又称速算. 一种简便快速的运算方法. 根据算式中参与运算的数的特点，或应用运算定律、性质等，使运算过程简化，迅速得出结果，都称为简便运算. 常见的简便运算有下面四种：

1. 改变运算顺序，使计算简便.

2. 把已知数化为整十、整百、整千……的数，使计算简便.

3. 应用数的分解的方法，使分解后的数能应用运算定律或运算性质，使计算简便.

4. 应用某些计算公式，使计算简便.

简捷运算(short method of the calculation) 即“简便运算”.

速算(fast operation)　即“简便运算”.

加法(addition)　数学中的基本运算之一. 算术中的加法主要研究正实数相加，有时亦涉及负实数. 实数加法的基础是如下的自然数的加法：对于自然数 a，b，如果在自然数列 $\mathrm{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 中，从 a 起依次数 b 个数，得数 c，则称数 c 为自然数 a 与 b 的和(且和是惟一的). 求两个数的和的运算称为加法，记为 $a+b=c$，读作 a 加 b 等于 c，a 与 b 都称为加数，符号“+”称为加号. 在自然数列中，两个(或若干个)数的和不小于每一个加数. 自然数的加法，还可用公理的方法来定义：在自然数集合 N 中，用 a' 表示任何 $a\in\mathrm{N}$ 的后继数，然后定义自然数的加法：$a+1=a'$，$a+b'=(a+b)'$，其中 $a\in\mathrm{N}$，$b\in\mathrm{N}$. 参见“佩亚诺公理”. 对多个自然数的加法：$a_1+a_2+\cdots+a_n(a_i\in\mathrm{N},i=1,2,\cdots,n)$可用递推的方法来定义. 随着数的扩充，还可逐次定义分数、小数、有理数、实数和复数的加法. 在其他数学对象如代数式、函数式、向量、矩阵、集合、映射中也规定加法运算，一般都要求加法运算满足交换律和结合律(参见本卷《初等代数》同名条).

加数(addend)　见“加法”.

整数加法法则(addition rule of integers)　整数运算法则之一. 整数的加法法则分三种情形表述：

1. 一位数的加法法则. 两个一位数相加，可按加法定义编成一个加法表(参见“加法表”)，用它作基础，就能直接得出任意两个一位数的和.

2. 多位数的加法法则. 把两个(或若干个)多位数的数位对齐，从低位加起，将同一数位上的数字分别相加，作为和的相应数位上的数字，哪个数位上相加的结果满十，就向相邻的较高数位进一. 具体作法如下：

1) 当加数的第 n 位上的数字和是一位数时，这个一位数就是和的第 n 位上的数字.

2) 当加数的第 n 位上的数字和是两位数时，和的第 n 位上的数字是这个两位数的个位数，这个两位数的十位数加在与第 n 位数紧邻的较高数位上去，且满几个十就进几. 依此类推，这种加法又称为进位加法，也就是常说的逢十进一.

3. 对于任意数 a，规定 $a+0=0+a=a$.

进位加法(carry addition)　见“整数加法法则”.

加法表(addition table)　求一位数加法的数表. 把任意两个一位数相加的结果列成一张表，称为加法表. 可供初学加法的人使用. 其表如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

和的变化规律(change law of sum)　和的变化趋势. 指加数的变化引起和的变化的规律. 和随着加数的变化而变化，其规律是：

1. 若一个加数增加(或减少)一个数，其余加数不变，则和也增加(或减少)同一个数. 亦即：如果 $a+b=c$，那么 $(a+m)+b=c+m$ 或 $(a-m)+b=c-m$.

2. 若一个加数增加一个数，另一个加数减少同一个数，其余加数不变，则和不变. 亦即：如果 $a+b=c$，那么 $(a+m)+(b-m)=c$.

加法运算定律(operational rule of addition) 加法运算的基本法则. 指加法交换律、加法结合律和加法消去律的统称. 加法运算定律有：

1. 加法交换律. 两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变，即 $a+b=b+a$.

2. 加法结合律. 三个数相加，先把前两个数相加，再加上第三个数，或者先把后两个数相加，再加上第一个数，它们的和不变，即 $(a+b)+c=a+(b+c)$. 加法结合律和交换律可推广到若干个加数相加的情形.

3. 加法消去律. 等式两端都是两个数相加时，若左端有一个加数和右端的一个加数相等时，则两端的另一加数亦相等.

加法验算(checking computations of addition) 常用的验算方法之一. 指检验加法运算的过程和

结果是否正确的方法.加法的验算方法有以下几种:

1.用减法验算.根据减法是加法的逆运算,将其和减去它的一个加数,如果计算是正确的,所得的差必然等于另一个加数.

2.用加法验算.根据加法交换律,将加数交换位置再相加,如果计算是正确的,两次加得的结果必然相同.

3.用弃九法验算(参见本卷《初等数论》中的"弃九法").

减法(subtraction)　数学中的基本运算之一.已知两个数 a 与 b,如果存在一个数 c,能满足 $b+c=a$,那么 c 称为 a 和 b 的差(且差是惟一的).求两个数的差的运算称为减法,记为 $a-b=c$,读作 a 减 b 等于 c,a 称为被减数,b 称为减数,符号"$-$"称为减号.减法是加法的逆运算,减法可以定义为:已知两个加数的和及其中的一个加数,求另一个加数的运算.在仅能运用正数的算术中,被减数不能小于减数.特别地,对于任意数 a,总有 $a-a=0$,$a-0=a$,且 $0-0=0$.在引进负数和负号后,减法可以统一于加法,即 $a-b=a+(-b)$.

减数(subtrahend)　见"减法".

被减数(minuend)　见"减法".

整数减法法则(subtraction rule of integers)　整数的运算法则之一.整数的减法法则分三种情形表述:

1.一位数或两位数减去一位数,而差是一位数的减法法则.根据减法是加法的逆运算的关系,可利用加法表来计算.

2.多位数减法法则.把两个多位数的数位对齐,从低位减起,将同一数位上的数字分别相减,作为差的相应数位上的数字,哪一位不够减就从相邻的较高位上借一作十,然后相减,具体作法如下:

1) 当被减数的第 n 位上的数字减去减数的第 n 位的数字是一位数时,这个一位数就是差的第 n 位上的数字.

2) 当被减数的第 n 位上的数字小于减数的第 n 位上的数字时,就在被减数第 n 位相邻的较高一位上借一作十,与第 n 位上的数组成一个两位数,然后减去减数的第 n 位上的数字,作为差的第 n 位上的数字.依此类推,这种减法又称为借位减法或退位减法.

3.对于任意数a,总有$a-a=0$,$a-0=a$,且 $0-0=0$.

减法验算(checking computations of subtraction)　常用的验算方法之一.指检验减法运算的过程和结果是否正确的方法.其具体方法有以下几种:

1.用加法验算.根据加法是减法的逆运算,在做完减法后,将其差与减数相加,如果计算是正确的,所得的和必须等于被减数.

2.用减法验算.根据减法算式中各数之间的关系,在做完减法后将被减数减去差,如果计算是正确的,所得的结果必须等于减数.

3.用弃九法验算(参见本卷《初等数论》中的"弃九法").

差的变化规律(change rule of difference)　差的变化趋势.指差随被减数或减数变化的规律.差随着被减数或减数的变化而变化,其规律是:

1.如果被减数增加(或减少)一个数,减数不变,那么它们的差也增加(或减少)同一个数.亦即:如果 $a-b=c$,那么 $(a+m)-b=c+m$ 或 $(a-m)-b=c-m$.

2.如果减数增加(或减少)一个数,被减数不变,那么它们的差反而减少(或增加)同一个数.亦即:如果 $a-b=c$,那么 $a-(b+m)=c-m$ 或 $a-(b-m)=c+m$.

3.如果被减数和减数同时增加(或减少)同一个数,那么它们的差保持不变.亦即:如果 $a-b=c$,那么 $(a+m)-(b+m)=c$ 或 $(a-m)-(b-m)=c$.

加减法公式(addition and subtraction formulas)　算术的基本运算公式之一.指根据整数加法运算律确定的一组公式.下面的 a,b,c 等字母,都表示非负整数,且在减法中总是被减数不小于减数.常用的加减公式有:

1. $(c-a)+b=(c+b)-a$.
2. $a+(b-c)=a+b-c$.
3. $a-(b+c)=a-b-c=a-c-b$.
4. $a-(b-c)=a-b+c$.
5. $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.
6. $a+b-c=a-c+b$.
7. $a-b-c=a-c-b$.

这些公式的正确性,都可以根据加减法的定义得到证明.引进负数和负号并把减法统一于加法 $a-b=a+(-b)$后,只要运用加法的交换律、结合律和负号的性质,就能得出所有这些公式.

乘法(multiplication)　数学中的基本运算之一.在算术中,乘法是在正整数运算中求相同加数和的简捷算法.b 个相同加数 a 的和(用 c 表示)称为 a 与 b 的积(且积是惟一的).求两个数的积的运算称为乘法;记为 $a\times b=c$ 或 $a\cdot b=c$;读作 a 乘以 b 等于 c 或 a 乘 b 等于 c.a 称为被乘数,b 称为乘数,被乘数和乘数也称为积 c 的因数.符号"$\times$"或"$\cdot$"都称为乘号.当第二个因数是字母时,乘号可以省略,即 $2\times a=2a$,$a\times b=ab$或 $a\cdot b=ab$,但当 a 与 b 都是具体的数时,就不能用这种表示法.特别地,对于任意数 a,总有 $a\times 1=a$,并规定 $a\times 0=0\times a=0$(参见本卷《初等代数》同名条).

乘数(multiplicator)　见"乘法".

被乘数(multiplicand)　见"乘法".

因数(factor)　见"乘法".参见本卷《初等数论》同名条.

乘法表(multiplication table)　亦称九九表,又称乘法口诀.求一位数乘法的数表.在十进制数里,把乘数、被乘数都是一位自然数相乘的积,依次按乘数、被乘数的大小顺序列成的一个表.即把1,2,3,4,5,6,7,8,9这九个数中任何两个数相乘的结果按大小顺序编成的表,称为乘法表.现在的乘法口诀是从一一得一起,到九九八十一止.古代则倒过来从九九八十一起,到二二得四止.因开头两个字是九九,故称乘法表为九九表,简称九九.含有81句口诀的乘法表又称为大九九;只有45句口诀的乘法表又称为小九九.

大九九乘法表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

小九九乘法表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		4	6	8	10	12	14	16	18
3			9	12	15	18	21	24	27
4				16	20	24	28	32	36
5					25	30	35	40	45
6						36	42	48	54
7							49	56	63
8								64	72
9									81

中国是编制使用乘法表最早的国家之一.1908年,在甘肃敦煌马圈湾汉代烽燧遗址出土的竹简(公元2—3世纪,东汉或晋);1930年,在甘肃省北部居延烽火台遗址发掘的西汉(前206—公元25)木简都载有九九表.在尼科马霍斯(Nicomachus,(G))的《算术入门》中,也有九九口诀的记载.

九九表(multiplication table)　即"乘法表".

乘法口诀(multiplication table)　即"乘法表".

整数乘法法则(multiplication rule of intergers)　整数的运算法则之一.整数的乘法法则分三种情形表述:

1.一位数的乘法法则.两个一位数相乘,可根据乘法定义用加法计算,通常可利用乘法表直接得出任意两个一位数的积(参见"乘法表").

2.多位数的乘法法则.依次用乘数的各个数位上的数,分别去乘被乘数的每一数位上的数,然后将乘得的积加起来.

3.对于任意数a,有$a\times1=a$,$a\times0=0\times a=0$.

积的位数(digit capacity of product)　算术术语.指两整数之积的位数变换规律.整数相乘时两个因数的积的位数,等于这两个因数的位数之和,或者比位数和少1.亦即:如果两个因数a,b分别是m位数和n位数,那么a与b的积是$(m+n)$位数,或者是$(m+n-1)$位数.积的位数的具体判定方法是:

1.如果两个因数的最高位上的数的积等于或大于10,或者虽小于10,但加上进位上来的数以后就等于或大于10,那么它们的积的位数就等于两个因数的位数的和.

2.如果两个因数的最高位上的数的积小于10,而且加上进上来的数以后仍小于10,那么这两个因数的积的位数就比两个因数位数的和少1.

乘法验算(checking computations of multiplication)常用的验算方法之一.指检验乘法运算的过程和结果是否正确的方法.乘法的验算方法有以下几种:

1.用除法验算.根据除法是乘法的逆运算,在做完乘法后,将所得的积除以一个因数,如果计算是正确的,除得的商必然等于另一个因数.

2.用乘法验算.根据乘法交换律,在做完乘法后,把因数位置交换,再乘一次,如果计算是正确的,两次乘得的结果必然相同.

3.用弃九法验算(参见本卷《初等数论》中的"弃九法").

约数(divisor)　即"因数".

乘法运算定律(laws of operation of multiplication)　乘法运算的基本法则.指乘法交换律、乘法结合律、乘法分配律、乘法消去律的统称.乘法运算定律有:

1.乘法交换律.两个数相乘,交换因数的位置,它们的积不变,即$ab=ba$.

2.乘法结合律.三个数相乘,先把前面两个数相乘,再与第三个数相乘,或者先把后两个数相乘,再与第一个数相乘,它们的积不变,即$(ab)c=a(bc)$.

乘法结合律和交换律可以推广到若干个数相乘,而积不变.

3.乘法对加法(或减法)的分配律,简称乘法分配律.两个数的和(或差)与一个数相乘的积,等于被加数(或被减数)和加数(或减数)分别与这个数相乘,所得的积的和(或差),即$(a\pm b)c=ac\pm bc$.

乘法对加法(或减法)的分配律可以推广到若干个数的和(或差)与一个数相乘.

4.乘法消去律.等式两端都是两个因数的积时,

若左端有一个因数等于右端的一个因数，则两端中的另一因数也相等，即若 $ak=bk$，则 $a=b$.

积的变化规律(change rule of product)　运算法则. 指因数的倍数变化引起积的倍数变化的规律. 积随着被乘数或乘数的变化而变化，其规律是：

1. 若一个因数扩大(或缩小)若干倍，另一个因数不变，则它们的积也扩大(或缩小)相同的倍数.

2. 若一个因数扩大(或缩小)若干倍，另一个因数缩小(或扩大)相同的倍数，则它们的积不变.

除法(division)　数学中的基本运算之一. 已知两个数 $a,b(b\neq 0)$，要求一个数 q，使 q 与 b 的积等于 a，这种运算称为除法，记为 $a\div b=q$ 或 $a:b=q$，读作 a 除以 b 等于 q，或 a 比 b 等于 q. a 称为被除数，b 称为除数，q 称为 a 与 b 的商，符号"÷"或"："称为除号或比号. 除法可以定义为：已知两数的积与其中一因数，求另一个因数的运算. 因此，除法还是乘法的逆运算. 除法还可以看做是从被除数中连续减去除数，求减去除数的次数的算法. 特别地，对于任意数 a，总有 $a\div 1=a$，$a\div a=1$，$0\div a=0$. 但零不能作除数. 将一个数等分成若干份，求每一份是多少的算法称为等分除法；求一个数里包含多少个另一个数，即求一个大数是一个小数的多少倍的算法称为包含除法，只有在大数能被小数整除时才有意义.

除数(divisor)　见"除法".

被除数(dividend)　见"除法".

商(quotient)　见"除法".

等分除法(bisect division)　见"除法".

包含除法(inclusion division)　见"除法".

整数除法法则(division rule of integers)　整数的运算法则之一. 在整数除法中，除数要小于被除数才能进行. 当被除数不超过两位数，除数是一位数，而商也是一位数时，可根据乘法口诀直接得出商和余数(余数可能是零)，称其为表内除法；被除数超过两位数的除法，称为多位数除法，其法则如下：

1. 截数. 从被除数的最高位起，除数是几位数就从左边截出几位数，当被截出的数小于被除数时，应再截一位数.

2. 试商. 用 1，2，…，9 中的适当数字作为初商，用初商去乘除数，使所得的积小于(或等于)所截取的数，并从截取的数中减去这个积，所得差应小于除数，差也可能是零.

3. 再截数. 将被除数第一次被截后余下的数，紧接着写在差的后面，称为第一余数，从第一余数中第二次截数，所截位数仍与除数的位数相同，当第二次被截数小于除数时，应再截一位数.

4. 再试商. 仍用 1，2，…，9 中的适当数字作为次商，用次商去乘除数，使所得的积小于(或等于)第二次截得的数，并从第二次截取的数中减去这个积，所得差应小于除数，差也可能是零，将被除数第二次被截后余下的数，紧接着写在第二次差的后面，称为第二次余数.

5. 初商应写在第一次被截数的最末一位数字上边，次商应写在第二次被截数的最末一位数字上边，如初商和次商之间有空位应补 0，0 的个数与空位的个数相同.

6. 用上述方法一直做下去，直到被除数的个位数字被截下参与计算完为止. 如果最后一次差为 0，把各次所得商按先后顺序从左到右排好，就得到完全商(简称商). 如果最后一次差不为 0，所得商称为不完全商.

表内除法(division in the table)　见"整数除法法则".

完全商(perfect quotient)　见"整数除法法则".

商的位数(digit capacity of quotient)　算术术语. 指两整数之商的位数变换规律. 两个数的商的位数，等于被除数与除数的位数之差，或比位数差多 1. 亦即：如果被除数 a 是 m 位数，除数 b 是 n 位数，那么 a 除以 b 的商是 $(m-n)$ 位数，或者 $(m-n+1)$ 位数. 商的位数的具体判定方法是：

1. 若被除数的前 n 位数(与除数的位数相同)小于除数，则商的位数等于被除数的位数减去除数的位数.

2. 如果被除数的前 n 位数(与除数的位数相同)大于或等于除数，则商的位数等于被除数的位数减去除数的位数再加上 1.

除法验算(checking computations of division)　常用的验算方法之一. 指检验除法运算的过程和结果是否正确的方法. 除法的验算方法有以下几种：

1. 用乘法验算. 根据乘法是除法的逆运算，当能整除时，将所得的商与除数相乘，如果计算是正确的，所得的积必然等于被除数；当为带余除法时，则将所得的商与除数相乘，再加上余数，如果计算是正确的，它们的和也必然等于被除数.

2. 用除法验算. 根据除法算式中各数之间的关系，当能整除时，把被除数除以商，如果计算是正确的，除得的结果必然等于原来的除数；当为带余除法时，应将被除数减去余数，再除以商，如果计算是正确的，除得的结果必然等于原来的除数.

3. 用弃九法验算(参见本卷《初等数论》中的"弃九法").

除法的性质(property of division)　除法的几个特点. 除法运算的基本性质如下：

1. 一个数除以两个数的积，等于这个数依次除以积的两个因数.

2. 一个数除以两个数的商，等于这个数先乘以

商中的除数，再除以商中的被除数，或者等于这个数先除以商中的被除数，再乘以商中的除数.

3. 两个数的积除以一个数，等于用除数先去除积中的任何一个因数，再与另一个因数相乘.

4. 两个数的商除以一个数，亦可用该数先除商中的被除数，再以商中的除数除之.

5. 若干个数的和(或差)除以一个数，等于用该数分别去除和式(或差式)中的每一个数所得的和(或差). 这条性质常称除法对加减法的右分配律.

商的变化规律(change rule of quotient)　商的变化趋势. 指商随着被除数或除数的变化而变化，其规律是：

1. 如果被除数扩大(或缩小)若干倍，除数不变，那么商也扩大(或缩小)相同的倍数.

2. 如果除数扩大(或缩小)若干倍，被除数不变，那么商反而缩小(或扩大)相同的倍数.

3. 被除数和除数都扩大(或缩小)相同的倍数，它们的商不变.

4. 在带余除法中，如果被除数和除数都扩大(或缩小)相同的倍数，不完全商不变，但余数却随着扩大(或缩小)相同的倍数.

整除(divisible)　见"带余除法"及本卷《初等数论》同名条.

公因数(common factor)　见本卷《初等数论》同名条.

公约数(common divisor)　即"公因数".

最大公因数(greatest common factor)　见本卷《初等数论》同名条.

最大公约数(greatest common divisor)　即"最大公因数".

能被某些数整除的数的特征(characters of a number divisible by some numbers)　一类特殊的数. 指这些数能被某些数整除的充分必要条件. 由此不必进行除法计算，即可确定整除性.

1. 能被 2 或 5 整除的数的特征是：该数的末一位数能被 2 或 5 整除. 能被 2 整除的数称偶数，不能被 2 整除的数称奇数. 一般，偶数用 $2n$(n 为整数)来表示，奇数用 $2n+1$(n 为整数)来表示.

2. 能被 4 或 25 整除的数的特征是：该数的末两位数能被 4 或 25 整除.

3. 能被 8 或 125 整除的数的特征是：该数末三位数能被 8 或 125 整除.

4. 能被 9 或 3 整除的数的特征是：该数的各位数字之和能被 9 或 3 整除.

5. 能被 11 整除的数的特征是：该数偶数位上的数字的和与奇数位上的数字的和之差能被 11 整除.

6. 能被 7，11，13 整除的数的特征是：该数的末三位数与末三位以前的数字所表示的数的差能被 7，11，13 整除.

乘除法公式(multiplication and division formulas)　算术的基本运算公式之一. 指乘除法的几种恒等变形. 下面的字母都表示非负整数，但除数不得为零，且除法限于能整除的情形. 常用的乘除法公式有：

1. $(a\div b)\times b=a$，$(a\times b)\div b=a$.

2. $(a\times b)\div c=(a\div c)\times b=(b\div c)\times a$.

3. $a\div(b\times c)=a\div b\div c=a\div c\div b$.

4. $a\div(b\div c)=a\div b\times c=a\times c\div b$.

5. $(a-b)\div c=a\div c-b\div c$.

带余除法(division with remainder)　亦称有余除法. 不能整除的除法. 已知两个数 a，b(a 是整数，b 是正整数)，要求两个整数 q，r，使 q，r 满足以下条件：$a=bq+r(0\leqslant r<b)$. a 称为被除数，b 称为除数，q 称为不完全商(简称商)，r 称为余数；当 $r=0$ 时，称 a 被 b 整除，记为 $b|a$. 此时，称 b 为 a 的因数或约数，称 a 为 b 的倍数. 在带余除法里，商(或不完全商)和余数(可能为 0)都是惟一存在的(参见本卷《初等数论》中的"整除").

有余除法(division with remainder)　即"带余除法".

余数(remainder)　见"带余除法".

倍数(multiple)　见"带余除法".

公倍数(common multiple)　见本卷《初等数论》同名条.

最小公倍数(least common multiple)　见本卷《初等数论》同名条.

不完全商(non-complete quotient)　见"带余除法"和"整数除法法则".

四则运算(four arithmetic operations)　亦称算术运算. 数学中最基本、最常见的一种运算. 指算术中的加法、减法、乘法和除法四种运算的统称. 四则运算的起源很早，几乎与数字同时产生.

中国早就有较完整的自然数的四则运算和分数的概念，由于那时的记数和运算都是以算筹为工具，称为筹算(详见第六卷《中国数学史》中的"筹算"). 因筹算是通过筹式的逐步改变而最终获得问题的解答，不保留运算的中间过程，因此，保存在中国古代文字和典籍中的只是一些运算的结果. 1985 年，在湖北省江陵县张家山出土的西汉初年吕后至文帝(前 187—前 157)的竹简共千余支，经过史学家的鉴定整理，其中有 200 多支(完整者 185 支)为算术的内容，根据写在一支竹简背面的文字辨认，这部竹简的书名为《算术书》，是迄今为止，发掘的成书最早的中国古算书. 书中是以问题归类的，已清理出来的小标题有：分乘、增减分、相乘、合分、经分、里田、税田、金价、程禾等 60 多个问题. 从《算术书》的内容看，已

经对自然数和分数的四则运算有较完备的法则.

在美索不达米亚工作的考古学家进行了系统的发掘工作，在古代尼普尔一带发现了大约50万块刻着文字的粘土书，经鉴定，其中约有300块纯数学书板，将这些书板整理分为三组：第一组大约为公元前2100年苏美尔文化末期的；第二组大约从汉谟拉比时代(前1792—前1750)到第一代巴比伦王朝；第三组属于内布恰德扎尔的新巴比伦帝国到波斯和塞流西德时代(约前600—前300). 这300块泥板书中，约有200块是计算数表，据研究有乘法表、平方表、指数表等，再根据泥板书文字记载的考证，当时已能进行自然数的四则运算了. 他们当时的运算程序是借助于各种表格来实现的. 从泥板书的记载看出，他们用𒌋𒌋表示20，用𒐗表示3，用𒌋𒌋𒐗表示20+3，用𒌋𒌋𒁹𒐗表示20−3，其中𒁹表示减号. 约公元前1650年，阿梅斯(Ahmes)用僧侣文编写的纸草书中用人走近及离去的腿形𓂻和𓂽表示加号与减号.

在印度中世纪时期，流行着几种实用且有趣的乘法，一种叫十字相乘法，如图1所示，印度人自称闪电式乘法. 例如325×478.

5×8=40，

2×8+7×5+4=55，

3×8+4×5+2×7+5=63，

3×7+4×2+6=35，

3×4+3=15，

得 325×478=155 350.

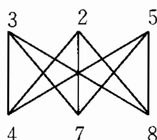


图1

另一种是方格乘法. 如图2所示，从表中容易看出，乘积写入表格内部. 此法约15世纪传入中国，由于形如织锦，古称为铺地锦. 现在中国小学教材中的笔算乘法是根据帕乔利(Pacioli, L.)于1494年所著《算术、几何及比例性质之摘要》传入中国后为依据的.

中世纪欧洲流行的除法和现在笔算的除法也大不相同. 较通用的一种称为帆船除法或勾画除法. 其作法是先将被除数与除数写下来，然后进行演算，在演算过程中随时将已处理完的数勾划掉. 演算完毕，在沙盘或纸上留下一行又一行已划掉的数字，好像一只帆船. 以106 704÷456为例，帆船除法的图式如图3. 帆船除法在欧洲盛行了300年以上. 17世纪初，李之藻在他编译的《同文算指》一书中，首次将欧洲的笔算，包括四则运算法则介绍到中国，不过书中仍用中国数码. 直到19世纪后期，欧美和日本的数学著作大量被译为中文，阿拉伯数码在数学教材中终于代替了中国数码，从此，四则运算从符号到运算法则、运算定律都形成了现行教材中的表述模式.

被乘数＼乘数	3	2	5
8	2 4	1 6	4 0
7	2 1	1 4	3 5
4	1 2	0 8	2 0

图2

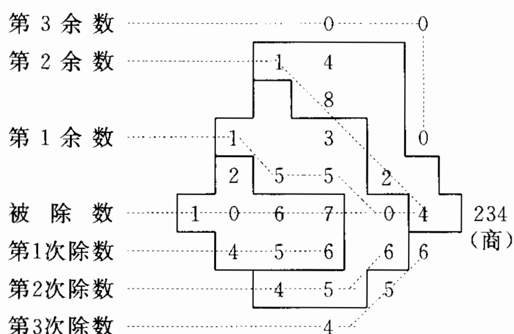


图3

算术运算(arithmetic operation)　即"四则运算".

四则混合运算(four arithmetic mixed operations)　四则运算的一种形式. 在同一个算式中，含有加、减、乘、除四种运算中的任意两种以上的运算，称为四则混合运算.

混合运算(mixed operations)　四则混合运算的简称. 有时泛指同一算式中，含有加、减、乘、除、乘方与开方六种运算中的任意两种或两种以上的运算.

计 量 单 位

量(quantity)　数学中最基本的概念之一. 客观事物所具有的能区别程度异同的属性，称为量. 例如事物的多少、大小、长短、轻重、高低、快慢、方位等属性，都是量. 随着数学的发展，量的意义也在不断地变化，在数学、物理中的量通常分为数量(标量)、向量(矢量)和张量等；在函数的研究中又分为常量和变量等. 由于量是一个不定义的抽象概念，随着数学理论的严格化，人们采用公理法来确定量的概念，如佩亚诺公理、实数公理等.

计量(measurement)　指把一个量与一个作为标准的同类量进行比较的过程，称为计量. 例如，要测量两城市间的距离，用千米作为标准进行测量；要测某物体的质量，用千克作为标准进行测量，通过测量就得到一个代表里程、质量的数，这个测量的过程和结果称为计量.

计量单位(measurement unit)　亦称度量单位. 指计量中的标准量. 每一种量都规定有大小不同的计量单位，为了使用方便，每一种量都确定了一个为主的单位，称为基本单位(或称主单位)，其他非主单位称为辅助单位. 长度的基本单位是米(m)，辅助单位有千米、厘米、毫米等. 体积的基本单位是立方米(m^2). 但在1964年，第12届国际计量大会上宣布升(1)可以作为立方分米(dm^3)的专门名称. 根据旧定义，一升是在标准气压下，一千克的纯水当密度

最大时的体积，一升等于1.000028立方分米.容量的辅助单位有厘升、毫升等.质量的基本单位是千克(kg).1千克等于国际千克原器的质量，辅助单位为吨(Mg)、克(g)、毫克(mg)等.确定长度单位"米"的三次变化：1790年5月8日，法国决定制造一个适合全世界人民需要的长度基本单位原器，成立了以拉格朗日(Lagrange，J.-L.)为首的委员会，并决定采用巴黎子午线长度的四千万分之一作为基本单位，由拉普拉斯(Laplace，P.-S.)领导的测量队，于1799年终于完成了子午线长度的测定，制作了第一具铂铱合金的X形国际长度标准米原器，称为标准米.当时认为该米原器有四条优点：

1. 铂铱合金在空气和湿气中不变质.
2. 抗酸碱性强，不怕腐蚀.
3. 富有弹性及韧性.
4. 膨胀系数极微，几乎不受温差的影响.

这个米原器一直存放于法国巴黎的国际度量衡局.随着科学技术的发展对长度测量的精度要求越来越高，由于这个米原器精度不够高，只能准确到0.1微米(即1/10000毫米).1960年，国际计量大会上通过了以氪的同位素Kr^{86}(氪^{86})在-210摄氏度由$5d_5$跃迁至$2P_{10}$，在真空中所发射的电磁波波长的1650763.73倍为1米，即$1\ m=1650763.73\lambda(Kr^{86})$，所以$1\lambda(Kr^{86})=6057.8021$ Å(埃)，这里埃(Å)是光的波长单位，$1\ Å=10^{-8}cm$.后随着科学技术的更进一步的提高，又因氪^{86}光的单色性不好，已不能满足现代工业和科学技术上的需要，而激光的单色性要比氪^{86}的光强好多亿倍.1983年10月20日，在法国巴黎举行的第17届国际计量大会上，又通过了改用激光来代替氪^{86}，对长度单位米定义为：米是光在真空中(1/299792458)秒(s)时间间隔内所经路径的长度.

度量单位(measure unit)　即"计量单位".

基本单位(fundamental unit)　见"计量单位".

辅助单位(subsidiary unit)　见"计量单位".

量数(measured value)　一个确定的数.指数量去掉单位的一种形式.以某种计量单位去度量某一个量，可得到含有这个计量单位的若干倍的一个正数，就称该正数为量数.同一个量，由于选定的计量单位不同，所得的量数也不同.例如，同一段电线，如用米作单位去度量为30米，量数为30，改用厘米作单位去度量，得3000厘米，量数则为3000.

名数(concrete number)　算术术语.指由数和计量单位同时表示的量，例如4米，28°10′12″.由数和仅一个计量单位表示的量称为单名数，例如5克，3小时.由数和多于一个同类计量单位表示的量称为复名数，例如2升500毫升，2小时18分25秒.计量单位相同的名数称为同名数，计量单位不同的名数称为异名数.相对于名数而言，没有单位名称的数称为不名数.两个相同单位的数相除时，得到的商是不名数.

单名数(single concrete number)　见"名数".

复名数(compound concrete number)　见"名数".

不名数(abstract number)　见"名数".

同名数(like concrete number)　见"名数".

异名数(different concrete number)　见"名数".

高级单位(high-level unit)　比较计量单位的称谓.在同类计量单位中，较大计量单位称为较小计量单位的高级单位.反之，较小计量单位称为较大计量单位的低级单位.高级单位和低级单位是相对而言的，一个计量单位可以是某计量单位的高级单位，同时又可能是另一个计量单位的低级单位.例如分钟是秒的高级单位，同时它又是小时的低级单位.

低级单位(low-level unit)　见"高级单位".

进率(carrying length)　算术术语.指同类度量单位之间的数量关系.同类的度量单位之间，一个高级单位里含有低级单位的倍数，称为这两个单位之间的进率.例如：

1吨＝1000千克；

1千克＝1000克.

这个1000是千克与吨之间，克与千克之间的进率.

名数的化法(change method of concrete numbers)　计量单位间的一种换算方式.即把名数中的高级单位按照一定的进率化为低级单位的方法.例如，把长度的米数化成厘米数，或把时间的分、秒数化成秒数.

名数的聚法(accumulation of concerter numbers)　计量单位间的一种换算方式.即把低级单位的单名数聚为高级单位的单名数或复名数的方法.例如，把长度的厘米数聚成以米为单位的名数，或同时出现米和厘米的复名数.

换算(conversion)　计量中的基本概念之一.指不同计量单位的转换.对不同的计量制度(如英制和公制)下的同类计量单位(如同为长度单位或同为面积单位)，按照换算率进行互相转变.

换算率(conversion factor)　算术术语.指同类量不同计量制之间的一种数量关系.两个同类量的不同计量制等值时，某量的一个计量单位所对应的另一量的常数值，称为某量变另一量的换算率.例如1克＝0.0352盎司(英两)，则常数0.0352是克变盎司的换算率.

米制(metric system)　原名米突制.一种计量单位制.即以米原器为长度的基本单位，进率为10的计量单位系统.米突是1799年法国测定并制作的米原器Meter的译音.米制使用较方便，但还不够

完善，特别是由米制派生的单位之间存在一些矛盾．为了消除这个矛盾，国际计量大会于1960年通过了国际单位制(SI)，它具有科学、统一、简明、实用的优点，很快为世界各国所接受，到1985年，已有一百多个国家采用国际单位制．中国是从1984年2月27日起全面推行的国际单位制，即接受SI为中国法定单位制．

市制(Chinese system of weights and measures)　一种计量单位制．指中国过去自己制定的在国内通用的计量制度．根据中国国务院规定，市制计量单位的使用只能延续到1990年底．这样市制单位按规定已不再是中国法定计量单位，只可作为研究与计量有关的史料时参考．但在民间，由于遗留的习惯，尚还在一定的范围内使用．

国际单位制(international system of units)　简称SI．世界通用的一种计量单位制．指1960年第11届国际计量大会上通过的计量单位制．它的构成为

国际单位制(SI) { SI单位 { SI基本单位，SI导出单位， ; SI单位的倍数单位，

其中SI基本单位是：长度的米(m)，质量的千克(kg)，时间的秒(s)，电流(强度)的安培(A)，热力学温度的开尔文(K)，物质的量的摩(尔)(mol)，发光强度的烛光(cd)．国际单位制也是中国法定计量单位的基础，一切属于国际单位制的单位都是中国的法定计量单位．它适用于一切科技、经济等方面的计量．

法定计量单位(legal measurement unit)　一个国家或地区以法令的形式规定允许使用的计量单位．中国曾多次颁布有关计量制度的文件，例如：1959年，中国国务院颁布《关于统一计量制度的命令》；1977年，中国国务院颁布《中华人民共和国计量管理条例(试行)》；1981年4月，中国国际单位制推行委员会颁布《中华人民共和国计量单位名称与符号方案(试行)》；1985年2月27日，中国国务院颁布《关于在我国统一实行法定计量单位的命令》．又如，香港地区，法罗群岛地区都不是国家，由当地政府颁布的计量制度中规定允许使用的计量单位，仍称为法定计量单位．在不同时期，同一国家或地区的法定计量单位也会有所不同．20世纪80年代以前，中国的法定计量单位有市制和公制(即现在的SI)两种，而现在只有国际单位制(SI)一种．

长度(length)　计量中的基本概念之一．空间在任一固定方向延展的可能性及程度在人脑中的反映，形成了长度的概念．物体在任一方向上长度的大小，是在这个方向上物体所占空间的范围大小的比较中获得的．因此表示物体长度的数量也是在比较中产生的．在数学上，长度首先是在几何学中讨论的线段的长度(参见本卷《平面几何》中的“线段的长度”)．

长度单位(length unit)　计算长度的标准量．即在度量线段的长度时，需要选定某一条线段为标准，以它的长度为1个单位．中国现在使用的长度单位是国际单位制(SI)单位及其倍数单位，过去(1994年7月1日以前)曾经使用过市制长度单位．两种长度单位制列表如下：

SI长度单位表

单位名称	单位符号	对基本单位的比
微米	μm	1/1000000米
毫米	mm	1/1000米
厘米	cm	1/100米
分米	dm	1/10米
米	m	基本单位
十米	dam	米的10倍
百米	hm	米的100倍
千米	km	米的1000倍

中国曾用的市制长度单位表

单位名称	对主单位的比
毫	1/10000尺
厘	1/1000尺
分	1/100尺
寸	1/10尺
尺	主单位(=1/3米)
丈	10尺
引	100尺
里	1500尺

除上表所列长度单位以外，在某些领域内还使用着专门的长度单位，如天文学中的常用长度单位光年，航海中的常用长度单位海里等．

海里(nautical mile)　航海专用的长度单位．代号为n mile．1 n mile=1852m．一般把地球子午圈作为地球的大圆，海里可认为是地球任何大圆上1分弧的长度．1929年，国际水文局创议以1852米为1海里的标准长度(在纬度48°时沿子午线1分弧的长度)，这样所定的海里名曰国际海里．1948年，国际海上人命安全会议承认1852米为1海里．中国曾用“浬”表示海里，现已统一使用海里作为航海专用长度单位．它也是可与国际单位制(SI)并用的中国法定计量单位之一．

质量(mass)　计量中的基本概念之一．指物体所含物质的多少的度量．相同物质质量的大小和该物质的多少成正比，质量的多少可用天平、磅秤等衡器进行度量．在国际单位制中，质量的基本单位(主单位)是千克．物理学中，质量是量度物体惯性大小的物理量，物体所受合外力与受力方向上加速度之

比称为质量.在相等力的作用下惯性大的物体得到的加速度较小,因而有较大的质量.SI及中国曾用的两种质量单位制列表如下:

SI质量单位表

单位名称	单位符号	对基本单位的比
微克	μg	1/1000000000千克
毫克	mg	1/1000000千克
克	g	1/1000千克
千克	kg	基本单位
吨	t	千克的1000倍

中国曾用的市制质量单位表

单位名称	对主单位的比
分	1/1000斤
钱	1/100斤
两	1/10斤
斤	主单位(500克)
担	斤的100倍

市制按中国政府规定已不属法定单位制(参见"市制").

重量(weight)　计量中的基本概念之一.物体受地球的引力作用而产生的重力大小称为重量.人们习惯上常称质量为重量.1969年,国际计量大会上讨论了这个问题,并提出今后在科技术语中不再使用重量这个词语表示质量.1985年2月27日,中国国务院发布《关于在中国统一实行计量单位的命令》附件中指明:人民生活和贸易中,质量习惯称为重量,但我们不赞成这种习惯,这样做有利于科学技术的交流和国际贸易往来.

容积(volume)　计量中的基本概念之一.一个容器所包围的空间的体积称为容积.容积单位就是容量单位(参见"容积单位").

容量(capacity)　容积的量数.容量常用于液态物质的计量,将液体注入有单位刻度的容器内进行度量.有时也可用于测定固态物质的体积,例如,将被测量的固态物体置入盛满水的容器,然后将溢出的水倒入量杯,即可从量杯的刻度上测得固态物体的体积.

容积单位(capacity unit)　计算容积的标准量.指测定某种物质的容量时,选定一个已知容量作标准的量度单位.因为容量即容器包围的空间的体积,或所能装盛的液体的最大体积,所以它的度量单位与体积相同,详见"体积单位".中国曾用的市制容量单位(现已不属法定计量单位)有一些特殊的名称,现列表介绍如下,其中的"升"(亦称市升)与国际单位制(SI)体积单位的"升"(曾称公升)完全一致.两种容量单位制列表如下:

市制容量单位表

单位名称	对主单位的比
撮	1/1000升
勺	1/100升
合	1/10升
升	主单位
斗	升的10倍
石	升的100倍

面积(area)　计量中的基本概念之一.空间在两个不同方向上同时延展的可能性及程度在人脑中的反映,形成了面积的概念,物体表面或平面图形的大小称为面积.平面图形的大小,是从这个平面图形占有空间的范围大小的比较中产生的,因此表示平面图形大小的数量也是在比较中产生的.常选定一个正方形作为与平面图形比较的标准,并规定该正方形的面积为1,称为单位正方形.一个平面图形与单位正方形相比较后所得的量数就是该平面图形的面积(参见本卷《平面几何》同名条).

面积单位(area unit)　计算面积的标准量.指为测定平面图形的面积所选定的标准面积(参见本卷《平面几何》同名条).国际单位制(SI)和中国曾用市制面积单位制列表如下:

SI面积单位表

单位名称	单位符号	对基本单位的比
平方毫米	mm^2	1/1000000平方米
平方厘米	cm^2	1/10000平方米
平方分米	dm^2	1/100平方米
平 方 米	m^2	基本单位
平方千米(公里)	km^2	1000000平方米

其中主单位平方米是由SI基本单位米导出的,即边长为1米的正方形所占平面的大小.另外,公顷也是可与SI单位并用的中国法定的面积单位,公顷的国际符号是ha,按规定 $1ha^2=10\,000m^2$.

市制面积单位表

单位名称	对主单位的比
平方分	1/10000平方尺
平方寸	1/100平方尺
平方尺	主单位
平方丈	100平方尺
平方引	10000平方尺
亩	6000平方尺
顷	600000平方尺
平方里	2250000平方尺

市制按规定已停止使用(参见"市制").

地积(measure of land)　一种面积名称.指土地表面的面积.在测定地积时,常选定一个正方形的

面积作为测定的标准,这个标准面积,称为地积单位.地积单位就是面积单位(参见"面积单位").

体积(volume) 计量中的基本概念之一.指物体所占空间的大小及程度.空间在三个不共面的方向上同时延展的可能性在人脑中的反映,形成了体积的概念.图形占有空间范围的大小,是用两个空间立体图形的比较而产生的,表示空间图形所占空间范围的大小的数量也是从比较中得来的.通常选定一个立方体,并规定该立方体的体积为1,作为比较的标准,称为单位立方体.一个空间图形与单位立方体相比较后所得的量数,就是该空间图形的体积(参见本卷《立体几何》同名条).

体积单位(volume unit) 计算体积的标准量.指测定空间立体图形的体积所选定的标准体积(参见本卷《立体几何》同名条).体积单位列表如下:

SI(或法定)体积单位表

单位名称	单位符号	对主单位的比
立方毫米	mm^3	10^{-9}立方米
立方厘米	cm^3	1/1000000立方米
立方分米	dm^3	1/1000立方米
立方米	m^3	基本单位
立方千米	km^3	10^9立方米

另外,升也是可与国际单位制(SI)单位并用的中国法定体积单位,升的符号是l和L,1964年,国际计量大会宣布,l可以作为立方分米dm^3的专门名称,并建议在高精度时不要使用升.1升的大小和中国曾用的市制容积单位中的1升是完全一样的(参见"容积单位").

市制体积单位表

单位名称	对主单位的比
立方寸	1/1000立方尺
立方尺	主单位
立方丈	1000立方尺

市制按规定已停止使用(参见"市制").

速度(velocity) 计量中的基本概念之一.指表述物体运动的方向和位置变化快慢程度的一种向量.物体从某时刻起运动所产生的位移ΔS和所经历时间Δt的比,称为这段时间内的平均速度.当Δt趋于零时,平均速度的极限称为该时刻的瞬时速度.算术中常限于讨论物体的匀速直线运动(或匀速圆周运动),所指的速度为平均速度,同各时刻的瞬时速度等值.

平均速度(average velocity) 见"速度".

瞬时速度(instantaneous velocity) 见"速度".

速度单位(velocity unit) 计算速度的标准量.指位移单位与时间单位的一种合成单位.表示运动物体在单位时间内所经历的位移.常用的速度单位列表如下:

与SI相应的速度单位表

单位名称	符 号	中文符号
米每秒	m/s	米/秒
米每分	m/min	米/分
千米每分	km/min	千米/分
千米每时	km/h	千米/时
相互间的关系	1千米/时$=\frac{1000}{3600}$米/秒$=\frac{5}{18}$米/秒 1千米/时$=\frac{1000}{60}$米/分$=16\frac{2}{3}$米/分 1千米/时$=\frac{1}{60}$千米/分	

另外,节也是可与国际单位制(SI)单位并用的中国法定速度单位,节的符号用kn表示.按规定,1节=1海里每小时,但只限用于航行.

人次(man-time) 一种复合单位名词.参加工作的人数和每人工作次数的复合词.如10人做事,每人做4次,称为40人次.

人时(man-hour) 一种复合单位名词.代表一个人工作一小时的计量单位.

吨公里(ton-kilometer) 一种复合单位名词.指质量和里程的复合单位.常用于计量车辆对货物的运量与运距,以便于对运费的核算.如载重4吨的货车行驶30公里,就称这辆货车完成运载量120吨公里.

吨(ton) 亦称公吨,密里埃,吨尼奥.一种质量单位.1吨等于1000千克,或约2204.62磅质量.在核子物理学中,以一吨化学炸药爆炸时所释放的能量作为能量单位亦称为吨,(按1000焦耳每克计算)等于4.18×10^9焦耳.主要用来表示核爆炸所释放的能量.

货币(money) 计量中的基本概念之一.指商品中分离出来的固定的充当一般等价品的商品.世界历史上曾有过多种商品充当货币.最后逐渐固定在两种贵金属黄金和白银上.充当货币的金银的价值有二重性,一是它的自我价值,另一是各国法定的作为一般等价物的使用价值.货币在社会经济生活中具有价值尺度、流通手段、贮藏手段、支付手段和世界货币五种职能.货币最初是铸造的硬币,低值的硬币也有用铜、镍、铝等金属铸造的.随历史的发展又出现纸币,中国是较早使用纸币的国家,公元11世纪,宋、金曾发行过的交子、会子就是一种纸币,元、明、清三代发行的宝钞也是纸币.现在世界各国的货币基本上是以纸币为主,一般由国家统一印制发行,其上印有货币单位的固定的面额.各国货币有不同的法定单位和进率.

货币单位(money unit) 计算货币的标准量. 指货币计值的单位. 世界各国有不同的法定货币单位和名称,中国以圆为基本单位,圆以下的单位有角和分,其进率是 1 圆=10 角,1 角=10 分. 各国的货币之间有随经济状况的变化而变动的换算率——汇率.

利息(interest) 计量中的基本概念之一. 指借款人向贷款人或银行向存款人支付的本金以外的那一部分报酬. 中国现在通行的是只按本金、利率和时间计算利息的办法,计算公式是:

利息=本金×利率×时间.

例如,存入银行三年定期储蓄 1000 元,年利率 6%,到期应得利息是

$$1000\times6\%\times3=180(\text{元}),$$

这种利息称为单利. 另一种计算利息的办法是经过一定时期,将所得到利息并入本金再计算利息,逐期滚算,利上加利,这种利息称为复利. 计算公式是:

$$\text{本利和}=\text{本金}\times(1+\text{利率})^n,$$

这里 n 是所经过的时期数(即到期时间),上面的例子按复利计算,到期本利和是

$$1000\times(1+6\%)^3=1191.02(\text{元}),$$

即利息是 191.02 元.

单利(simple interest) 见"利息".

复利(compound interest) 见"利息".

时间单位(time unit) 测定时间的标准量. 常用的时间单位有秒、分、刻、时、日、月、年、年代、世纪等. 另外还有周、旬等也是时间单位. 其中秒是时间的基本单位,即铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 9192631770 个周期的持续时间. 时间单位的进率如下表:

时间单位与进率

单位名称	单位符号	进率
秒	s	
分	min	1 分=60 秒
刻		1 刻=15 分
时	h	1 时=4 刻=60 分
天(日)	d	1 天=24 时
月		1 月= 28 天 (平年的 2 月) 29 天 (闰年的 2 月) 30 天 (小月) 31 天 (大月)
旬		1 旬=10 天
周		1 周=7 天
年		1 年=12 月= 365 天 (平年) 366 天 (闰年)
年代		1 年代=10 年
世纪		1 世纪=100 年

比及比例

比(ratio) 亦称单比. 算术术语. 比较两个同类量之间的一种倍数关系,称为这两个同类量的比. 在单位相同时,两个量的比可以用表示这两个量的数的比来代替. 在实际中,只有同类量,且取同单位,才能相比. 两个量相比得到的倍数,称为比值. 两个数相比,也可以说成是两个数相除. a 与 b 的比,记为 $a:b$或 a/b,读作 a 比 b,符号"∶"称为比号. 比号前的数 a,称为比的前项,比号后的数 b,称为比的后项,比的后项不能是零. 比的结果就是比值. 尽管两数相比的比值,相除的商和分数的值是相同的数,但比、除法及分数仍是有区别的. 比是指两个量的倍数关系,除法是一种运算,分数是一个数. 比的基本性质是:比的前项和后项都扩大或缩小相同的倍数,比值不变. 建立比的严格理论是欧多克索斯(Eudoxus,(C)),他引入了一个变量的概念,它不是整数,他认为整数是跳动的个体(即离散的),而量是指线段、角、面积、时间等可以连续变动的东西,他用量这个概念建立了比和比例的理论. 这样就把有公度比和无公度比(比值为无理数)都包括进去了. 欧几里得(Euclid)《几何原本》中的第五卷《比例论》,被认为是根据欧多克索斯的成果而编写的,也是欧几里得几何的成就之一.

单比(simple ratio) 即"比".

(比的)前项(antecedent (of ratio)) 见"比".

(比的)后项(consequent (of ratio)) 见"比".

比的基本性质(basic property of ratio) 见"比".

比号(sign of ratio) 一种数学符号. 指用以表示两个同类量之间的一种倍数关系的数学符号. 比号"∶"是 17 世纪莱布尼茨(Leibniz,G. W.)提出的,1760 年,克莱罗(Clairaut,A.-C.)出版的书中使用了这种符号,才予以推广使用至今(参见"比").

比值(value of ratio) 算术术语. 指比的前项除以比的后项所得的商,是一个确定的数. 比值也可以用分数形式表示. 例如 5∶10 的比值是 0.5,也可说 5∶10 的比值是 1/2,即 5 ∶10=0.5=1/2. 比值大于 1 的称为优比,比值小于 1 的称为劣比.

优比(ratio of greater inequality) 见"比值".

劣比(ratio of less inequality) 见"比值".

正比(direct ratio) 比的一种形式. 两个互相关联的量或数,其中一个变化另一个也随之变化,且它们的比值在变化前后始终相同,这样的两个量或数称为成正比. 对于两数 a 和 b 来说,其正比直接记为 $a:b$.

反比(inverse ratio) 比的一种形式. 若第一个

比的前项用作第二个比的后项，第一个比的后项用作第二个比的前项，则第二个比称为第一个比的反比. 对于一个比 $a:b$ 来说，它的前后项的倒数的比

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b},$$

就是 $a:b$ 的反比. 所以说，互为反比的两个比的比值互为倒数. 前项为零的比没有反比.

最简比(simplest ratio)　比的一种简化形式. 指前项与后项是互质的整数的比. 把一个非最简比化为最简比的方法是：

1. 整数比. 当比的前项与后项不互质时，可以用前项和后项的最大公约数去约简.

2. 小数比. 当比的前项与后项中有一项是小数，或两项都是小数时，用同一个 10 的幂去乘前项和后项，把原小数比化为整数比，然后按整数比化简.

3. 分数比. 当比的前项与后项中有一项是分数时，用该分母去乘前项和后项，化为整数比；若比的前项与后项都是分数，则用前项和后项分母的最小公倍数去乘前项和后项，化为整数比，然后按整数比进行化简.

连比(continued ratio)　比的一种形式. 三个或三个以上的量(或数)组成的比称为连比. 如果 a 与 b 的比是 $A:B$，b 与 c 的比是 $B:C$，那么 a,b,c 的连比记为 $A:B:C$，并且对于任意一个非零数 k 有：$kA:kB:kC=A:B:C$. 这个概念可以推广到更多的同类量的连比. 把两个比化为连比的方法，是使第一个比的后项等于第二个比的前项. 例如 $a:b=7:5$，$b:c=6:1$，要写成 a,b,c 的连比，方法是：先把两个比里关于 b 的两个数 5，6 化成相同的 30. 根据比的基本性质，第一个比的前项也要乘以 6，第二个比里的后项也要乘以 5，最后得到连比 $a:b:c=42:30:5$. 比可以看做比的前项除以比的后项，但连比中的“:”不能用“÷”代替，不能把连比看做连除.

比例(proportion)　算术术语. 指四个数(或四个量)之间的一种关系式. 如果两个数(或量)的比，等于另外两个数(或量)的比，则称这四个数(或量)成比例. 例如 $a:b=c:d$(或 $a/b=c/d$)，则称 a,b,c,d 成比例. 式子 $a:b=c:d$ 或 $a/b=c/d$ 称为比例式. a,b,c,d 依次称为第一、第二、第三和第四比例项，a 与 d 称为比例的外项，b 与 c 称为比例的内项. 比例的基本性质是：两个外项的积等于两个内项的积. 即在比例式中，如果 $a:b=c:d$，那么 $ad=bc$. 反过来也成立：如果 $ad=bc$，那么 $a:b=c:d$.

中国早在《九章算术》中就有关于比例问题的记载，称为今有术. 它的方法是利用已知的所有数、所有率和所求率求出所求数. 它们之间的关系是所求数=(所有数×所求率)÷所有率. 印度在 7 世纪时也有类似的关系式，并称为三率法. 传入欧洲后，称为三数法则，或称黄金法则. 在中国，今有术一词一直沿用到清代，由吴嘉善著，丁取忠校的《白芙堂算学丛书》(1887 年)中阐述今有术说：“所有率，所求率者，举以为例之两数也……唯此两率者，为例已定，故今所设之数可比照以求，所以亦名比例式也.”比例一词因此引入.

内项(internal term)　见“比例”.

外项(extreme term)　见“比例”.

第四比例项(fourth proportional term)　见“比例”

正比例(direct proportion)　比例的形式之一. 指两数的正比等于另两数的正比所成的比例式.

反比例(inverse proportion)　比例的形式之一. 指两数的正比等于另两数的反比所成的比例式.

比例中项(proportional mean)　一种特殊的比例项. 成比例的四个量(包括数或线段)，如果两个内项相等，即比例式为 $a:b=b:c$，则内项 b 称为外项 a 和 c 的比例中项. 这时 a,b,c 成为等比数列或几何数列，所以比例中项亦称为等比中项或几何中项.

更比定理(theorem of proportion by alternation)　比例的一种恒等变形. 即在任一比例式中，更换两内项(或两外项)的位置后，比例式仍成立.

$$若\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ 则\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\ 或\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

反比定理(theorem of proportion by inversion)　比例的一种恒等变形. 即在任何比例式中，把两个比的前项和后项同时交换后的比例式仍然成立.

$$若\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ 则\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

诱导比例(induced proportion)　比例的一种恒等变形. 对于一个已知比例的一些项施行若干运算而得出一些新比例，称为已知比例的诱导比例. 从已知比例 $a/b=c/d$ 可得下列诱导比例：

1. 第一个比的两项之和(或差)比其后项，等于第二个比的两项之和(或差)比其后项，即

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

2. 第一个比的两项之和(或差)比其前项，等于第二个比的两项之和(或差)比其前项，即

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}.$$

3. 第一个比的两项之和比它们的差，等于第二个比的两项之和比它们的差，这称为合分比定理，即

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

4. 从上述性质 1，2 和 3 再利用更比定理和反比定理，尚可得出下列诱导比例：

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$
$$\frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b},$$
$$\frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d},$$
$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$
$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}.$$

合分比定理(theorem of proportion by addition and subtraction)　见“诱导比例”.

等比定理(theorem of ratio of equality)　若干个等比的恒等变形. 指若干个相等的比的所有前项之和与所有后项之和的比,等于这些相等的比中任意一个比,即:若

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n},$$

则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_i}{b_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,n);$$

更一般地,若

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{r_1b_1+r_2b_2+\cdots+r_nb_n}=\frac{a_i}{b_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,n),$$

则

$$\frac{\sqrt[s]{m_1a_1^s+m_2a_2^s+\cdots+m_na_n^s}}{\sqrt[s]{r_1b_1^s+r_2b_2^s+\cdots+r_nb_n^s}}=\frac{a_i}{b_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

***n* 乘比**(*n*-prower ratio)　一种特殊的比. 以一个比的前后项的 n 次幂构成的比,称为原比的 n 乘比. 特别地,$a^2:b^2$ 称为 $a:b$ 的二乘比,$a^3:b^3$ 称为 $a:b$ 的三乘比. 一般有 $a:b$ 的 n 乘比是 $a^n:b^n$. 例如 2:3 的二乘比是 4:9,三乘比是 8:27.

二乘比(2-prower ratio)　见“*n* 乘比”.

三乘比(3-prower ratio)　见“*n* 乘比”.

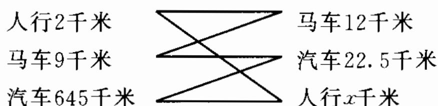
解比例(solving proportion)　计算比例的过程. 指根据比例的基本性质,求比例中的未知项的过程. 解比例的方法,在中国古算书《九章算术》中被称为今有术,所记载的算法是:“以所有数乘所求率为实,以所有率为法,实如法而一.”写成公式,即

$$\text{所求数}=\frac{\text{所有数}\times\text{所求率}}{\text{所有率}}.$$

复比(compound ratio)　一种特殊的比. 把两个或两个以上单比的前项的连乘积作前项,后项的连乘积作后项所成的新比,称为这两个或两个以上单比的复比. 复比的比值等于组成它的各个单比比值的连乘积.

配分比例(distributive proportion)　一种比例法. 它是把已知量按给定的比分为若干份的方法. 列比例式时,以给定比的前后项之和为第一项,所分各份的比为第二项,全量为第三项,所求的分量为第四项,解这些比例式,就可以求出各分量的数. 如果份数多于 2 而给定的比不是连比,先化成连比,再按上面的方法求出答数.

连锁比例(chain proportion)　比例问题的一种类型. 先看下例:当人步行 2 千米时,马车行 12 千米;马车行 9 千米时,汽车行 22.5 千米. 问汽车行 645 千米时,人步行几千米? 用连锁比例解题的方法,是先列出各量的连锁关系图:



图中横行表示等值量,斜线表示同类量. 用 x 表示所求的未知量. 与 x 同列的数相乘为分母,另一列的数相乘为分子,就得到 x 的值

$$x=\frac{2\times9\times645}{12\times22.5}=43(\text{千米}).$$

答案是汽车行驶 645 千米时,人可步行 43 千米. 用连锁比例解题时,可以省去求各种量的连比,但须注意同类量,还须是同单位.

混合比例(mixed proportion)　比例问题的一种类型. 关于同类事物的品质与价格或数量各不相同的多种原物混合后,确定其混合价或混合比的计算方法,称为混合比例. 混合比例问题有两类:

1. 已知同类而单价和数量各不相同的原物混合后,求平均价.

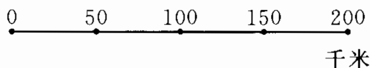
2. 已知各原物的单价及混合物的平均价,求混合物的分量或求混合比.

比例尺(scale)　计算比例的一种方法或工具. 图纸上的长度与它表示的实际长度之比,称为比例尺,一般有:

1. 缩小比例尺. 即前项是 1 的比例尺,例如 1:5000,表示图上距离是实际距离的五千分之一.

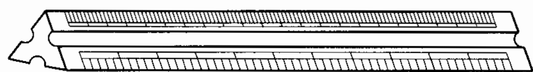
2. 放大比例尺. 即后项是 1 的比例尺,例如 300:1,表示图上距离是实际距离的 300 倍.

3. 线段比例尺. 即图上附有一条注有数字刻度的线段,表示图上距离和实际距离的比. 例如下图表示图上 1 厘米的距离,相当于实际距离 50 千米.



4. 分数比例尺. 用分数形式表示的比例尺,例如 1/3000000,它表示图上 1 厘米相当于实际距离 30 千米. 有一种绘图工具,也叫比例尺. 一般作成三棱

柱形，三个侧面上刻有六行不同比例的刻度(如图).



应用问题

应用问题(application problem)　简称应用题，或称文字题.一类最基本、最常见的算术问题.指生产或生活中有实际意义的量之间的数量关系问题.数及数之间的关系及运算，本是人类在认识事物过程中逐步抽象而获知的.反之，亦可把四则运算式及其中的数，解释成生活或生产中的具有实际意义的量及量之间的关系，其中包含已知量和未知量，未知量亦称所求量.这样做可以熟练和巩固数量之间的基本概念和基本运算，为数学联系实际奠定基础.由于问题的内容所涉及的量都是生活或生产中的量，所以具有相互关联和制约的作用，又由于很多用文字叙述的应用题是人为地编拟的，不仅舍弃了许多实际中的诸多因素，而且把给出的量也都予以理想化，因此，应用题具有一定的抽象意义，也就增加了解题的难度，对训练人的抽象思维和逻辑思维都有重要意义.

文字题(application problem)　即“应用题”.

应用题中的数量关系(quantity relation in application problems)　算术术语.指应用题中数量之间的联系方式.一道应用题中所涉及的数量，都有两种关系，理解并掌握这两种关系是解文字题的必要步骤.

一种是互相联系的数量关系.下面举出常见常用的有：距离＝速度×时间；工作总量＝工作效率×时间；顺、逆水速＝船速±水速；总价＝单价×数量；溶质＝溶液×浓度；增产量＝原产量×增长率；总产量＝亩产量×亩数；利息＝本金×利率；质量＝体积×密度等.

另一种是把文字题中的量，根据要求来组成的等量关系.不论是数量关系式，或者是等量关系式，都无非是数量之间的和、差、倍、分及它们的复合，也可以归结为四则运算及其复合.

应用题解法(solving method of application problems)　解应用题的基本法则.通常有算术解法与代数解法之分.算术解法是通过数量关系把所求量用已知量组成的量之间的运算表示出来，较复杂的问题，则是其中的每一个量又是两个量之间的关系所表示的，即多层次之间的运算关系.代数解法则是把已知量与所求的未知量合在一起考虑，作为参与运算的量，省去了寻求已知量表示未知量的复杂过程.通过等量关系列出方程求解，而且可以把算术解法中的多层次的运算式，分成几个简单的方程组成方程组，这就是代数解法较算术解法较容易之处.

应用题验算(checking computations of application problems)　指检查解应用题的过程和结果是否正确的方法.解出应用题的答数，必须进行复核和验算，因为列出算式与演算过程这两个步骤，都有可能出现错误，即使运算无误，也不一定符合文字题的条件.例如，在求动物头数题目中，得出的答案不能是分数，更不能是负数.

典型应用题(canonical application problem)　用特殊的算术解法求解的复合应用题.根据应用题的结构形式及其数量关系有某些共同特点，因而有固定解法的复合应用题，称为典型应用题.常见典型应用题的分类如下：

1.按问题内容划分有：行程、植树、年龄等问题.

2.按解答方法划分有：归一、倍比、还原、置换(鸡兔同笼)、比例分配等.

3.按已知条件划分有：和差、和倍、差倍、盈亏等问题.

和差问题(sum-difference problem)　典型应用题之一.已知两个量的和与差，求这两个量的应用题，称为和差问题.计算方法为：

(和＋差)÷2＝大数；

(和－差)÷2＝小数.

这是两个最简单，却很有用的公式，它表示了许多具有某含义的应用问题的数学结构.把大、小两数换成甲、乙二人，以及男、女学生或两种物品，都可以拟出不同的题目，但它们的数学关系却是一样的.

和倍问题(sum-multiple problem)　典型应用题之一.已知两个量的和与两个量之间的倍数关系，求这两个量各是多少的应用题，称为和倍问题.其计算公式为：

小数＝两数和÷(倍数＋1)；

大数＝两数和－小数＝小数×倍数.

已知几个数的和与这几个数之间的倍数关系，求这几个数属于比例分配问题，和倍问题是其特殊情况.

差倍问题(difference-multiple problem)　典型应用题之一.已知两个量的差与两个量之间的倍数关系，求这两个量各是多少的应用题，称为差倍问题.其计算公式为：

小数＝两数差÷(倍数－1)；

大数＝小数＋两数差＝小数×倍数.

行程问题(route problem)　典型应用题之一.由物体匀速运动中的路程、速度和时间关系组成的应用题，称为行程问题.它的基本数量关系为：

路程＝速度×时间.

常见的行程问题有多种形式：如人的步行、骑自行车、汽车行驶、火车行驶、河中行船(常称流水问题)、

飞机航空等.其中路程被理解为通路,不一定是直线.关于两物体的运动,最常见的有:两物体相背运动的问题;两物体相向运动的问题(即相遇问题);两个物体同向运动的问题(即追及问题)等.其计算公式为:

1.相背运动:

速度和×时间=两物体间距离.

2.相向运动:

速度和×相遇时间=两物体运动前的距离.

3.同向运动:

两物体间距离÷速度差=追及时间.

相遇问题(problem of meet by chance)　行程问题的一种类型.两人(或车、船)同时从两地出发,相向而行并且相遇,在速度、距离和相遇时间的三个量中,已知任意两量求第三量,这类行程问题常称相遇问题.其计算公式为:

两地距离=速度和×相遇时间;

相遇时间=两地距离÷速度和;

速度和=两地距离÷相遇时间.

追及问题(pursuit problem)　行程问题的一种类型.两人(或车、船)同时从两地同向而行,速度慢的在前面行,速度快的在后面追,直至追上为止.在距离、时间和速度差三个量中,已知任意两量求第三量的问题,称为追及问题.其计算公式为:

追及距离=速度差×追及时间;

追及时间=追及距离÷速度差;

速度差=追及距离÷追及时间.

流水问题(running water problem)　行程问题中的一种特殊类型.研究于流水中行船的距离、时间、速度(水速、船速、顺水速或逆水速)三量间的关系.已知两个量求第三个量的问题,称为流水问题.其计算公式除可用一般行程问题中的公式外,还有下列计算公式:

顺水速度=船速+水速;

逆水速度=船速-水速;

船速=(顺水速度+逆水速度)÷2;

水速=(顺水速度-逆水速度)÷2.

环行问题(circuit problem)　一种特殊路线的行程问题,指行驶路线为环状的行程问题.有以下两种情况:

1.同时同地同向而行,求第一次相遇时间,计算公式为:第一次相遇时间=环周长÷速度差.

2.同时同地背向而行,求第一次相遇时间,计算公式为:第一次相遇时间=环周长÷速度和.

平均问题(mean problem)　亦称平均数问题.典型应用题之一.指求两个或两个以上数的平均数的应用题.解这类问题应先求出几个总数的和,再求出份数的和,然后求得每一份的平均数.其常用的数量关系式为:

平均数=总数量÷总份数

总数量=平均数×总份数

还原问题(pull back problem)　典型应用题之一.指已知某数经过四则运算的结果,要求出某数的应用题.解这类问题应按题目所述顺序的逆序,施行所述运算的逆运算,就可列出算式.简言之就是反其道而行之就能算出结果.

归一问题(normalization problem)　典型应用题之一.解题时需先求出一份是多少,再求其结果,这类应用题称为归一问题.可用归一法来解,还可用比例法来解.常分为直进归一问题和返回归一问题两类:

1.直进归一问题.解法特点是先根据题设已知条件求出一份是多少,然后用乘法计算出最后结果.

2.返回归一问题.解法特点是先根据题设已知条件求出一份是多少,然后用除法计算出最后结果.

盈亏问题(problem about profit and loss)　亦称盈不足问题.典型应用题之一.指一定人数平均分一定数量的物品,每人分得少则有余,每人分得多则不足的应用题.其计算公式为:

(盈 + 亏) ÷ 每人两次所得差 = 人数;

两盈相减 ÷ 每人两次所得差 = 人数;

两亏相减 ÷ 每人两次所得差 = 人数;

每人所得数 × 人数 + 盈 = 物数;

每人所得数 × 人数 - 亏 = 物数.

盈亏问题最早见于中国的《九章算术》,后来传到亚细亚和欧洲,在欧洲代数学没有发达以前,曾广泛使用此法达几百年之久,直到1675年,意大利的数学书中还称这方法为la regola del cataino(意为中国算法).《九章算术》称盈亏问题为原术,书中原文为:“今有(人)共买物,人出八,盈三;人出七,不足四;问人数物价各几何.”这段文字译为今文是:几人共同出钱买东西,每人出8元则多3元,若每人出7元则少4元,求人数和物价.

盈不足问题(problem about profit and loss)　即“盈亏问题”.

鸡兔问题(problem about counting numbers of fowls and hares)　亦称龟鹤问题.典型应用题之一.已知鸡兔的总头数和总足数,求鸡兔各多少只的应用题.称为鸡兔问题.解鸡兔问题时,常先假设总头数全部是鸡,则出现足数少于总足数,但是,一只兔的足数比一只鸡的足数多2,用兔一只换一只鸡,则多出2只足来,因此得出下列计算公式:

(4×头数-足数和)÷(4-2)=鸡数;

(足数和-2×头数)÷(4-2)=兔数.

龟鹤问题(problem about counting numbers of tortoises and cranes)　即“鸡兔问题”.

植树问题(planting tree problem)　典型应用题之一.有关植树的范围、树的棵数和树与树之间的距离的三个量中,已知任意两个量求出第三量的问题,称为植树问题.植树问题可分为三种类型:

1.线上植树,其计算公式为:

间距=路长÷(棵数-1);

棵树=路长÷间距+1;

路长=间距×(棵数-1).

2.封闭线上植树,其计算公式为:

间距=路长÷棵数;

棵数=路长÷间距;

路长=间距×棵数.

3.面上植树,其计算公式为:

每棵占地面积 = 总面积 ÷ 棵数;

棵数 = 总面积 ÷ 每棵占地面积;

总面积 = 每棵占地面积 × 棵数.

年龄问题(age problem)　典型应用题之一.指与年龄的计算相关的应用题.这类问题的重要特征是几年前或几年后,每个人(或生物)年龄的减少或增加是相同的.

温度计问题(thermometer problem)　亦称寒暑表问题.典型应用题之一.对于同一温度,求在不同制的温度计上的度数之间相互换算的问题,称为温度计问题.常用的计算公式为:

$$(F^\circ-32^\circ)\times\frac{5}{9}=C^\circ;$$

$$C^\circ\times\frac{9}{5}+32^\circ=F^\circ.$$

公式中的C°代表摄氏温度计上的度数,F°代表华氏温度计上的度数.1摄氏度=9/5华氏度;1华氏度=5/9摄氏度.华氏冰点为32°F,沸点为212°F,冰点到沸点为180°F;摄氏冰点为0℃,沸点为100℃,冰点到沸点为100℃.

寒暑表问题(thermometer problem)　即"温度计问题".

时钟问题(problem of clock)　典型应用题之一.有关钟、表上的时针与分针之间的关系的计算题,称为时钟问题.解答时钟问题的关键是明确:分针在钟面上走一圈(60分),时针只走一格(5分),即分针走一分,时针走1/12分,所以分针每分钟比时针多走1-1/12=11/12(分).解此类应用题可用追及问题的概念来理解.

时间问题(time problem)　典型应用题之一.计算某事物起讫的年月日以及经过时间的应用题,称为时间问题.通常分三种类型:

1.已知某事件开始和结束的日期(或时刻),求事件经过的时间.

2.已知某事件开始的日期(或时刻)及经过的时间,求事件结束的日期(或时刻).

3.已知某事件经过的时间和结束的日期(或时刻),求事件开始的日期(或时刻).

解答时间问题,不要对日期(或时刻)进行运算,必须把日期或时刻转化为时间,然后对时间进行计算.时间算出后,其起止日期是否计算进去,应根据实际需要而定.由日期改成时间的法则是:把日期的年、月、日的数各减去1,就得经过的时间数;反之,如把经过的年、月、日的数各加上1,即可得日期的年、月、日数.

折扣问题(discount problem)　百分数问题的一种.买卖货物时,照标价减到原来的10分之几称为几折或几扣.例如,标价一元减到九角称为九折或九扣,减到七角伍分称为七五扣或七五折,减到五角的称为五折或对折.几折几扣就是把原价打了几折后再打几折,称为原价的几折几扣.如七折八扣,就是把原价打了七折以后再打八折.所以计算原价的七折八扣,就是用原价乘以70%以后再乘以80%,可见,把原价七折八扣等于把原价打五六折.

牛顿问题(Newton problem)　典型应用题之一.牛顿(Newton,I.)曾经提出如下算术问题:有一片牧场草地,27头牛6星期可以吃完,23头牛9星期可以吃完.如果是21头牛,问几星期可以吃完?(假定牧场的草是边吃边长的).像这样一类的应用题,被称为牛顿问题.解这类问题的关键是要求出:最初的草量和每星期长出的草量.牛顿问题亦名抽水问题.因为从水井里抽水时,水不断流出来,牛吃草时草不断长出来,有相同的概念,因此而得名.

抽水问题(drawing water problem)　即"牛顿问题".

撰　稿　马青图　王怀安　申克端　戎真理　杨改锋
李延华　李丽彬　李顺良　张秀清　陈夫义
苗兴华　林成岗　周东明　胡中锋　姜乐仁
顾松麒　崔林栋

审　阅　王怀安　王焕文　米道生　阮一清　姜乐仁

初　等　代　数

初等代数(elementary algebra)　亦称古典代数.大致相当于16世纪以前的代数学.它是在算术的基础上发展起来.算术研究数的四则运算及其应用.而在初等代数中,数的范围是逐渐扩大的,最初只限于正整数集,实践的需要随即产生正分数.正整数集添上正分数组成正有理数系.进行数的运算,需要有记数法.古代大多采用十进制(巴比伦的泥板算书也有采用60进制的)记数法.那时的记数法还不是位值制的,现代用的阿拉伯数字的十进位值制记数法,实际上最早在印度出现,可推溯到公元6世纪,后传入阿拉伯地区.在当时,数码的记法又分成东阿拉伯与西阿拉伯两大体系.西阿拉伯数码沿北非沿岸向西、再向北传过比利牛斯半岛,经西班牙再传至意大利和西欧各国,逐渐演变成今天被广为应用的阿拉伯数字.

负数概念最早见于中国古代数学名著《九章算术》的"方程"章,即由解方程的需要而产生负数概念,时为公元1世纪,中国古代杰出数学家刘徽在《九章算术法》中明确指出"今两算得失相反,要令正负以名之,正算赤、负算黑,否则以邪正为异."这对正负数给出了科学的定义,并规定了区分正负数的具体表示方法.印度数学中也有负数概念和正负数运算法则出现,虽比中国迟几百年,但对正负数的乘除法运算法则却要比中国早几百年,印度数学中关于零的认识,在数学史上也是最早且有独到之处的.

正整数系添上负整数与零组成整数系,在其中,加法、减法、乘法都可通行无阻,它们是三个二元运算,而减法是加法的逆运算;但除法不能对任二整数进行.正有理数系添上负有理数与零组成有理数系,在其中,只要不用零作除数,加、减、乘、除四则运算皆可进行.

其后,数概念继续扩充,不完全由于解方程的需要.无理数的严格定义直到19世纪中叶建立实数理论时随着被给出.但早在公元5世纪,古希腊的毕达哥拉斯学派就已发现$\sqrt{2}$与1不可公度,并用归谬法证明了$\sqrt{2}$不是有理数(凡有理系数的方程之根都称为代数数,这自然包括了一切有理数.非代数数的无理数称为超越数.它们远比代数数多得多,例如,圆周率π与自然对数的底e等,这些概念不属初等代数范围).

现代西方各种语言中的"代数学"这个词,其来源乃是9世纪的阿拉伯数学家阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī,M. ibn M.)所写的一部数学论著《移项和消去的科学》的书名前两个词al-jabr的拉丁文音译,后来演变成algebra,这就是拉丁文的"代数学".16世纪以前的代数学是指用字母代表一般的数,用以研究数的关系、性质和运算法则的数学分支,到17世纪中期,大体上已形成了现代的代数符号体系.法国数学家韦达(Viete,F.)对数学符号作了很多改进.用字母表中前面的字母(如a,b,c)表示已知数,而用后面的字母(如x,y,z)表示未知数,成为现在习惯地用法,使得方程和代数恒等式有简洁的表达式,代数式本身也成了可以运算的对象.他发现了代数方程的根与系数的关系,提出数字系数高次方程的近似解法(类似于后之牛顿法).

中国古代《九章算术》的"勾股"章已有一元二次方程的解法.王孝通《缉古算术》中已给出高次方程近似根的求解法.13世纪,秦九韶也给出高次方程近似根的求法.

在欧洲,16世纪,意大利数学家卡尔达诺(Cardano,G.)于1535—1545之间获得了一般三次方程的代数解法,不久,他的学生费拉里(Ferrari,L.)成功地获得一般四次方程的代数解法,都发表在卡尔达诺著的《大衍术》里.但人们寻求一般五次方程的根式解的尝试均告失败,直到19世纪中叶才得出否定的解答.

初等代数可简称方程论.作为一个数学教学科目,它还研究解不等式与不等式组,分式和根式的计算与变形、初等函数、数列以及排列、组合和二项式定理等.

古典代数(classical algebra)　即"初等代数".

数　系

数系(number system)　数学的基本概念之一.顾名思义,数系是一个代数系统,它以数为集合的元素、以数的运算为运算(一个或多个,其逆运算可有可无)、且以数的大小顺序为序(不能比较大小时无大小顺序).例如:

自然数系$(\mathrm{N},+,\cdot,<)$;

整数系$(\mathrm{Z},+,\cdot,<)$;

有理数系$(\mathrm{Q},+,\cdot,<)$;

实数系$(\mathrm{R},+,\cdot,<)$;

复数系$(\mathrm{C},+,\cdot)$;

幺模复数系$(\{e^{i\theta}|\theta\in\mathrm{R}\},\cdot)$;

二次单位根系$(\{-1,1\},\cdot,<)$;

四次单位根系$(\{\pm1,\pm\sqrt{-1}\},\cdot)$.

数系扩充原则(principle of extension of a number system)　数系扩充的基本法则.它是在人类认识和运用数的历史发展过程中,逐步形成的、不断扩大数的范围的一些基本原则.这些原则是:

1.从数系 A 扩充到数系 B 必须是 $A\subset B$,即 A 是 B 的真子集.

2.数系 A 中定义了的基本运算能扩展为数系 B 的运算,且这些运算对于 B 中 A 的元来说与原来 A 的元间的关系和运算相一致.

3.A 中不是永远可行的某种运算,在 B 中永远可行,例如,实数系扩充为复数系后,开方的运算就永远可行,再如,自然数系扩充为整数系后,减法的运算就能施行等.

4.B 是满足上述条件的惟一的最小的扩充,例如,自然数系只能扩充为整数系,而不能一下扩展为实数系.

还有一点必须明确:数系 A 的每一次扩充,都解决了原来数系中的某些矛盾,随之应用范围扩大了.但是,每一次扩充也失去原有数系的某些性质,比如,实数系扩充到复数系后,实数系的顺序性质就不复存在,即在复数系中不具有顺序性.数系的扩充,一般采用两种形式:一种是首先从理论上构造一个集合,即通过定义等价集合来建立新的数系,然后指出新的数系的一部分集合是和以前的数系同构的;另一种扩充形式则是把新元素加到已建立的数系中而扩充.

代数运算(algebraic operation)　代数学的基本概念之一.在初等数学中,通常称数的加、减、乘、除、乘方、开方等六种运算为代数运算.一般地,代数运算是指某一代数系统 A 里可以通行无阻的 n(正整数)元运算,就是从 A^n 到 A 的一个映射.这里 $A^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in A,i=1,2,\cdots,n\}$,最常见的是 $n=2$ 的二元运算.例如,有理数系 Q 内加法、减法、乘法都是二元运算,但除法不是可以通行无阻的,这是因为不能用零作除数,因此,除法只能算作 Q 内的一个部分二元运算.在非零有理数系 Q^* 内,除法是一个二元运算,它是乘法的逆运算.在自然数系 N 里,乘方是一个二元运算:$(m,n)\longmapsto m^n$.在整数系 Z 内,乘方只是一个部分二元运算,这是因为 0^{-1} 无意义.给定正整数 k 为乘方次数时,k 次乘方是 N(或 Z,Q,R,C 等)内一个一元运算:$x\longmapsto x^k$,而开 k 次方则是一个部分一元运算:$x^k\longmapsto x=\sqrt[k]{x^k}$.N 内只有完全平方数才可以开平方($k=2$),只有完全立方数才可以开立方($k=3$)……而非任一自然数的平方根还能是自然数,亦非任一自然数的立方根还能是自然数.开平方这个运算在实数系 R 内也只是一个部分一元运算,这是因为负数的平方根不是实数.在复数系 C 里,开平方虽可通行无阻,但开平方的结果是双值的(只有零是例外).适当限定辐角的范围,开平方才是 C 内一个一元运算.

加法(addition)　一种二元运算.加法有两种形式的定义:

1.数的加法.数的加法是在实践中逐渐抽象出来的,并随着数系的扩大而确定加法的意义.它的严格的科学定义是数学发展到一定阶段,在研究其理论的逻辑基础时,才开始做出并逐步完善的.最早使用加法符号“+”的是 1489 年德国莱比锡出版的瓦德曼(Wadmann,J.)医师所著的《商业算术》一书.

2.现代数学中,给一个代数系统 A 里的一个二元运算起名,本可完全任意,由于传统习惯的影响,常把具有两个二元运算的代数系统 A 里满足交换律、结合律且另一运算对它满足左右分配律的那个二元运算称为加法,而另一个二元运算不管它是否满足交换律或结合律都称为乘法.仅仅满足结合律、交换律的二元运算,即使有逆运算可行也未必就称为加法.例如,幺模复数系 $A=\{\mathrm{e}^{i\theta}|0\leqslant\theta<2\pi\}$ 里数的乘法,不能称为加法以避免混淆.自然数系里数的加法与乘法都满足结合律与交换律,且乘法对加法满足左右分配律,但加法对乘法不满足分配律.因此,数的加法与乘法二者所处的地位并不对称,称呼不可对换.两个元 a 与 b 相加的结果称为 a 与 b 的和,记为 $a+b$.这里“+”是加法符号,a 称为被加元,b 称为加元(参见本卷《算术》同名条).

被加元(augend)　见“加法”.

加元(addend)　见“加法”.

乘法(multiplication)　一种二元运算.乘法有两种形式的定义:

1.数的乘法.乘法最初是作为加法的简便运算引入的:$a\times n$ 是 n 个 a 相加,即

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=a\times n.$$

两数相乘的乘法是在实践中逐渐抽象出来的.数的乘法的严格科学定义是数学发展到一定阶段,在研究其理论的逻辑基础时,才开始做出并逐步完善的.然后才有各数系的乘法运算的严格科学定义.

2.在现代数学中,乘法常指某一代数系统 A 里的一个二元运算.它不必满足交换律,甚至不必满足结合律.事实上,任一代数系统 A 里的任一个二元运算只要不会发生混淆,都可称之为乘法.特别是在 A 里已有一个称为加法的二元运算“+”,使$(A,+)$成一交换群时,则 A 里对加法满足分配律的另一个二元运算常称为乘法.仿照数的乘法,A 的元 a 与 b 相乘的结果称为 a 与 b 的积,记为 $a\times b$ 或 $a\cdot b$ 或 ab.a 称为被乘元,b 称为乘元(参见本卷《算术》同名

条).

被乘元(multiplicand) 见"乘法".

乘元(multiplicator) 见"乘法".

交换律(commutative law) 一种运算律.在数的加法或乘法运算中,交换加数(乘数)和被加数(被乘数)的顺序,其和(积)不变,就称数的加法(乘法)满足交换律.一般地,对于集合 S 中的二元运算"$\circ$",若对任意二元素 $a,b\in S$,都有 $a\circ b=b\circ a$,则称这个二元运算"$\circ$"满足交换律.称不满足交换律的二元运算是不可交换的.例如,复数的加法和乘法运算满足交换律,但其减法和除法就不满足交换律;矩阵的加法运算满足交换律,但其乘法运算不满足交换律.

结合律(associative law) 一种运算律.在数的加法或乘法运算中,任意三个数相加(相乘)时,可先将前两个数相加(相乘)所得的和(积),再与第三个数相加(相乘),也可先将后两个数相加(相乘)所得的和(积),再和第一个数相加(相乘),其和(积)不变,就称数的加法(乘法)运算满足结合律.一般地,设"$\circ$"是集合 S 的一个二元运算,若对于 S 中的任意三个元素 a,b,c,有 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$,则称二元运算"$\circ$"满足结合律.数的加法和乘法运算,多项式的加法和乘法运算以及矩阵的加法运算都满足结合律.但数的减法运算不满足结合律.

分配律(distributive law) 一种运算律.在通常的数的运算中,一个数同两个数的和相乘,等于把这个数分别同这两个数相乘,再把积相加,这种运算性质称为乘法运算对于加法运算的分配律,简称分配律.例如,设 $a,b,c\in\mathrm{R}$,则有:

$$a(b+c)=ab+ac, \tag{1}$$

$$(a+b)c=ac+bc, \tag{2}$$

上面(1)式称为左分配律,(2)式称为右分配律.推广到一般,设在集合 M 中定义了两种二元代数运算$\oplus$与$\otimes$,若对于 M 中的任意三个元素 a,b,c,总有 $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$,则称运算$\otimes$对于运算$\oplus$满足左分配律;若对任意 $a,b,c\in M$,总有 $(a\oplus b)\otimes c=(a\otimes c)\oplus(b\otimes c)$,则称运算$\otimes$对于运算$\oplus$满足右分配律.若左、右分配律都满足,则称满足分配律.

左分配律(left distributive law) 见"分配律".

右分配律(right distributive law) 见"分配律".

超越运算(transcendental operation) 代数运算的推广.在初等数学中,除代数运算以外的其他运算都称为初等超越运算,简称超越运算.它包括无理指数的幂运算、对数运算、三角函数运算及反三角函数运算等.

自然数(natural numbers) 见本卷《算术》同名条.本书采用中国国家标准,0 作为第一个自然数.

整数(integer) 亦称有理整数.见本卷《算术》同名条.

整数系(system of integers) 亦称整数集.指所有整数的集合,记为 Z.以自然数系为基础构造整数系的工作是 19 世纪许多数学家工作的结果.1860 年,外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))首先提出用一对有序自然数表示负整数.以后,佩亚诺(Peano, G.)利用这个思想,在建立了自然数系的公理以后,又进一步构造了整数系.其要点是:

1.规定笛卡儿积 $D=\mathrm{N}_+\times\mathrm{N}_+$ 的二元关系$\sim$:

$$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c,(a,b),(c,d)\in D.$$

可以证明$\sim$满足反身律、对称律、传递律,因而是等价关系.利用等价关系$\sim$将 D 分成等价类,以$\overline{(a,b)}$表示(a,b)所在的等价类,称商集

$$D/\sim=\{\overline{(a,b)}\mid(a,b)\in D\}$$

为整数集,记为 Z.Z 中的元素即等价类$\overline{(a,b)}$称为整数.

2.在 Z 中可以如下定义加法和乘法:

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)},$$

$$\overline{(a,b)}\,\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)}.$$

由于从 $(a,b)\sim(a',b'),(c,d)\sim(c',d')$ 可以推出

$$(a+c,b+d)\sim(a'+c',b'+d'),$$

$$(ac+bd,ad+bc)\sim(a'c'+b'd',a'd'+b'c'),$$

所以定义是良好的,即与代表元选择无关.容易验证加法、乘法都满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.对于给定的整数$\overline{(a,b)},\overline{(c,d)}$,方程$\overline{(a,b)}+x=\overline{(c,d)}$在 Z 中有惟一解,记为$\overline{(c,d)}-\overline{(a,b)}$.Z 对于加法作成一个加群,对于加法、乘法作成整数环.

3.在 Z 中定义元间的次序:

$$\overline{(a,b)}<\overline{(c,d)}\Leftrightarrow a+d<b+c.$$

可以证明这个定义是良好的,并且 Z 关于$<$构成有序集.

4.令自然数 $a\longmapsto\overline{(a+1,a)}$,就把自然数集嵌入到整数集,把$\overline{(a+1,a)}$仍记为 a,于是 $\mathrm{N}_+\subset\mathrm{Z}$,把$\overline{(1,1)}$记为 0,把$\overline{(a,a+1)}$记为$-a$.于是有

$$\mathrm{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}.$$

参见"负数"和《算术》中的"零".

整数集(integer set) 即"整数系".

整点(integral point) 亦称格点,或称格子点.代数学的基本概念之一.指欧几里得空间中,坐标全为整数的点.它有如下定义:

1.数轴上表示整数的点称为整点.

2.平面直角坐标系中,坐标都是整数的点(m,n) $(m,n\in\mathrm{Z})$称为整点.

3.一般地,在 n 维欧几里得空间 R^n 中,设基底

为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$. 当 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是整数时，$\mathbb{R}^n$ 中的点 $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ 称为整点.

研究凸域上的整点问题属于数的几何学范畴.

格点(lattice point) 亦称格子点. 即“整点”.

有理数(rational number) 整数的扩充. 整数、分数统称为有理数；或将分数 m/n 称为有理数，其中 m,n 为整数，$n\neq 0$；或将整数、有限小数、无限循环小数统称为有理数. 最初，分数概念的产生不是由除法得来的，分数被看做是整体或一个单位的一部分，后来，在运算过程中产生了分数，它表示两个整数的商. 分数的拉丁文是 fractio，来自 frangere，是打破、断裂的意思，汉语的分也是分开、部分的意思. 三千多年前的埃及纸草书中就已经有了分数，并把所有分数都化为单位分子分数，这使得运算非常复杂. 中国《墨经》记述食盐的分配时，就有“二升少半”和“一升大半”的记载，其中，少半和大半即 1/3 和 2/3，还有半即 1/2.《管子》在讲土地种植的分配时，有十分之二，十分之四……十分之七等分数的记载.《考工记》讲制造车轮有“六分其轮祟，以其一为之牙围”，“叁分其牙围而漆其二”，其意是 1 牙围=1/6 轮祟；1 牙围的 2/3 要上漆. 中国《九章算术》的《方田》一章给出相当完整的分数运算法则.《九章算术》以后，《孙子算经》和《张丘建算经》都讲到分数四则运算的计算方法和它们的应用. 有理数的严格定义详见“有理数系”.

有理数系(system of rational numbers) 亦称有理数集. 全体有理数的集合. 在 19 世纪的很长一段时间里，欧姆(Ohm, M)、外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))都做了不少工作，特别是佩亚诺(Peano, G.)继承了前人的思想，建立起自然数公理体系之后，逻辑地建立了整数系、有理数系. 以整数环 $\mathbb{Z}$ 为基础，可以通过如下步骤构造有理数系：

1. 规定笛卡儿积 $D=\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ 的一个二元关系～：

$$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc,\ (a,b),(c,d)\in D.$$

可以证明～是等价关系，用等价关系～将 D 分为等价类，并组成商集 $D/\sim$，这一商集称为有理数集，记为 $\mathbb{Q}$. (a,b) 所在的等价类用符号 a/b 表示，则

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}.$$

根据定义，

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc,$$

$\mathbb{Q}$ 中的元素称为有理数，令整数 $a\longmapsto\frac{a}{1}$ 就把整数嵌入 $\mathbb{Q}$.

2. 在 $\mathbb{Q}$ 中定义加法和乘法：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

以上两式中 $a/b, c/d\in\mathbb{Q}$. 可以证明，这两个定义是良好的，即与代表元选择无关. 加法、乘法满足结合律、交换律、分配律. 加法的零元为 $0/b$，乘法的单位元为 $a/a, a\neq 0$. 对于给定的有理数 $a/b, c/d$，方程

$$\frac{a}{b}+x=\frac{c}{d},\quad \frac{a}{b}x=\frac{c}{d}$$

(后者要求 $a/b\neq 0$)在 $\mathbb{Q}$ 中恒有解. 第一个方程的解称为 c/d 与 a/b 的差，相应运算称为减法，减法是加法的逆运算. 第二个方程的解称为 c/d 除以 a/b 的商，相应运算称为除法. 有理数集构成最小数域.

3. 在 $\mathbb{Q}$ 中定义元素间的次序：设 $a/b\in\mathbb{Q}$，如果 $ab>0$，称 a/b 为正的，记为

$$\frac{a}{b}>\frac{0}{b}.\quad \frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0.$$

$\mathbb{Q}$ 对于 $>$ 构成全序集. 这个全序集满足：

1) 若 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，则 $\frac{a}{b}+\frac{e}{f}>\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$.

2) 若 $\frac{a}{b}>0, \frac{c}{d}>0$，则 $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}>0$.

3) 给定 $\frac{a}{b}>0, \frac{c}{d}>0$，存在正整数 n 使得

$$\frac{c}{d}<\frac{na}{b}.$$

此结论亦称阿基米德性质. 这样，$\mathbb{Q}$ 是一个阿基米德有序域.

有理数集的基本性质是：

1. 域性质. 有理数集对于加法、减法、乘法和除法(除数不为零)形成一个数域，而且是最小的数域.

2. 有序性. 有理数集的大小关系“$<$”是一个顺序关系，且在此关系下有理数集成为线性序集，即全序集，且域运算保序而 $\mathbb{Q}$ 成有序域.

3. 稠密性. 任何两个不同的有理数之间存在着另外的有理数.

4. 可数性. 有理数集是无限可数集，即有理数集可以与自然数集建立一一对应，有理数集的基数为 $\aleph_0$.

5. 离散性. 任何两个有理数之间都存在无理数，有理数集作为实数集的子集不连续.

6. 有理数集是代数数集的子集. 任何有理数都是一次代数数，即任何有理数都是某整系数一次方程的根.

有理数集(rational number set) 即“有理数系”.

有理点(rational point) 数学的基本概念之一. 指空间中，坐标全为有理数的点. 有理点的定义是：

1. 数轴上表示有理数的点称为有理点.

2. 平面或空间直角坐标系中，坐标都是有理数的点称为有理点.

3. 一般地，在 n 维空间 R^n 中，点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $(a_i\in\mathrm{Q},i=1,2,\cdots,n)$ 称为有理点.

相反数(opposite number)　代数学术语. 指保持特定关系的两个数，指和为零的两个实数或复数. 相反数有以下两种：

1. 若两个实数的绝对值相等，符号相反，则称这两个实数是互为相反数. 零的相反数是零. 在数轴上，两个相反数到坐标原点的距离相等，且在原点的两旁(零除外). 互为相反数的两个数可以表示成 a 与 $-a$.

2. 对于两个复数，若其和为零，则也称它们互为相反数. 在复平面上，两个相反数对应的点的连线以坐标原点为对称中心.

数轴(number axis)　亦称数直线. 数学的基本概念之一. 指规定了原点、方向和长度单位的直线. 数轴的重要作用是用它上面的几何点表示实数. 具体作法是按下面所述建立数轴上点的集合与实数集合的一一对应，并用点表示它对应的实数：

1. 原点 O 表示实数零.

2. 在原点的正向一侧，与原点相距 1 个单位长度的点表示实数 $+1$，与原点相距 2 个单位长度的点表示实数 $+2$；在原点的负向一侧，与原点相距 1 个单位长度的点表示实数 -1，与原点相距 2 个单位长度的点表示实数 -2 等.

3. 将表示两个相邻整数 a 与 $a+1$ 的点之间的线段 10 等分，依次用分点表示实数 $a+0.1,a+0.2,\cdots,a+0.9$；此后，再将更邻近的相邻两点 b 与 $b+0.1$ 之间的线段 10 等分，依次用分点表示实数 $b+0.01,b+0.02,\cdots,b+0.09$，如此继续下去，这样就得到了零、正负整数与所有有限十进小数的表示. 无限循环十进小数与无理数的表示可按下款做出.

4. 对于任何无限循环十进小数或无理数 x，取一个严格单调递增的有限十进小数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 与一个严格单调递减的有限十进小数列 $b_1>b_2>\cdots>b_n>\cdots$，满足

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,$$

且对任何 $n\in\mathrm{N}$ 有 $a_n<x<b_n$，则必有惟一的一点 X 在所有线段 $[a_n,b_n]$ 上，这样的点 X 表示无限循环十进小数或无理数 x. 数轴又常作为一维坐标系或直线坐标系. 数轴上的点的一维坐标就是它表示的数，点 A 的坐标为 a，记为 $A(a)$(参见本卷《平面解析几何》中的“直线上点的坐标”).

绝对值(absolute value)　数学的基本概念之一. 指实数或复数的一种数值. 非负实数的绝对值是它自身；负实数的绝对值是它的相反数. 实数 a 的绝对值记为 $|a|$，根据实数绝对值的定义，

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

一个实数的绝对值是数轴上表示这个数的点到坐标原点的距离. 实数绝对值具有下列性质：

1. $|a|\geqslant 0$.

2. $|a|=|-a|$.

3. $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

4. 若 $\varepsilon>0$，则 $|a|<\varepsilon$ 的充分必要条件是
$$-\varepsilon<a<\varepsilon.$$

5. 若 $N>0$，则 $|a|>N$ 的充分必要条件是
$$a<-N \text{ 或 } a>N.$$

若把求实数绝对值作为一种运算，则有以下的运算性质：

1. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，当且仅当 a 与 b 同号时等号成立. 此式可以推广为

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 同号时等号成立.

2. $|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

3. $|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1||a_2|\cdots|a_n|$.

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$.

复数 $z=a+b\mathrm{i}\,(a,b\in\mathrm{R})$ 的绝对值又称为复数的模(参见“复数的模”). 绝对值概念的进一步推广是度量空间中向量模或范数的概念. 绝对值符号 $|x|$ 是外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))于 1841 年首先使用的.

有理数大小的比较(comparison of rational numbers)　确定有理数大小的基本法则. 有理数大小的比较可用如下定义给出：

1. 正数大于零，负数小于零，正数大于负数.

2. 两个正有理数中，绝对值大的数较大.

3. 两个负有理数中，绝对值大的数较小.

有理数满足下面的顺序关系律：

1. 对任意 $a,b\in\mathrm{Q}$，必存在且只存在下列三种关系之一：$a>b,a=b,a<b$.

2. 对任意 $a\in\mathrm{Q}$，$a=a$.

3. 对任意 $a,b\in\mathrm{Q}$，若 $a>b$，则 $b<a$；若 $a\leqslant b$，则 $b\geqslant a$.

4. 对任意 $a,b,c\in\mathrm{Q}$，若 $a<b,b<c$，则 $a<c$；若 $a\geqslant b,b\geqslant c$，则 $a\geqslant c$.

对于有理数大小的比较有下面的重要性质：设 $a,b\in\mathrm{Q}$. 若 $a>b$，则差 $a-b$ 是正的；若 $a<b$，则差 $a-b$ 是负的；若 $a=b$，则差 $a-b$ 是零.

有理数加法(addition of rational numbers)　有理数的基本运算之一. 给定两个有理数，按下面的规则得出一个新的有理数，称为它们的和，这种运算称为有理数的加法. 其法则如下：

1. 正有理数相加. 两个写成分数形式的正有理数相加，可按分数加法法则完成；两个写成小数形式的正有理数相加，可按小数加法法则完成；写成不同

形式的两个正有理数相加，首先化成同一形式，然后进行加法运算.

2. 任意一个有理数与零相加，它们的和仍是这个有理数，即 $a+0=0+a=a$.

3. 两个负有理数相加得负有理数，它们的绝对值相加作为和的绝对值，绝对值相加按正有理数相加法则进行.

4. 负有理数与正有理数相加，取绝对值较大者的符号作为和的符号，绝对值大者减去绝对值小者所得的结果作为和的绝对值，绝对值相减按正有理数减法法则完成. 两个互为相反数的有理数的和等于零.

以上四条规则通常称为有理数的加法法则. 有理数的加法满足交换律和结合律，即：

$$a+b=b+a;\quad (a+b)+c=a+(b+c).$$

有理数加法法则(rule of addition of rational numbers) 见“有理数的加法”.

有理数减法(subtraction of rational numbers) 有理数加法的逆运算. 有理数加法的逆运算，即已知两个有理数的和与一个加数，求另一个加数的运算称为有理数的减法. 两个有理数 a 与 b 相减的结果称为这两个有理数的差，记为 $a-b$，a 称为被减数，b 称为减数，“$-$”称为减号. 在数环的一般理论中，有理数集对于加法成一交换群，两个有理数 a 与 b 相减定义为 a 加 b 的负元素 $-b$，即 $a-b=a+(-b)$. 求两个有理数的差 $a-b$ 的运算称为有理数的减法.

有理数减法法则(rule of subtraction of rational numbers) 有理数运算的基本法则之一. 有理数相减，其差等于被减数加上减数的相反数，即设 $a,b\in\mathbf{Q}$，则 $a-b=a+(-b)$. 因此，有理数的减法运算就可归于有理数的加法运算.

代数和(algebraic sum) 一种运算结果. 有理数的加法与减法可以写成统一的加法形式，其运算结果称为代数和. 在表示代数和的式子中，各加数都带有本身的性质符号(正号略去不写). 例如 $-5-2+3$ 可写成 $(-5)+(-2)+3$. 一个代数和可能是正数、负数和零.

有理数乘法(rule of multiplication of rational numbers) 有理数的基本运算之一. 给定两个有理数，按下面的规则得出一个新的有理数，称为它们的积. 这种运算称为有理数乘法. 其法则如下：

1. 两个正有理数相乘：

1) 当两个有理数用分数形式表示时，可利用算术中分数的运算法则进行运算：

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\ (b\neq 0,d\neq 0).$$

2) 当两个有理数用小数的形式表示时，可利用算术中小数的乘法运算法则完成，但要注意无限循环小数应化成分数来计算.

3) 当两个有理数用不同形式给出时，要首先化成同一形式，然后再按上述 1), 2) 运算.

2. 任何数同零相乘都等于零，即

$$a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

3. 两个负有理数相乘得正有理数，以它们的绝对值的积作为积的绝对值.

4. 正有理数乘负有理数得负有理数，以它们的绝对值的积作为积的绝对值.

以上四条规则通常称为有理数的乘法法则. 有理数的乘法满足交换律、结合律和乘法对加法的分配律，即：$a\cdot b=b\cdot a$；$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.$$

有理数乘法法则(rule of multiplication of rational number) 见“有理数的乘法”.

有理数除法(division of rational numbers) 有理数乘法的不完全逆运算. 已知两个有理数的积与一个乘数，求另一个乘数的运算. 两个有理数 a 与 b ($b\neq 0$)相除，记为 $a\div b$ 或 a/b，a 称为被除数，b 称为除数，“$\div$”称为除号，相除所得的结果称为商. 换言之，若 $x\cdot b=a$，$b\neq 0$，则 x 称为 a 除以 b 的商，记为 $x=a\div b=a/b$. 定义除法时，零不能作除数. 在有理数域中，有理数除法可用乘法定义：$a\div b=a\times b^{-1}$，其中 $b\neq 0$，b^{-1}是 b 的乘法逆元素，即 b 的倒数.

有理数除法法则(rule of division of rational numbers) 有理数运算的基本法则之一. 两个有理数相除，可利用 $a\div b=a\times 1/b$，转化为有理数乘法进行运算. 但要注意：零不能作除数，即 $b\neq 0$. 商的符号法则是：同号得正，异号得负.

平方(square) 亦称二次乘方. 一种运算结果. 指一个数和它自身的乘积. 例如数 a 的平方是

$$a^2=a\cdot a.$$

二次乘方(square) 即“平方”.

完全平方数(perfect square number) 一种特殊的有理数. 若一个正有理数 a 可以表示成某个有理数 b 的平方，即 $a=b^2$，则这个正有理数 a 称为完全平方数. 例如 0, 1, 36, 0.16，都是完全平方数.

立方(cube) 亦称三次乘方. 一种运算结果. 指一个数自乘三次后所得的积. 例如数 a 的立方是

$$a^3=a\cdot a\cdot a.$$

三次乘方(cube) 即“立方”.

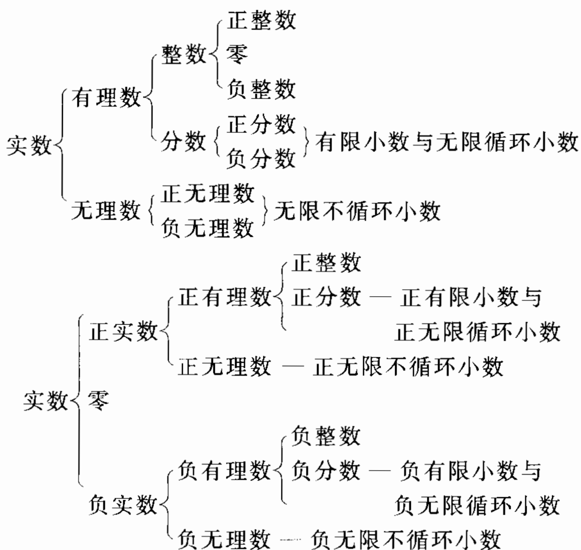
完全立方数(perfect cube number) 一种特殊的有理数. 如果一个数可以表示成某个有理数的立方，那么这个数称为完全立方数. 例如 8, 27, 0.064 都是完全立方数.

无理数(irrational number) 一种特殊的实数. 无限不循环小数称为无理数. 由于无理数不能表示成两个整数比的形式，故又称非比数. 早在公元前 6

世纪，毕达哥拉斯学派的希帕索斯(Hippasus,(M))就发现并证明了正方形对角线与其一边之比不能用两个整数之比来表达.他把这种不能用两个整数比来表达的比称为无公度比，按希腊文的原意，就是“不能表达的比”或“没有比”.由于毕达哥拉斯学派信奉“任何线段的长度对应一个有理数”的哲理，因而希帕索斯的这一发现使毕达哥拉斯学派的成员惊慌不安，从而摒弃了这样的数(无理数).古巴比伦、中国和印度也早已接触到不尽根，如中国的《九章算术》中“少广”章有“若开之不尽者为不可开”.但由于当时用近似计算解决了实际问题，因而也就未从理论上进行深入研究.9世纪，阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī,M. ibn M.)认为：“二次方程有无理根”.15世纪，达·芬奇(da Vinci,L.)把无理数称之为“无理的数”.1628年，笛卡儿(Descartes,R.)在《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》中认为：“无理数是能代表连续变量的抽象数”.18世纪，欧拉(Euler,L.)给出了用无限分数计算平方根的一般方法以及e是无限小数的最初证明.勒让德(Legendre,A.-M.)提出π可能不是有理系数方程根的猜测，导致了无理数的分类.尤其是微积分理论基础的建立促进了对建立无理数严密理论的研究.19世纪，经过许多数学家的努力，终于建立起严密的无理数理论.无理数一词，来自希腊文 αλγroζ(意思是“不能表达”)，中国明代徐光启译拉丁文《几何原本》时译为无理数，沿用到今.

非比数(irrational number)　即“无理数”.

实数(real number)　有理数与无理数的统称(参见本卷《数学分析》同名条).实数可用两种不同的依据作如下两种分类：



实数集(set of real numbers)　一类重要的集合.指全体实数的集合，记为R.即实数系(参见本卷《数学分析》中的“实数系”).

正数(positive number)　一种实数.指正整数和正分数的统称(参见“实数”和“负数”).

负数(negative number)　一种实数.指正数的相反数.在实数范围内，带有性质符号“-”的数称为负数.带有性质符号的负数与正数是在数的不断扩充过程中出现的.人类在生产实践中，随着生产实际的复杂化和社会的发展，迫切需要度量有方向的量，要求用互为相反的数表示前进与后退、向上与向下、盈与亏、增加与减少等实际问题中既有方向又有数值的量.这样就在由整数集扩充到分数集的基础上又引入了新数——负数，相应地原有的数就是正数，于是将分数集先后扩充到有理数集、实数集等.以下给出几种正、负数的定义：

1.在建立了有原点、方向和单位长度的数轴上，原点右边的点所对应的数是正数；原点左边的点所对应的数是负数；原点对应数零，它是正负数的界限，即是惟一的中性数.

2.在抽象代数中用公理定义一个序群内大于0的元称为正元素，小于0的元称为负元素，在序环和序域中亦然.实数域是序域，故有正数与负数之称，但复数域C非有序域，在复数所组成的加法群内每个数有它的负元即相反数，但无所谓正数.

中国是世界上最早使用正负数概念的国家，《九章算术》的《方程》章中就引入了负数概念并给出了正负数加减运算法则正负术：“同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之；其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之.”前四句是减法法则，后四句是加法法则，其中的同名、异名分别指同号、异号，相益、相除(除指减)分别指绝对值相加或相减，“无”具有零的意思.这些运算法则与现代使用的正负数加减运算法则完全一致.1259年，李冶在他所著《益古演段》中，在一个数上画一条斜线表示负数，与现代使用的负号“-”，形式上只有横斜之差，但本质无异.1299年，朱世杰撰写的《算学启蒙》“明正负术”中更加明确地给出了正负数的加减法则，并在“明乘除段”中给出了“同名相乘为正，异名相乘为负”的乘法法则，这是世界上关于正负数乘法法则的最早记载.关于正负数除法，朱世杰在1303年撰写的《四元玉鉴》中亦明确给出.可见，中国对正负数的概念及四则运算早在元朝已臻完善.

公元7世纪，婆罗摩笈多(Brahmagupta)开始认识负数，他对负数的解释是负债和损失，并用小点和小圈记在数字上面表示负数.12世纪，婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)在《算法本原》中较全面地讨论了负数.在欧洲，1202年，斐波那契(Fibonacci,L.)第一个正确认识负数，但他并未解决负数问题.以后，欧洲许多数学家都发现了负数，但却认为是假

数，或说成是荒谬的数．直至1633年，笛卡儿(Descartes，R．)在他的《几何学》里论述了正负数的几何解释，才使正负数的概念逐渐得以承认．负数在欧洲的最终确认是19世纪，外尔斯特拉斯(Weierstrass，K．(T．W．))、戴德金(Dedekind，(J．W．)R．)和佩亚诺(Peano，G．)奠定了整数的逻辑基础之后．

可公度量(commensurable quantities)　亦称可通约量．数学的基本概念之一．指两个同是第三个量的整倍数的量．对于两个正量 A 与 B，若存在第三个量 C，使 $A=pC$，$B=qC$ 同时成立，这里 p，q 为自然数，则称量 A 与量 B 可公度或可通约，且称 C 是 A 与 B 的一个公度．这时称 A 与 B 是可公度量或可通约量．若不存在自然数 p，q 与量 C 使 $A=pC$，$B=qC$ 成立，则称 A 与 B 是不可公度或不可通约，这时 A，B 是不可公度量或不可通约量．公度的概念在数学史上曾起过重要作用，因为当时人们尚未认识无理数，所以对于有关无理数的问题就归结为不可公度的量来解决．

不可公度量(noncommensurable quantities)　见“可公度量”．

实数的四则运算(four arithmetic operations of real numbers)　实数的加、减、乘、除四种运算的统称．实数可以用无限小数表示，因此，实数的加、减、乘、除也可通过小数的加、减、乘、除来实现．用手算或在计算机上作实数(特别是无理数)的运算，不论取多少位小数，一般总是它的近似值，即使用其近似值来进行计算，计算结果也是近似值，而且必须确定其精确度才有实用价值．确定小数四则运算精确度的办法如下：

1．两实数相加、减时，一般应取相同的小数位，即有相同的精确位，通常其和、差的精确位要比原两数少一位，即若原两数精确到 $1/10^n$，则和、差精确到 $1/10^{n-1}$．例如，若 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 各取四位小数：$\sqrt{2}\approx 1.4142$，$\sqrt{3}\approx 1.7320$，则 $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 1.4142+1.7320=3.1462$．其近似值应取三位，即取

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3.146.$$

2．两实数相乘，在两数取相同的小数位时，乘积的精确值比原两数少一位，在两数取不同的小数位时，乘积的精确位比位数少的还要少一位．两实数相除的情形类似．具体进行两实数的四则运算时，可以取两实数的不足近似值和过剩近似值来做．例如，计算 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$，利用 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 的不足近似值 1.4142，1.7320 及过剩近似值 1.4143，1.7321．计算结果是

$$1.4142\times 1.7320=2.44939440,$$
$$1.4143\times 1.7321=2.44970903.$$

它们分别是 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ 的不足近似值和过剩近似值．它们只能精确到三位小数，即可取

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 2.449.$$

实数的整指数乘方(power of real numbers with integral exponent)　亦称实数的整指数幂．实数的一种运算．写成 a^x 形式的数称为幂．a 称为幂的底数，x 称为幂的指数．当 a 限定为实数，而 x 取整数时，则有如下三种情形：

1．当指数 x 为正整数 n 时，把 a^n 称为实数的正整数指数幂，它表示 n 个 a 的乘积．

2．当指数 x 为零时，要求 $a\neq 0$，把 a^0 称为零指数幂，并且规定 $a^0=1$．

3．当指数 x 为负整数 $-n$ 时，要求 $a\neq 0$，把 a^{-n} 称为实数的负整数指数幂，且规定 $a^{-n}=1/a^n$．

以上各种幂统称为实数的整数指数幂．

实数的整数指数幂(power of real numbers with integral exponent)　即“实数的整指数乘方”．

幂底数(base of a power)　见“实数的整指数乘方”．

幂指数(exponent of a power)　见“实数的整指数乘方”．

实数的方根(root of real number)　实数的一种运算．一个实数的 n 次乘方等于某实数，这个实数就称为某实数的 n 次方根．即若 $a\in\mathbf{R}$，$x^n=a$($n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1$)，则称 x 是实数 a 的 n 次方根．从已知实数 a 求其 n 次方根的运算称为实数的开方．在实数范围内考虑，正实数总有两个不同的偶次方根，他们互为相反数；正实数只有一个奇次方根，它是正数；负实数有一个奇次方根，它是负数，负实数无偶次方根．正实数 a 的正的 n 次方根称为 a 的 n 次算术根．零的 n 次方根是零，零的 n 次算术根也是零．当 n 是奇数，a 为任意实数时，a 的 n 次方根记为 $\sqrt[n]{a}$；当 n 是偶数，a 为任意正实数时，a 的正、负两个 n 次方根分别记为 $\sqrt[n]{a}$ 与 $-\sqrt[n]{a}$，亦可合并记为 $\pm\sqrt[n]{a}$；零的 n 次方根用 $\sqrt[n]{0}$ 表示．最常用的实数的二次方根亦称平方根，平方根号略去指数 2 不写，即 a 的平方根记为 $\pm\sqrt{a}$．三次方根亦称立方根．

方根的主要性质如下：

1．奇次方根的性质．在实数域内，正数的奇次方根只有一个，它是一个正数；负数的奇次方根也只有一个，它是一个负数；零的奇次方根是零．

2．偶次方根的性质．在实数域内，正数的偶次方根有两个，它们互为相反数；负数的偶次方根在实数域内无意义；零的偶次方根是零．

3．由方根的定义知：

1）$\sqrt[n]{a}$ 有意义时，$(\sqrt[n]{a})^n=a$．

2）n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$．

3) n 为偶数时，

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

4. 方根的运算性质(参见“根式的性质”).

实数的开方(radication of real numbers) 见“实数的方根”.

平方根(square root) 见“实数的方根”.

立方根(cube root) 见“实数的方根”.

二次方根(square root) 即“平方根”.

三次方根(cube root) 即“立方根”.

算术平方根(arithmetic square root) 亦称二次算术根. 一种运算结果. 指正数的正平方根. 零的算术平方根是零. 非负数 a 的算术平方根记为 $\sqrt{a}$. 根据算术平方根的意义,可得

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

算术根(arithmetic root) 一种特殊方根. 正实数 a 的正的 n 次方根,称为 a 的 n 次算术根,用 $\sqrt[n]{a}$ 表示. 规定零的算术根是零.

不尽根(surd root) 一种特殊方根. 指不能用有限位小数表示的方根,或准确到有限位小数的方根. 根据对“不尽根”一词的不同理解,不尽根有以下不同定义:

1. 若正数 a 的 $n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$ 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 不能化为有限小数,则称为不尽根. 例如 $\sqrt{3}=1.73\cdots$, $\sqrt{1/9}=0.333\cdots$ 都是不尽根.

2. 若正数 a 的 $n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$ 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 是无限不循环小数,则称为不尽根. 例如 $\sqrt{3}=1.73\cdots$ 是不尽根,而 $\sqrt{1/9}=1/3$ 不是不尽根. 这样意义下的不尽根是用根式表示的无理数,常见的有:

1) 当自然数 m 不是某自然数的 n 次幂时, $\sqrt[n]{m}$ 是不尽根.

2) 当既约正分数 p/q 的分子分母不能同时各表成一自然数的 n 次幂时, $\sqrt[n]{p/q}$ 是不尽根.

3) a 为正无理数时,对任何 $n\in\mathbf{N},n\geqslant 2$, $\sqrt[n]{a}$ 为不尽根.

3. 在求正数 a 的 $n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$ 次方根时,若求得一个有限小数 α,使得 $0<|\sqrt[n]{a}-\alpha|<10^{-k}(k\in\mathbf{N})$,则 α 是 $\sqrt[n]{a}$ 的一个近似值,称为 a 准确到小数点后第 k 位的 n 次不尽根.

倒数(reciprocal) 见本卷《算术》同名条.

精确数(accurate number) 亦称精确值. 数学的基本概念之一. 一个数若能准确地表示某一个量,则这个数就称为该量的精确数. 例如 4 本书的 4,6 张桌子的 6.

精确值(accurate value) 即“精确数”.

近似数(approximate number) 亦称近似值. 与精确数相差不大的数. 一个表示某量的数,它与这个量的精确值相差不大时,称为这个量的近似数. 近似数的准确程度用绝对误差、相对误差、绝对误差界、相对误差界等的大小表示. 小于精确值的近似值称为不足近似值. 大于精确值的近似值称为过剩近似值.

近似值(approximate value) 即“近似数”.

不足近似值(lower approximation value) 见“近似数”.

过剩近似值(upper approximation value) 见“近似数”.

绝对误差(absolute error) 简称误差. 数学的基本概念之一. 即近似值与精确值之差. 若量的精确数为 A,近似数为 a,则数 $\Delta=A-a$ 称为用 a 表示该量时的绝对误差(也有将绝对误差定义为 $|A-a|$ 的). 近似数的基本代数运算的误差估计公式如下表:

运　算	误 差 估 计
$a_1+a_2+\cdots+a_n$	$\lvert\Delta\rvert\leqslant\lvert\Delta_1\rvert+\lvert\Delta_2\rvert+\cdots+\lvert\Delta_n\rvert$
a_1-a_2	$\lvert\Delta\rvert\leqslant\lvert\Delta_1\rvert+\lvert\Delta_2\rvert$
$a_1\cdot a_2$	$\lvert\Delta\rvert\leqslant\lvert\Delta_1\rvert\cdot a_2+\lvert\Delta_2\rvert\cdot a_1$
$a_1\div a_2$	$\lvert\Delta\rvert\leqslant\dfrac{\lvert\Delta_1\rvert a_2+\lvert\Delta_2\rvert a_1}{a_2(a_2-\lvert\Delta_2\rvert)}$

表中 $\Delta_i=A_i-a_i(i=1,2,\cdots,n)$,后两式中 a_1 与 a_2 都是正数.

误差(error) 绝对误差的简称.

绝对误差界(bounds of absolute error) 一个确定的正数. 在度量时,常常只能得到一个量的近似值,而不能得到它的精确值. 但是可以知道,它的绝对误差不会超过度量工具上最小刻度的一半. 用四舍五入法得到的近似数,可以保证其绝对误差不超过最末位数的半个单位. 一个近似数的误差绝对值不超过的正数,称为近似数的绝对误差界. 设精确数 A 的近似数是 a,绝对误差界为 b,则 $|a-A|\leqslant b$,因而可以估计出精确数所在的范围是 $a-b\leqslant A\leqslant a+b$. 绝对误差界越小,对精确数的估计就越准确. 一般,度量工具的最小刻度的一半即是其误差界.

相对误差界(bounds of relative error) 一个确定的正数. 近似数的绝对误差界和近似数本身的绝对值的比,称为近似数的相对误差界. 若近似数 a 的绝对误差界是 b,则相对误差界是 $b/|a|$. 例如,若测量两个物体的长度分别为 100(±0.01)毫米和 200(±0.01)毫米,则它们的相对误差界分别是

$$\frac{0.01}{100}=0.01\%$$

与 $$\frac{0.01}{200}=0.005\%.$$

相对误差界越小，精确度越高.

相对误差(relative error)　数学的基本概念之一. 近似数 a 的绝对误差 Δ 与它的精确数 A 之比（常用百分数表示），称为这个近似数的相对误差，可用 δ 表示，即

$$\delta=\frac{\Delta}{A}\times 100\%\ (\Delta=A-a).$$

通常，由于求得精确数 A 往往有困难，常把相对误差改作 Δ 与近似数 a 的比的百分数，即

$$\delta=\frac{\Delta}{a}\times 100\%=\frac{A-a}{a}\times 100\%.$$

各种代数运算的相对误差估计如下表：

运　算	相对误差 δ
$a_1+a_2+\cdots a_n$	当 a_i 同号时，$\|\delta\|\leqslant\max\{\|\delta_i\|\}$.
a_1-a_2	$\delta=\frac{a_1\delta_1-a_2\delta_2}{a_1-a_2}$
$a_1\cdot a_2$	$\|\delta\|\leqslant\|\delta_1\|+\|\delta_2\|$
$\frac{a_1}{a_2}$	$\delta=\frac{\delta_1-\delta_2}{\delta_2+1}$
a^α	$\delta<\alpha\cdot\delta$

也有人将相对误差定义为

$$\frac{|A-a|}{A}\times 100\%$$

或 $$\frac{|A-a|}{a}\times 100\%.$$

有效数字(significant digit)　反映近似数精确度大小的概念. 有效数字与可靠数字的位数的多少反映近似数的精确度的大小. 具体规定：对用十进数表示的数，如果一个近似数的绝对误差的绝对值，不大于它的最末一个数字的半个单位，那么这个近似数从左边第一个不是零的数字起向右数，到末位数字止，所有的数字，都称为这个近似数的有效数字. 例如，数 0.09995 的近似数 0.1000，有四个有效数字 1,0,0,0. 凡是用四舍五入法得来的近似数，从左边第一个非零数字起向右数，所有的数字都是有效数字. 如果一个近似数的绝对误差的绝对值不大于它的最末一位数的一个单位，那么这个近似数从左边第一个不是零的数字起向右数，到最末一位数字止，所有数字都称为这个近似数的可靠数字. 例如，用去尾法得到的近似数 1.00372 有 1,0,0,3,7,2 六个可靠数字. 一个近似数用有效数字表示比用同样多个数的可靠数字表示要精确一些. 有效数字一定是可靠数字，反之可靠数字不一定是有效数字. 例如，3.15 是 π 的一个近似值，由于 $|\pi-3.15|<10^{-2}$，故近似值 3.15 的 3,1,5 都是可靠数字，但“5”却不是它的有效数字.

可靠数字(reliable digit)　见“有效数字”.

精确度(accuracy)　数学的基本概念之一. 指一个量的近似数的精确程度. 通常用以下三种方式度量或刻画：

1. 绝对误差与绝对误差界.
2. 相对误差与相对误差界.
3. 有效数字与可靠数字.

近似数的计算(calculation of approximate numbers)　数值计算的基本问题. 包括两类问题：

1. 给出各个近似数的精确度，要估计运算结果的精确度.

2. 预先给定运算结果要求的精确度，要确定参加运算的数据应具有的精确度.

这两类问题的法则详见“近似数的加减法法则”、“近似数的乘除法法则”、“近似数的乘方开方法则”与“近似数的混合运算法则”. 除关于预定结果精确度的法则外，都是考虑实用价值总结出来的，允许有例外的情况，结果在大多数情况下是可靠的. 近似数计算要尽量避免两个相邻近似数相减，使有效数位大量失去，结果不可靠. 这时应先对式子作恒等变形，采用不同步骤进行近似计算，可能会得到不同的结果，但是，每一步按法则正确计算且得出结果至少有一个数字可靠，都应看做是正确的. 近似数计算式中的准确数应看成是有无限小数位或无限位有效数字的数.

近似数的加减法法则(rule of addition and subtraction of approximate numbers)　近似数的计算方法之一. k 个($k\leqslant 10$)近似数相加减，先把小数位数多的四舍五入，使其比小数位数最少的数只多一位小数，然后计算，其结果保留的小数位数与原 k 个近似数中小数位数最少的相同. 若预先指定了结果的精确度，应先把各个近似数四舍五入，使它们的小数位数都只比结果中所要求的小数位数多一位，然后计算，最后对末位小数四舍五入. 例如

$$3.14+2.5343\approx 3.14+2.534=5.674\approx 5.67.$$

更精确的作法是，根据被计算的数的误差估计计算结果的误差. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的误差分别为 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_k$，它们的代数和的误差 Δ 满足

$$|\Delta|\leqslant|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_k|.$$

设 $\Delta_0=|\Delta|$，则代数和的准确值 A 满足

$$\sum_{i=1}^{k}a_i-\Delta_0\leqslant A\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_i+\Delta_0.$$

由此可推知 A 的可靠数字位数.

近似数的乘除法法则(rule of multiplication and division of approximate numbers)　近似数的计算方法之一. 两个近似数相乘除，先把有效数字多的四舍五入，使其比有效数字少的数多一位数，然后计

算,计算结果应保留的数字位数(从第一个非零数字数起),与原近似数中有效数字少的相同.若预先指定了结果的精确度,则先把各近似数四舍五入,使它们的有效数字的位数都只比结果中要求的有效数字的位数多一位,然后计算,最后把算得的结果四舍五入到所要求的有效数字位数.例如 5.438 2÷2.01≈5.438÷2.01≈2.705≈2.71.更精确的作法是,用被计算数的误差估计计算结果的误差,从而确定计算的可靠数字位数.误差估计公式详见"绝对误差"与"相对误差".

近似数的乘方开方法则(rule of power and radication of approximate numbers) 近似数的计算方法之一.近似数的乘方与开方结果,所保留的有效数字的位数与原近似数的有效数字的位数相同.若预先指定了结果的精确度,则先把近似数四舍五入,使它的有效数字位数比结果中所要求的有效数字的位数多一位.例如$2.73^3\approx 20.3$,底数有三个有效数字,乘方的结果也取三个有效数字.又如$\sqrt{590}\approx 24.3$,被开方数有三个有效数字,算术平方根也保留三个有效数字.更精确的作法是根据底数或被开方数的误差估计计算结果的误差,进而确定计算结果的可靠数字位数.误差估计公式详见"相对误差".

近似数的混合运算法则(rule of mixed operationsof approximate numbers) 近似数的计算方法之一.对近似数进行加、减、乘、除、乘方、开方混合运算时,仍按一般实数的混合运算顺序进行计算,其各级运算也按近似数的相应法则进行,计算过程中得出的各中间结果,一般要比相应法则所要求保留的数字多一位,最后四舍五入到指定的位数.例如

$$3.28\times 2.15+4.840\,9\times 2.7-76.18\div 7.281 \approx 7.052+13.07-10.46\approx 9.7.$$

常用求近似值的公式(common approximate formula) 求近似值的一组常用公式.设 x,y 是实数,且$|x|\ll 1$,$|y|\ll 1$("≪"读作"远远小于",$|x|\ll 1$ 的意义是$x\approx 0$或称 x 接近于 0),常用的求近似值的公式如下:

1. $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x\ (\alpha\in\mathbf{R})$.
2. $(1+x)(1+y)\approx 1+x+y$.
3. $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$.
4. $e^x\approx 1+x$.
5. $\sin x\approx x$.
6. $\tan x\approx x$.
7. $\ln(1+x)\approx x$.

平方表(table of squares) 常用数表之一.即一元实函数 $y=x^2$ 的函数值表.平方表有多种,一般其具体查法将在表后说明.利用常见的四位数学用表的平方表可查出任意一个四位数的平方数.1 到 10 之间的四位数可在表中直接查出.对小于 1 或大于 10 的正实数 x 不能在表中直接查出,要首先将它写成 $x=x_0\cdot 10^n(n\in\mathbf{Z},x_0\in[1,10)$为四位数)的形式,即 $x^2=x_0^2\cdot 10^{2n}$,然后在表中查出 x_0^2 的值,最后通过计算得出 x^2 的值.

立方表(table of cubes) 常用数表之一.即一元实函数 $y=x^3$ 的函数值表.立方表有多种,每一种立方表一般在表后说明查法.利用常见的四位数学用表的立方表可以查出任意四位数的立方数.大于 1 小于 10 的四位数可由立方表直接查出,对小于 1 或大于 10 的正实数 x,在表中不能直接查出,要首先将它写成 $x=x_0\cdot 10^n(n\in\mathbf{Z},x_0\in[1,10)$为四位数),即 $x^3=x_0^3\cdot 10^{3n}$,然后在表中查出 x_0^3 的值,最后计算出 x^3 的值.

平方根表(square root table) 常用数表之一.即一元实函数 $y=\sqrt{x}$ 的函数值表.平方根表有多种,其查法各异,一般都在表后加以说明.常见的四位数学用表的平方根表只列出 $1\leqslant x<100$ 的一切四位数的算术平方根.对于不能在表中直接查出平方根的正实数 x,可将 x 写成 $x=x_0\cdot 10^{2n}(n\in\mathbf{Z})$的形式,即

$$\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\cdot 10^n,$$

其中$x_0\in[1,100)$,然后从平方根表中查出$\sqrt{x_0}$的值,最后通过计算得出 $\sqrt{x}$ 的值(或近似值).根据考古发掘出来的古代巴比伦人的泥板书(粘土书板)记载,大约在公元前 2100 多年,由于农业和商业的发展,泥板书中就刻有平方数表和平方根表,对于完全平方数的算术平方根,表上列有准确值.

立方根表(cube root table) 常用数表之一.即一元实函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 的函数值表.立方根表有多种,其查法不尽相同,一般在表后给以说明.例如,在四位数学用表的立方根表中能直接查出 0.100 到99.9 间的三位数的立方根.对于不能直接查出的实数 x,可将其写成 $x=x_0\cdot 10^{3n}(n\in\mathbf{Z})$的形式,即

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x_0}\cdot 10^n,$$

x_0 为从 0.100 到 99.9 之间的三位数,然后从立方根表中查出$\sqrt[3]{x_0}$的值,最后通过计算$\sqrt[3]{x_0}\cdot 10^n$得出 $\sqrt[3]{x}$ 的值.根据考古发掘出来的古代巴比伦人的泥板书(粘土书板)的记载,大约公元前 2100 多年,由于农业和商业的发展,泥板书中就刻有立方根表,并用于有关立方体的计算.

复数(complex number) 实数的扩充.形如 $a+bi$ 的数称为复数,其中 a,b 为实数,i 称为虚数单位,它满足 $i^2=-1$.a 称为复数 $z=a+bi$ 的实部,记为 $\mathrm{Re}z$ 或$\mathrm{R}(z)$.bi 称为复数 $z=a+bi$ 的虚部,而实

数 b 称为虚部系数有时简称虚部，记为 Imz 或I(z)．复数 $a+bi$，当 $b=0$ 时，就是实数 a；当 $b\neq0$ 时，$a+bi$称为虚数；当$a=0$ 且$b\neq0$ 时，bi 称为纯虚数．根据上面的定义对复数可作如下分类：

$$\text{复数 } a+bi\ (a,b\in\mathrm{R})\begin{cases}\text{实数 } a(b=0),\\ \text{虚数 } a+bi\ (b\neq0)\begin{cases}\text{非纯虚数 } a+bi(a\neq0),\\ \text{纯虚数 } bi(a=0).\end{cases}\end{cases}$$

复数a_1+b_1i 与 a_2+b_2i，当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$ 时相等，记为 $a_1+b_1\mathrm{i}=a_2+b_2\mathrm{i}$．对这样定义的复数规定其加法和乘法可按多项式运算法则并利用 $\mathrm{i}^2=-1$ 进行，因而

$$(a_1+b_1\mathrm{i})+(a_2+b_2\mathrm{i})$$
$$=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},$$
$$(a_1+b_1\mathrm{i})(a_2+b_2\mathrm{i})$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

复数还有下面的哈密顿(Hamilton，W. R.)定义：设C 是称为复数的有序实数对(a,b)全体的集合，对于 C 中两个元素(a_1,b_1)和(a_2,b_2)，当且仅当 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$ 时，才认为$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$，并在 C 中定义两种运算加法⊕和乘法⊗如下：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2);$$
$$(a_1,b_1)\otimes(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1).$$

于是当把$(a,0)$记为 a，$(0,1)$记为 i 时，

$$(a,b)=(a,0)\oplus[(b,0)\otimes(0,1)]=a\oplus(b\otimes\mathrm{i}).$$

可见两种定义下的复数，不仅一一对应而且在相应的加法和乘法运算下也一致．全体复数的集合称为复数集，仍记为 C，所定义的加法和乘法满足交换律、结合律和分配律，并存在零元素和负元素，乘法有单位元素，并且每个非零元素有逆元素，所以，集合 C 关于加法和乘法构成域，并称 C 为复数域．

虚数概念产生于负数开平方运算．开始认为负数没有平方根．12 世纪，婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)已接触到负数的平方根，但他认为负数没有平方根，因为负数不是平方数．卡尔达诺(Cardano，G.)在 1545 年发表的关于代数学的拉丁文著作《大衍术》中，第一次认真地讨论了虚数，并给出了运算的方法，把它称之为"诡辩数"．最先承认虚数不虚的是邦贝利(Bombelli，R)，他在《代数学》一书中对三次方程作了长期研究，并用 Rq 和 Rc 分别表示平方根和立方根，他给出了$\pm\sqrt{-1}$及 $a+b\sqrt{-1}$的计算法则，用 dimRq11 表示虚数 $\sqrt{-11}$．而笛卡儿(Descartes，R.)在 1637 年著的《几何学》中明确了方程的实根与虚根，并给出了虚数这一名称，后来，棣莫弗(De Moivre，A.)与欧拉(Euler，L.)给出了公式

$$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=\cos nx+\mathrm{i}\sin nx.$$

1743 年，欧拉又给出公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$，并在1777 年系统地建立了复数理论，同时引进了虚数单位的符号"i"．1797 年，韦塞尔(Wessel，C.)在《关于方向分析表示的一个尝试》中，引进了一条以 $\sqrt{-1}$ 为单位的虚轴与复数平面概念，给出了复数及其运算的向量表示，使复数与平面上的点建立了联系．1806 年，阿尔冈(Argand，J. R.)在巴黎发表了《虚数，它的几何解释》一文，他首先把量 $a+bi$ 的长度称为模，并给出了 i，i^2，i^3，i^4 的几何意义．1797 年，高斯(Gauss，C. F.)在代数基本定理的论文中巧妙地运用了虚数的几何表示．1831 年，又在《哥廷根学报》上系统地表述了复数 $a+bi$ 和笛卡儿直角坐标平面上的点(a,b)的一一对应关系，从而进一步肯定了复数平面这一概念．他又将表示平面点的直角坐标和极坐标加以综合，统一于表示同一复数的两种形式(复数的代数形式和三角形式)，并阐述了复数的几何加法与乘法，使术语复数与符号 i 在代数学中得到通用．为了纪念高斯的贡献，后人常称复数平面为高斯平面．1837 年，哈密顿(Hamilton，W. R.)给爱尔兰皇家科学院的信中提出把复数 $a+bi$ 当做有序实数对(a,b)，并用以定义复数，还给出了有序实数对的运算，从而对复数建立了严密的形式定义．

虚数单位的主要性质如下：

1. 虚数单位 i 是方程 $x^2+1=0$ 的一个根，即-1的一个平方根．

2. i 与$-$i 是-1 的两个平方根．

3. $|\mathrm{i}|=1$，$\arg\mathrm{i}=\pi/2$(这里 arg 表主辐角)，因而

$$\mathrm{i}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

4. i 与$-$i 共轭，即 $\bar{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

5. i 的幂具有性质：

$$\mathrm{i}^1=\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^2=-1,\quad \mathrm{i}^3=-\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^4=1,$$
$$\mathrm{i}^{4n+1}=\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^{4n+2}=-1,\quad \mathrm{i}^{4n+3}=-\mathrm{i},\quad \mathrm{i}^{4n}=1$$
$$(n\text{ 为自然数}).$$

复数的实部(real part of complex numbers)　见"复数"．

复数的虚部(imaginary part of complex numbers)　见"复数"．

纯虚数(pure imaginary number)　见"复数"．

诡辩数(sophistry number)　见"复数"．

复数集(set of complex numbers)　见"复数"．

虚数(imaginary number)　见"复数"．

虚数单位(imaginary unit)　见"复数"．

复数的相等(equality of complex numbers)　两复数的一种等价关系．两复数相等的充分必要条件是：

1. 复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ 与 $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$ 相等的充分必要条件是 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$($a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathrm{R}$)．$z_1$ 与 z_2 相等记为 $z_1=z_2$．

2. 两个非零复数相等的充分必要条件是它们的模与辐角的主值分别相等. 即 $z_1=z_2 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|$，且 $\arg z_1=\arg z_2$.

3. $a+bi=0\ (a,b\in\mathbf{R}) \Leftrightarrow a=b=0$.

复数平面(complex number plane) 亦称高斯平面. 复数的几何表示. 对任意取定的一个复数 $z=a+bi$，总可以在平面直角坐标系中找到惟一的坐标为(a,b)的点和它对应，反之，对于平面直角坐标系中的任意一点(a,b)，总有复数 $z=a+bi$ 与之对应. 这样，全体复数和直角坐标平面上的点就建立了一一对应关系，于是称直角坐标平面为复数平面，简称复平面. 在复平面上，坐标原点对应复数零；横轴上的点与实数一一对应，因而称横轴为实轴；纵轴上除原点外的点与纯虚数一一对应，因而称纵轴为虚轴. 复平面给予复数以直观的几何解释，因而它对认识复数起了重要作用. 科茨(Cotes，R.)、棣莫弗(De Moivre，A.)、欧拉(Euler，L.)、范德蒙德(Vandermonde，A.-T.)等人都具有将复数与坐标平面上的点对应起来的数学思想，这从他们把二项方程的解看成是一个正多边形的顶点的作法可以得到证实. 第一个提出实轴、虚轴并给复数以几何解释的是韦塞尔(Wessel，C.)，他在 1797 年向丹麦科学院递交的论文《方向的解析表示，特别应用于平面与球面多边形的测定》中，用+1 表示正方向的单位，$+\varepsilon$ 表示另一种单位，方向与前者垂直且有相同原点，并记为 $\sqrt{-1}=\varepsilon\cos\gamma+\varepsilon\sin\gamma$. 他的这种表示，除了虚数单位的符号不同外，与现代复平面表示一致. 稍后高斯(Gauss，C. F.)给出了代数基本定理的几个证明，在前三种证明中都假定了复数和直角坐标平面上的点的一一对应关系，这就有效地使人们接受了复平面的思想，为此，后人称复平面为高斯平面.

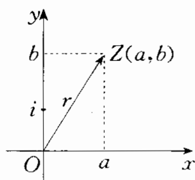
高斯平面(Gauss plane) 即“复数平面”.

复平面(complex plane) 复数平面的简称.

实轴(real number axis) 见“复数平面”.

虚轴(imaginary number axis) 见“复数平面”.

复数的模(modulus of complex numbers) 亦称复数的绝对值. 刻画复数的一种量. 复数 $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbf{R},i^2=-1)$的模是实数 $\sqrt{a^2+b^2}$，记为 $|z|=|a+bi|$. 在复平面上，用点 $Z(a,b)$表示复数 $z=a+bi$ 时，Z 到原点的距离 $|OZ|$ 就是复数 z 的模；用向量$\overrightarrow{OZ}$表示复数 $z=a+bi$ 时，向量$\overrightarrow{OZ}$的长度就是复数 z 的模(如图).



复数的模有以下的性质：

1. $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2 z+\mathrm{Im}^2 z}=\sqrt{z\bar{z}}$ 或 $|z|^2=z\bar{z}$.

2. $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$.

3. $|z|=z$ 的充分必要条件是 $z\in\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

4. $|z|=0$ 的充分必要条件是 $z=0$，即

$$\mathrm{Re}z=\mathrm{Im}z=0.$$

5. $|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，$|z_1\pm z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$，其中等号成立的条件是$|z_1|z_2=|z_2|z_1$，即复数 z_1 与 z_2 只相差一个非负的实数因子.

6. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，一般地，
$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|$.

7. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，其中 $z_2\neq0$.

8. $|z^n|=|z|^n\ (n\in\mathbf{N})$；若 $z\neq0$，则
$|z^{-n}|=|z|^{-n}$.

9. $|z|=|\bar{z}|$.

10. 对于 n 个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，有
$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$，
其中等号成立的条件是：或 $z_1=z_2=\cdots=z_n=0$；或当有一个 $z_l\neq0$ 时，对 $k=1,2,\cdots,n$，有 $z_k/z_l\geqslant0$.

复数的绝对值(absolute value of complex numbers) 即“复数的模”.

复数的辐角(argument of complex numbers) 刻画复数的一种量. 设复数平面内，向量$\overrightarrow{OZ}$对应于复数 $z=a+bi$，则以 x 轴的正向为始边，向量$\overrightarrow{OZ}$所在射线(起点是 O)为终边的角 θ，称为复数 z 的辐角. 辐角 θ 满足

$$\tan\theta=\frac{b}{a},\ \cos\theta=\frac{a}{r},\ \sin\theta=\frac{b}{r}$$

$$(r=\sqrt{a^2+b^2}),$$

并记为 $\theta=\mathrm{Arg}\,z$. 不等于零的复数 $z=a+bi$ 的辐角有无穷多个值，这些值相差 $2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 通常规定适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的值，称为辐角的主值，并记为 $\arg z$，即 $0\leqslant\arg z<2\pi$，所以

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

辐角的主值又称为主辐角. 纯虚数 $bi(b\neq0)$的辐角主值为 $\pi/2$(当 $b>0$ 时)，或 $3\pi/2$(当 $b<0$ 时)；实数 a 的辐角主值为 0(当 $a>0$ 时)，或 π(当 $a<0$ 时)；由于复数 0 没有确定的辐角，因而它的辐角不确定. 也可以约定，满足 $-\pi\leqslant\theta<\pi$ 的辐角 θ 称为辐角的主值. 每一个不等于零的复数的辐角有惟一的主值. 若 z_1,z_2 为任意非零复数，它们的辐角有如下性质：

1. $\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$.

2. $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2\ (z_2\neq0)$.

3. 当 $n\in\mathbf{N}$ 时，

$$\mathrm{Arg}\,z^n=n\,\mathrm{Arg}\,z,\ \mathrm{Arg}\,z^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\mathrm{Arg}\,z.$$

4. $\mathrm{Arg}\,\bar{z}=-\mathrm{Arg}\,z$.

5. 复数 z 的主辐角值有以下几种情况：

1) $\operatorname{Re} z>0$ 时，

$$\arg z=\arctan\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}.$$

2) $\operatorname{Re} z<0$ 时，

$$\arg z=\arctan\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}+\pi.$$

3) $\operatorname{Re} z=0$ 且 $\operatorname{Im} z>0$ 时，$\arg z=\frac{\pi}{2}$.

4) $\operatorname{Re} z=0$ 且 $\operatorname{Im} z<0$ 时，$\arg z=\frac{3\pi}{2}$.

复数的辐角概念是由瑞士的一位簿记员阿尔冈(Argand, J. R.)于1806年首先给出的. 人们为了纪念他，用他姓名的前三个字母表示辐角.

复数的辐角主值(principal value of arguments of complex numbers)　见"复数的辐角".

主辐角(principal argument angle)　见"复数的辐角".

复数的表示法(expression of complex numbers)　表示复数的形式. 复数的表示形式如下：

1. 代数形式：$z=a+bi$ $(a,b\in\mathbf{R},i^2=-1)$.

2. 几何形式：在复平面上，复数 $z=a+bi$ 与点 $Z(a,b)$ 及位置向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应. 因此，可用点 $Z(a,b)$ 或向量 $\overrightarrow{OZ}$ 表示复数 $z=a+bi$. 后者亦称为向量形式.

3. 三角形式(或极形式)：任何非零复数 z 都可表示为 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中 r,θ 分别表示复数 z 的模和 z 的一个辐角.

4. 指数形式：任何非零复数 z 都可以表示为 $z=re^{i\theta}$，其中 r,θ 分别是复数 z 的模和 z 的一个辐角.

5. 矩阵形式：复数 $z=a+bi$ 可以用矩阵表示为

$$z=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\ (a,b\in\mathbf{R}).$$

复数的代数形式(algebraic form of complex number)　见"复数的表示法".

复数的几何形式(geometrical form of complex numbers)　见"复数的表示法".

复数的三角形式(trigonometric form of complex numbers)　见"复数的表示法". 复数的三角形式用于复数的乘法、除法、乘方、开方运算较为方便.

复数的向量形式(vector form of complex numbers)　见"复数的表示法".

复数的指数形式(exponential form of complex numbers)　见"复数的表示法".

复数的矩阵形式(matrix form of complex numbers)　见"复数的表示法".

共轭复数(conjugate complex numbers)　一对关系特殊的复数. 实部相同，而虚部互为相反数的两个复数 $a+bi$ 与 $a-bi$，称为互为共轭复数. 复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$. 若 $b\neq0$，则 z 与 $\bar{z}$ 称为共轭虚数；若 $a=0$ 且 $b\neq0$，则称 z 与 $\bar{z}$ 为共轭纯虚数. 复平面内表示两个共轭复数 z 与 $\bar{z}$ 的两点关于实轴对称. 一个复数等于它的共轭复数，当且仅当这个复数是实数，所以任何一个实数与它自身共轭.

互为共轭的两个复数 $z=a+bi$ 与 $\bar{z}=a-bi$ 有如下主要性质：

1. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z=2\operatorname{Re}\bar{z}=2a$，即 $a=\frac{z+\bar{z}}{2}$.

2. $z-\bar{z}=2\operatorname{Im} z i=2bi$，即 $b=\frac{z-\bar{z}}{2i}$.

3. $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=a^2+b^2$.

4. $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，　$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2\neq0)$.

5. $\bar{\bar{z}}=z$.

6. $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $(z\neq0)$.

7. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ $(z_2\neq0)$.

8. $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$.

9. 若 $-\pi\leqslant\arg z<\pi$，则 $\arg\bar{z}=-\arg z$，一般地，$\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg} z$(应理解为辐角的集合相等).

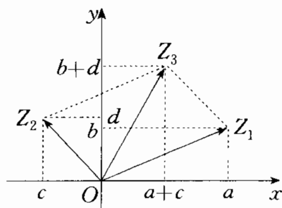
10. $z=\bar{z}$ 的充分必要条件是 z 为实数.

11. 对任何使实系数有理式 $f(z)$ 有意义的复数 z 有 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$ 成立，且若 $f(z)=0$，则 $f(\bar{z})=0$.

共轭虚数(conjugate imaginary numbers)　见"共轭复数".

共轭纯虚数(conjugate pure imaginary number)　见"共轭复数".

复数加法(addition of complex numbers)　复数的基本运算之一. 指求复数和的运算. 两复数相加时，实部相加作为和的实部，虚部系数相加作为和的虚部系数. 即 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$. 复数加法满足交换律、结合律，即对任何 $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}$，有 $z_1+z_2=z_2+z_1$(交换律)；$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$(结合律). $z+0=z$. 对于任何复数 z_1，存在惟一的复数 z_2，使 $z_1+z_2=0$，常记为 $z_2=-z_1$，并称 z_2 为 z_1 的负元素. 在复数平面上，两个复数相加，就是求与这两个复数对应向量的向量和. 因此，复数相加可利用向量加法的"平行四边形法则"或"三角形法则"完成. 如图，$\overrightarrow{OZ_1}$ 表示复数 $a+bi$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 表示复数 $c+di$，则以 OZ_1,OZ_2 为邻边的平行四边形的对角线向量 $\overrightarrow{OZ_3}$ 表示复数



$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

复数减法(subtraction of complex numbers)

复数的基本运算之一．指已知两复数的和与其中一个复数，求另一个复数的运算．即复数减法是复数加法的逆运算．两个复数相减时，将它们的实部相减作为差的实部，虚部系数相减作为差的虚部系数，即

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}.$$

减法的另一种法则是：减去一个复数，等于加上它的负元素，即 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$．在复平面上，两复数相减，就是求与这两个复数对应向量的差向量，它与连结两个向量终点并指向被减数的向量对应，如图：$\overrightarrow{OZ_1}$表示 $z_1=a+bi$，$\overrightarrow{OZ_2}$表示 $z_2=c+di$，$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-di)$与$\overrightarrow{Z_2Z_1}=\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}$对应．

两复数和差的几何意义(geometric significance of sum and difference of two complex numbers) 两复数和差的几何表示．在复平面上，两个复数和差的几何意义是求与这两个复数的对应向量的和向量与差向量．如图 1 和图 2 所示(参见“复数加法”和“复数减法”)．

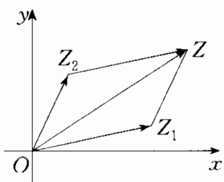


图1

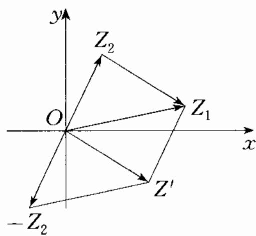


图2

复数乘法(multiplication of complex numbers) 复数的基本运算之一．指已知两复数求它们的积的运算．乘法法则如下：两个代数形式的复数相乘，可按照多项式乘法法则进行，并把所得结果中的 i^2 换成-1，即$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$．两个三角形式的复数相乘，可把它们的模的积作为积的模，辐角的和作为积的辐角．即

$$[r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)]\cdot[r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)]$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

两个指数形式的复数相乘，按指数乘法法则进行：

$$(r_1e^{\mathrm{i}\theta_1})(r_2e^{\mathrm{i}\theta_2})=r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.$$

一般说来，用复数三角形式特别是指数式作乘法较为简便．复数乘法运算满足下列运算定律：

1．$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$(交换律)．

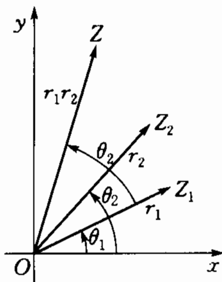
2．$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$(结合律)．

3．$z_1(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$(乘法对加法的分配律)．

在复数的乘法中，复数 z 与实数单位 1 的乘法运算仍满足：$1\cdot z=z\cdot 1=z$(z 是任一复数)．同时，对于任一非零复数 z，都有倒数(逆元)存在，记为 z^{-1}，它们满足：$z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=1$．复数 $z=a+bi\neq 0$ 的充分必要条件是 $a^2+b^2\neq 0$，即 a 与 b 不同时为零．当 $z=a+bi=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=re^{\mathrm{i}\theta}\neq 0$ 时，

$$z^{-1}=\frac{a}{(a^2+b^2)}-\frac{b}{(a^2+b^2)}\mathrm{i}$$
$$=r^{-1}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$$
$$=r^{-1}e^{\mathrm{i}(-\theta)}.$$

两复数乘积的几何意义(geometric significance of product of two complex numbers) 两复数乘积的几何表示．在复平面上，设复数 z_1 与 z_2 所对应的向量分别为$\overrightarrow{OZ_1}$与$\overrightarrow{OZ_2}$，则乘积 $z_1\times z_2=z$ 所对应的向量$\overrightarrow{OZ}$是，先将$\overrightarrow{OZ_1}$逆时针旋转 $\arg z_2=\theta_2$ $(0\leqslant\theta_2<2\pi)$，再把这一向量的模伸缩 $r_2=|z_2|$倍所得到的向量(如图)．



复数的乘方(power of complex numbers) 复数的基本运算之一．指底为复数，指数为整数的幂运算．对任一非零复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，它的乘方有以下三种情况：

1．当 n 为正整数时，

$$z^n=\overbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}^{n个},$$

由乘法可知

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

2．当 $n=0$ 时，$z^0=1$，即

$$z^0=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^0=r^0(\cos 0+\sin 0)=1.$$

3．当 n 为负整数时，设 $n=-m(m>0)$，则规定

$$z^n=z^{-m}=\frac{1}{z^m},$$

由于

$$z^{-m}=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\ -\sin\theta)]^{-m}$$
$$=\frac{1}{[r(\cos\ \theta+\mathrm{i}\ \sin\ \theta)]^m}$$
$$=r^{-m}[\cos(-m\theta)+\mathrm{i}\sin(-m\theta)],$$

因此，仍然有 $z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$．

复数乘方运算的法则是：

1．对于三角式的复数 $z=(r\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，可直接用公式 $z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$ $(n\in\mathbf{Z})$．

2．对于代数形式的复数，可首先利用二项式定理展开，然后利用虚数单位的运算性质($\mathrm{i}^{4k}=1,\mathrm{i}^{4k+1}=\mathrm{i},\mathrm{i}^{4k+2}=-1,\mathrm{i}^{4k+3}=-\mathrm{i}$，其中 k 是整数)将展开式化简．

3．对于指数式的复数，可以用公式 $z^n=(re^{\mathrm{i}\theta})^n=r^n\cdot e^{\mathrm{i}n\theta}$．一般地，利用复数的三角形式或指数形式进行乘方运算较为简便．

复数除法(division of complex numbers) 复

数的基本运算之一. 指复数乘法的逆运算，即已知两复数的积与其中一个非零复数，求另一个复数的运算. 其运算法则是：

1. 代数形式的两复数相除，首先把它们写成分数形式，然后分子分母都乘以分母的共轭复数，并把结果化成复数的代数形式，即

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (c^2+d^2\neq 0).$$

2. 三角形式的两复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角，即

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)] \quad (r_2\neq 0).$$

3. 指数形式的两复数相除，按通常的指数除法法则进行，即

$$\frac{r_1e^{\theta_1 i}}{r_2e^{\theta_2 i}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (r_2\neq 0).$$

用复数的三角形式和指数形式作除法较为简便.

两复数商的几何意义(geometric significance of quotient of two complex numbers)　两复数商的几何表示. 在复平面上，设复数 z_1 与 z_2 所对应的向量分别是 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，则它们的商

$$\frac{z_1}{z_2}=z \quad (z_2\neq 0)$$

所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是，先将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 顺时针旋转 $\arg z_2=\theta_2$ $(0\leqslant\theta_2<2\pi)$，再把这一向量的模伸缩

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{|z_2|}$$

倍所得到的向量(如图).

棣莫弗公式(De Moivre formula)　亦称棣莫弗定理. 复数的乘方用三角形式表示的一个公式. 对于模 $r=1$ 的复数 $\cos\theta+i\sin\theta$，它的乘方公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta(n\in\mathrm{N}),$$

称为棣莫弗公式. 这个公式由棣莫弗(De Moivre, A.)于 1707 年创立，而 23 年以后，即 1730 年才发表. 当时的棣莫弗公式并非如上所述的形式，而棣莫弗只发现，若两个角之比为 1∶n(n 为正整数)，则它们的正矢 t，x 之间的关系可由下列两个方程消去 $z(|z|=1)$ 而得到：$1-2z+z^2=-2zt$；$1-2z^n+z^{2n}=-2z^nx$. 1748 年，欧拉(Euler, L.)设 $t=1-\cos\theta$；$x=1-\cos n\theta$，则由两个方程：$1-2z+z^2=-2z(1-\cos\theta)$ 及 $1-2z^n+z^{2n}=-2z^n(1-\cos n\theta)$，解得 z 与 z^n：$z=\cos\theta+i\sin\theta$，$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，即 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta(n\in\mathrm{N})$. 又经欧拉(Euler, L.)推广，对 n 是任意实数，棣莫弗公式都是成立的.

复数的开方(radication of complex number)　求复数方根的运算. 即复数的开方的具体方法. 非零复数开 n 次方(n 为正整数)所得结果有 n 个值，它们的模都等于这个被开方复数的模的 n 次算术根，它们的辐角分别等于被开方复数的辐角与 2π 的 $0,1,2,\cdots,n-1$ 倍的和的 n 分之一. 即复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 或 $z=re^{i\theta}$ 的 n 个不同 n 次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

或 $\sqrt[n]{r}\,e^{i(\theta+2k\pi)/n}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$. 一般称它们为开方公式. 零的 n 次方根是零. 复数开方时应注意以下几点：

1. 任何非零复数有且仅有 n 个不同的 n 次方根，它们的模相等，辐角相差

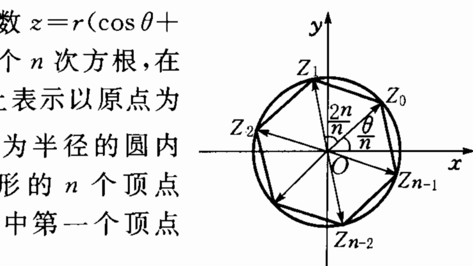
$$2k\pi/n(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

2. 求方根前，一般应先把复数化成三角形式或指数形式，再使用开方公式. 开方前，被开方复数的辐角是否在主值范围内无关紧要，开方后，通常把复数方根的辐角化到主值范围内. 当辐角是特殊角时，一般将结果写成代数形式.

3. 公式中的 $\sqrt[n]{r}$ 仅表示正实数 r 的 n 次算术根，而不能认为有 n 个值.

4. 任何一个非零复数的 n 个 n 次方根都可以用它的一个 n 次方根乘以 n 个不同的 n 次单位根表示.

复数方根的几何意义(geometric significance of radical of a complex number)　复数方根的几何表示. 非零复数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 n 个 n 次方根，在复数平面上表示以原点为圆心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点(如图). 其中第一个顶点 Z_0 是复数



$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right],$$

所对应的向量 $\overrightarrow{OZ_0}$，它与 x 轴的正向夹角是 θ/n，第二个顶点 Z_1 是复数

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{2\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+\theta}{n}\right)\right],$$

所对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，它与 x 轴的正向夹角是 $(2\pi+\theta)/n$……第 n 个顶点 Z_{n-1} 是复数

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}\right]$$

所对应的向量是$\overrightarrow{OZ_{n-1}}$. 它与$x$轴的正向夹角是$[2(n-1)\pi+\theta]/n$. 事实上,将向量$\overrightarrow{OZ_0}$分别逆时针旋转$2\pi/n, 2(2\pi/n), \cdots, (n-1)(2\pi/n)$即可依次得到向量$\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}, \cdots, \overrightarrow{OZ_{n-1}}$.

***n* 次单位根**(*n*-th unit root) 一种重要的n次方根. 在复数范围内,1的$n(n\in\mathbf{N})$个不同的n次方根都称为n次单位根,简称单位根. 它们是

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

或 $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

n次单位根是方程$\omega^n-1=0$的n个不同的根,除$\omega_0=1$外,其余$n-1$个也是$n-1$次方程$\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\cdots+\omega+1=0$的$n-1$个不同根. n次单位根有下列性质:

1. 对于任何$m\in\mathbf{Z}$

$$\omega_m=\cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right)$$

或$\omega_m=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m\cdot 2\pi}{n}}$都是$n$次单位根,即$\omega_m^n=1$,但不同的单位根只有$n$个. 例如取$m=0,1,2,\cdots,n-1$时,就得到$n$个不同的$n$次单位根. 当整数$m=qn+k(q\in\mathbf{Z}^+, k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\})$时,$\omega_m=\omega_{qn+k}=\omega_k$.

2. n次单位根的模为1,即$|\omega_m|=1$.

3. 两个n次单位根ω_i, ω_j的乘积仍是一个n次单位根,且$\omega_i\cdot\omega_j=\omega_{i+j}$($i, j$为任意整数). 由此可得:

1) $(\omega_i)^{-1}=\omega_{-i}$.

2) $(\omega_k)^m=\omega_{mk}$(m, k为任意整数,当$m=0$时,$(\omega_k)^0=1=\omega_0$).

3) $\omega_k=\omega_l$的充分必要条件是k与l除以n后余数相同,即k与l的差是n的倍数.

4) 任何一个单位根都可以写成ω_1的幂,如$\omega_k=(\omega_1)^k$,有这种性质的n次单位根ω_1称为n次本原单位根,简称n次原根或原根,当p与n互素且$1\leqslant p<n$时,ω_1^p都是n次原根.

5) 一个n次单位根的共轭复数也是一个n次单位根,表示为$\overline{\omega_k}=\omega_{n-k}$.

6) 对任何整数k, l有$(\omega_k)^l=(\omega_l)^k$.

4. 设m是整数,则

$$1+\omega_1^m+\omega_2^m+\cdots+\omega_{n-1}^m=\begin{cases}n\ (\text{当 } m \text{ 是 } n \text{ 的倍数时}),\\ 0\ (\text{当 } m \text{ 不是 } n \text{ 的倍数时}).\end{cases}$$

由此可知:

1) 全部单位根的和为0,即

$$1+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{n-1}=0;$$

2) 设n次单位根$\omega_k\neq 1$,则

$$1+\omega_k+(\omega_k)^2+\cdots+(\omega_k)^{n-1}=0.$$

5. 全部单位根把复平面上的单位圆周($|z|=1$) n等分,构成了外接圆半径为1的正n边形的顶点,其中一个顶点是$\omega_0(1,0)$.

单位根(unit root) 见"n次单位根".

***n* 次本原单位根**(*n*-th primitive unit root) 见"n次单位根"

复数的欧拉公式(Euler formula of complex numbers) 表现复数的三角形式与虚指数式关系的一个公式. 指对于模为1辐角为θ的复数,连结其指数式与三角形式的等式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

当式中$\theta=\pi$时,有$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$. 此式称为欧拉公式,它是一个联系着数学中五个重要数$\mathrm{e}, \pi, \mathrm{i}, 0, 1$的关系式. 1740年,欧拉(Euler, L.)运用级数解一个微分方程时发现$y=2\cos x$与$y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$是该方程的同一个解,从而建立了公式

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}},$$

由此推出公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,并于1748年正式发表.

代数数(algebraic number) 一种特殊方程的根. 若数ξ满足一个有理系数代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

则ξ称为一个代数数,若此方程的系数都是整数,则ξ称为代数整数. 若ξ所满足的最低次的代数方程的次数是n,则ξ称为n次代数数,n称为ξ的次数.

代数整数(algebraic integer) 见"代数数".

***n* 次代数数**(*n*-th algebraic number) 见"代数数".

超越数(transcendental number) 一种特殊的实数. 不是代数数的实数α,即不存在任何非零整系数多项式$f(x)$,使α是方程$f(x)=0$的根. 例如,圆周率π和自然对数的底e都是超越数. 超越数的存在问题最先是刘维尔(Liouville, J.)解决的,他于1844年证明了形如

$$\frac{a_1}{10!}+\frac{a_2}{10^{2}!}+\frac{a_3}{10^{3}!}+\cdots$$

($a_i=0,1,2,\cdots,9$,且不全为零)的任何数都是超越数. 1873年,埃尔米特(Hermite, C.))利用微积分证明了e是一个超越数. 1882年,林德曼(Lindemann, (C. L.)F. von)证明了π是一个超越数. 集合论的创始人——康托尔(Cantor, G. (F. P.))于1874年利用集合论的方法证明了超越数的存在,康托尔的非构造性证明轰动了当时的数学界.

代 数 式

解析式(analytic expression) 代数学的基本概念之一. 用运算符号和括号把数字和字母按一定

规则连结成的式子称为解析式.常简称式.例如

$$a+b,\quad \frac{x+1}{x-2},\quad x+[2x(y-t)+y]$$

$$2\sqrt{2a+b},\quad \log_a(x+y),\quad \sin x+\cos x$$

等都是解析式.通常用符号 $f(x)$,$g(x)$等表示含有一个变数字母 x 的解析式,用符号 $f(x,y)$,$g(x,y)$等表示含有两个变数字母 x,y 的解析式.含有字母的解析式可看做以该字母为自变数的函数(参见"函数").若一个解析式中只含加、减、乘、除、乘方与开方运算,则称这样的解析式为代数式.单独一个数或字母也称为代数式,不含变数字母开方的代数式称为有理式.其中除式不含变数字母的有理式称为整式或多项式.整式中只含乘法运算(包括非负整数次乘方)称为单项式,除式内含有变数字母的有理式称为分式.含有变数字母开方运算的代数式称为无理式.只含有对变数字母的指数运算、对数运算、三角运算和反三角运算的解析式分别称为指数式、对数式、三角式和反三角式.含有以上超越运算的解析式,统称为超越式.在含有变数字母时,解析式的分类是对指定的变数字母而言的,例如

$$\frac{\sin x-\tan\dfrac{10}{\pi}}{2y}$$

对字母 x,y 或字母 x 是超越式,而对字母 y 则是分式.对解析式可作如下分类:

- 解析式
  - 代数式
    - 有理式
      - 整式
        - 单项式
        - 多项式
      - 分式
    - 无理式
  - 超越式

还可提出如下广义定义:按某种法则用数码、字母(文字符号)、运算符号、括号等符号构成的一个有意义的符号串,并且串中只含有限个符号,这样的符号串称为解析式(参见本卷《数学分析》同名条).

解析式变数的允许值(permissible value of variable in an analytic expression) 解析式中变数的取值范围.解析式中变数字母所取的能使解析式有意义的值,称为这个解析式变数字母的允许值.这里应注意以下几点:

1. 在 $n(\geqslant 2)$元解析式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中,变数字母的取值为 n 元有序数组的形式$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$($a_i$ 为常数 $i=1,2,\cdots,n$).

2. 当一个解析式中变数字母的允许值范围是从纯数学角度考虑时,变数字母的允许值是指使解析式有意义的所有数值;而在实际问题中则应根据实际意义确定解析式变数字母的允许值,例如,在高度为 h 的物体自由落下的运动规律

$$s(t)=\frac{gt^2}{2}$$

中变数 t 的允许值范围为 $t\in\left[0,\sqrt{2h/g}\right]$.

解析式变数字母的允许值的集合称为解析式的定义域.在实数范围内,确定解析式的定义域应遵循以下六条原则:

1. 分式的分母不能为零.
2. 偶次根式的根底应是非负数.
3. 幂的指数是无理数或含有变数时,底应大于零.
4. 对数符号下的式子,真数应大于零,且对数的底应大于零且不等于 1.
5. 正切符号下的式子不能等于 $k\pi+\pi/2$,余切符号下的式子不能等于 $k\pi(k\in\mathbb{Z})$.
6. 反正弦符号与反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1.

解析式的定义域(domain of definition of an analytic expression) 见"解析式变数字母的允许值".

解析式的值(value of analytic expressions) 一种确定的数值.指解析式中的变数字母用其允许值代替所得的结果.通常,这个结果应计算出来.若 $x=a$ 使解析式 $f(x)$有意义,则 $f(x)$在 $x=a$ 的值记为 $f(a)$.同样,若 n 元有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$使解析式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$有意义,则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的值记为 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

相等(equality) 数学的基本概念之一.它有相同、同一等含义.指事物之间的一种等价关系.事物 A 与 B 相等常记为 $A=B$.把相等使用于不同场合可有不同的意义.例如,集合的相等,函数的相等,实数的相等,复数的相等……它们的具体意义彼此是不同的.相等关系是一种等价关系,即满足:

1. 反射律.$A=A$.
2. 对称律.若 $A=B$,则 $B=A$.
3. 传递律.若 $A=B$,$B=C$,则 $A=C$.

有时相等与恒等有同一意义.

等量公理(axioms of equal quantities) 数量相等关系变换的一组公理,它们是:

1. 等于同量的量相等.
2. 等量加等量,其和相等.
3. 等量减等量,其差相等.
4. 等量的同倍量相等.
5. 等量的同分量相等.

上述五条等量公理中,前三条出自欧几里得(Euclid)的《原本》.在数量相等关系的变换中,"一个量总可以用它的等量去代换"被称为等量代换公理,它也是等量公理体系中的重要公理.

等量代换公理(axiom of subsititution of equal quantity) 见"等量公理".

等量关系(relation of equal quantity) 一种等

价关系. 指量与量之间的相等关系. 例如,匀速直线运动中,路程=速度×时间是一个等量关系. 等量关系的变换是以等量公理为依据的.

等量代换(substitution of equal quantity) 数学的基本规律之一. 在一个数量关系式中,将一个量用它的相等的量来代替. 称为等量代换.

等式(equality) 数学的基本概念之一. 指表达相等关系的式子. 在等式中通常用等号"="把认为相等的两个对象连结起来. 例如,数值等式是用等号连结的两个解析式;集合等式是用等号连结的两个集合表达式;矩阵等式是用等号连结两个矩阵表达式. 由只含常数(即常量、已知数等)的解析式组成的等式仅有等式两边所表示的量相等(或说恒等)一个意义. 当两边的解析式至少有一个含有变数字母(即表示变量、未知数等)时,等式亦称为方程(参见"方程"). 这时,等式有恒等式(绝对等式)、条件等式、矛盾等式诸类型. 现在使用的等号"="是在数学史发展过程中逐渐形成的. 公元 15 世纪前的数学著作中没有明确的等号,等量关系大都用文字叙述. 例如,在一些式子中常用 æqu,æqualis(拉丁文的相等、等于)或 facit(组成)等表示量的相等. 现在使用的等号"="是雷科德(Recorde,R.)于 1557 年在他的代数著作《智力的磨石》中首先提出使用的. 他在该著作中写道:"为了避免枯燥地重复(等于)这个词,如像我们在自己的工作实际中经常用到的那样,放两条平行线——同样长的一对双生子=,因为再也没有别的两样东西比它们更相等了". 但这个建议并未得到广泛的响应. 韦达(Viete,F.)曾用～表示相等;1637 年,笛卡儿(Descartes,R.)在他的名著《几何学》中用∞表示相等;牛顿(Newton,I.)的时代多采用∝或∞表示相等,这里的等号是从 æqualis(相等)一词的第一个字母变形而来的. 在雷科德提出使用等号"="之后的一个多世纪,莱布尼茨(Leibniz,G. W.)再次倡议用"="作为相等符号.

等式的定义域(domain of definition of an equality) 未知数的取值范围. 指等式两端解析式的定义域的交集. 例如在等式

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

中,左端解析式 $(x^2-1)/(x-1)$ 的定义域是 $D_1=\{x|x\in\mathrm{R},x\neq1\}$,右端解析式 $x+1$ 的定义域是 $D_2=\mathrm{R}$(实数集),因而此等式的定义域是

$$D=D_1\cap D_2=D_1.$$

恒等(identity) 数学的基本概念之一. 若两个数学对象 A 与 B 是相同(同一)的,则称 A 与 B 恒等,记为 $A\equiv B$,读作 A 恒等于 B. 在含义明确的情况下,A 与 B 恒等也记为 $A=B$. 具体地,若对两个解析式里的变数字母的一切取值,两式的值均相等,则称此两式恒等;若对两个解析式构成的等式的定义域中的任何变数字母的取值,两式的值均相等,则也称此两式恒等;对两个不含变数字母的数字式,若有相同的值,则亦称此两数字式恒等,如 $5+2=3+4$;若对于两个集合表达式在所讨论范围内都相等,则称这两个集合表达式恒等,如 $\mathrm{Arg}\,\bar{z}=-\mathrm{Arg}\,z$.

恒等式(identity) 一种常见的等式. 表示两个解析式对所含变数字母的全部取值都相等的等式称为恒等式. 它常有以下两种意义:

1. 含变数字母 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\in\mathrm{N})$ 的等式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是恒等式,当且仅当对于变数字母的任何取值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$($a_i$ 为确定的常数,$i=1,2,\cdots,n$)都有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 例如,数值等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 就是这样的恒等式. 对于这样的恒等式,两解析式间常用恒等号"≡"连结.

2. 设含变数字母 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的等式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的定义域为 D,它是恒等式,当且仅当对于任何 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D$,有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

前一种意义下的恒等式也是后一种意义下的恒等式,反之不然. 恒等式的更一般的意义是:用表示同一关系的符号"="联系两个式子形成一个等式,在所讨论范围内,等式对所有对象均成立,那么这个等式称为这个范围内的恒等式. 一个等式是否为恒等式,是相对于它的讨论范围而言的. 一个讨论范围内的恒等式又称为这个讨论范围内的绝对等式.

绝对等式(absolute equality) 见"恒等式".

条件等式(conditional equality) 一种常见的等式. 若一个等式在所讨论的范围内仅当满足某些条件时才能成立,则称这个等式为条件等式. 换言之,在等式所讨论的范围内,当取某些对象时等式成立,而取另外一些对象时等式不成立,这样的等式称为条件等式. 例如在复数范围内,$a^3+b^3+c^3=3abc$ 是条件等式,该等式成立的条件是

$$(a+b+c),\ (a+\omega b+\omega^2c),\ (a+\omega^2b+\omega c)$$

三者之一为 0. 条件等式与绝对等式都是相对的. 例如等式 $\lg x^2=2\lg x$,在实数范围内,它是条件等式;而在该等式的定义域(正的实数集)上是恒等式. 对于方程这个等式,当求解范围所构成的集合 A 与解集 B 相等时,方程是绝对等式;而当 B 是 A 的真子集时,方程是条件等式;当 B 为空集时,方程为矛盾等式(参见"方程").

恒等变形(identical deformation) 解析式的一种变换. 将一个给定的解析式变换成另一个与它恒等的解析式,称为解析式的恒等变形. 恒等变形的具

体意义有以下两种：

1. 若以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为变数字母的解析式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有相同的定义域 D，且在 D 上等值，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 上的相互替换，称为恒等变形. 例如在实数集 R 上，解析式 $(x+y)^2$ 与 $x^2+2xy+y^2$ 可以互相替换.

2. 若以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为变数字母的解析式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的定义域分别为 D_1 与 D_2，且 $D_1\neq D_2$，但在 $D_1\cap D_2=D\neq\varnothing$ 上两解析式等值，则在 D 上 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的相互替换亦称为恒等变形. 例如 $e^{(\ln x)/3}$ 与 $\sqrt[3]{x}$ 的定义域分别是 $D_1=\mathrm{R}^+$，$D_2=\mathrm{R}$，则在 $D_1\cap D_2=\mathrm{R}^+$ 上，解析式 $e^{(\ln x)/3}$ 与 $\sqrt[3]{x}$ 的相互替换就是这种意义下的恒等变形.

恒等变形的更一般的意义是：若在所讨论范围内用表示同一关系的等号＝联系着两个式子，形成该讨论范围的一个恒等式，则称这个恒等式两端式子的相互替换为恒等变形.

代数式(algebraic expression)　一种常见的解析式. 对变数字母仅限于有限次代数运算（加、减、乘、除、乘方、开方）的解析式称为代数式. 例如

$$2(a+b)c,\quad \frac{3x^2+5x+1}{3x+2},\quad x\cos 4$$

等都是代数式. 单独的一个数或字母也称为代数式. 对代数式可作如下分类：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

关于代数式的分类应注意以下两点：

1. 要按代数式给出的初始形式分类. 例如

$$\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$$

虽然可以化简为 x^2+1，但它仍然是分式；又如 $\sqrt{(x^2+1)^2}-1$ 虽然可以化简为 x^2，但它仍然是无理式.

2. 要按实施于指定的变数字母的运算分类. 例如对于变数字母 x，式子 $x+\sqrt{a}$ 是有理式，式子 $\sqrt{x+a}$ 是无理式.

代数式概念的形成与发展经历了一个漫长的历史发展过程. 13 世纪，斐波那契(Fibonacci，L.)就开始采用字母表示运算对象，但尚未使用运算符号. 韦达(Viete，F.)于 1584—1589 年间，引入数学符号系统，使代数成为关于方程的理论，因而人们普遍认为他是代数式的创始人. 笛卡儿(Descartes，R.)对韦达的字母用法作了改进，用拉丁字母表中前面的字母 $a,b,c,\cdots$ 表示已知数，用末尾的一些字母 $x,y,z,\cdots$ 表示未知数. 莱布尼茨(Leibniz，G. W.)对各种符号记法进行了系统研究，发展并完善了代数式的表示方法.

代数式的值(value of an algebraic expressions)　一种确定的数值. 用变数字母的允许值代替代数式里的变数字母后所得到的运算结果，称为代数式的值. 例如代数式 $f(x)$，当 $x=a$ 时的值是 $f(a)$，代数式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 时的值是 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，代数式 $f(x)=2x^3-3x^2+5$，当 $x=-2$ 时的值是

$$f(-2)=2(-2)^3-3(-2)^2+5=-23.$$

有理式(rational expression)　一种常见的代数式. 不含变数字母开方运算的代数式称为有理式. 即对变数字母仅含有限次加、减、乘、除和乘方运算的代数式称为有理式. 例如

$$5x+2,\quad \frac{a^2-b^2}{a},\quad \sqrt{2}m+n-\frac{m^2+n}{m-n}$$

都是有理式. 有理式分为有理整式（除式不含变数字母）和有理分式（除式含变数字母）.

有理式的标准表示法(canonical form of rational expressions)　有理式的一种规范表示方法. 指把一个有理式用一个与它恒等的既约分式来表示（参见“有理式”和“既约分式”）.

有理整式(rational integral expression)　亦称整式. 一种基本的有理式. 对变数字母与数仅限于有限次加、减、乘、乘方运算的代数式，即除式不含变数字母的有理式称为有理整式. 整式包括单项式和多项式. 可以认为有理整式即是多项式，单项式是多项式的特例. 每个多项式或是单项式，或是若干个单项式的代数和，这些单项式的次数的最大值称为这个多项式的次数. 单独一个非零常数称为零次多项式，数零称为零多项式. 多项式可看做以其所含变数字母（元）为自变量的函数，这时常按多项式的次数称为一次函数，二次函数等. 多项式又可以其所含变数字母作为未知数讨论此多项式何时取零值而成为方程，因而又有一次方程、二次方程等.

整式(integral expression)　即“有理整式”.

多项式(polynomial)　见“有理整式”.

零多项式(zero polynomial)　见“有理整式”.

多项式的次数(degree of polynomials)　见“有理整式”.

零次多项式(polynomial of null degree)　见“有理整式”.

单项式(monomial)　一种简单的代数式. 对变数字母仅限于乘法（乘方）运算或没有变数字母的代数式称为单项式. 例如 ab，$(m+n)x$（m,n 是常数），x^3 都是单项式. 其中 $(m+n)x$，虽然 $m+n$ 是加法运算，但 m,n 是常数，对变数 x 仍仅限于乘法运算，因

而它是单项式.在单项式中,数因子或数与非变数字母所构成的因子称为这个单项式的系数.为明确起见,一般把一个单项式称为关于变数字母的单项式,若一个给定单项式没有指明是关于哪些字母的单项式,则认为式中出现的所有字母都是变数字母.变数字母称为单项式的元.当系数不为零时,单项式中任一元的次数称为单项式关于这个元的次数,单项式中所有元的次数的和称为这个单项式的次数.例如,关于 x,y 的单项式 $2ax^2y^3(a\neq0)$ 的次数为 5.单独一个非零常数称为零次单项式.数 0 也看做单项式,称为零单项式.当单项式的系数是在指定数系 P(如整数系,实数系等)取值时,这样的单项式称为数系 P 上的单项式.

单项式的系数(coefficients of a monomial) 见"单项式".

单项式的元(element of a monomial) 见"单项式".

单项式的次数(degree of a monomials) 见"单项式".

零次单项式(monomial of zero degree) 见"单项式".

零单项式(zero monomial) 见"单项式".

单项式的标准形式(canonical form of a monomial) 单项式的一种规范表示.如果一个单项式在书写上符合下面三个条件,则称其为单项式的标准形式:

1.性质符号排在最前面,数值因数(数值或表常数的字母)紧接着写在性质符号之后,然后写表示变元的字母,并将各字母按字典顺序排列.

2.相同因数,写成幂指数的形式.

3.数值部分,计算合并成为一个数.

例如 $-1.5ab^2dx^3y$ 是标准形式,而 $0.5y^2xb$ 就不是标准形式.以 $x,y,\cdots,z$ 为变数的单项式总有如下的标准形式 $Ax^ky^l\cdots z^g$,其中 A 表示合并在一起的数和常数字母,称为单项式的系数,$k,l,\cdots,g\in \mathbf{Z}^+$,$k+l+\cdots+g$(当 $A\neq0$)称为单项式的次数.

同类单项式(similar monomial) 代数学术语.指相应变数的幂指数都相同的单项式.有相同变数字母的两个单项式中,若它们的每个相同变数字母的幂指数都相同,即两个有相同变数字母的单项式 $A_1x^{k_1}y^{l_1}\cdots z^{g_1}$ 与 $A_2x^{k_2}y^{l_2}\cdots z^{g_2}$($A_1,A_2$ 为单项式系数,$k_i,l_i,\cdots,g_i$ 为非负整数,$i=1,2$)中,$k_1=k_2,l_1=l_2,\cdots,g_1=g_2$,则这两个单项式称为同类单项式,在多项式中则称为同类项.例如 ax^2yz 与 bx^2yz 是关于变数字母 x,y,z 的同类项.所有非零常数都是同类项.零单项式只与它自身同类.在作单项式的加减法时,或在多项式中,同类项要合并,即几个同类项的代数和可用一个同类项代替,其系数是这几个同类项系数的代数和.

同类项(like term) 见"同类单项式".

单项式加减法法则(rule of addition and subtraction of monomial) 单项式的一种运算.其法则是:几个单项式相加减,先用加减号把各单项式连结起来,然后合并同类项(即把同类项的系数相加减,变数字母部分不变),得到一个多项式(或单项式),就是这几个单项式相加减的结果.

单项式乘法法则(rule of multiplication of monomial) 单项式的一种运算.其法则是:几个单项式相乘,首先把各个单项式的系数相乘的积作为积的系数,然后把相同变数字母的幂相乘,底数不变,指数相加的和作为积里这个变数字母的指数,将只在某一个单项式中含有的变数字母,连同它的指数作为积的一个因式写在积里,并把最后结果写成单项式的标准形式 $Ax^ky^l\cdots z^g$(A 为单项式系数,$k,l,\cdots,g\in\mathbf{Z}^+$).例如

$$(-2ax^2yz^3)(3x^2y^2z)=-6ax^4y^3z^4.$$

单项式除法法则(rule of division of monomial) 单项式的一种运算.单项式除以单项式的法则是:把被除式与除式的系数和相同变数字母的幂分别相除,其结果作为商的因式,将只含于被除式的变数字母的幂也作为商的因式.例如

$$15a^6b^3c\div(-5a^4b)=-3a^2b^2c.$$

单项式的除法不是永远可以实施的,即两个单项式相除,它们的商不一定是单项式,例如

$$2x^2\div3xy^2=\frac{2x}{3y^2}$$

是关于 x,y 的分式.在有理数域及其扩域上,对于满足下列条件的单项式除法是封闭的:

1.除式不为 0.

2.除式变数字母的次数不超过被除式中相同变数字母的次数.

多项式的标准形式(canonical form of polynomials) 多项式的一种规范表示.指符合下列条件的多项式:

1.它是单项式的标准形式的代数和.

2.它已经合并了同类项.

多项式的项(term of a polynomial) 代数学术语.多项式的标准形式中的每个单项式称为这个多项式的一项.多项式含有几项,就称其为几项式.例如,含有两项的多项式称为二项式,含有三项的多项式称为三项式等.多项式的每一项都有次数.不含变数字母的非零项称为常数项或零次项;次数是奇数的项称为奇次项;次数是偶数的项称为偶次项.

常数项(constant term) 见"多项式的项".

零次项(term of zero degree) 见"多项式的项".

奇次项(term of odd degree)　见"多项式的项".

偶次项(term of even degree)　见"多项式的项".

合并同类项(packing like terms)　代数学术语.指化简多项式运算结果的一种过程.在作单项式或多项式的加减运算时,若有某些单项式是同类项,则可根据乘法对加法的分配律,将这些同类项用一个同类项代替,其系数为这几个同类项系数的代数和,称这样的过程为合并同类项.

降幂式(power-descending form of polynomials)　一元多项式的一种表示法.在多项式里,按照某一元(变数字母)的幂指数由高到低的顺序来排列多项式的各项,称为按某元的降幂排列.降幂排列的多项式称为降幂式.例如多项式 $7a^5+a^4-a^3-2a^2+6a-5$ 是按 a 的降幂排列的,因而是 a 的降幂式.多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$ 是按变数字母 x 的降幂排列的,它是 x 的降幂式.

升幂式(power-increasing form of polynomials)　一元多项式的一种表示法.在多项式里,按照某一元(变数字母)的幂指数由低到高的顺序来排列多项式的各项,称为按某元的升幂排列.升幂排列的多项式称为升幂式.例如多项式 $-5+6a-2a^2-a^3+a^4+7a^5$ 是按 a 的升幂排列的多项式,它是 a 的升幂式.$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n(a_n\neq 0)$ 是按变数字母 x 的升幂排列的,它是 x 的升幂式.

多项式的字典排列法(lexicographic order of polynomials)　多元多项式的一种表示法.见本卷《高等代数》同名条.此时应注意,对于单项式中不含的元,要理解为这个单项式中含这个元的零次幂.

多项式加减法法则(rule of addition and subtraction of polynomials)　多项式的一种运算法则.几个多项式相加减的法则是:首先把带减号的多项式中的每个单项式都变号合成一个多项式,然后合并同类项,并按字典排列法写出结果.例如:设 $A=7a^2-2ab+b^2, B=6a^2-ab-b^2, C=4a^2+3ab+2b^2$,则 $A-B+C=A+B'+C$,其中 $B'=-B=-6a^2+ab+b^2$,即 $A-B+C=(7a^2-2ab+b^2)-(6a^2-ab-b^2)+(4a^2+3ab+2b^2)=7a^2-2ab+b^2-6a^2+ab+b^2+4a^2+3ab+2b^2=5a^2+2ab+4b^2$.

相反多项式(opposite polynomial)　相反数概念的推广.若两个多项式的和恒为零,则称这两个多项式互为相反多项式.例如 a^2+2ab 与 $-a^2-2ab$ 互为相反多项式.多项式(标准形式)和它的相反多项式(标准形式)的对应同类项系数互为相反数.

多项式乘法法则(rule of polynomial multiplication)　多项式的一种运算法则.即整式乘法法则.其法则是:

1.两单项式相乘时,系数相乘作为积的系数,变数字母部分按同底幂乘法法则相乘,只在一个单项式中出现的变数字母的幂,作为因式写在积里.

2.单项式乘多项式时,可用单项式去乘多项式的每一项,把所得的积相加后的多项式就是它们的乘积.

3.两多项式相乘时,用一个多项式的各项去乘另一个多项式的每一项,再把所得的积相加,合并同类项后所得的式子就是它们的积.

多项式的乘法运算在数环(域)上是封闭的,即数环(域)上多项式相乘的积仍是这个数环(域)上的多项式.

多项式乘积的次数定理(degree theorem of polynomial products)　阐明多项式的积与其各因式的次数之间关系的命题.数环上若干个多项式相乘,关于积的次数有下述的定理:

1.非零单项式相乘,积的次数等于相乘各单项式次数的和.

2.非零多项式相乘,积的次数等于相乘各多项式次数的和,特别地,两齐次多项式的积仍是齐次多项式,且积的次数等于两齐次多项式次数的和.

3.任何多项式与零多项式之积仍为零多项式.

多项式长除法(long division of polynomials)　亦称多项式竖式除法.多项式除法演算的一种方式.在多项式除以多项式中,用竖式演算求商式和余式的方法称为多项式的长除法.例如,计算多项式除法

$$(4a^4x^2-4a^2x^4+x^6-a^6)\div(x^2-a^2)$$

$$\begin{array}{r|l} & x^4-3a^2x^2+a^4 \\ \hline x^2-a^2 & x^6-4a^2x^4+4a^4x^2-a^6 \\ & \underline{x^6-a^2x^4\qquad\qquad\qquad} \\ & -3a^2x^4+4a^4x^2\qquad \\ & \underline{-3a^2x^4+3a^4x^2\qquad} \\ & a^4x^2-a^6 \\ & \underline{\underline{a^4x^2-a^6}} \end{array}$$

$$(x^6-4a^2x^4+4a^4x^2-a^6)\div(x^2-a^2)$$
$$=x^4-3a^2x^2+a^4.$$

在做长除法竖式时,要将被除式和除式按某一字母的降幂排列,一般被除式缺项要留空位或补零占位.

因式(factor)　指数概念的推广.设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都是域(或交换环)P 上的 n 元多项式,若在 P 上存在多项式 $q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 成立,则称 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 P 上的一个因式,而称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 P 上的一个倍式.多项式的因式常受它的系数 P 的影响,在不同的数域里,多项

式的因式可能是不同的.

因子(factor) 因数概念的推广.对于多项式而言,实即因式,还可用于更广义的情形.一个整数的因数或一个多项式的因式都称为因子.更一般地,设A是定义了一个称为乘法的二元运算"$\circ$"的非空集合,$a,b,c\in A$,若$a=b\circ c$成立,则称b是a的左因子,c是a的右因子;又若$a=b\circ c=c\circ b$成立,则称b,c是a的因子.

左因子(left factor) 见"因子".

右因子(right factor) 见"因子".

可约多项式(reducible polynomial) 一种特殊的多项式.指有非平凡因式的多项式.设$f(x)$是域P上的一个n次多项式,若在P上存在次数小于n的非常数多项式$g(x)$与$h(x)$,使$f(x)=g(x)h(x)$,则$f(x)$称为域P上的可约多项式,简称在P上可约;否则$f(x)$称为P上的不可约多项式,或称为P上的既约多项式,简称在P上不可约.一元多项式的可约概念亦可推广到n元多项式.

不可约多项式(irreducible polynomial) 见"可约多项式"及本卷《高等代数》同名条.

既约多项式(reducible polynomial) 见"可约多项式".

平凡因式(trivial factor) 亦称当然因式.多项式的一种特殊因式.若在数域P上给定多项式$f(x)$,则P上任一个不等于零的常数以及与$f(x)$只相差一个非零常数因子的多项式都是$f(x)$的因式,这两种因式称为$f(x)$的平凡因式;$f(x)$的其他因式称为$f(x)$的非平凡因式(或非当然因式).例如$1/2$,$2x^2+2$都是x^2+1的平凡因式;$(x-1)$,$(x+1)$都是x^4-1的非平凡因式.

当然因式(trivial factor) 即"平凡因式".

非平凡因式(non-trivial factor) 见"平凡因式".

多项式的相等(equality of polynomials) 多项式间的一种等价关系.指次数相同且各同类项的系数相等的多项式之间的关系.数域P上两个多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

与 $$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

相等,当且仅当$m=n$且它们的对应同类项系数相等,即$a_i=b_i(i=0,1,2,\cdots,m=n)$.以上的一元多项式相等可以推广到多元多项式.

因式分解(factorization of polynomials) 代数学术语.指将一个多项式表示为几个多项式之积的过程与结果.数域P上每一个次数$n\geqslant1$的多项式都可以惟一地分解成P上的不可约多项式的乘积.将P上多项式表示成这样的乘积的过程称为多项式的因式分解,简称因式分解(或分解因式).在不同的数域上,多项式分解因式的结果可能是不同的,例如,对于$f(x)=x^4-4$,在数集Q,R,C上分解的结果分别是:

$$f(x)=(x^2+2)(x^2-2);$$

$$f(x)=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2});$$

$$f(x)=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2}).$$

复系数多项式的因式分解(factorization of polynomial with complex coefficients) 一种常见的因式分解.即复系数多项式的因式分解的标准形式.根据代数基本定理,复数域C上只有1次多项式才是不可约的,因此,复系数的$n(>0)$次多项式$f(x)$在理论上可分解为n个1次因式之积

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\cdots(x-\alpha_k)^{l_k},$$

其中$0\neq a_0\in\mathrm{C}$,$l_i\in\mathrm{N}_+$使$l_1+l_2+\cdots+l_k=n$,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$是互异复数.

实系数多项式的因式分解(factorization of polynomial with real coefficients) 一种常见的因式分解.即实系数多项式的因式分解的标准形式.由于实系数多项式的复数根共轭地成对出现,所以实数域R上只有一次和二次的不可约多项式.因此,实系数的$n(>0)$次多项式$f(x)$有标准分解式

$$f(x)=a_0(x-c_1)^{l_1}(x-c_2)^{l_2}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中$0\neq a_0\in\mathrm{R}$,$c_1,c_2,\cdots,c_s\in\mathrm{R}$互异,$p_i,q_i\in\mathrm{R}$使$r$对$(p_i,q_i)$互异,且$p_i^2-4q_i<0(i=1,2,\cdots,r)$,而$l_i$,$k_j\in\mathrm{Z}^+$使$l_1+l_2+\cdots+l_s+2(k_1+k_2+\cdots+k_r)=n$.

艾森斯坦判别法(Eisenstein criterion) 见本卷《高等代数》同名条.

有理系数多项式的因式分解(factorization of polynomial with rational coefficients) 一种常见的因式分解.即有理系数多项式的因式分解的特殊性.由艾森斯坦判别法可知存在任意高次的有理系数不可约多项式,例如x^n+2.因此,无法统一地写出任一有理系数的$n(>0)$次多项式的标准分解式.整系数多项式亦然.

提取公因式法(disjuncting common factor) 多项式因式分解的一种方法.即依据乘法对加法的分配律,若给定的多项式各项有公因式,则可把它提到括号外面,将给定的多项式写成两个多项式的乘积.例如$5a^2bc^3-15ac^2+25abc^3=5ac^2(abc+5bc-3)$.当给定的多项式分为若干组且各组之间有公因式时,亦可使用提取公因式法进行分解.例如

$$(x^2-y^2)-(x+y)=(x+y)[(x-y)-1]=(x+y)(x-y-1).$$

公式分解法(factoring with multiple formula) 多项式分解因式的一种方法.它是乘法公式的逆向

应用．即利用乘法公式把多项式进行因式分解的方法．应用此法的主要技巧是将给定的多项式中的一些式子视为乘法公式的一项，使公式得以应用．例如利用乘法公式

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

将多项式 $8x^3+27y^6$ 在有理数集上分解：

$$\begin{aligned}8x^3+27y^6&=(2x)^3+(3y^2)^3\\&=(2x+3y^2)(4x^2-6xy^2+9y^4).\end{aligned}$$

另外，此法常与分组分解法结合起来使用．分解因式常用的公式可详见“多项式的乘法公式”．

分组分解法(factoring method of grouping) 多项式因式分解的一种方法．指将结合律应用于因式分解的方法．在对多项式进行分解时，把多项式的各项适当分组(有时还要拆项或添项)，使分组后各组间有公因式或能应用乘法公式，以便使因式分解可继续下去．例如在有理数域上分解多项式

$$\begin{aligned}&x^3+6x^2+12x+y^3+8\\=&(x^3+6x^2+12x+8)+y^3\\=&(x+2)^3+y^3\\=&(x+y+2)(x^2+4x+4-xy-2y+y^2).\end{aligned}$$

求根分解法(factoring method of finding a root) 多项式因式分解的一种方法．指用求多项式的根分离出多项式的一次因式的方法．若多项式 $f(x)$ 的一个根为 $x=a$，则多项式就含有一次因式 $x-a$，于是 $f(x)=(x-a)g(x)$．例如用综合除法和余数定理可求得多项式 $f(x)=x^3+11x^2+39x+45$ 的有理二重根为 $x=-3$，有理单根为 $x=-5$，故可将 $f(x)$ 在有理数域上分解为

$$f(x)=(x+3)^2(x+5).$$

求根分解法常与其他方法结合使用，例如用求根分解法将 $f(x)$ 在域 P 上分解为 $f(x)=(x-a)g(x)$ 后，若 $g(x)$ 在 P 上是可约的，则可用其他方法继续分解 $g(x)$(当然也可仍用求根分解法)，直至将其分解成 P 上不可约多项式的乘积．求根分解法的关键是在指定数集内求多项式的根．利用求根公式是求根的方法之一．对一元二次、三次和四次多项式在复数域和实数域上分解因式时，可直接利用求根公式求多项式的根；但由于五次以上多项式无求根公式，因而可以肯定：在复数域或实数域上不能直接利用求根公式分解五次以上的多项式．

因式定理(factor theorem) 多项式的根与其一次因式对应关系的命题．该定理断言：数域 P 上的一元 n 次多项式 $f(x)$ 以 $x-a(a\in P)$ 为因式的充分必要条件是 $f(a)=0$．常从两方面利用这个定理：

1．用于多项式因式分解：当已知 $x=a$ 是 $f(x)$ 的根时，可从 $f(x)$ 中分解出因式 $x-a$，使

$$f(x)=(x-a)g(x).$$

2．用于求多项式的根：当已知 $ax+b(a\neq0)$ 是 $f(x)$ 的一个一次因式时，可推知 $x=-b/a$ 是 $f(x)$ 的一个根，即 $f(-b/a)=0$．

因式定理是笛卡儿(Descartes，R.)在他所著的《几何学》第三篇中给出的．

十字相乘法(cross multiplication) 亦称交叉相乘法．二次三项式因式分解的一种方法．在对二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 进行因式分解时，若有 p，l，m，n，使 $a=pl$，$c=mn$，$b=pn+lm$，则 $ax^2+bx+c=(px+m)(lx+n)$，利用这个规律分解因式的方法称为十字相乘法．应用此法时要先将 a 和 c 分别写成两数积的形式：$a=pl$，$c=mn$，再验证 $pn+lm$ 是否等于 b；若不等于 b，则需调换 a 与 c 的因子，进行试验，直至等于 b 为止．验证过程中常用下面的形式

$$\begin{array}{c}p\diagdown\!\!\diagup\, l\\ m\diagup\!\!\diagdown\, n\\\hline lm+pn=b.\end{array}$$

十字相乘法这一名称即来源于此．十字相乘法对于有理数域 Q 上的二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解是十分有效的，但在实数域 R 上考虑时，由于一个实数的实因子有更多种可能，所以此法就不那么好用．将十字相乘法稍加推广，对于下述几种多元多项式在有理数域 Q 上分解因式也很有效．

1．对二元二次齐次多项式 $ax^2+bxy+cy^2$ 的分解因式与对二次三项式 ax^2+bx+c 的分解因式实质是一样的，设

$$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)\cdot(a_2x+c_2),$$

立即推得

$$ax^2+bxy+cy^2=(a_1x+c_1y)(a_2x+c_2y),$$

即有如下的十字相乘形式

$$\begin{array}{c}a_1\diagdown\!\!\diagup\, c_1y\\ a_2\diagup\!\!\diagdown\, c_2y\\\hline a_2c_1y+a_1c_2y=by.\end{array}$$

2．二元二次多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 与三元二次齐次多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2$ 的因式分解，是先把 x，y 的二次项用十字相乘法分解因式：

$$ax^2+bxy+cy^2=(a_1x+c_1y)(a_2x+c_2y),$$

然后仍用十字相乘法确定 f_1 与 $f_2(f_1\cdot f_2=f)$，

$$\begin{array}{c}a_1x+c_1y\diagdown\!\!\diagup\, f_1\\ a_2x+c_2y\diagup\!\!\diagdown\, f_2\\\hline a_1f_2+a_2f_1=d\\ c_1f_2+c_2f_1=e.\end{array}$$

从而得出 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=(a_1x+c_1y+f_1)(a_2x+c_2y+f_2)$，同理，用上述方法可得

$$\begin{aligned}&ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2\\=&(a_1x+c_1y+f_1z)(a_2x+c_2y+f_2z).\end{aligned}$$

3. 通过恒等变形、换元后归结为上述情形的较复杂多项式亦可使用十字相乘法分解因式.

交叉相乘法(cross multiplication) 即"十字相乘法".

待定系数法(method of undetermined coefficients) 亦称未定系数法. 确定参与运算的某一未知多项式(或更广的某类解析式)的一种方法. 如果欲求之式为一些已知单项的线性组合,这个线性组合中的诸系数暂以一些字母作代表,按照已知条件进行演算比较,得出以这些字母为未知量的线性(代数)方程组,解这方程组可把诸系数确定下来,称为待定系数法. 待定系数法用处很多. 除可用于多项式的因式分解外,还可用于分解真分式为部分分式之和,求满足某些条件的函数式、计算积分、求微分方程的幂级数解等.

平方差公式(formula of square difference) 一种常用公式. 指公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

立方和公式(formula of cubic sum) 一种常用公式. 指公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. 它可以推广为

$$\begin{aligned}&a^{2n+1}+b^{2n+1}\\&=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots+b^{2n}).\end{aligned}$$

立方差公式(formula of cubic difference) 一种常用公式. 指公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. 它可以推广为

$$\begin{aligned}&a^n-b^n\\&=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}).\end{aligned}$$

配方法(solving by of completing the square) 分解因式的一种基本方法. 将一个代数式通过拆项或添加互相抵消的项,使这个代数式中的某些项配成一个完全 n 次方式,以利于下一步的证明或运算,由于配方法中对某些项是根据需要凑出来的,所以配方法又称为凑方法. 配方法常用于配成完全平方式,它主要用于:

1. 分解因式. 例如,把 $a^4+a^2b^2+b^4$ 分解因式,需首先加上 a^2b^2 项凑成完全平方式,再减去 a^2b^2 项,从而使给定多项式得以分解,即

$$\begin{aligned}a^4+a^2b^2+b^4&=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2\\&=(a^2+b^2)^2-(ab)^2\\&=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab).\end{aligned}$$

2. 解一元二次方程.

3. 求二次三项式的极值.

早在公元 9 世纪,阿拉伯数学家阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī, M. ibn M.)就用配方法解出了一元二次方程. 12 世纪,婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)用配方法导出了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

熟知的一元二次方程的求根公式的推导就是用配方法解决问题的典型.

凑方法(solving by of completing the square) 见"配方法".

公因式(common factor) 公因数概念的推广. 若一个多项式同时是几个多项式的因式,则称这个多项式是这几个多项式的公因式.

最高公因式(highest common factor) 亦称最大公因式. 最大公因数概念的推广. 在几个多项式的公因式中,能被任何公因式整除的那一个公因式(参见本卷《高等代数》中的"最大公因式").

求两个多项式的最高公因式的常用方法是:

1. 分解因式法. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的典型分解式分别为

$$f(x)=ap_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_r^{\alpha_r}(x)p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}(x)\cdots p_s^{\alpha_s}(x),$$
$$g(x)=bp_1^{\beta_1}(x)p_2^{\beta_2}(x)\cdots p_r^{\beta_r}(x)q_{r+1}^{\beta_{r+1}}(x)\cdots q_t^{\beta_t}(x).$$

它们有 r 个共同的不可约因式 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_r(x)$. 令 $\gamma_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}(i=1,2,\cdots,r)$,则 $d(x)=p_1^{\gamma_1}(x)p_2^{\gamma_2}(x)\cdots p_r^{\gamma_r}(x)$就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式.

2. 辗转相除法(参见本卷《高等代数》中的"多项式的辗转相除法").

最大公因式(greatest common factor) 即"最高公因式".

最高公因式的求法(method of finding the highest common factor) 见"最高公因式".

标准最高公因式(standard highest common factor) 见本卷《高等代数》中的"最大公因式".

互素(relatively prime) 亦称互质. 代数学术语. 指几个整数或几个多项式的一种关系. 最大公约数是 1 的几个整数称为互素的整数,除常数(零次多项式)外无其他公因式的几个多项式称为互素多项式. 个数不小于 3 的互素的整数或互素的多项式中,不一定每两个整数或每两个多项式都是互素的. 如果每两个都互素,则称为两两互素的.

互质(relatively prime) 即"互素".

倍式(multiple expression) 倍数概念的推广. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数集 P(数环或数域)上的多项式,若存在 P 上的多项式 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$则称在 P 上 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$能整除 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,记为 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 简记为 $g\mid f$,并称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的倍式,$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的因式. 倍式有如下一些主要性质:

1. 零的倍式只能是零，零是任何多项式的倍式.

2. 每一个多项式都是非零常数的倍式.

3. 若 f 与 g 都是 h 的倍式，则 $f\pm g$，fg 也是 h 的倍式，即 $h|f, h|g \Rightarrow h|(f\pm g), h|fg$；

4. 若 f 是 h 的倍式，则 f 的倍式 fg 也是 h 的倍式，即 $h|f \Rightarrow h|fg$.

5. 若 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 h 的倍式，则 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的组合也是 h 的倍式，即

$$h|f_i(i=1,2,\cdots,n) \Rightarrow h\Big|\sum_{i=1}^{n} f_i g_i,$$

式中 $g_i(i=1,2,\cdots,n)$ 也是 P 上的多项式.

公倍式(common multiple)　公倍数概念的推广. 若一个多项式是某几个多项式共同的倍式，则这个多项式称为这几个多项式的一个公倍式. 任意 $n(n>1)$ 个不全为零的多项式都有非零的公倍式. 几个零多项式的公倍式是零多项式. 含有零多项式的几个多项式中只有惟一的公倍式零多项式.

最低公倍式(least common multiple)　亦称最小公倍式. 最低公倍数概念的推广. 几个多项式的公倍式中，能够整除所有公倍式的那一个公倍式(参见本卷《高等代数》中的"最小公倍式"). 求两个非零多项式的最低公倍式的常用方法是：

1. 分解因式法. 首先把两个多项式分别分解为不可约因式之积，并将相同不可约因式写成幂的形式，然后从两个分解式中取出每个不可约因式的最高次幂乘在一起，所得积就是给定两个多项式的最低公倍式.

2. 由最高公因式求最低公倍式. 用给定的两多项式的积除以它们的最高公因式所得商式就是它们的最低公倍式.

3. 求几个多项式的最低公倍式，可先求其中两个的最低公倍式，再求它与第三个多项式的最低公倍式，如此继续下去，直到求出与最后一个多项式的最低公倍式，它就是这几个多项式的最低公倍式.

最小公倍式(least common multiple)　即"最低公倍式".

最低公倍式的求法(method of finding the least common multiple)　见"最低公倍式".

标准最低公倍式(standard least common multiple)　见本卷《高等代数》中的"最小公倍式".

一元一次多项式(polynomial of degree 1 with one variable)　最简单的一种多项式. 只含一个变数字母且各项最高次数为 1 的多项式称为一元一次多项式. 它的标准形式是 $ax+b(a\neq 0)$，式中 a,b 为常数.

一元二次多项式(quadratic polynomial with one variable)　最常见的一种多项式. 只含一个变数字母且各项最高次数为 2 的多项式称为一元二次多项式，它的标准形式为 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$，式中 a,b,c 为常数.

一元二次三项式(quadratic trinomial with one variable)　一种常见的二次多项式. 变元 x 的多项式 $ax^2+bx+c(a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0)$ 称为一元二次三项式. 其中 ax^2,bx,c 分别称为该二次三项式的二次项，一次项，常数项. 一元二次三项式也常简称二次三项式.

一元二次多项式的根(root of a quadratic polynomial with one variable)　即一元二次方程的根. 见"一元二次方程的求根公式".

两个二次多项式有公根的条件(condition of the existence of common root of two quadratic polynomials)　两个二次多项式有公根的判别法则. 一元二次多项式 $a_1x^2+b_1x+c_1$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2$ 在复数范围内至少有一个公根的充分必要条件是

$$(a_1c_2-c_1a_2)^2-(a_1b_2-a_2b_1)\cdot(b_1c_2-c_1b_2)=0.$$

即

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{是} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{与} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

的比例中项. 亦即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

等式左端的行列式称为所给定的两个一元二次多项式的结式(参见本卷《高等代数》中的"结式").

一元二次多项式根的对称多项式定理(theorem on symmetric polynomial of the roots of a quadratic polynomial with one variable)　对称多项式基本定理的特例. 一元二次多项式 x^2+px+q 的两根的任何对称多项式都能惟一地表成 p 与 q 的多项式形式. 这个结论称为一元二次多项式根的对称多项式定理(参见本卷《高等代数》中的"对称多项式").

多项式的分离系数法(method of detached coefficients of polynomials)　多项式四则运算的一种演算形式. 对一元多项式进行加、减、乘、除运算时，首先将多项式写成标准形式并按变元降幂或升幂排列，缺项补零占位，然后略去各项的变数字母，分离出各项的系数，仅用系数组成的数列按原运算的意义进行运算. 最后将运算所得数列中各数分别配上与之相应项的变数字母的幂作为运算的最后结果，称为多项式的分离系数法. 例如，用分离系数法计算

$$(2ax^3-3x^2+5)+(3ax^3-2ax)$$

的演算过程如下：

$$\begin{array}{rrrrl} 2a & -3 & 0 & 5 & \\ 3a & 0 & -2a & 0 & (+ \\ \hline 5a & -3 & -2a & 5 & \end{array}$$

所求和为 $5ax^3-3x^2-2ax+5$.

用分离系数法计算

$$(2ax^3-3x^2+1)\cdot(ax^3-bx-1)$$

的演算过程如下：

$$\begin{array}{llllllll} & & & 2a & -3 & +0 & +1 & \\ & & & a & +0 & -b & -1 & (\times \\ \hline & & & -2a & +3 & +0 & -1 & \\ & & -2ab & +3b & +0 & -b & & \\ 2a^2 & -3a & +0 & +a & & & & (+ \\ \hline 2a^2 & -3a & -2ab & +(3b-a)+3 & -b & -1 & & \end{array}$$

所求积为

$$2a^2x^6-3ax^5-2abx^4+(3b-a)x^3+3x^2-bx-1.$$

用分离系数法计算

$$(3x^3-2x^2+1)\div(x^2-2x+2)$$

的演算过程如下：

$$\begin{array}{rrr|rrrr} & & & & & 3 & +4 \\ \hline 1 & -2 & +2) & 3 & -2 & +0 & +1 \\ & & -) & 3 & -6 & +6 & \\ \hline & & & & 4 & -6 & +1 \\ & & & -) & 4 & -8 & +8 \\ \hline & & & & & 2 & -7 \end{array}$$

所得商式为 $3x+4$，余式为 $2x-7$，即

$$3x^3-2x^2+1=(3x+4)(x^2-2x+2)+(2x-7).$$

综合除法(synthetic division)　亦称霍纳方法. 多项式除法的一种演算形式. 一元多项式除以首项系数为 1 的一元一次多项式 $x-b$ 的简化分离系数法. 它的具体作法是：

1. 写综合除式. 先把被除式 $f(x)$ 按降幂排列为 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，然后按下图中的格式写出“综合除式”. 这里被除式的各项系数若缺项则补零占位，且用纵线将被除式与除式中的 b 分开，而将第二行留空，再在第二行下面画一条横线

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & b \\ \hline \end{array}$$

2. 演算.

1) 在第三行 a_0 下的位置书写 a_0 作为商的首项系数 $c_0(c_0=a_0)$.

2) 将 c_0 与 b 的积写在第二行 a_1 的下面，求出 a_1 与 c_0b 的和 c_1，写在第三行 a_1 的下面作为商的第二项系数.

3) 将 c_1 与 b 的积写在第二行 a_2 的下面，求出 a_2 与 c_1b 的和 c_2 写在第三行 a_2 的下面作为商的第三项系数.

4) 如此作下去，不断求出商的各项系数. 最后第三行 a_n 下面的数是余数. 计算格式如下：

$$\begin{array}{cccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & b \\ & c_0b & c_1b & \cdots & c_{n-2}b & c_{n-1}b & \\ \hline a_0 & a_1+c_0b & a_2+c_1b & \cdots & a_{n-1}+c_{n-2}b & a_n+c_{n-1}b & \\ \| & \| & \| & & \| & \| & \\ c_0 & c_1 & c_2 & & c_{n-1} & r(x) & \end{array}$$

3. 写出结果. 商式 $q(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-2}x+c_{n-1}$，余式 $r(x)=a_n+c_{n-1}b$. 例如求 $f(x)=2x^4-7x^3+14x+4$ 除以 $x-2$ 所得的商和余数. 列算式如下：

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -7 & +0 & +14 & +4 & 2 \\ & 4 & -6 & -12 & +4 & \\ \hline 2 & -3 & -6 & +2 & +8 & \end{array}$$

商式的系数（$2,-3,-6,+2$）　余式（$+8$）

所以，商式 $q(x)=2x^3-3x^2-6x+2$，余式 $r(x)=8$. 当除式首项系数不为 1 时，可用除式的首项系数去除除式各项系数，化为首项系数为 1 的二项式再除，将综合除式中所得商式的各项系数也除以原来除式的首项系数，得到所求商式的系数列，余数不变.

霍纳方法(Horner method)　即“综合除法”.

多项式乘法公式(formula of polynomial multiplication)　一组常用的公式. 常见的乘法公式有：

1. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.
2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.
4. $(a\pm b\pm c)^2=a^2+b^2+c^2\pm 2ab+2bc\pm 2ac$.
5. $(a\pm b\pm c)^3=a^3\pm b^3\pm c^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm 3b^2c$ $\pm 3bc^2\pm 3a^2c+3ac^2+6abc$.
6. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
7. $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.
8. $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$ （n 为正整数).
9. $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})=a^n-b^n$ （n 为偶数).
10. $(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n+b^n$ （n 为奇数).
11. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ $=a^3+b^3+c^3-3abc$.
12. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.
13. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$.
14. $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i<j}a_ia_j$.

以上公式里的 a,b,c,a_i，等可以是数，也可以是单项式、多项式，甚至可以是代数式.

完全平方式(perfect square expression)　完全

平方数概念的推广．即恰好是某一代数式平方的式子．若一个代数式等于另一个代数式的平方，则这个代数式称为另一个代数式的完全平方式．例如 $a^2+b^2\pm 2ab$ 是 $a\pm b$ 的完全平方式，$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$ 是 $a+b+c$ 的完全平方式．

完全立方式(perfect cube expression)　完全立方数概念的推广．即恰好是某一代数式立方的式子．若一个代数式等于另一个代数式的立方，则这个代数式称为另一个代数式的完全立方式．例如 $a\pm b$ 的完全立方式是 $a^3\pm b^3\pm 3a^2b+3ab^2$．

欧拉恒等式(Euler identity)　一种特殊恒等式．指恒等式 $(ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay+dz-ct)^2+(cx-dy-az+bt)^2+(dx+cy-bz-at)^2\equiv(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$．

有理分式(rational fraction)　两多项式相除(作为除数的多项式次数不低于 1)的一种表示式．含有除法且除式中含有变数字母的代数式称为有理分式，简称分式．例如，对于变数字母 x,y，代数式 $x^2y/(x+y)$ 是有理分式．但

$$\frac{(x+y)}{2}+\frac{xy}{m}$$

是整式而不是有理分式．有理分式也可定义为一个多项式与一互素多项式的比

$$\frac{P(x_1,x_2,,\cdots,x_n)}{Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

在一个分式中被除式与除式分别称为这个分式的分子与分母．

分式的分子(numerator of fraction)　见“有理分式”．广义地，如果一个解析式可以写成

$$\frac{f(x,y,\cdots,w)}{g(x,y,\cdots,w)}$$

的形式，其中 $f(x,y,\cdots,w)$ 与 $g(x,y,\cdots,w)$ 可以是整式、分式或其他任何解析式，这时，人们习惯上称 $f(x,y,\cdots,w)$ 为这个解析式的分子，$g(x,y,\cdots,w)$ 为这个解析式的分母．

分式的分母(denominator of fraction)　见“有理分式”．

真分式(proper fraction)　真分数概念的推广．在有理分式 $P(x)/Q(x)$ 中，若分子上的多项式 $P(x)$ 的次数小于分母上的多项式 $Q(x)$ 的次数，则称 $P(x)/Q(x)$ 为真分式；否则称为假分式．

假分式(improper fraction)　见“真分式”．

分式的扩分(expansion of a fraction)　分式的一种恒等变形．为运算的需要，根据分式的基本性质，将分式的分子分母同时乘上一个不为零的数或代数式，使其分母变为预期的数或代数式，对分式实施的这种变形过程称为分式的扩分．扩分常用于分式的通分．

分式的约分(reduction of a fraction)　分式的一种恒等变形．指消去分式中的分子和分母的公因式的过程．在分式 Q/P 中的多项式 P,Q 有次数不小于 1 的公因式 R，用 R 同时去除这个分式的分子、分母，化成另一个分式 T/S．$Q/P=T/S$，对分式施行这种变形过程称为分式的约分．约分通常要求化成既约分数或既约分式(参见本卷《算术》中的“分数的约分”)．

最简分式(irreducible fraction)　亦称既约分式．分子与分母互素的分式．若 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都是数域 F 上的 $n(n=1,2,3\cdots)$ 元多项式，且 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 只有零次的公因式，则有理分式

$$\frac{P(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

称为最简分式．

既约分式(irreducible fraction)　即“最简分式”．

分式的通分(reduction of fractions to a common denominator)　分式的一种恒等变形．利用分式的基本性质，把异分母的几个分式化为和原来的分式分别相等而各分母彼此相同的分式，对几个分式的这种等值变形过程称为通分．通分后得到的相同分母称为公分母．通分的一般作法是：首先求原来几个分式分母的最低公倍式作为公分母，然后对各分式进行扩分，使它们分别化成以公分母为分母的分式．应注意，分式通分后，自变量的允许值范围可能有变化．

最简公分母(simplest common denominator)　分数公分母概念的推广．几个分式分母的最低公倍式称为这几个分式的最简公分母．例如

$$\frac{1}{x(x+y)}\text{与}\frac{1}{(x+y)(x+y+z)}$$

的最简公分母是 $x(x+y)(x+y+z)$(参见本卷《算术》中的“公分母”)．

分式的符号法则(sign rule of a fraction)　代数学术语．指分式符号的变化规律．其法则是：

1．同时改变分式的分子与分母的符号，分式不变．

2．只改变分式的分子分母之一的符号则整个分式变号．

繁分式(complex fraction)　繁分数概念的推广．指分子或分母至少有一个是分式的分式．繁分式实际上是分式除法的另一种写法，因此，可利用分式的基本性质和分式的除法法则，把它化成普通分式(分子、分母都是整式的分式)．这种变换称为繁分式化简．形如

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}$$

的繁分式称为连分式. 连分式在数论的研究中有重要应用(参见本卷《初等数论》中的“连分数”).

连分式(continued fraction)　见“繁分式”.

分式恒等式(identity of fractions)　一种特殊的恒等式. 如果对于变量的一切允许值,等式 $f(x,y,\cdots,z)\cdot g_1(x,y,\cdots,z)=f_1(x,y,\cdots,z)\cdot g(x,y,\cdots,z)$ 成立,那么称两个分式 $f(x,y,\cdots,z)/g(x,y,\cdots,z)$ 与 $f_1(x,y,\cdots,z)/g_1(x,y,\cdots,z)$ 恒等. 亦即

$$\frac{f(x,y,\cdots,z)}{g(x,y,\cdots,z)}\equiv\frac{f_1(x,y,\cdots,z)}{g_1(x,y,\cdots,z)}.$$

分式分解定理(principle of decomposition of a fraction)　分式的一种恒等变形. 关于一个一元真分式总可以按其分母的因式化成若干一元真分式的和. 主要结论是:设 $f(x)/g(x)h(x)$ 为真分式, $g(x)$ 与 $h(x)$ 互素, $g(x)\nmid f(x)$, $h(x)\nmid f(x)$,则有惟一的真分式 $r(x)/g(x)$ 与 $s(x)/h(x)$,使

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}=\frac{r(x)}{g(x)}+\frac{s(x)}{h(x)}.$$

其余参见“部分分式”.

部分分式(partial fraction)　一种特殊形式的分式. 即把数域 F 上的分式 $f(x)/g(x)$ 分解成分式的和时,部分分式是指如下形式的项

$$\frac{r(x)}{[p(x)]^m},$$

其中 $p(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式, m 是自然数, $r(x)$ 是 F 上的次数小于 $p(x)$ 的多项式. 分式化为部分分式和的分解定理有:

1. F 上的任何既约有理真分式都可以惟一地表示为部分分式和的形式:若 $f(x)/g(x)$ 是 F 上的既约真分式, $g(x)$ 的标准分解式为 $g(x)=ap_1^{m_1}(x)\cdot p_2^{m_2}(x)\cdots p_l^{m_l}(x)$,则

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k_i=1}^{m_i}\frac{r_{ik_i}(x)}{[p_i(x)]^{k_i}},$$

其中 $r_{ik_i}(x)$ 的次数小于 $p_i(x)$ 的次数或为零次多项式.

2. 设 F 是复数域,若 $g(x)$ 的标准分解式为

$$g(x)=a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_l)^{m_l},$$

则既约真分式 $f(x)/g(x)$ 的部分分式的分解式为

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k_i=1}^{m_i}\frac{A_{ik_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}},$$

其中 A_{ik_i} 为复常数.

3. 设 F 是实数域,若 $g(x)$ 的标准分解式为

$$g(x)=a(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_l)^{m_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s},$$

则既约真分式的部分分解式为

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{k_i=1}^{m_i}\frac{A_{ik_i}}{(x-a_i)^{k_i}}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{k_i=1}^{t_i}\frac{B_{ik_i}x+C_{ik_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{k_i}},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 是彼此不同的实数, $p_i^2-4q_i<0(i=1,2,\cdots,s)$, $A_{ik_i},B_{ik_i},C_{ik_i}$ 是实常数. 例如

$$\frac{x^2+5x-2}{x^3+3x^2+3x+1}=\frac{x^2+5x-2}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{-6}{(x+1)^3}.$$

分式的部分分式分解(decomposition of a fraction into partial fractions)　分式的一种分解方式. 把一个既约有理真分式写成部分分式和的形式的过程,称为分式的部分分式分解. 常用的分解方法有以下几种:

1. 待定系数法. 对既约真分式 $Q(x)/P(x)$,首先将分母 $P(x)$ 分解因式,写成不可约因式的积,然后根据部分分式分解定理,将分解式写成系数待定形式,最后用待定系数法求出各分子的系数.

2. 带余除法. 对于形如 $Q(x)/[P(x)]^k$ 的既约分式,其中 $P(x)$ 为不可约多项式, $Q(x)=a_1(x)P^{k-1}(x)+a_2(x)P^{k-2}(x)+\cdots+a_{k-1}(x)P(x)+a_k(x)a_i(x)=0$ 或其次数小于 $P(x)$ 的次数 $(i=1,2,\cdots,k)$,利用带余除法可分解为

$$\frac{Q(x)}{[P(x)]^k}=\frac{a_1(x)}{P(x)}+\frac{a_2(x)}{P^2(x)}+\cdots+\frac{a_k(x)}{P^k(x)}.$$

3. 辗转相除法. 对于既约分式 $Q(x)/P(x)$,设 $P(x)=P_1(x)\cdot P_2(x)$($P_1(x)$ 与 $P_2(x)$ 互素),用辗转相除法求出 $u(x)$ 与 $v(x)$,使

$$u(x)P_1(x)+v(x)P_2(x)=1,$$

则　$Q(x)=Q(x)u(x)P_1(x)+Q(x)v(x)P_2(x)$,

于是

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{Q(x)u(x)}{P_2(x)}+\frac{Q(x)v(x)}{P_1(x)}.$$

将上式中的两个分式用带余除法各化出一个真分式(此时两个整式部分之和必为零),然后对两个真分式再分解.

分式加减法法则(rule of addition and subtraction of fraction)　分式的运算法则之一. 分式的加减法法则是:

1. 同分母分式相加减,只把分子相加减,分母不变,即

$$\frac{P}{Q}\pm\frac{M}{Q}=\frac{P\pm M}{Q}.$$

2. 异分母分式相加减,先通分变为同分母分式,再按同分母分式相加减的法则运算,即

$$\frac{P}{Q}\pm\frac{M}{N}=\frac{PN}{QN}\pm\frac{MQ}{QN}=\frac{PN\pm MQ}{QN}.$$

完成分式的加减运算后，若所得分式不是既约分式，应约分化为既约分式.

分式乘法法则(rule of a fraction multiplication) 分式的运算法则之一. 分式相乘的法则是：用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母，并将乘积化为既约分式或整式，作分式乘法时，也可先约分后计算.

分式乘方法则(rule of power of a fraction) 分式的运算法则之一. 分式乘方的法则是：把分式的分子、分母分别乘方即为乘方结果.

分式除法法则(rule of fraction division) 分式的运算法则之一. 分式的除法法则是：

1. 分式除以整式，可用整式乘分母或用整式除分子，即

$$\frac{P}{Q}\div M=\frac{P}{QM}=\frac{P\div M}{Q}.$$

2. 整式或分式除以分式，应把除式的分子、分母颠倒位置后与被除式相乘，即

$$M\div\frac{P}{Q}=M\cdot\frac{Q}{P}=\frac{MQ}{P},$$

$$\frac{M}{N}\div\frac{P}{Q}=\frac{M}{N}\cdot\frac{Q}{P}=\frac{MQ}{NP}.$$

欧拉分式(Euler fraction) 一种特殊形式的分式. 设 a,b,c 是不同的常数，则

$$P_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}\quad(k=0,1,2,3)$$

称为欧拉分式. 容易计算出 $P_0=0,P_1=0,P_2=1,P_3=a+b+c$. 推广到一般情况：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不同的常数，$k=0,1,2,\cdots,n$，则称

$$P_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{\prod\limits_{i\neq j}(a_i-a_j)}$$

为欧拉分式. P_k 的取值状态如下

$$P_k=\begin{cases}0 & (0<k<n-1),\\ 1 & (k=n-1),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i & (k=n).\end{cases}$$

无理式(irrational expression) 代数式的一种. 化简后含有对变数字母的式子开方运算的代数式，称为关于这些变数字母的无理式，简称无理式.

根式、指数与对数

根式(radical) 数学的基本概念之一. 指表示方根的代数式. 或说形如 $\sqrt[n]{a}$ 的代数式称为根式或 n 次根式，a 可以是数也可以是一个代数式，a 与 n 分别称为它的被开方数与根指数. 而 $n\geqslant2(n\in\mathbf{N})$，特别当 $n=2$ 时，简记为 $\sqrt{a}$. 按根指数是偶数还是奇数，根式分别称为偶次根式或奇次根式.

根式有下列主要性质：

1. 一个算术根的根指数与被开方数的指数都乘以或除以同一个正整数时，根式的值不变，即

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}\ (a>0,m,n,k\in\mathbf{N}_+,n\geqslant2),$$

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0,m,n,k\in\mathbf{N}_+).$$

后一式当 $n=1$ 时为 $\sqrt[k]{a^{mk}}=a^m$.

2. 两个非负数的积的算术根等于它们同次算术根之积，即 $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\ (a\geqslant0,b\geqslant0,n\in\mathbf{N},n>1)$. 此性质可推广为 m 个非负数的积的算术根等于它们各自的同次算术根的积，即

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_m}=\prod_{i=1}^{m}\sqrt[n]{a_i}$$

$$(a_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,m,n\in\mathbf{N}_+,n>1).$$

两负数的积的算术根等于它们的绝对值的同次算术根之积，即

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{|a|}\cdot\sqrt[n]{|b|}$$

$$(a<0,b<0,n\in\mathbf{N},n>1).$$

3. 两非负数的商(除数不为零)的算术根等于它们的同次算术根的商，即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (a\geqslant0,b>0,n\in\mathbf{N},n>1);$$

两负数的商的算术根等于它们的绝对值的同次算术根的商，即

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}\ (a\leqslant0,b<0,n\in\mathbf{N},n>1).$$

4. 一个非负数的 n 次算术根的 m 次方等于这个非负数的 m 次方的 n 次算术根，即

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant0,n,m\in\mathbf{N}_+\text{且}n>1),$$

当 m 为偶数时，$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{|a|})^m$，这里 a 也可以为负数.

5. 一个非负数的 n 次算术根的 m 次算术根等于这个非负数的 mn 次算术根，即

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}\ (a\geqslant0,m,n\text{ 均为大于 1 的整数}).$$

6. 两数的积的奇次方根等于它们同次方根的积，即 $\sqrt[2n+1]{a\cdot b}=\sqrt[2n+1]{a}\cdot\sqrt[2n+1]{b}\ (n\in\mathbf{N}_+,a,b\in\mathbf{R})$.

7. 两数商的奇次方根等于它们同次方根的商，即

$$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}\ (n\in\mathbf{N}_+,a,b\in\mathbf{R},b\neq0).$$

8. 如果被开方数的某个因数的幂指数等于根指

数，则可将该因数按下面的公式移出根号外，

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b}=\begin{cases}|a| \cdot \sqrt[n]{b} & (n \text{ 为偶数}, b \geqslant 0), \\ a \cdot \sqrt[n]{b} & (n \text{ 为奇数}).\end{cases}$$

运用此公式也可以将根式外的因式移入根号内.

***n* 次根式**(*n*-th radical)　见“根式”.

偶次根式(radical of even degree)　见“根式”.

奇次根式(radical of odd degree)　见“根式”.

同次根式(radicals with same degree)　代数学术语. 指根指数相同的根式. 例如 $\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[3]{x+1}$，$7\sqrt[3]{x^4}$ 是同次根式. 任何两个根式都可以化为同次根式. 如需将 $\sqrt[n]{P}$ 与 $\sqrt[m]{Q}$ $(m \neq n)$ 化为同次根式时，设 p 为 m, n 的最小公倍数且 $p=kn=lm$，若 m 与 n 同为奇数或同为偶数，则 $\sqrt[n]{P}=\sqrt[p]{P^k}$，$\sqrt[m]{Q}=\sqrt[p]{Q^l}$，化成了同次根式；若 m 与 n 中一个为奇数，一个为偶数，例如 m 为奇数 n 为偶数，则 $\sqrt[n]{P}=\sqrt[p]{P^k}$，$\sqrt[m]{Q}=\sqrt[p]{Q^l}$ $(Q \geqslant 0)$ 或 $\sqrt[m]{Q}=-\sqrt[p]{Q^l}$ $(Q<0)$，也化成了同次根式.

最简根式(simplest radical)　不能再简化的根式. 同时满足下面三个条件的根式称为最简根式：

1. 被开方数的指数与根指数互质.
2. 被开方数写成不可约式(数)的乘积形式时，它的每一个因式的指数都小于根指数；
3. 被开方数不含分母.

同类根式(similar radicals)　亦称相似根式. 代数学术语. 指做加减法时允许合并的诸根式. 当几个根式化成最简根式后，如果它们的根指数和被开方数分别都相同，那么这些根式称为同类根式. 例如

$$\sqrt{\frac{2}{a}}, \quad \sqrt{\frac{a}{2}}, \quad \sqrt[4]{64a^2} \quad (a>0)$$

的最简根式分别为

$$\frac{\sqrt{2a}}{a}, \quad \frac{\sqrt{2a}}{2}, \quad 2\sqrt{2a},$$

因而它们是同类根式. 在根式的加减法中，同类根式要合并. 一般地，几个根式总可以化成同次根式，但不一定能化成同类根式.

根式加减法法则(rule of addition and subtraction of radicals)　根式的运算法则之一. 若干根式相加减，先把各根式化成最简根式，再合并同类根式，并将不同类的根式用运算符号连写在一起.

根式乘除法法则(rule of multiplication and division of radicals)　根式的运算法则之一. 同次根式相乘(除)，把根式前面的系数相乘(除)，作为积(商)的系数；把被开方数相乘(除)，作为被开方数，根指数不变，然后再化成最简根式. 非同次根式相乘(除)，应先化成同次根式后，再按同次根式相乘(除)的法则进行运算. 在根式运算中应注意以下几点：

1. 根式运算是在运算有意义的条件下进行的，一般常省掉运算过程中的条件不写.
2. 根式运算的结果若仍含有根式，一般要化为最简根式.
3. 根式的乘、除、乘方、开方运算可化为有理指数幂进行运算.
4. $\sqrt{a^2}=|a|$；在限制 a 是非负数时，方有

$$\sqrt{a^2}=a.$$

根式乘方法则(rule of power of radicals)　根式的运算法则之一. 算术根乘方，把被开方数乘方，根指数不变. 即 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ $(a \geqslant 0, m, n$ 为大于 1 的整数). 作根式乘方时，应先把不是算术根的根式化为算术根后再使用法则.

根式开方法则(rule of extraction of radicals)　根式的运算法则之一. 算术根开 n 次方，把根指数扩大 n 倍，被开方数不变. 即

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a} \quad (a \geqslant 0, m, n \text{ 为大于 1 的整数}).$$

非算术根的开方不总是可能的，负数的奇次方根开奇次方时，一般先将给定根式化为算术根后再按法则开方.

共轭因式(conjugate factors)　亦称有理化因式、有理化因子. 乘积为有理式的两个无理式. 若两个含有根式的代数式 S 与 M 的乘积 SM 是有理式，则它们互称共轭因式. 例如，式子 $\sqrt[4]{a^3b^2}$ $(a>0, b>0)$ 的共轭因式是 $\sqrt[4]{ab^2}$，因为 $\sqrt[4]{a^3b^2} \cdot \sqrt[4]{ab^2}=ab$. 一个式子的共轭因式乘以一个有理式仍是这个式子的共轭因式，所以，一个式子的共轭因式不是惟一的. 常用的求共轭因式的方法如下：

1. 对于 $S=\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$，可取 $M=\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$ 作为共轭因式.

2. 对于 $S=\sqrt[k]{A}-\sqrt[k]{B}$，可取

$$M=\sqrt[k]{A^{k-1}}+\sqrt[k]{A^{k-2}B}+\sqrt[k]{A^{k-3}B^2}+\cdots+\sqrt[k]{B^{k-1}}$$

作为共轭因式.

3. 对于 $S=\sqrt[k]{A}+\sqrt[k]{B}$，可取

$$M=\sqrt[k]{A^{k-1}}-\sqrt[k]{A^{k-2}B}+\sqrt[k]{A^{k-3}B^2}+\cdots+(-1)^{k-2}\sqrt[k]{AB^{k-2}}+(-1)^{k-1}\sqrt[k]{B^{k-1}}$$

作为共轭因式.

4. 有时对共轭因式的寻求要逐步完成. 例如对于 $S=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$，则应取 $M_1=\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$，可得 $(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})=A+B-C+2\sqrt{AB}$；可再取 $M_2=A+B-C-2\sqrt{AB}$，于是 $S=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ 的共轭因式为 $M=M_1M_2=(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C})(A+B-C-2\sqrt{AB})$.

5. 待定系数法. 例如，求 $S=a_0+a_1\sqrt[n]{x}+a_2\sqrt[n]{x^2}+\cdots+a_{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}}$ 的共轭因式，可取 $M=b_0+b_1\sqrt[n]{x}+b_2\sqrt[n]{x^2}+\cdots+b_{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}}$，系数 $b_i(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 由 $S\cdot M$ 为有理式这一条件确定.

6. 对于给定的含有根式的代数式，如果可以看成是某一根式的多项式 $P(x)$，则可利用互质多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的性质，辗转相除，可得多项式 $M(x)$ 与 $N(x)$，使得 $M(x)P(x)+N(x)Q(x)=1$，则 $M(x)$ 即为 $P(x)$ 的共轭因式.

求共轭因式常用于根式运算的使分母(或分子)有理化的过程中. 中国的《九章算术》"少广"章中叙述有："若母不可开者，又以母乘定实，乃开之，讫，令如母而一."译为现代算术，即

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

足见其已有了有理化分母的思想. 秦九韶在所著《数书九章》中，也运用了有理化方法.

有理化因式(rationalizing factor)　即"共轭因式".

有理化因子(rationalizing factor)　即"共轭因式".

分母有理化(rationalization of denominator)　无理式的一种恒等变形. 对于分母中含有根号的代数式，利用分子分母同乘以分母的有理化因式，使分母化为不含根号的有理式，这种变形过程称为分母有理化. 根式运算和根式化简都有可能用到分母有理化.

分子有理化(rationalization of numerator)　无理式的一种恒等变形. 为了运算的需要，对于分子中含有根号的代数式，利用分子分母同乘以分子的有理化因式，使分子化为不含根号的有理式，这种变形过程称为分子有理化. 例如在求极限时用到分子有理化：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=0.\end{aligned}$$

复合二次根式(compound quadratic radical)　一种特殊根式. 通常把

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$$

称为复合二次根式，其中 $a>0,b>0,a^2>b$，当 a^2-b 是完全平方数时，有计算公式

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

复合二次根式的化简(reduction of compound quadratic radicals)　复合二次根式的一种恒等变形. 将复合二次根式

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}\ (a>0,b>0,a^2>b)$$

化简，就是通过代数式的恒等变形，将被开方数 $(a\pm\sqrt{b})$ 凑成完全平方式，从而消去最外层的根号. 如果凑不成完全平方式，则复合二次根式

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$$

就不能用两个有理数的平方根的和或差表示.

复合二次根式化简的常用方法有：

1. 公式法. 即利用公式

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\qquad(1)$$

$(a>0,b>0,a^2-b$ 是完全平方式)，

$$\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\ (a>b>0).\qquad(2)$$

2. 配方法. 即先把 $a\pm\sqrt{b}$ 配成一个代数式的完全平方，再从根号内开出来.

3. 方程组求解法. 假定

$$a\pm\sqrt{b}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2,$$

解出 x,y.

根式的系数(coefficient of radicals)　代数学术语. 指根式前面的有理因式.

幂(power)　数学的基本概念之一. 形如 a^x 的式子称为幂. 其中 a 称为幂的底数，x 称为幂的指数. 当 x 取正整数，零，负整数时，a^x 分别称为正整指数幂、零指数幂、负整指数幂，统称为整数指数幂；当 x 取有理数与无理数时，a^x 称为有理指数幂与无理指数幂，统称为实指数幂. 正整指数幂习惯上称为乘方，如指数为 2,3,4 时常称为平方、立方和四次方. 在实数集 R 中，幂的定义分别为

x	a^x	a 取值范围
0	1	$\mathrm{R}\setminus\{0\}$
$n+1\ (n\in\mathrm{N}_+)$	$a^n\cdot a$	R
$-n\ (n\in\mathrm{Z}^+)$	$\frac{1}{a^n}$	$\mathrm{R}\setminus\{0\}$
$\frac{1}{n}\ (n\in\mathrm{Z}^+)$	$b\ (b\cdot a\geqslant0$ 且 $b^n=a)$	$2\mid n$ 时 $a\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{R}^-$
$\frac{m}{n}\ (n\in\mathrm{Z}^+,m\in\mathrm{Z})$	$(a^m)^{\frac{1}{n}}$	$m\in\mathrm{Z}^-$ 时 $a\in\mathrm{R}\setminus\{0\}$ $2\mid n$ 时 $a^m\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{R}^-$
$x\in\mathrm{R}\setminus\mathrm{Q}$	其中 $x_n\in\mathrm{Q}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ $\lim\limits_{n\to\infty}a^{x_n}$	$a\in\mathrm{R}^+$

关于幂的运算规律，即指数法则如下：

1. 若 $a,b\in\mathrm{R}^+,\alpha,\beta\in\mathrm{R}$，则：

1) $a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$.

2) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$.

3) $a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}=(ab)^{\alpha}$.

2. 若 $a\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{Z}^{+}, m\in\mathbf{Z}$ 下列各式左端存在，则：

1) $(a^{\frac{1}{n}})^{n}=a, (a^{\frac{m}{n}})^{n}=a^{m}$.

2) $(a^{n})^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}[|a|+a+(-1)^{n}(|a|-a)]$,

$$(a^{n})^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{2}[|a^{m}|+a^{m}+(-1)^{n}(|a^{m}|-a^{m})].$$

3. 若 $a,b\in\mathbf{R}, m,p\in\mathbf{Z}, n,q\in\mathbf{Z}^{+}$，下列各式左端存在，则：

1) $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mq}{nq}}$成立的充分必要条件为 $a^{m(nq+1)}\geqslant 0$.

2) $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{q}{p}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{q}{p}}$.

3) $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{q}{p}}=a^{\frac{mq}{np}}$(指数约简需满足 1)).

4) $a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=(ab)^{\frac{m}{n}}$.

幂的概念的形成，经历了相当曲折的缓慢的历史发展过程，许多数学家为幂概念的完善和幂的符号表示做出了贡献. 16 世纪，韦达(Viete,F.)在他的《分析方法入门》中，开始用不同字母表示一个量的幂，例如，将 A^2, A^3 分别写作 A quadratum, A cubum，后来又被学者们简化为 Aq, Ac. 1637 年，笛卡儿(Descartes,R.)在《几何学》中引进了正整指数幂的符号，例如 a^3, a^4 等. 斯蒂文(Stevin,S.)曾用符号“½”、“⅓”为指数，分别表示平方根与立方根. 沃利斯(Wallis,J.)曾用符号“－(½)”表示平方根的倒数. 牛顿(Newton,I.)创立了现行的分指数、负指数幂的表示符号.

中国古代幂字的写法很多，最简的写法是“冖”. 幂原是用来表示覆盖食物的方巾，将此意引申即方形的东西可以称为幂. 刘徽借意把矩形面积或两数的积称为幂. 中国数学史上第一次出现幂字是公元 263 年，刘徽为《九章算术》作的注中，他在《方田》章求矩形面积法则时，写道：“此积谓田幂，凡广从相乘谓之幂”. 公元 656 年，李淳风重注《九章算术》，在卷九《勾股》章中指出幂是边自乘的结果，或正方形面积. 这种用法直到公元 1303 年中断. 公元 1607 年，利玛窦(Ricci,M.)和徐光启合译欧几里得(Euclid)的《原本》时，再次使用了“幂”字，并有注解：“自乘之数曰幂.”1935 年，《数学名词》才将乘方和幂这两个术语定了下来.

指数(exponent)　即幂的指数，见“幂”.

正整指数幂(power with positive integer exponent)　见“幂”.

零指数幂(power with zero exponent)　见“幂”.

负整指数幂(power with negative integer exponent)　见“幂”.

整数指数幂(power with integer exponent)　见“幂”.

分指数幂(power with fraction exponent)　见“幂”.

有理指数幂(power with rational exponent)　见“幂”.

无理指数幂(power with irrational number)　见“幂”.

实指数幂(power with real exponent)　见“幂”.

指数法则(law of exponent)　见“幂”.

完全幂(perfect power)　一类特殊的有理数. 若 a,b 均是有理数，$n\geqslant 2$ 是自然数，并且 $a^n=b$，则称 b 是 a 的 n 次完全幂. 例如 16 是 ±2 的四次完全幂.

超越式(transcendental expression)　非代数式的解析式. 指不能对变数字母和数用有限次加、减、乘、除、乘方、开方运算表示的解析式. 它包括无理数指数式、对数式、三角函数式、反三角函数式、双曲函数式、幂指函数式等(参见“解析式”).

对数(logarithm)　数学的基本概念之一. 通常都指实对数，复数的对数只在复变函数理论中用到. 实对数定义：若 $a^b=N$，a 是不等于 1 的正实数，$b\in\mathbf{R}$，则 b 称为以 a 为底 N 的对数，记为 $b=\log_a N$，a 称为对数的底，N 称为对数的真数. 从实对数定义可知，零和负数没有实对数. 1742 年，琼斯(Jones,W.)在给伽代尔(Gardiner,W.)的《对数表》写的序言中第一次采用了这样的对数定义. 对数的创始人是纳皮尔(Napier,J.)，他在解决天文学中的计算问题时提出并使用了对数. 1614 年，纳皮尔在《论述对数的奇迹》以及在他死后于 1619 年出版的著作《做出对数的奇迹》中都介绍了他的对数方法. 纳皮尔定义的对数现在称为纳皮尔对数，记为 Nap log y，它与自然对数的关系是

$$\mathrm{Naplog}\,y = 10^7\ln\frac{10^7}{y}.$$

比尔吉(Bürgi,J.)也于 1600 年左右独立地发现了对数，但他的著作却在 1620 年才发表. 对数与对数表于 1648 年由穆尼阁(Smogolenski,J.-N.)讲授传入中国后，在由薛凤祚整理的《历学会通》的《比例对数表》中将 lograithm 译为“比例数”，它给出了 1—20000 的六位对数表，在《比例四线新表》中给出了三角函数的对数表. 当时，$\log_a N=b$ 中的 N 称为真数，而 b 称为“假数”，后来把 b 称为 N 的对数. 1723 年印出的由梅彀成(有的书写成梅珏成)等编著的《数理精蕴》一书，较详细地叙述了对数的内容和编造对数表的方法.

对数的真数(natural number of a logarithm) 见“对数”.

对数的底数(base of a logarithm) 见“对数”.

对数运算法则(rule of logarithmic operations) 一种特殊的运算方法. 指积、商、幂、方根的对数的运算法则. 由指数和对数的互相转化关系可得出：

1. 两个正数的积的对数，等于同一底数的这两个数的对数的和，即

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N \ (M>0,N>0).$$

2. 两个正数商的对数，等于同一底数的被除数的对数减去除数对数的差，即

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N \ (M>0,N>0).$$

3. 一个正数幂的对数，等于幂的底数的对数乘以幂的指数，即 $\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M \ (M>0)$.

4. 若式中幂指数

$$\alpha=\frac{1}{n} \ (n\in \mathbf{N}_+),$$

则有以下的正数的算术根的对数运算法则：一个正数的算术根的对数，等于被开方数的对数除以根指数，即

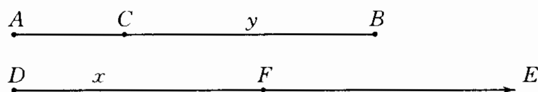
$$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M \ (M>0,n\in \mathbf{N}_+).$$

对数恒等式(logarithmic identity) 一种特殊的恒等式. 指含对数的恒等式. 由对数定义 $a^b=N$，$b=\log_a N$ 可直接推出

$$a^{\log_a N}=N \quad (N>0),$$

一般称它为对数恒等式. 从函数的角度看，对数恒等式可由指数函数与其反函数对数函数的复合而得来，即设 $y=a^x$，$x=\log_a y$，于是 $y=a^{\log_a y}$. 对数恒等式在理论上和实际应用上有重要作用. 例如用对数恒等式将 $f(x)^{\varphi(x)}$ $(f(x)>0,\varphi(x)>0)$ 可转化为 $e^{\varphi(x)\ln f(x)}$，使许多种运算成为可能，并十分方便.

纳皮尔对数(Napier logarithm) 一种古老的对数(参见“对数”). 给定一条定长线段 AB 和一条



以 D 为出发点的射线 DE(如图). 设点 C 和点 F 以同样的初始速度分别从 A 和 D 出发，沿线段 AB 和射线 DE 运动. 假设点 C 运动的速度在数值上总是等于距离 CB，点 F 运动的速度保持不变，纳皮尔(Napier, J.)把 DF 定义为 CB 的对数. 图中，$x=DF$ 是 $y=CB$ 的纳皮尔对数，用 $\text{Nap}\log y$ 来表示，即 $x=\text{Nap}\log y$. 为了避免分数的麻烦，纳皮尔取 AB 的长度为 10^7，因为当时最好的正弦表有七位数字. 从纳皮尔的定义，以及从纳皮尔还不可能有的知识可以导出

$$\text{Nap}\ \log\ y=10^7\ln\frac{10^7}{y}.$$

看来，纳皮尔对数与自然对数不是一回事，纳皮尔对数随着真数的增加而减少，与自然对数中发生的情况正好相反. 关于现在命名的纳皮尔对数是否为自然对数，在国际数学界是有争议的. 还有一种看法是，自然对数由奥特雷德(Oughtred, W.)所创.

对数换底公式(formula of change of base of logarithms) 简称换底公式. 对数的一种恒等变形. 指更换底数时同一真数的两个对数间的关系式. 当 $a>0,a\neq1,b>0,b\neq1$ 且 $N>0$ 时，

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$$

称为对数换底公式. 式中 $1/\log_a b$ 称为以 a 为底的对数换成以 b 为底的对数的转换模. 特殊情形是

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b} \text{ 或 } \log_a b\cdot\log_b a=1.$$

换底公式可以把一个对数化为以任何大于零而不等于 1 的数为底的对数.

对数转换模(modulus of a logarithm) 见“对数换底公式”和“常用对数模”.

对数式(logarithmic expression) 一类特殊的解析式. 指含有对变数字母进行对数运算的解析式，如 $\log_2(x^2-1)$，$\log_a x+b$ 都是关于 x 的对数式，简称对数式.

反对数(antilogarithm) 一种指数函数. 即对数函数的反函数中的指数函数. 与所给对数相对应的真数，称为这个对数的反对数. 例如 $\lg 2=0.3010$，则 2 是 0.3010 的反对数. 求一个数的反对数就是求以这个数为对数的真数.

常用对数(common logarithm) 亦称十进对数. 一种重要的数学工具. 它是以 10 为底的对数. 正数 N 的常用对数可记为 $\log_{10}N$，常省去底数 10 后简记为 $\lg N$. 任何一个正数的常用对数都可写成一个整数(正整数、零、负整数)加上一个正的纯小数(或者零)的形式，整数部分称为常用对数的首数，正的纯小数(或零)的部分称为这个常用对数的尾数. 例如 $\lg 340.8\approx2.5325=2+0.5325$，首数是 2，尾数的近似值是 0.5325；

$$\lg 0.03408\approx\bar{2}.5325=-2+0.5325,$$

首数是 −2，尾数的近似值是 0.5325. 在计算机发明以前，以 10 为底的对数在复杂的数值计算中是常用的工具，故有常用对数之名. 布里格斯(Briggs, H.)首先提出将对数改良为便于计算的以 10 为底的常用对数. 为了纪念他，常用对数亦命名为布里格斯对数. 常用对数除了具有一般对数性质外，尚有如下特殊性质：

1. 若 $1<N<10$，则 $\lg N$ 是一个正的纯小数.

2. 若 $N=10^n$（n 为整数），则 $\lg N=n$.

3. 若 $N=a\cdot 10^n$（n 为整数，$1\leqslant a<10$），则 $\lg N=n+$正纯小数（或零），其中整数部分 n 称为首数，正纯小数（或零）称为尾数.

4. 仅有小数点位置不同的两个正数的对数尾数相同，例如，按四位对数表，lg0.4，lg4，lg40 的尾数都是 0.6021.

5. 一个不小于 1 的数的对数首数是非负整数，它等于这个数的小数点前面的数字位数减 1，例如 lg234.4 的首数是 2；一个零到 1 之间的数的对数首数是一个负整数，它的绝对值等于这个数的小数点后面连续零的个数加 1，例如 lg0.125 的首数是 -1，lg0.001003 的首数是 -3.

6. 常用对数的首数和尾数常写在一起，用小数点隔开，例如 $\lg 300\approx 2.4771$，$\lg 0.003\approx\overline{3}.4771$. 在这种写法中，尾数总是正的纯小数；首数是整数，即可正、可负、可为零，若是负整数，负号应移至首数的上方.

布里格斯对数（Briggs logarithm） 即“常用对数”.

十进对数（decimal logarithm） 即“常用对数”.

常用对数首数（characteristic of a common logarithm） 见“常用对数”.

常用对数尾数（mantissa of a common logarithm） 见“常用对数”. 尾数一词是由欧拉（Euler，L.）最先给出的，后被广泛使用.

常用对数模（modulus of a common logarithm） 一个正实数. 指自然对数与常用对数的换算系数. 正实数

$$M=\frac{1}{\ln 10}\approx\frac{1}{2.302585}=0.4342945$$

称为自然对数转化为常用对数的换算模（系数）. 一个数的自然对数乘以 M 可得其常用对数，即 $\lg N=M\ln N$. $m=\ln 10=2.302585092940\cdots$ 称为常用对数转化为自然对数的换算模（系数）. 一个数的常用对数乘以 m 可得其自然对数，即 $\ln N=m\lg N$. 显然 M 与 m 互为倒数，即 $Mm=1$.

对数表（logarithm table） 一种常用的数表. 指常用对数表和自然对数表. 函数 $y=\lg x$ 的函数值表称为常用对数表. 实际上，表中只列出真数 x（$1\leqslant x<10$）的对数尾数的准确值或近似值，因而这样的表也称为常用对数尾数表. 表中不列出首数，它由常用对数的性质确定. 真数和对数尾数的精确度取决于对数表的位数，位数越多，精确度越高. 如果真数和对数尾数都列出四个有效数字，则称为四位常用对数表；如果列出五个有效数字，则称为五位常用对数表. 历史上，由于常用对数在数值计算中的巨大作用，有许多人投入了编制对数表的工作. 布里格斯（Briggs，H.）于 1617 年，首先发表 1—100 的至小数点八位的常用对数表，1624 年，在他的《对数算术》中发表 1—20000 及 90000—100000 的至小数点 14 位的常用对数表，其中 20000—90000 的常用对数表是在弗拉克（Vlacq，A.）的帮助下于 1628 年编制并发表的. 函数 $y=\ln x$ 的函数值表称为自然对数表. 习惯上的对数表一般指常用对数表.

常用对数表（common logarithm table） 常用对数尾数表的简称（参见“对数表”）.

反对数表（antilogarithm table） 亦称真数表. 一种常用的数表. 实即以 10 为底的指数函数表. 把常用对数的尾数及与其相对应的真数编列在一个表里称为反对数表，这样便于由对数查出真数，使用反对数表只能由对数尾数查出真数的前几位有效数字（其位数取决于反对数表的位数），小数点的位置由对数的首数确定（参见“常用对数”）.

真数表（natural number table） 即“反对数表”.

对数计算尺（logarithmic operation ruler） 一种尺形或转盘形的计算工具. 根据对数的性质，用对数刻制尺度，可以通过尺上对数的加减进行相应真数的乘除运算，据此而设计成的一种计算工具. 它的主要部分包括定尺、滑尺和滑标三部分. 在定尺上通常有 D 尺、A 尺、K 尺；在滑尺上通常有 C 尺、CI 尺以及三角函数尺. 不同的计算尺有不同的尺面刻度，具有各种计算功能. 对数计算尺的雏形可追溯到 17 世纪，并出现过尺型和圆盘型两种，直到 19 世纪末才定型为如今的对数计算尺. 对数计算尺曾广泛应用于工程计算中，现在已被电子计算器所代替. 对数计算尺是冈特（Gunter，E.）于 1620 年首先发明的.

自然对数（natural logarithm） 一种常用的对数. 指底数为 e 的对数，其中

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.71828182845904523536\cdots$$

e 是无理数. $\log_e N$ 通常简记为 $\ln N$，也有记成 $\log N$ 的. e 的小数点后的数值利用计算机已能获得亿位以上. 因此，可以说在用到 e 的计算中，早已经是要什么精确度都能办到了. 自然对数换为常用对数时的模为 M，即 $\lg A=\lg\mathrm{e}\cdot\ln A=M\ln A$，其中 $M=\lg\mathrm{e}=0.434294481903\cdots$ 将常用对数换为自然对数时，常使用模的倒数 $1/M$，即

$$\ln A=\frac{1}{M}\lg A.\ \frac{1}{M}=\ln 10=2.3025850929940\cdots$$

自然对数表（natural logarithm table） 一种常用的数表. 一元实函数 $y=\ln x$ 的函数值表称为自然对数表. 自然对数表一般由两部分组成：

1. $1\leqslant x<10$ 的自然对数表.

2. $10^n(n\in \mathbf{Z})$ 的自然对数值.

对于任一正数 x,可先表成十进数的标准形式:$x=a\cdot 10^n$,其中 $1\leqslant a<10$,然后分别从自然对数表查出 $\ln a$ 和 $\ln 10^n$,这两部分相加就得 $\ln x$ 的值.1619年,斯彼德尔(Speidell)发表的《新对数表》首次给出1—1000的自然对数.

不　等　式

不等量公理(axiom of inequal quantities)　数学的基本公理之一.它是解不等式的依据.在初等数学中,常把下列各公理统称为不等量公理:

1. 全量大于它的任一部分.

2. 不等量加(减)等量,其和(差)不等,原来大的仍大.

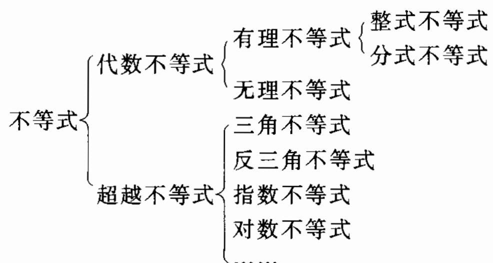
3. 等量减不等量,其差不等,减去大的反而较小.

4. 不等量加不等量,两个大量的和大于两个小量的和.

5. 第一量大于第二量,第二量大于第三量,则第一量大于第三量.

其中,有些公理(例如第1条)最早出自欧几里得(Euclid)的《原本》.

不等式(inequality)　数学的基本概念之一.即把两个解析式(包括单独的数)用大于号、小于号、不大于号、不小于号之一连结起来的式子.根据一个不等式总是成立、有条件的成立或总不成立,可区分为绝对不等式、条件不等式和矛盾不等式;根据一个不等式中是否夹有等号,可把不等式区分为广义不等式和严格不等式;按不等式中所含解析式的类别,对不等式可作如下分类:



根据整式不等式中所含变元个数,整式不等式可分为一元不等式,二元不等式等;根据整式不等式的变元最高次数,可分一次不等式,二次不等式等.

数值不等式主要有下列性质:

1. 若 $a<b$,则 $b>a$;若 $a>b$,则 $b<a$(对逆性).

2. 若 $a>b,b>c$,则 $a>c$(传递性).

3. 若 $a>b$,则 $a+c>b+c$(加法单调性).

4. 若 $a>b$ 且 $c>0$,则 $ac>bc$(乘法单调性);若 $a>b$ 且 $c<0$,则 $ac<bc$.

5. 若 $a>b,c>d$,则

$$a+c>b+d\text{(同向相加法则)}.$$

6. 若 $a>b,c<d$,则

$$a-c>b-d\text{(异向相减法则)}.$$

7. 若 $a>b>0,c>d>0$,则

$$ac>bd\text{(同向相乘法则)}.$$

8. 若 $a>b$ 且同号,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

9. 若 $a>b>0,d>c>0$,则

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}>0\text{(异向相除法则)}.$$

10. 若 $a>b>0$,α 为正实数,则 $a^\alpha>b^\alpha$.特别地,若 $a>b>0$,n 为大于1的自然数,则

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b},a^n>b^n.$$

11. 若 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,b,d 同号,则

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

一般地,若

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\cdots<\frac{a_n}{b_n},$$

$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 同号,则

$$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}.$$

同向不等式(inequality of same direction)　一类常见的不等式.指对于两个或几个不等式,若大于或小于是同方向的,即同是>或同是<的不等式.方向相反的两个不等式称为异向不等式.

异向不等式(inequality of different direction)　见"同向不等式".

严格不等式(strict inequlity)　一类常见的不等式.指用<号或>号连结两个解析式而成的不等式.例如 $x-y>z$,$|\tan x|<1$,$3>2$ 等,至于用≥号或≤号连结两个解析式子而成的不等式,则称为非严格不等式或广义不等式.

非严格不等式(nonstrictly inequlity)　见"严格不等式".

广义不等式(generalized inequality)　见"严格不等式".

绝对不等式(absolute inequality)　一种特殊不等式.指未知数取任何实数值均成立的不等式.例如,不等式 $2<\sqrt{5}$,$x^2+1>0$ 都是绝对不等式.

条件不等式(conditional inequality)　一种特殊不等式.指未知数取某些实数值成立,而取另一些实数值不成立的不等式.

矛盾不等式(contradictory inequality)　一种特殊不等式.指未知数取任何实数值都不成立的不

等式.即解集为空集的不等式.

不等式的解(solution of an inequality)　不等式的基本概念之一.指在含有未知数的不等式中,能够使不等式成立的未知数的值.不等式的解的全体称为不等式的解集.有时也简称解.例如,对于不等式 $2x+1>0$,$x=1$ 是它的一个解,$\{x|x>-1/2\}=(-1/2,+\infty)$是它的解集.对于数值不等式,若无特别声明,通常是在实数范围内求不等式的解.

不等式的解集(solution set of an inequality)　见"不等式的解".

不等式的解集表示法(representation of the solution set of an inequality)　用来表示不等式的所有解的方法.一元不等式的解集常有以下表示方法:文字叙述;用最简不等式表示;用区间符号表示;用集合符号表示;用数轴表示等.例如 $x+1>0$ 的解集可以选用如下方法之一表示:大于-1的实数;$x>-1$;$(-1,+\infty)$;$\{x|x>-1\}$.二元不等式的解集常为平面直角坐标系中的一个区域,因而可用平面区域图形表示.例如 $x^2+y^2\leqslant1$,$x-y<1$ 的解集分别如图 1,图 2 所示.

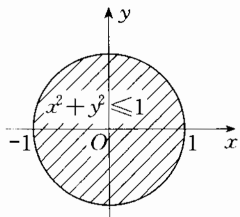


图1

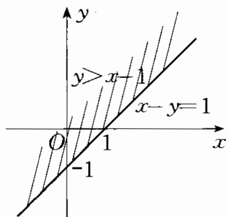


图2

解不等式(solving the inequality)　不等式的基本概念之一.指对于含有未知数的不等式,求出它的解,或判定它无解的过程.在解不等式时,除依据不等式的基本性质及不等式的同解理论外,通常还将应用到与不等式相关的函数的定义域,单调性以及图象的性质等知识.

同解不等式(equivalent inequality)　不等式的基本概念之一.指两个或若干个解集相等的不等式.例如

$$3x+5>0 \text{ 与 } \frac{1}{2}x+\frac{5}{6}>0$$

是同解不等式.所有的绝对不等式都是同解不等式,所有的矛盾不等式也都是同解不等式.

不等式的同解定理(theorem of equivalent inequality)　不等式同解变形的重要依据.把一个不等式变形为另一个与之同解的不等式,称为不等式的同解变形.而变形所依据的定理称为不等式的同解定理.它们主要有(只就一元不等式表述):

1.不等式 $f(x)>g(x)$与 $g(x)<f(x)$同解;不等式 $f(x)<g(x)$与 $g(x)>f(x)$同解.

2.若不等式 $f(x)>g(x)$的未知数的一切允许值使解析式 $\varphi(x)$有意义,则 $f(x)>g(x)$与 $f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x)$及 $f(x)-\varphi(x)>g(x)-\varphi(x)$都同解.由此可以得出推论:任何被加式可以改变符号从不等式的一边移至另一边去.

3.若不等式 $f(x)>g(x)$的未知数的一切允许值使 $\varphi(x)$有意义,则当 $\varphi(x)>0$ 时,不等式 $f(x)>g(x)$与 $f(x)\varphi(x)>g(x)\varphi(x)$

及
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}>\frac{g(x)}{\varphi(x)}$$

都同解;当 $\varphi(x)<0$ 时,不等式 $f(x)>g(x)$与

$$f(x)\varphi(x)<g(x)\varphi(x)$$

及
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}<\frac{g(x)}{\varphi(x)}$$

都同解.

4.不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \text{ 与 } f(x)g(x)>0$$

同解;不等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}<0 \text{ 与 } f(x)g(x)<0$$

同解.

5.不等式 $f(x)>g(x)$与 $f^{2n+1}(x)>g^{2n+1}(x)$同解($n\in\mathrm{N}_+$).

6.若在不等式 $f(x)>g(x)$的允许值集合的某子集 D 上有 $f(x)>0$,$g(x)>0$,则在 D 上 $f(x)>g(x)$与$[f(x)]^\alpha>[g(x)]^\alpha$ 同解,其中 $\alpha\in\mathrm{R}^+$.解无理不等式时常使用此定理($\alpha\in\mathrm{N}_+$的情形).

不等式的同解变形(equivalent deformation of an inequality)　见"不等式的同解定理".

证明不等式的方法(methods of proving the inequality)　用来证明不等式成立的各种方法.常见的证明方法有以下几种:

1.比较法:

1)求差比较法:要证明 $a>b$ 时,只要证明 $a-b>0$ 成立.

2)求商比较法:欲证 $a>b$,只须证明 $a/b>1$ $(b>0)$或 $a/b<1(b<0)$.

2.分析法:从要证的不等式出发,利用不等式的性质,逐步倒推(每步是可逆的),直到推出一个已知的绝对不等式或已知条件为止,就证明了原不等式的成立.换言之,从要证的不等式 A 出发,找出它成立的充分条件 A_1,再找出 A_1 成立的充分条件 A_2 如此继续下去,直到 A_n,若 A_n 成立,则 A 被证明.比较法实际上是分析法的特殊形式.

3.综合法:从已知条件出发,根据给定条件,利用不等式的性质,逐步推理,直到得出要证明的结论.

4.判别式法:利用实系数一元二次方程 $a(y)x^2$

$+b(y)x+c(y)=0$ 有实根的充分必要条件是判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 及无实根的充分必要条件是 $\Delta=b^2-4ac<0$，可以证明一些不等式.

5. 反证法：从否定要证明的不等式出发，利用不等式的性质和定理，推出矛盾，从而证明原不等式成立.

6. 数学归纳法：若一个不等式是关于自然数 n 的命题，可考虑用此法证明.

7. 函数法：例如，在 $x\in[x_0,+\infty)$ 时，欲证不等式 $f(x)>0$，可构造函数 $y=f(x)$，只须证明在包含 x_0 的区间 $[x_0,\infty)$ 上 $f(x)$ 是单调增函数，并且 $f(x_0)>0$ 即可.

8. 利用已知不等式证明：从一些已知的不等式，根据不等式的性质导出欲证的不等式，使问题得到解决.

代数不等式(algebraic inequality)　有理不等式和无理不等式的总称(参见"不等式").

整式不等式(inequality of integral expression)　一种有理不等式. 指不等式的两端都是整式者. 整式不等式按未知数的个数和不等式的次数分类. 含有 n 个未知数，且两端整式最高次数为一次的不等式称为 n 元一次(或 n 元线性)不等式. 如果不等式两端整式的最高次数是 r，那么这个不等式称为 n 元 r 次不等式.

不等式的次数(degree of an inequality)　不等式的基本概念之一. 在整式不等式中，如果只有一个未知数，那么未知数次数最高的项的次数，称为该不等式的次数. 如果这个整式不等式不只一个未知数，某项中所有未知数次数的和就是该项的次数，所有各项中次数最高的那个项的次数，就称为这个不等式的次数.

一次不等式(linear inequality)　一种整式不等式. 若整式不等式的次数为 1，则称为一次不等式. 一次不等式中若含有 n 个未知数，则称为 n 元一次不等式. n 元一次不等式的标准形式为 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n>b$. 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零.

二次不等式(quadratic inequality)　一种整式不等式. 如果整式不等式的次数是 2，则称为二次不等式. 若二次不等式有 n 个未知数，则称为 n 元二次不等式，n 元二次不等式的标准形式为

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c>0,$$

a_{ii} 与 a_{ij} 中至少有一个不为零，且每个元 x_i 都有系数不为零的项.

一元一次不等式(linear inequality in one unknown)　一种简单的不等式. 即只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 1 的整式不等式，其标准形式为 $ax+b>0$(其中 $a\neq 0$，a,b 为常数). 一元一次不等式经过移项，合并同类项，整理成标准形式 $ax+b>0$ 后即可写出解集：

当 $a>0$ 时，解为 $x>-\dfrac{b}{a}$；

当 $a<0$ 时，解为 $x<-\dfrac{b}{a}$；

当 $a=0$ 时，

$$\begin{cases}\text{若 } b>0\text{，则不等式成为绝对不等式；}\\ \text{若 } b\leqslant 0\text{，则不等式成为矛盾不等式.}\end{cases}$$

一元二次不等式(quadric inequality in one unknown)　一种常见的不等式. 即只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$(其中 $a\neq 0$，a,b,c 为常数). 一元二次不等式的基本解法有：

1. 代数解法(因式分解法或求根法)：对于一元二次不等式

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (1)$$

或

$$ax^2+bx+c<0 \qquad (2)$$

(式中 $a>0$)，

若 $\Delta=b^2-4ac>0$，则 ax^2+bx+c 有两个不同的实数根 x_1 与 x_2(假定 $x_1<x_2$)，从而使不等式(1)，(2)分别变成 $(x-x_1)(x-x_2)>0$ 或 $(x-x_1)(x-x_2)<0$，所以不等式(1)与不等式组

$$\begin{cases}x-x_1>0,\\ x-x_2>0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x-x_1<0,\\ x-x_2<0\end{cases}$$

同解. 不等式(2)与不等式组

$$\begin{cases}x-x_1<0,\\ x-x_2>0\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}x-x_1>0,\\ x-x_2<0\end{cases}$$

同解. 于是不等式(1)，(2)的解集分别为 $\{x\mid x>x_2$ 或 $x<x_1\}$，$\{x\mid x_1<x<x_2\}$. 若 $\Delta=b^2-4ac=0$，则 ax^2+bx+c 有一个二重实根 x_0，使 $ax^2+bx+c=(x-x_0)^2=0$，所以，不等式(1)的解集为 $\{x\mid x\neq x_0\}$，不等式(2)无解，即解集为空集 $\varnothing$. 若 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，ax^2+bx+c 无实根，于是

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

永远是正值，所以不等式(1)的解集为全体实数 R，不等式(2)的解集为空集 $\varnothing$.

2. 图象解法：把不等式(1)与(2)可以分别看成二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 取正值与取负值时，求自变量 x 的变化范围，故利用判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 并结合二次函数图象，同样可以求出不等式(1)，(2)的解集(参见"二次函数的图象").

有理不等式(rational inequality)　一种代数不

等式.指用不等号连结两个有理式所成的表达式,它包括整式不等式与分式不等式.

分式不等式(fractional inequality) 一种有理不等式.指含有分式的不等式.任何分式不等式经过同解变形后总可以转化为

$$\frac{F(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\lesseqgtr 0$$

的形式,这里 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是有理整式,$\lesseqgtr$表示$>$或$<$.上述不等式和整式不等式 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)\lesseqgtr 0$ 同解,所以解分式不等式可转化为解整式不等式.例如,解分式不等式

$$\frac{1}{x+1}<x-2,$$

可将其变形为

$$\frac{x^2-x-3}{x+1}>0,$$

它与不等式$(x+1)(x^2-x-3)>0$ 同解.

一元分式不等式(fractional inequality in one unknown) 一种常见的分式不等式.指含有一个未知数的分式不等式.设$f(x)$,$g(x)$有一个是分式,另一个是分式或整式,则 $f(x)>g(x)$或$f(x)<g(x)$称为严格一元分式不等式,$f(x)\geqslant g(x)$或 $f(x)\leqslant g(x)$称为非严格(或广义)一元分式不等式,统称为一元分式不等式.一元分式不等式的解法如下:

1.化为不等式组法.首先把原不等式化成

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0$$

的形式,其中 $f(x)$,$g(x)$为整式.再解不等式组

$$\begin{cases}f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\tag{1}$$

与

$$\begin{cases}f(x)<0,\\ g(x)<0.\end{cases}\tag{2}$$

(1)与(2)的解集的并集就是原分式不等式的解集.

2.化为整式不等式法.将原不等式化成

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0$$

的形式,它与整式不等式 $f(x)g(x)>0$ 同解.

3.图象法:将一元分式不等式写成$f(x)>g(x)$的形式,并使函数 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的图象均较易做出,在平面直角坐标系中同时做出这两个函数的图象,如果对允许值 x,使点$(x,f(x))$在点$(x,g(x))$的上方,即 $f(x)>g(x)$,则 x 就是不等式的一个解.

严格一元分式不等式(strictly factional inequality in one unknown) 见"一元分式不等式".

广义一元分式不等式(generalized fractional inequality in one unknown) 见"一元分式不等式".

一元分式不等式的解法(solving process of a fractional inequality in one unknown) 见"一元分式不等式".

无理不等式(irrational inequality) 一种代数不等式.指含有无理式的代数不等式.解无理不等式的一般方法如下:

1.确定未知数的允许值范围.

2.通过变形化去不等式中的根号,把它转化为不含根式的不等式或不等式组或混合组.

3.求解不等式(组).

4.取不等式(组)的解集与未知数允许值范围的公共部分.在化去根式时,常依据的同解定理有:

$f(x)<g(x)\Leftrightarrow[f(x)]^{2k+1}<[g(x)]^{2k+1}(k\in\mathbf{N}_+)$;

或设 $f(x)\geqslant 0,g(x)\geqslant 0,k\in\mathbf{N}_+$时,则

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow[f(x)]^{2k}<[g(x)]^{2k}.$$

无理不等式的解法(solving process of an irrational inequality) 见"无理不等式".

绝对值不等式(absolute value inequality) 一种特殊不等式.指含有绝对值符号的不等式.绝对值不等式可分以下两种类型:

1.绝对值符号内含有未知数的不等式,例如

$$|x|>a,\ |x^2-2|>2x,\ |xy|<|x^2-y^2|.$$

2.有关绝对值的不等量关系,例如

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\ |a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

以及

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|$$

等也称为绝对值不等式.

绝对值不等式的性质分两种情形叙述:

1.条件绝对值不等式的性质:

1) 若$|x|<a(a>0)$,则$-a<x<a$,或记为 $x\in(-a,a)$,可在数轴上表示(如图 1).

2) 若$|x|>a(a>0)$,则 $x<-a$ 或 $x>a$,或记为 $x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$,可在数轴上表示(如图 2).

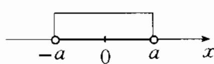


图1

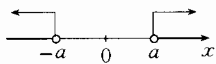


图2

3) 若 $a<|x|<b(0<a<b)$,则$-b<x<-a$ 或 $a<x<b$,或记为 $x\in(-b,-a)\cup(a,b)$,可在数轴上表示(如图 3).

图3

2.绝对绝对值不等式的性质:

1) 由$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$(三角形不等式)可推出$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$和

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|.$$

2) 由$|ab|=|a|\cdot|b|$可推出

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|$$

和 $|a^n| = |a|^n$.

3) $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}\ (a \neq 0)$.

4) 若 $a \in \mathrm{R}$，则 $|a| \geqslant 0$；$|a| \geqslant a$.

$|x|<a$ 及 $|x|>a$ 型不等式的解法（solving process of inequality $|x|<a$ and $|x|>a$）　绝对值不等式的一种解法. 指解 $|x|<a$ 及 $|x|>a$ 型不等式的一般方法. 其解法如下：

1. $|x|<a$ 的解法：

1) $a \leqslant 0$ 时，无解，即解集为空集.

2) $a>0$ 时，解集为 $\{x \mid -a<x<a\}$.

2. $|x|>a$ 的解法：

1) $a<0$ 时，解集为全体实数 R.

2) $a=0$ 时，不等于零的实数都是不等式的解，即解集为 $\{x \mid |x| \neq 0\}$.

3) $a>0$ 时，不等式的解集是

$$\{x \mid x<-a \text{ 或} x>a\}.$$

4) 当 x 表示一个式子 $f(y)$ 时，首先利用上述解法去掉绝对值符号，然后再求解没有绝对值符号的不等式.

绝对值不等式的解法（solving process of an absolute value inequality）　解绝对值不等式的一般方法. 即求式中未知数的所有满足该不等式的数值的方法. 常用的解法是首先根据绝对值的定义，设法化为不含绝对值符号的同解不等式（组），然后求解. 一个式子 $|f(x)|$ 去绝对值符号的方法有两种：

1. $|f(x)| = \sqrt{[f(x)]^2}$.

2. 当 $f(x) \geqslant 0$ 时，$|f(x)| = f(x)$.

当 $f(x)<0$ 时，$|f(x)| = -f(x)$.

用前一法可把不等式转化为无理不等式求解，用后一法可把不等式转化为添入一些表示限制条件的不等式组求解. 例如，解不等式 $|2x-1|>4x$，用前一法可解 $\sqrt{4x^2-4x+1}>4x$，用后一法可去求不等式组

$$\begin{cases} 2x-1>4x, \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} -(2x-1)>4x, \\ 2x-1<0 \end{cases}$$

的解，它们解集的并集就是原不等式的解集. 对于含两个或多个绝对值符号的不等式，若能求出每个绝对值符号里的代数式的所有根，就可以利用这些根将数轴分成若干个区间，在每个区间可以去掉绝对值符号，化为不含绝对值符号的不等式（组），分别求出各不等式（组）的解集，再把各区间的解集合并，就得到原不等式的解集.

超越不等式（transcendental inequality）　一种特殊不等式. 指含超越式的不等式. 例如 $\sin x - \cos y \leqslant 1$，$\log_3(x^2-2x)>0$，等. 除指数不等式、对数不等式、三角不等式、反三角不等式外，凡含超越式、其他代数式的有限次代数运算及有限次复合的不等式都是（初等）超越不等式.

指数不等式（exponential inequality）　一种超越不等式. 若 $F(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ 是 k 元有理式，

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ (i=1,2,\cdots,k)$$

是 n 元代数式，则形如

$$F(a_1^{f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}, a_2^{f_2(x_1,\cdots,x_n)}, \cdots, a_k^{f_k(x_1,\cdots,x_n)}) > 0$$

的不等式称为指数不等式. 其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 是大于零且不等于 1 的常数. 当 $n=1$ 时就得到一元指数不等式. 在指数不等式中要求底数为常数，指数中含有未知数，同时要求不等式中没有其他含有未知数的超越式.

简单指数不等式（simple exponential inequality）　亦称最简指数不等式. 一种常见的指数不等式. 即形如 $a^x \lesseqgtr b\ (a>0, a\neq 1$，$\lesseqgtr$ 表 $>$ 或 $<$）的不等式.

1. 解 $a^x>b$：若 $b \leqslant 0$，一切实数都是不等式的解；若 $b>0$，且当 $0<a<1$ 时解为 $x<\log_a b$，当 $a>1$ 时，解为 $x>\log_a b$.

2. 解 $a^x<b$：若 $b \leqslant 0$，不等式无解；若 $b>0$，且当 $0<a<1$ 时，解为 $x>\log_a b$，当 $a>1$ 时，解为

$$x<\log_a b.$$

指数不等式的解法（solving process of exponential inequality）　解指数不等式的一般方法. 即求式中未知数的所有满足该式的数值的方法. 一些简单类型的一元指数不等式有以下解法：

1. 同底法. 形如 $a^{f(x)}>a^{g(x)}\ (a>0, a\neq 1)$ 的不等式，当 $0<a<1$ 时，可解不等式 $f(x)<g(x)$；当 $a>1$ 时，可解不等式 $f(x)>g(x)$. 若给定指数不等式的底数不同，例如 $a^{f(x)}>b^{\varphi(x)}\ (a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1)$，可先化为同底：$a^{f(x)}>a^{\varphi(x)\log_a b}$. 当 $0<a<1$ 时，有 $f(x)<\varphi(x)\log_a b$；当 $a>1$ 时，有

$$f(x)>\varphi(x)\log_a b.$$

2. 换元法. 形如 $F(a^{f(x)})>0$ 的不等式（$F(a^{f(x)})$ 是以 $a^{f(x)}$ 为变量的代数式），令 $a^{f(x)}=y$，即可转化为代数不等式 $F(y)>0$，求出解集后，就可转化成解一些简单的指数不等式.

3. 定义法. 形如 $a^{f(x)}>b\ (a>0, a\neq 1)$ 的不等式，可应用对数定义求解. 当 $b \leqslant 0$ 时，$f(x)$ 可以为一切实数；$b>0$ 时，$a^{f(x)}>b=a^{\log_a b}$，于是可解

$$f(x)\begin{cases} >\log_a b\ (a>1), \\ <\log_a b\ (0<a<1). \end{cases}$$

类似地可求解形如 $a^{f(x)}<b\ (a>0, a\neq 1)$ 的不等式.

对数不等式（logarithmic inequality）　一种超

越不等式.若 $F(y_1,y_2,\cdots,y_k)$ 是 k 元有理式,$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,k)$ 是 n 元代数式,则形如

$$F[\log_{a_1}f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\log_{a_2}f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\log_{a_k}f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)]>0$$

的不等式称为对数不等式,其中 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是大于零而不等于1的常数,当 $n=1$ 时就得到一元不等式.在对数不等式中要求对数符号后面是含有未知数的代数式,同时也要求不等式中没有其他含有未知数的超越式.对数的底数是未知数的代数式也被认为是允许的.

简单对数不等式(simple logarithmic inequality) 亦称最简对数不等式.一种常见的对数不等式.即形如

$$\log_a x\leqslant b\ (a>0,a\neq 1,\leqslant 表<或>)$$

的不等式.求解简单对数不等式,只需把两边作为以 a 为底的指数函数的指数,就可以利用指数函数的单调性得解:

1.当 $a>1$ 时,

$$\log_a x\leqslant b\Leftrightarrow a^{\log_a x}\leqslant a^b\Leftrightarrow x\leqslant a^b;$$

2.当 $0<a<1$ 时,

$$\log_a x\geqq b\Leftrightarrow a^{\log_a x}\leqq a^b\Leftrightarrow x\leqq a^b.$$

对数不等式的解法(solving process of logarithmic inequality) 解对数不等式的一般方法.即求式中未知数的所有满足该式的数值的方法.对于能用初等方法求解的一些简单对数不等式,主要有如下解法:

1.同底法.形如

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)\ (a>0,a\neq 1)$$

的不等式,当 $0<a<1$ 时,可以转化为解不等式组

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)<g(x);\end{cases}$$

当 $a>1$ 时,可转化为解不等式组

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)>g(x).\end{cases}$$

若在给定的不等式中,各个对数的底数不同,例如 $\log_a f(x)>\log_b g(x)(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1)$,应先换成同底对数,使不等式变成

$$\log_a f(x)>\frac{\log_a g(x)}{\log_a b}.$$

当 $a>1$ 且 $b>1$ 或 $a>1$ 且 $0<b<1$ 时,它相应转化为不等式组

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)^{\log_a b}>g(x)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)^{\log_a b}<g(x),\end{cases}$$

注意 $0<a<1$ 时,函数 $\log_a x$ 单调下降;故当 $0<a<1$ 且 $b>1$ 或 $0<a<1$ 且 $0<b<1$ 时,它分别转化为解不等式组

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)^{\log_a b}>g(x)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}f(x)>0,\\g(x)>0,\\f(x)^{\log_a b}<g(x).\end{cases}$$

2.换元法.解形如

$$F[\log_a f(x)]>0\ 或\ F[\log_a f(x)<0]$$

的不等式:令 $y=\log_a f(x)$,原不等式可转化为解不等式 $F(y)>0$(或 $F(y)<0$),再转化为解最简对数不等式或不等式组,即得原不等式的解.

3.指数式法.形如 $\log_a f(x)>b(b>0)$ 的不等式,当 $0<a<1$ 时,可化为 $f(x)<a^b$,当 $a>1$ 时,可转化为 $f(x)>a^b$,可求它们在条件 $f(x)>0$ 下的解;形如 $\log_{g(x)}f(x)<b$ 的不等式,可解不等式组

$$\begin{cases}0<g(x)<1,\\f(x)>[g(x)]^b,\\f(x)>0\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}g(x)>1,\\f(x)<[g(x)]^b,\\f(x)>0.\end{cases}$$

它们的解集的并集就是原不等式的解集.

列不等式解应用题(solving the application problem by inequality) 一类重要的应用题.即把应用题中已知的与未知的数量之间存在的不等关系列出式子来,以求其解.与列方程解应用题的思考方法类似,一般步骤有:

1.理解题意,弄清题中哪些量是已知的,哪些量是未知的,要求的量是什么.

2.设未知数,在未知量中适当选择一个(或几个)基本未知量,设为 x(或 $x,y,z\cdots$),而把其他的未知量用 x(或 $x,y,z\cdots$)的解析式表达出来.

3.分析各量间的关系,列出不等式或不等式组.

4.解不等式或不等式组.

5.做出答案,根据题意列出的不等式中,未知数或参变数的允许值,除解析式外,还必须由这些量的实际意义确定.

不等式组(system of inequality) 亦称联立不等式.不等式的基本概念之一.指若干个含有未知数的不等式联合在一起,以求其各不等式解集的交集的一组不等式.

联立不等式(simultaneous inequality) 即"不

等式组”.

同解不等式组(equivalent system of inequalities)　不等式组的基本概念之一.指解集相同的两个不等式组.若第一个不等式组的所有解都是第二个不等式组的解,且第二个不等式组的所有解也都是第一个不等式组的解,即这两个不等式组的解集相等,则称这两个不等式组同解.

不等式组的解(solution of the system of inequality)　不等式组的基本概念之一.指未知数的数值满足该不等式组者.使不等式组中各不等式均成立的未知数值的集合,称为不等式组的解集.简称不等式组的解.不等式组的解集是不等式组中各不等式解集的交集.对于一个含有 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的不等式,若有 n 个数所组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathrm{R}^n$ 使这个不等式成立,则这个数组是这个不等式的一个解.一个 n 元不等式所有解的集合就是这个不等式的解集.而 n 元不等式组的解集,就是这个不等式组中各不等式解集的交集,它是 R^n 的一个子集.

解不等式组(solving the system of inequalities)　不等式组的基本概念之一.指求出不等式组的所有解或判定不等式组无解的过程.解不等式组的结果是求出不等式组的解集,当不等式组无解时,解集为空集.

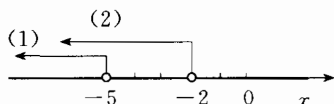
一元一次不等式组(system of inequality of degree 1 in one unknown)　一种简单的不等式组.若干个含有同一个未知数的一次不等式所组成的不等式组.一元一次不等式组的解集是它的各不等式解集的交集.其一般求解步骤是:

1.分别求出不等式组中各不等式的解集.

2.取各不等式解集的交集就是不等式组的解集.也可以在数轴上将各不等式的解集表示出来,找出各解集的公共部分即为不等式组的解集.例如

$$\begin{cases} 3x > 5x + 10, & (1)\\ \dfrac{6x+7}{5} < x + 1, & (2)\end{cases}$$

由(1)解得 $x<-5$;由(2)解得 $x<-2$,所以这个不等式组的解集是 $\{x|x<-5\}$.在数轴上表示如图.



一元二次不等式组(system of quadratic inequality in one unknown)　一种常见的不等式组.指在含有同一个未知数的整式不等式组中,至少有一个是二次的不等式组,例如

$$\begin{cases} x^2 + x < 0,\\ x + 1 > 0\end{cases}$$

与

$$\begin{cases} 2x^2+1>x,\\ x+1<x^2+2.\end{cases}$$

不等式组中各不等式的解集的交集是不等式组的解集.其求解的一般步骤是:

1.解不等式组中的各不等式.

2.取各不等式解集的交集,即得一元二次不等式组的解集.可以将各不等式的解在同一数轴上表示出来,它们的公共部分就是不等式组的解集.

混合不等式组(mixed system of inequality)　一种特殊的不等式组.一些含未知数的关系式中,若一部分是方程,一部分是不等式,这种形式的关系式组称为方程与不等式的混合组.混合组的解法与方程组、不等式组的解法相类似.它的解是一种混合形式,只有在特定条件下,才是一组具体数值.例如,解方程组

$$\begin{cases} 3x + 2y > 7, & (1)\\ 4x + 3y = 1, & (2)\end{cases}$$

由方程(2)得

$$y = \frac{1-4x}{3},$$

代入不等式(1)后解得 $x>19$,故混合组的解是

$$\begin{cases} x > 19,\\ y = \dfrac{1-4x}{3}.\end{cases}$$

多元不等式组(system of inequality in several unknown)　一类重要的不等式组.含有两个以上未知数的不等式(组)称为多元不等式(组).多元不等式组的解集是一个区域.例如,二元不等式的解集是平面区域,三元不等式的解集是三维空间的区域等.解多元不等式(组)就是求它的各不等式的解集的交集.

方　　程

方程(equation)　亦称方程式.数学的一个重要概念和研究对象.一般指含未知数或变数的等式,不仅指代数方程.

1.在初等代数中,只论代数方程,含有未知数的代数式的等式称为方程.按方程的解的状况,常把方程分为三类:

1)条件等式方程,例如,方程 $2x+5=3x$,就是满足 $x=5$ 这个条件的等式.普通所说的方程,常指的是这类.

2)矛盾方程,例如,方程 $(x-2)^2=x^2-4x+1$,无论 x 取什么数值,都不能使这个等式成立.

3)恒等方程,例如,方程 $(x+2)^2=x^2+4x+4$ 中的未知数 x,可取一切数值,等式恒成立.

2.在解析几何中,在平面或空间建立某种坐标

系后，几何图形（例如曲线和曲面）常可用点的坐标所应满足的一个或几个方程来表示. 例如在空间直角坐标系中，平面由一个三元一次方程表示，直线由两个三元一次方程表示.

3. 在现代数学中，把含变元的等式称为方程. 例如，变元为未知函数 $y=f(x)$ 的微分方程

$$\sin x\frac{d^2y}{dx^2}+\cos x\frac{dy}{dx}-x=0;$$

变元 X 为未知集合的集合方程 $(A\cap X)\cup B=B$；变元 x 为未知命题的逻辑方程 $(p\wedge x)\vee q=1$ 等.

在中国，方程的名称来源于《九章算术》，该书的第八章名曰《方程》. 刘徽在注释中说："程，课程也，群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率. 二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程."按刘徽的意义，方程是按照一定的规程进行实验考核（课）而得到的数学模型——筹码方阵——相当于今天线性方程组的增广矩阵. 刘徽还在方程术中叙述了解方程（变换筹码）的遍乘法与直除法，即现代的用非零数乘一个方程及将一个方程的若干倍加入另一个方程消元. 现在的方程一词是清朝初期翻译外文名 equation（等式）时借用古名而得. 英国博物馆保存有公元前 20 世纪古埃及的珍贵文献莱因德纸草书，相传它是阿梅斯（Ahmes）抄写，其中有一个用象形文字书写的方程题目：



它经埃森洛克（Eisenlokr，A.）破译，题意为："有一堆，其三分之二，其一半，其七分之一及其全部，共为三十七. 求一堆之数."用现代的写法便是

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=37.$$

这是迄今发现的最早的方程. 以后，丢番图（Diophantus）、卡尔达诺（Cardano，G.）、韦达（Viete，F.）等人各用不同的符号表示方程，直到 1637 年，笛卡儿（Descartes，R.）在《几何学》中用 $x^3--9xx+26x--24\infty 0$ 表示方程 $x^3-9x^2+26x-24=0$. 他还把未知数和常数通过有理运算和开方所组成的方程称为代数方程，非代数方程称为超越方程. 在方程中笛卡儿首先采用拉丁字母的后面几个字母 x，y，z 来表示未知数（参见"等式"）.

方程式（equation） 即"方程".

已知数（known number） 数学的基本概念之一. 指在一个数学式子（代数式、函数式、方程等）中，含有的具体数值（如 1，$\sqrt{2}$，π，e^2，$\sin(\pi/4)$等）. 研究问题时也常用拉丁字母表中的前面字母 $a,b,c\cdots$ 代替某些具体数值，尽管并未写出字母所表示的值，这时也把这些字母认为其值已经确定，亦称之为已知数. 1591 年，韦达（Viete，F.）开始用 B,C,D 等辅音字母表示已知数. 1637 年，笛卡儿（Descartes，R.）改用拉丁字母表中前面的小写字母 $a,b,c\cdots$ 表示已知数，沿用至今.

未知数（unknown number） 数学的基本概念之一. 在研究问题之初，不知其值，尚待求出的数. 数学中常用拉丁字母表最后的字母 $x,y,z,\cdots$ 表示未知数. 如方程 $ax^2+bx+c=0$ 中的 x，方程 $F(x,y)=0$ 中的 x,y 都是未知数. 现代数学把研究中未知的对象称为未知元或称变元，如集合方程 $(A\cap X)\cup B=B$ 中的未知集合 X 和逻辑方程 $(p\wedge x)\vee q=1$ 中的未知命题 x 等. 用拉丁字母表中的最后字母 x,y,z 等表示未知数，是笛卡儿（Descartes，R.）于 1637 年最先提出使用的.

元（variable （or element）） 数学的基本概念之一. 研究问题中某种独立的对象称为元. 常见的有以下几种：

1. 方程或不等式中待确定的可变对象常称为变元. 它是变量、未知函数等的统称.

2. 函数中的自变量也称自变元.

3. 多项式或其他代数式中用文字字母所表示的一种抽象的对象常称为元. 如 $2x^3-3x^2+1$ 称为整系数一元多项式.

4. 集合的元素常简称元. 例如，称 $A=\{a,b,c\}$ 为三元集合. 称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 元有序组等.

方程的根（root of an equation） 方程的重要概念之一. 是与方程式有关的一个或若干个数. 指一元代数方程的解，特别是二次及二次以上方程的解，在其能得出数值解时常表成根式，因而常称为根. 9 世纪，阿尔·花拉子米（al-Khowārizmī，M. ibn M.）把未知数称为 jidr（根），后译成拉丁文是 radix（根）.

方程的解（solution of an equation） 方程的重要概念之一. 使方程两边相等的变元所取的值称为方程的解. 一元数值方程的解也称为方程的根. n 元数值方程的解是 n 元有序数组. 一个方程所有解的集合称为这个方程的解集，通常解方程就是求出方程的解集. 在不同的范围内解一个方程可能得到不同的解集. 例如，数值方程 $x^4-16=0$ 的有理根只有 $x_1=2,x_2=-2$，而它的复数根有 $x_1=2,x_2=-2,x_3=2i,x_4=-2i$. 一个方程可能无解，这时称方程的解集为空集.

根式解（radical solution） 方程的重要概念之一. 一个代数方程的解，如果可以由这个方程的系数经过有限次加、减、乘、除以及开整数次方等运算表示出来，就称为这个方程的根式解. 一、二、三、四次代数方程都有根式解，而五次和五次以上的一般代数方程没有根式解.

移项（transposition of terms） 一种方程变形.

即式的一种等价变形. 在解数值方程时，利用等量公理："等量加上（减去）等量，其和（差）相等"，把方程中一端的项变号后，移到另一端，称为方程的移项；在解不等式时，利用不等量公理："不等量加上（减去）等量，其和（差）不等，原来大的，和（差）也大"，把不等式中一端的项变号后移到另一端，称为不等式的移项. 移项也泛指在一个关系式中把关系式一端的项利用等价变形移向另一端.

增解(extraneous solution)　亦称客解. 解分式方程或无理方程等所涉及的一个概念. 方程（组）变形后，若所得新方程（组）的解不适合原方程（组），则称这种解为原方程（组）的增解. 若原方程（组）的解未包含在新方程（组）的解中，则这种解称为原方程（组）的失解或遗解. 一元方程的增解与失解又称为增根与失根（或丢根）. 增解与失解是在解方程（组）的过程中进行了非同解变形而产生的. 例如，解方程 $\sqrt{3x^2+x}=4x-2$. 将方程两边平方后，解得 $x_1=1$，$x_2=4/13$. 经验根，$x_2=4/13$ 不适合原方程，因而它是增根. 产生增根的原因在于对原方程两边平方不是同解变形.

遗解(lost of solution)　见"增解".

增根(extraneous root)　见"增解".

失根(lost of roots)　见"增解".

验根(test of root)　一种计算. 指用以删除增根的方法. 把求得的方程的解，代入原方程进行验算，舍去增解，或通过考察解方程的各步变形，找出失解原因并补回失解，这样的过程都称为验根. 检验增解的常用方法是：

1. 考查所求得的解是否属于原方程未知数的允许值范围，如果不是，则是增解.

2. 如果属于原方程未知数的允许值范围，但经检验不适合原方程，也是增解.

增解应该舍去. 解方程产生增解的原因是对方程进行了非同解变形，用结果方程代替了原方程，因而扩大了方程未知数的允许值范围. 产生失解的原因也是在方程的求解过程中进行了非同解变形，由于各种具体原因引入了新的限制条件，因而缩小了方程未知数的允许值范围，造成失解. 找回失解的一般方法是：考察方程变形的每一步是否为同解变形，并确定缩小方程未知数允许值范围的具体原因，进而找回失解.

代数基本定理(algebraic fundamental theorem)　见本卷《高等代数》同名条.

解方程(solving the equation)　方程的重要概念之一. 指求方程的解或判定方程无解的过程. 无解方程的解集是空集，因此，解方程也就是求方程解集的过程.

矛盾方程(contradictory equation)　亦称矛盾等式. 一种特殊方程. 即无解的方程. 它有以下两种形式：

1. 数值矛盾方程的意义是：在求解范围内没有解（或说解集是空集）的方程称为这个范围的矛盾方程. 例如 $x^2+1=0$ 在实数范围内是矛盾方程，$2x+1=0$ 在整数范围内是矛盾方程. 一个方程是否为矛盾方程同求解的范围有关，扩大求解的范围，矛盾方程可能转化为非矛盾方程.

2. 矛盾方程也泛指在求解范围内无解的一般数学方程. 如逻辑方程：$p\wedge\neg p=1$（真）是矛盾逻辑方程. $x\cup 1=0$ 是矛盾布尔方程.

矛盾等式(contradictory equality)　即"矛盾方程".

同解变形(equivalent transformation)　解方程（组）所涉及的一个概念. 用一个方程（组）的同解方程（组）代替这个方程（组），这种代换称为原方程（组）的同解变形. 通常，在解方程（组）的过程中，主要是不断进行同解变形；如果出现了非同解变形，则应对得出的结果进行讨论或验根，找出遗解舍弃增解. 关于不等式（组）的同解变形，意义和方程同解变形类似.

同解方程（组）(equivalent (system of) equations)　亦称等价方程（组）. 解方程（组）所涉及的一个概念. 在给定求解范围内，如果两个方程（组）的解集相同，则称这两个方程（组）在求解范围内为同解方程（组）. 因此，两个方程（组）是否同解，与在哪个求解范围内讨论有关. 例如，在有理数范围内，方程 $(x-2)(x^2+1)=0$ 与 $x-2=0$ 是同解方程，但在复数范围内就不是同解方程. 应注意：

1. 矛盾方程（组）都是同解的，因为它们的解集都是空集.

2. 当方程有重根时，还要求一个方程的重根也是另一个方程的重根，且重数相同，才能说这两个方程同解.

3. 方程（组）的同解关系满足自反性、对称性和传递性.

等价方程（组）(equivalent (system of) equations)　即"同解方程组".

方程的同解定理(equivalent theorem of equation)　方程同解变形的重要定理. 方程在保持同解性的前提下，所允许进行变形的一些结论，统称方程的同解定理. 常用的同解定理有（以一元方程为例）：

1. 传递定理. 如果方程(1)与方程(2)同解，方程(2)与方程(3)同解，那么方程(1)与方程(3)同解. 解方程时几乎步步都要用此定理.

2. 添项定理. 如果 $h(x)$ 对方程 $f(x)=g(x)$ 的

未知数的一切可能值都有意义，那么方程 $f(x)=g(x)$ 与方程 $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ 同解. 因此，方程的两边同时加上同一个整式或一个数，所得方程与原方程同解. 这个定理也称为方程的第一基本性质，是移项的依据. 根据这个定理，方程中的任何一项，都可以改变符号后，从方程的一边移到另一边.

3. 遍乘定理. 如果 $h(x)\neq 0$，且 $h(x)$ 对方程 $f(x)=g(x)$ 的未知数的一切可能值都有意义，那么方程 $f(x)=g(x)$ 与方程 $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ 同解. 因此，方程的两边都乘以(或者都除以)不等于零的同一个数，所得的方程和原方程同解. 这个定理也称为方程的第二基本性质，是解方程时“移乘作除”或“移除作乘”的依据.

4. 恒等变形定理. 如果 $f(x)\equiv h(x)$，$g(x)\equiv k(x)$，且方程 $f(x)=g(x)$ 和 $h(x)=k(x)$ 中的未知数 x 有相同的取值范围，因此，这两个方程同解.

5. 方程分裂定理. 方程 $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots f_n(x)=0$ 的解集是 n 个方程 $f_1(x)=0$，$f_2(x)=0$，$\cdots$，$f_n(x)=0$ 中每个方程解集的并集，使用这个定理解方程不会引起增根或失根.

6. 乘方定理. 如果方程 $f(x)=g(x)$，且 m 为自然数，则方程 $[f(x)]^m=[g(x)]^m$ 是方程 $f(x)=g(x)$ 的结果(就是前一方程的解集，是后一方程的解集的子集). 用这个定理对方程变形的下述两种情况在实数范围是同解的：

1) 若 m 是奇数(设 $m=2n+1$，n 为自然数)则方程 $f(x)=g(x)$ 和 $[f(x)]^{2n+1}=[g(x)]^{2n+1}$ 同解.

2) 若 m 是偶数，且在方程 $f(x)=g(x)$ 中 $f(x)\geqslant 0$ 和 $g(x)\geqslant 0$，则方程 $f(x)=g(x)$ 和 $[f(x)]^m=[g(x)]^m$ 同解. 乘方定理常用于解无理方程和指数方程等. 当使用本定理进行方程变形，在 m 不是奇数且不能判定 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的正负时，都必须验根.

7. 换元定理. $F[\varphi(x)]=0$ 和方程组

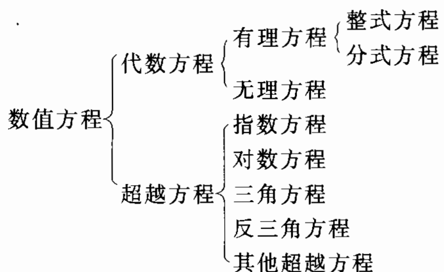
$$\begin{cases}u=\varphi(x),\\ F(u)=0\end{cases}$$

同解.

数值方程(numerical equation)　一类重要的方程. 如果一个方程中各已知元都只表示某个数系中的数，而未知元也只取数系中的数值，则称为数值方程. 它是区别于微分方程、积分方程、逻辑方程等其他特殊方程类型的普通方程.

数值方程的分类(classification of numerical equations)　代数学术语. 指按照某种标准把数值方程划分为若干彼此不相交的类，使每个数值方程恰属于一类的逻辑方法，称为数值方程的分类. 数值方程的分类方法有：

1. 按方程两端解析式所含运算进行分类：



应当注意，超越方程不能像代数方程那样严格地加以分类，例如，方程 $e^x-\cos x=0$ 就不能说它是指数方程还是三角方程.

2. 按方程含未知数的个数进行分类：

$$数值方程\begin{cases}一元方程\ f(x)=g(x);\\ 二元方程\ f(x,y)=g(x,y);\\ 多元方程\ f(x,y,\cdots,z)=g(x,y,\cdots,z);\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

代数方程(algebraic equation)　一类常用的数值方程. 若 $F_1(x,y,\cdots,z)$ 与 $F_2(x,y,\cdots,z)$ 都是关于未知数的代数式，则方程 $F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)$ 称为代数方程. 两端的代数式都是有理式时称为有理方程，至少有一个是无理式时称为无理方程. 两端的代数式都是整式时称为整式方程，至少有一个是分式时称为分式方程.

有理方程(rational equation)　见“代数方程”.

整式方程(equation of integral expression)　亦称有理整式方程(参见“代数方程”). 一类常用的代数方程. 整式方程，按未知数的个数分类，有一元方程，二元方程，$\cdots$，m 元方程. 常用符号 $f(x)=0$，$f(x,y)=0$，$\cdots$，$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0$ 表示；按方程的次数分类，有一次方程，二次方程，$\cdots$，n 次方程. 在方程的某项中，所有变元字母的幂指数的和称为该项的次数. 若一个方程的各项次数不等，则以方程的最高次项的次数作为这个方程的次数. 各非零项次数都相等的方程称为齐次方程.

齐次方程(homogeneous equation)　见“整式方程”.

一元方程(monadic equation)　一种最简单的方程. 指含有一个未知数的方程. 更确切的意义是：如果一个方程中，有若干个字母，当把其中某一个字母当成未知数，而把其余字母当成已知数时，方程就称为该字母的一元方程. 在讨论多元方程时，也可以出现除一个元外，含有其他各元的项的系数均为零而成为一元方程的情形. 例如 $x+1=0$ 可看成 x，y 的二元方程 $x+0y+1=0$，它在平面直角坐标系中表示一条直线.

一次方程(linear equation)　亦称线性方程. 一种常用的代数方程. 指含有未知数的项的最高次数是 1 的整式方程. 根据所含未知数的个数，一次方程又分为一元一次方程，二元一次方程，$\cdots$，n 元一次

方程. n 元一次方程的一般形式是：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 是常数，并且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有一个不为零. 但在线性代数学的线性方程组的一般理论中，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少有一个不为零这个限制则不予考虑.

线性方程(linear equation)　即"一次方程".

一元一次方程(linear equation in one unknown)　一类简单的代数方程. 即只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 1 的整式方程. 它的标准形式为 $ax+b=0(a\neq0)$. ax,b 分别称为该方程的一次项和常数项，a 称为一次项系数. 它有且仅有惟一解 $x=-b/a$.

一元二次方程(quadric equation in one unknown)　一类简单的代数方程. 即只含有一个未知数，且各项最高次数是 2 的整式方程. 它的标准形式为 $ax^2+bx+c=0$，其中 a,b,c 为任意常数，$a\neq0$，ax^2,bx,c 分别称为二次项、一次项和常数项，a,b，分别称为二次项及一次项的系数.

完全一元二次方程(complete quadric equation in one unknown)　一类简单的代数方程. 即具有标准形式且一次项系数与常数项均不为零的一元二次方程. 例如 $x^2-2x+1=0$. 当一次项系数与常数项至少有一个为零时则称为不完全一元二次方程.

一元二次方程的求根公式(formula of finding the root of a quadric equation in one unknown)　一种重要的数学公式. 指用其系数表出其解的式子. 复系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},$$

式中 $\Delta=b^2-4ac$ 称为一元二次方程的判别式. 对于实系数一元二次方程，求根公式可具体地写成：

$$x_{1,2}=\begin{cases}\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & (b^2-4ac\geqslant0),\\[2ex] \dfrac{-b\pm\mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a} & (b^2-4ac<0).\end{cases}$$

这组公式中前一公式用于在方程的判别式非负时求出实根，后一公式用于在方程的判别式为负时求出两个共轭虚根. 当方程是有理系数一元二次方程，且要求有有理数根时，只有当 $\Delta=b^2-4ac$ 是一个有理数的完全平方数才有解. 这时求根公式仍为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-bp\pm q}{2ap},$$

其中 q/p 为既约分数，且 $(q/p)^2=b^2-4ac$. 当方程是整系数方程又要求整根时，仍可利用有理数方程求有理根的公式，但要

$$\frac{-bp\pm q}{2ap}$$

是整数时方程才有解.

公元前两千年左右，古巴比伦人的泥板文书中就已经记载有一元二次方程的知识：求出一个数使它与它的倒数之和为已知数. 用现代记法可表示为

$$x+\frac{1}{x}=b.$$

从这个方程可得出 $x^2-bx+1=0$. 巴比伦人做出

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

再做出

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1},$$

然后得出解答

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$$

及

$$\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}.$$

由此可知，巴比伦人知道一元二次方程的求根公式，但他们当时并不认识负数，对负根是不予理会的.

埃及的草纸文书中也有简单一元二次方程 $ax^2=b$ 的记载. 丢番图(Diophantus)也承认二次方程的一个正根，即使两根都是正的也只取一个. 婆罗摩笈多(Brahmagupta)在公元 628 年写成的《婆罗摩修正体系》中，得到二次方程 $x^2+px-q=0$ 的一个求根公式

$$x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}.$$

阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī, M. ibn M.)于 826 年给出二次方程的几种特殊解法，并第一次给出二次方程的一般解法，承认方程有两个根，还允许无理根的存在，只是还未认识虚根. 复数根的应用到 16 世纪意大利的数学家们解三次方程时才开始，韦达(Viete, F.)已经知道一元二次方程在复数范围内恒有解，并且给出了根与系数的关系. 在中国，《九章算术》中已有了一元二次方程的内容，"勾股"第 20 题是通过方程 $x^2+34x-7100=0$ 的正根而解决的.

一元二次方程的判别式(discriminant of quadric eqution in one unknown)　见"一元二次方程的求根公式".

一元二次方程的解法(solving process of a quadric equation in one unknown)　解一元二次方程的一般方法. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$，其常用解法有：

1. 公式法. 利用求根公式

$$x=\frac{-b\pm k}{2a}$$

(k 为 $\Delta=b^2-4ac$ 的一个平方根)直接求出方程的根. 对于实系数一元二次方程,当判别式 $\Delta\geqslant0$ 时,有相异两实根或一个二重实数根;当判别式 $\Delta<0$ 时无实根,但在复数范围内有两个共轭虚根.

2. 因式分解法. 把方程的各项移到等号的左边整理成降幂式后,如果左边的二次式能够分解因式,就是把方程左边分解为两个一次因式的积,然后令每个一次因式等于零,得到两个一元一次方程,按一元一次方程的解法求出方程的根.

3. 配方法. 设一元二次方程为 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$,用二次项的系数除方程的各项,将常数项移到方程等号的右边;方程的两边各加上一次项系数一半的平方,方程左边就成为一个二项式的完全平方,右边是常数,即

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

亦即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

应用方根的定义得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{k}{2a}\ (k\text{ 为 }b^2-4ac\text{ 的一个平方根}).$$

然后将等式左边的常数移到等号的右边,就得到方程的根,即

$$x=\frac{-b\pm k}{2a}.$$

4. 图象法. 解实系数一元二次方程时,图象法有两种:

1) 在平面直角坐标系中做出 $y=ax^2+bx+c$ 的函数图象,曲线与 x 轴的交点的横坐标就是方程的解(参见"二次函数的图象").

2) 在平面直角坐标系中作抛物线 $y_1=ax^2$ 和直线 $y_2=-bx-c$ 的图象,抛物线 $y_1=ax^2$ 和直线 $y_2=-bx-c$ 的交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$的实数解. 图象法解实系数一元二次方程,通常只能求出根的近似值.

一元二次方程解的存在性取决于方程求解的范围,可用方程判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的取值情况来判定:

1. 在整数范围内解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0$,且 $a,b,c\in\mathrm{Z})$时,要求 Δ 是一个整数的完全平方数,且 $2a\mid(-b\pm\sqrt{\Delta})$,这时公式求出的解就是方程的整数解.

2. 在有理数范围内解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0$,且 $a,b,c\in\mathrm{Q})$时,要求 Δ 是一个有理数的完全平方数,由公式求出的解就是方程的有理数解.

3. 在实数范围内解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0,a,b,c\in\mathrm{R})$时,要求 $\Delta\geqslant0$,此时方程有相异二实数根或一个二重实数根,当 $\Delta<0$ 时无实根(但有一对共轭虚根,已超出实数范围).

4. 在复数范围内解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0,a,b,c\in\mathrm{C})$,方程总有相异二根或二重根.

一元二次方程根与系数的关系(relation between roots and coefficient's of quadric equation with one unknown) 一组等式. 它们表达了该方程的解与系数间所存在的关系. 一元二次方程两根之和等于它的一次项系数除以二次项系数的商的相反数;两根之积等于它的常数项除以二次项系数所得的商. 即一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根 x_1 和 x_2,与系数的关系是

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

根与系数的关系,通常也称为韦达定理. 反之,若有两数 α 和 β,且

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

那么这两个数 α 和 β 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根,一般称其为韦达定理的逆定理. 特别地,简化一元二次方程的两根之和等于一次项系数的相反数;两根的积等于常数项. 即简化一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根 x_1 和 x_2 与系数间的关系是 $x_1+x_2=-p,x_1\cdot x_2=q$(参见本卷《高等代数》中的"根与系数的关系").

韦达定理(Viete theorem) 见"一元二次方程根与系数关系"和本卷《高等代数》中的"根与系数的关系". 韦达定理确定了一元方程的根与系数的关系,在解一元二次方程的情形中有较多应用. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根是 x_1 和 x_2,韦达定理确定

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

利用这两个等式可以直接解决一些问题,例如:

1. 已知一元二次方程的一个根,可以不解方程直接求出另一个根.

2. 已知两个根,可求出此一元二次方程.

3. 已知两数的和与积,求此二数. 可直接写出此两数所满足的一元二次方程,然后解方程求两个根.

韦达定理确定了以两根 x_1 和 x_2 为元的基本对称多项式 x_1+x_2 和 x_1x_2 的值,根据对称多项式的基本定理,任何对称多项式都可表示成基本对称多项式的多项式(参见本卷《高等代数》中的"对称多项式"). 因此,两根的任何对称多项式均可用一元二次方程的系数表出,这又有一些应用. 例如:

1. 已知一个一元二次方程,可以不解这个方程而求出另一个方程,使后者的根或其和与积是前者

的根的对称函数.

2. 对带参数的一元二次方程,可以解决一些涉及两根的对称函数的问题. 举例如下:已知带参数的方程 $x(x-1)=m(2x-m-1)$ 的两根的差的平方为 3,求 m 的值. 由于两根的差的平方是对称函数 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$,此题一定能解.

实系数一元二次方程根的几何意义(geometric significance of the root of quadric equation with one unknown of real coefficient)　实系数一元二次方程根的几何解释. 即在平面直角坐标系中,实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 Ox 轴交点的横坐标(参见"二次函数的图象").

双二次方程(biquadratic equation)　亦称准二次方程. 一类特殊方程. 即只含偶次项的四次方程. 方程经过移项,同类项合并的整理后,只含有偶次项的四次方程称为双二次方程. 它的一般形式为 $ax^4+bx^2+c=0(a,b,c$ 均不为零),双二次方程的通常解法是换元法. 即令 $y=x^2$ 把方程化为

$$ay^2+by+c=0, \tag{1}$$

如果方程(1)有根 y_0,则有 $x^2=y_0$(参见"复数方根的几何意义").

准二次方程(biquadratic equation)　即"双二次方程".

二项方程(binomial equation)　一种特殊方程. 指系数 a,b 均为非零常数的一元 n 次方程 $ax^n+b=0$. 它的 n 个不同的复数根是 $-b/a$ 的 n 个 n 次方根,参见"复数方根的几何意义";二项方程 $ax^n+b=0$ 至多有两个实根

$$\pm\sqrt[n]{\left|-\frac{b}{a}\right|}$$

或其中之一.

三项方程(trinomial equation)　一种特殊方程,指形如 $ax^{2n}+bx^n+c=0(a,b,c$ 为常数且都不为零,$n\in\mathrm{N}_+)$ 的方程. 故双二次方程是三项方程在 $n=2$ 时的特例. 解三项方程时,首先作变元替换 $y=x^n$,使原方程化为 y 的二次方程 $ay^2+by+c=0$,并解这个二次方程;然后将二次方程的根依次代入 $x^n=y$ 中得二项方程,并解这些二项方程,求出三项方程的所有根. 在复数范围内解三项方程时,若 $ay^2+by+c=0$ 有一个二重复根,则原三项方程有 n 个不同的复根,每个都是二重根;若 $ay^2+by+c=0$ 有两个不同的复根,则原三项方程有 $2n$ 个彼此不同的复根.

倒数方程(reciprocal equation)　亦称反商方程. 一种特殊方程. 即根的倒数亦为其根的整式一元方程. 如果一元 n 次方程 $f(x)=0$ 的根和 $f(1/x)=0$ 的根完全相同,则称 $f(x)=0$ 是一元 n 次倒数方程. 它有下面两种形式:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0\ (a_0\neq0), \tag{1}$$

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots-b_1x-b_0=0\ (b_0\neq0). \tag{2}$$

方程(1)称为第一类型倒数方程,亦称互反方程;方程(2)称为第二类型倒数方程. 它的特点是首项系数和常数项,x 的 $n-1$ 次项系数和一次项系数,…,x 的 $n-k$ 次项系数和 x 的 k 次项系数,或是都相等,或是都相差一个负号. 当 n 为偶数时,设 $n=2m$,倒数方程可写为

$$a_0x^{2m}+a_1x^{2m-1}+\cdots+a_{m-1}x^{m+1}+a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\ (a_0\neq0), \tag{3}$$

$$b_0x^{2m+2}+b_1x^{2m+1}+\cdots+b_mx^{m+2}-b_mx^m-\cdots-b_1x-b_0=0\ (b_0\neq0). \tag{4}$$

方程(3)称为第一类型偶次倒数方程,方程(4)称为第二类型偶次倒数方程. 应该注意到方程(4)正中间的一项系数 b_{m+1} 为零. 当 n 为奇数时,设 $n=2m+1$,倒数方程可写为

$$c_0x^{2m+1}+c_1x^{2m}+\cdots+c_mx^{m+1}+c_mx^m+\cdots+c_1x+c_0=0\ (c_0\neq0), \tag{5}$$

$$d_0x^{2m+1}+d_1x^{2m}+\cdots+d_mx^{m+1}-d_mx^m-\cdots d_1x-d_0=0\ (d_0\neq0). \tag{6}$$

方程(5)称为第一类型奇次倒数方程,方程(6)称为第二类型奇次倒数方程. 第二类偶次倒数方程(4)有根 ±1,求出根 ±1 后可以化为一个形如方程(3)的 $2m$ 次方程;第一类奇次倒数方程(5)有根 -1,求出根 -1 后也可以化为一个形如方程(3)的 $2m$ 次方程;第二类奇次倒数方程(6)有根 1,求出根 1 后仍可以化为一个形如方程(3)的 $2m$ 次方程. 因此,方程(4),(5),(6)分别求出根 ±1,-1 或 1 以后,所得的降次方程都是第一类偶次倒数方程,所以,第一类偶次倒数方程又称为标准型倒数方程.

反商方程(reciprocal equation)　即"倒数方程".

第一类型倒数方程(reciprocal equation of the first type)　见"倒数方程".

第二类型倒数方程(reciprocal equation of the second type)　见"倒数方程".

互反方程(reciprocal equation)　见"倒数方程".

倒数方程的解法(solving process of reciprocal equations)　解倒数方程的方法. 设 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+bx+a=0(a\neq0)$ 是倒数方程,其解法是:

1. 当 $n=2m$(偶数)时,方程两边同除以 x^m,再令 $y=x+1/x$,可把原方程化为 y 的 m 次方程(令 $s_m=x^m+1/x^m$,利用对称多项式理论中有关等幂和的牛顿公式(参见本卷《高等代数》中的"牛顿公式")

可得

$$s_m = ys_{m-1} - s_{m-2}, \quad s_1 = x + \frac{1}{x} = y,$$

$$s_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$$

($m=3,4,\cdots s_m$ 是 y 的 m 次多项式).

2. 当 $n=2m+1$(奇数)时,倒数方程必有根-1,则 $f(x)=(x+1)\cdot g(x)$,于是 $g(x)=0$ 是一个偶次倒数方程.用前法可降成 m 次方程解之.这样奇次以内的倒数方程均可用上述公式求解.例如解奇次方程 $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$,原方程化为$(x+1)(2x^4+3x^3-16x^2+3x+2)=0$,再解偶次倒数方程 $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$,两边除以 x^2 后,令 $y=x+1/x$ 化为 $2y^2+3y-20=0$ 而解之.倒数方程的根有如下性质:

1. 倒数方程没有为零的根.

2. 若 x_0 是倒数方程的根,则 $1/x_0$ 也是这个方程的根.

3. 奇次倒数方程必有一个有理根 1 或-1.

倒根方程(reciprocal root equation)　其根有特殊关系的两个方程.即全部根相应互为倒数的两个一元整式方程.如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$(均不为零)是一元 n 次方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq 0,a_n\neq 0)$的 n 个根,那么以这 n 个根的倒数

$$\frac{1}{x_1},\ \frac{1}{x_2},\ \cdots,\ \frac{1}{x_n}$$

为根的一元 n 次方程称为原方程的倒根方程.把一元 n 次方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq 0,a_n\neq 0)$的各项系数次序颠倒过来的方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0(a_n\neq 0,a_0\neq 0)$就和原方程互为倒根方程.

二元一次方程(binary linear equation)　一种常用的代数方程.指含有两个未知数且次数是 1 的整式方程.它的标准形式为 $ax+by=c\ (a\neq 0, b\neq 0)$,它是不定方程,所以,在未知数 x,y 的允许取值范围所取得的满足方程的有序数对(x,y)都是它的解.一般可得原方程的同解方程

$$x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a},$$

与取 y 的每一值 y_0 相应有 x 的一值

$$x_0 = -\frac{b}{a}y_0 + \frac{c}{a},$$

(x_0,y_0)就是原方程的一个解.

不定方程(indeterminate equation)　见本卷《初等数论》同名条.

二元二次方程(binary quadric equation)　一种常见的代数方程.指含有两个未知数且次数是 2 的整式方程.二元二次方程的标准形式是 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$(a,b,c 中至少有一个不为 0),式中 ax^2,bxy,cy^2 称为这个方程的二次项,dx,ey 称为一次项,f 称为常数项.在直角坐标系中,这个方程的图象是虚的或实的、退化的或非退化的二次代数曲线.

三元一次方程(ternary linear equation)　一种常用的代数方程.指含三个未知数且次数是 1 的整式方程.三元一次方程的标准形式是 $ax+by+cz=d(abc\neq 0)$,它是不定方程,所以在未知数 x,y,z 的允许取值范围所取得的满足方程的有序三数组(x,y,z)都是它的解.一般可得原方程的同解方程

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z + \frac{d}{a},$$

而每取 y,z 的值 y_0,z_0,就相应有 x 的一个值

$$x_0 = -\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}z_0 + \frac{d}{a},$$

(x_0,y_0,z_0)就是原方程的一个解.

分式方程(fractional equation)　见"代数方程".

分式方程的解法(solving process of fractional equation)　解分式方程的方法步骤.解分式方程的基本思想是把它化为整式方程求解.这里以一元分式方程为例叙述解分式方程的两种主要方法:

1. 把分式方程的两端同乘上一个整式转化为整式方程求解.如果所乘整式是方程中各项分母的最低公倍式,则产生的增根只能是使原方程某些分母为零的根,去掉它们后剩下的根就是原方程的根,这时不会失根.

2. 把方程的所有项移到方程的一端,例如,移到左端,对左端中各项进行通分、加减、约分,最后把方程化为 $f(x)/g(x)=0$ 的形式,其中 $f(x)/g(x)$是既约分式或整式.这时方程 $f(x)/g(x)=0$ 与整式方程 $f(x)=0$ 同解,解此整式方程便可能得到原分式方程的某些解.但是,由于通分时进行了扩分,缩小了方程未知数的允许值范围,约分时又扩大了方程的未知数的允许值范围,一般情况下 $f(x)=0$ 已经不再与原分式方程同解,用解 $f(x)=0$ 代替解原分式方程既可能增根又可能失根.如果在通分过程中,方程中的第 i 个分式的分子与分母分别乘上了 $f_i(x)$($i=1,2,\cdots,k$,k 为分式方程中分式项数),则失掉的根必是某个 $f_i(x)$的根,求出所有 $f_i(x)$的根代回原方程去检验就可找回所有失根.约分时如果分式的分子分母同除以多项式 $p(x)$,则所增加的根必是 $p(x)$的根且使原方程中某个分母为零.除这两种情况外,不会有别的增根或失根.对于特殊的分式方程可用换元法或比例定理把它化成较简单的分式方程再求解.解分式方程常用的技巧有:

1. 把方程中的假分式化成整式与真分式之和.

2. 把分式方程中的各分式项，合理集项，分段化简.

3. 把某分式变形为分项分式等.

无理方程(irrational equation)　见“代数方程”.

无理方程的解法(solving process of irrational equation)　解无理方程的方法步骤. 解无理方程的一般思路是设法通过变形将无理方程转化为有理方程求解，其关键是化去根号，常用的方法有：

1. 升幂法(乘方法). 欲解无理方程

$$f(x)=g(x) \quad (1)$$

可解方程

$$[f(x)]^n=[g(x)]^n(n\in\mathbf{N}_+) \quad (2)$$

当 n 是奇数时，若在实数范围内求解，则由(1)变到(2)是同解变形；当 n 是偶数时，方程(2)的未知数允许值范围可能扩大，因而可能产生增根.

2. 换元法. 当方程中含有两个以上的非同类根式时，可选用此法. 例如，对形如

$$f(\sqrt[n_1]{f_1(x)},\sqrt[n_2]{f_2(x)},\cdots,\sqrt[n_k]{f_k(x)},x)=0$$

($f_i(x)$为有理式，n_i 为自然数，$n_i\geqslant 2,i=1,2,\cdots,k,k\in\mathbf{N}_+$，$f(y_1,y_2,\cdots,y_k,x)$为 $k+1$ 元有理式)的方程，可取变元替换

$$y_i=\sqrt[n_i]{f_i(x)}\quad(i=1,2,\cdots,k),$$

转化为方程组

$$\begin{cases}y_1^{n_1}=f_1(x),\\ y_2^{n_2}=f_2(x),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_k^{n_k}=f_k(x),\\ f(y_1,y_2,\cdots,y_k,x)=0\end{cases}$$

求解.

3. 共轭因式法. 若 $f(x)=0$ 是无理方程，$f(x)$存在共轭因式 $k(x)$，则可将其转化为有理方程$f(x)\cdot k(x)=0$ 求解. 这样做一般会改变方程的未知数允许值范围，因而最后要验根.

4. 一些特殊技巧：

1) 设 $f(x),g(x),\cdots$为有理式，解形如

$$\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=h(x)$$

的方程，可在方程两端同乘上 $\sqrt{f(x)}\mp\sqrt{g(x)}$转化为方程

$$\sqrt{f(x)}\mp\sqrt{g(x)}=\frac{f(x)-g(x)}{h(x)},$$

再将此方程与原方程两端相加(或相减)可得形如 $2\sqrt{f(x)}=k(x)$(或$2\sqrt{g(x)}=k'(x)$)的无理方程，用法 1 可求解. 在求解过程中也要注意增根与失根.

2) 对于含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ 的无理方程，可考虑用三角代换 $x=a\sin t,x=a\tan t,x=a\sec t$ 把它们化为三角方程去解.

5. 含有字母系数的无理方程，在解答时要讨论字母(参变量)的可取值范围.

指数方程(exponential equation)　一种超越方程. 指含底是常数而指数里含有未知数的项，但不含有其他超越式的方程. 也有将指数方程定义为：在指数里含有未知数的方程. 这个定义与上面定义不同之处是没有“底数是常数”的限制以及允许含有其他超越式. 因此，这样定义指数方程包含幂指方程和含有其他超越式的方程.

最简指数方程(simplest exponential equation)　一种特殊的指数方程. 未知数指数为 1 的指数方程. 形如 $a^x=b(a>0,a\neq1)$的方程，称为最简指数方程. 在 $b>0$ 时，它的解是 $x=\log_a b$. 在 $b\leqslant 0$ 时无解.

幂指方程(power-exponent equation)　一种特殊的指数方程. 指在方程中出现乘幂且底数与指数中同时含有未知数的方程. 例如 $x^x=x(x>0)$. 幂指方程的求解较为复杂，通常只讨论如下两种简单情形：限于求整数解；作为底数的未知数的函数式恒取正值. 例如，解方程

$$3^8=x^{2+\log_3 x}.$$

由 $\log_3 x$ 知 $x>0$，且方程的右边在$(0,+\infty)$上有意义，对方程的两边取以 3 为底的对数得

$$8=(2+\log_3 x)\log_3 x.$$

令 $y=\log_3 x$，得 $8=(2+y)y$. 解之有 $y_1=-4,y_2=2$，即 $\log_3 x=-4$ 或 $\log_3 x=2$，所以原方程的解为 $x_1=1/81,x_2=9$.

指数方程的解法(solving process of exponetial equations)　解指数方程的一般方法. 一般的指数方程无初等解法，但对一些特殊形式的指数方程可用初等方法求解. 其一般思路是：利用指数函数与对数函数的性质，或变元代换法，把指数方程转化为代数方程求解. 几类简单指数方程的解法是：

1. 形如 $a^x=b(a>0,a\neq1)$的方程. 根据对数的定义，当 $b>0$ 时，方程有惟一解 $x=\log_a b$；当 $b\leqslant 0$ 时，方程无实数解.

2. 形如 $a^{f(x)}=b^{g(x)}(a>0,a\neq1;b>0,b\neq1)$的指数方程：

1) 当 $a=b$ 时，方程为 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$，根据“底数不为 1 时，同底的幂相等，则指数亦相等”的幂函数性质，方程 $a^{f(x)}=a^{g(x)}$与 $f(x)=g(x)$等价. 因而只要求出方程 $f(x)=g(x)$的实数根，就是原指数方程的根.

2) 当 $a\neq b$ 时，可对方程 $a^{f(x)}=b^{g(x)}$的两边取常用对数，得等价方程 $f(x)\lg a=g(x)\lg b$，解这个方程即可.

3. 形如 $f(a^x)=0(a>0,a\neq1)$的指数方程. 常用换元法求解. 设辅助未知数 $y=a^x$，将指数方程化

为关于辅助未知数的代数方程 $f(y)=0$. 解这个代数方程求出辅助未知数的所有值 $y_1,y_2,\cdots,y_t$，从而得到 t 个最简指数方程 $a^x=y_1,a^x=y_2,\cdots,a^x=y_t$，对于每个有意义的式子，解出未知数就得到原方程的全部解. 以上解指数方程的过程中均属同解变形，是否需要验根，要看将指数方程如上化为代数方程后，该代数方程是否需要验根来决定.

指数方程的图象解法(graphic solution of exponential equation) 指数方程的一种特殊解法. 指用图象求指数方程近似解的方法. 在某些指数方程中，如方程 $2^x-4x=0$ 可采用图象解法，求出解的近似值. 图象解法的步骤是：

1. 将方程变形为 $f(x)=g(x)$ 的形式，一般把指数中有未知数的项留在方程的一端，其余项移到方程的另一端.

2. 令 $y_1=f(x),y_2=g(x)$，并在同一直角坐标系中做出函数 y_1 和 y_2 的图象. 图象 y_1,y_2 交点的横坐标就是方程的解.

3. 通过对图象的观察，估计出交点横坐标的值(或近似值).

4. 代入原方程进行检验.

对数方程(logarithmic equation) 一种超越方程. 指含有关于未知数的对数式，而不含其他超越式的方程. 例如，方程 $\log_2 x=\sqrt{x}$，$2\log_4 x+2\log_x 4=5$ 都是对数方程. 在一个对数方程中允许对数式的底数与真数都是未知数的代数式，因为用换底公式可以将其化为底数是常数的对数式.

最简对数方程(simplest logarithmic equation) 一种特殊的对数方程. 指未知数指数为 1 的对数方程. 形如 $\log_a x=b(a>0,a\neq1)$ 的方程称为最简对数方程. 根据对数的定义，原方程转换为指数式 $x=a^b$，它是最简对数方程的惟一解.

对数方程的解法(solving process of logarithmic equations) 解对数方程的一般方法. 对数方程只有在特殊情况下才能用普通初等方法求解. 在实数范围内求解一些特殊类型的对数方程的常见方法有：

1. 同底法. 主要用于求解形如 $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ 的对数方程. 对此只要求在条件 $f(x)>0,g(x)>0$ 下方程 $f(x)=g(x)$ 的解即可.

2. 换元法. 可用于下述几种类型的对数方程的求解：

1) 对于形如 $F(\log_a f(x))=0$ 的对数方程，可令 $y=\log_a f(x)$，化为代数方程 $F(y)=0$ 去解.

2) 对于形如

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\log_a f_i(x)=b$$

的对数方程，令 $y_i=\log_a f_i(x)$，使原方程转化为关于 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的 n 元一次方程

$$\sum_{i=1}^{n}a_iy_i=b.$$

3) 对于形如 $f(x)^{\log_a f(x)}=bf^{\alpha}(x)$ 的对数方程，两边取对数化为

$$\log_a^2 f(x)=\alpha\log_a f(x)+\log_a b,$$

令 $y=\log_a f(x)$，再转化为解方程 $y^2-\alpha y-\log_a b=0$.

3. 转换法. 可利用对数的定义，把对数方程中的对数式转换为指数式，从而去掉对数符号，然后求解. 转换法主要用于下述几种类型的对数方程的求解：

1) 对于形如 $\log_a f(x)=b$ 的对数方程，可在 $f(x)>0$ 的条件下解 $f(x)=a^b$.

2) 对于形如 $\log_{f(x)}g(x)=c$ 的对数方程，可在 $f(x)>0$ 且 $f(x)\neq1,g(x)>0$ 的条件下解方程

$$[f(x)]^c=g(x).$$

3) 对于形如

$$\sum_{i=1}^{n}d_i\log_a f_i(x)=b$$

的对数方程，可先化为

$$\log_a\prod_{i=1}^{n}[f_i(x)]^{\alpha_i}=b,$$

然后在 $f_i(x)>0(i=1,2,\cdots,n)$ 条件下解方程

$$\prod_{i=1}^{n}[f_i(x)]^{\alpha_i}=a^b.$$

4. 图象法. 对于在方程中除含有未知数的对数式外，还含有其他代数式的对数方程，例如 $2\log_2 x+x-8=0$，可用图象法求出它的解或解的近似值(参见“对数方程的图象解法”).

解对数方程时，由于去掉对数符号后要扩大方程未知数允许值范围及在解转化后的一些代数方程可能进行非同解变形等原因，所以最后要验根.

对数方程的图象解法(graphic solution of logarithmic equation) 用图象求对数方程近似解的方法. 在某些对数方程中，未知数不只含于对数的真数或底数里，例如，对数方程 $3\log_2 x+2x-6=0$，常采用图象解法，求出它的解或解的近似值. 图象解法的步骤是：

1. 将方程变形为 $f(x)=g(x)$ 的形式，常把真数或底数中有未知数的项留在方程的一端(如果未知数在对数的底数中，可用换底公式换到真数中去)，其余项移到方程的另一端.

2. 令 $y_1=f(x),y_2=g(x)$，在同一直角坐标系中做出函数 y_1 和 y_2 的图象，图象 y_1,y_2 交点的横坐标就是方程的解.

3. 通过对图象的观察，估计出交点横坐标的值

(或近似值).

4. 代入原方程进行检验.

方程组(system of equations) 亦称联立方程. 方程的基本概念之一. 若干个被一并考虑的方程的联合,称为方程组. 由 m 个关于 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程组成的方程组可记为

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0. \end{cases}$$

特别地,单独一个方程可认为是只含一个方程的方程组. 所谓方程组的解是指组中各方程的共同解,即组中各方程的解集的交集. 每个方程左侧都是多项式(即是整式方程)的方程组称为代数方程组,组中方程的最高次数称为这个方程组的次数. 方程组可能没有解,此时称为不相容方程组或矛盾方程组. 求出方程组的解或判定方程组无解的过程,称为解方程组(参见本卷《高等代数》中的"代数方程组").

联立方程(simultaneous equations) 即"方程组".

代数方程组(algebraic system of equations) 见"方程组".

解方程组(solving the system of equations) 见"方程组".

方程组的同解定理(equivalent theorem of the system of equations) 方程组同解变形的重要定理. 方程组在保持同解性的前提下,所允许进行变形的一些结论的统称. 为了叙述方便,约定 F_i, $\Phi_i(i=1,2,3,\cdots,m)$都表示变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的解析表达式,常用的方程组的同解定理有:

1. 同解方程代换定理. 方程组里的某一个(或几个)方程,用与它同解的一个(或几个)方程去代替,所得的方程组与原方程组同解.

2. 代入消元定理. 方程组里的某一方程,如果其中一个未知数能用另一些未知数的解析式表示出来,那么在这方程组里的另一些方程中,凡出现此未知数的地方都用这个解析式去代替,所得的方程组和原方程组同解.

3. 加减消元定理. 方程组里的两个方程的两边分别相加(减),用所得到的方程去代替这两个方程里的任一方程后所得的方程组,和原方程组同解. 一般地,若在给定数集上,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组$\{F_1=0,F_2=0,\cdots,F_m=0\}$与

$$\begin{cases} a_{11}F_1+a_{12}F_2+\cdots+a_{1m}F_m=0, \\ a_{21}F_1+a_{22}F_2+\cdots+a_{2m}F_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}F_1+a_{m2}F_2+\cdots+a_{mm}F_m=0 \end{cases}$$

同解.

4. 方程组分裂定理. 方程组里的某一方程如果一边为若干个因式的乘积,另一边为零的形式. 令这些因式分别为零而得到若干个方程,将这些方程逐一和原方程组中的其余方程组成新的方程组,那么原方程组的解就是这些新方程组的解的全体.

5. 弃去多余方程定理. 方程组中某一方程是其他某些方程的结果方程时,那么弃去这个结果方程所得新方程组和原方程组同解.

6. 换元法定理. 若方程组的每一个方程都含有某个(或几个)字母组成的相同解析式,可用一新变元代换这个解析式,便得到一个简化方程组,那么这个简化方程组及新变元代换解析式所得方程联合组成的新方程组,与原方程同解.

7. 结果方程代换定理. 如果能找到方程组的某一方程的结果方程,用它代换这个方程后所得新方程组有利于求解时,那么原方程组的解全部包含在新方程组中. 因此,凡使用过本定理进行过方程变形,必须对方程组的解进行检验,舍去增解.

相容方程组(compatible system of equations) 解方程组的一个相关概念. 有非空解集的方程组称为相容方程组,此时方程组内的各个方程彼此不矛盾,或可说各方程之间是相容的.

矛盾方程组(contradictory equations) 一种特殊的方程组. 在求解范围内无解(解集为空集)的方程组称为这个范围内的矛盾方程组. 一个方程组中,若有一个矛盾方程,它必然是矛盾方程组;若方程组中的每个方程都不是矛盾方程,但它们所表达的条件是彼此矛盾的,则它也是矛盾方程组. 矛盾方程组是相对的,它与给定的数集有关,若扩大给定的数集,有时可以使一个矛盾方程组转化为有解的非矛盾方程组,即"相容方程组".

消元法(elimination) 解方程组的一种重要方法. 按一定的规则从几个含有若干变元字母的等式中消去一个或几个变元字母的方法. 消元法有许多应用,例如:

1. 利用加减消元法、代入消元法和比较消元法等解方程组.

2. 把曲线的参数方程化为普通方程时消去参数.

3. 证明条件等式中的消元法.

4. 从空间直线方程求其在各坐标面上的投影方程时的消元法等.

在消元的过程中,如果先消去一个未知数,得到

一个新方程，再由这个新方程与其他方程消去第二个未知数，这样逐一消去方程组的未知数，直至最后得到一元方程（从而进一步求出方程组的解集），这样的消元方法称为解方程组的累次消元法.

累次消元法(repeated elimination)　见“消元法”.

代入消元法(elimination by substitution)　解方程组的一种常用方法. 对于给定的一个 n 元方程组，如果能从其中一个方程解出某个未知数，即能得到用其余未知数表示该未知数的式子，则将这个式子代入其余的方程，使方程组变成一个 $n-1$ 元方程组，称为代入消元法. 对于上述得出的 $n-1$ 元方程组，如果继续运用代入消元法，可得 $n-2$ 元方程组，如此继续进行直至得出一个一元方程，就可能最终解出原方程组的解集. 在解方程组时，为简便起见，常将代入消元法与其他消元法结合使用.

加减消元法(elimination by addition or subtraction)　解方程组的一种常用方法. 在一个 n 元方程组中，若某两个方程中含某个未知数的对应的同类项系数成比例，则可将一个方程乘上一个非零常数使两个方程对应同类项的系数的绝对值相等，然后将两式相加或相减，得到一个不含此未知数的 $n-1$ 元的方程，称为加减消元法. 加减消元法的依据是方程组同解变形的加减消元定理（参见“方程组的同解定理”），它可以用于解方程组的全过程，但经常与其他消元法结合使用.

比较消元法(elimination by comparison)　解方程组的一种常用方法. 先在两个方程中分别求出含若干个未知数的同一个式子，然后利用等量关系，消去被表示式中的某些未知数.

换元法(solving by changing variable)　亦称辅助未知数法，又称变元代换法. 解方程组的一种重要方法. 它是普遍应用的一种方法，其一般意义是将由一个或几个变元构成的数学表达式中的一部分用新的变元表示，以利于问题的解决. 这里仅给出在解方程（组）和解不等式（组）中的应用.

1. 在解一元方程（或多元方程组）的过程中，有时能用新变元代换方程的部分解析式，且代换后所得新方程更有利于求解，当解得新变元的值后，再按照原来所设的新旧变元的关系式，求出原来变元的值. 解方程应用换元法的依据是方程和方程组同解定理中的换元定理. 以一元方程为例，一元方程 $F[\varphi(x)]=0$ 与方程组

$$\begin{cases} u=\varphi(x), \\ F(u)=0 \end{cases}$$

同解.

2. 在解不等式时，亦可用新变元去代换不等式的部分解析式，而得到一个形式较简便易于求解的新不等式.

辅助未知数法(solving by changing variable)　即“换元法”.

变元代换法(solving by changing variable)　即“换元法”.

一次方程组(system of linear equations)　见本卷《高等代数》同名条.

线性方程组(system of linear equations)　即“一次方程组”.

二元一次方程组(system of binary linear equations)　亦称二元线性方程组. 一种常用的代数方程组. 即只含有两个未知数的二元一次方程组. 在初等数学中，二元一次方程组常指有两个方程的二元一次方程组，它的标准形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

其中，每个未知数至少有一个系数不为零.

二元线性方程组(binary system of linear equations)　即“二元一次方程组”.

二元一次方程组的解法(solving process of the system of binary linear equations)　解二元一次方程组的一般方法. 一个含有两个方程的二元一次方程组总可以化成它的标准形式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

其解法常见的有：

1. 代入消元法. 从一个方程，解出一个未知数，或用另一未知数表示该未知数，代入另一方程消掉该未知数得一个一元方程，解此一元方程求出一个未知数的值，再把求出的值代入前面的一个式子求出另一个未知数的值.

2. 加减消元法. 把方程组的一个或两个方程的两端乘上某些非零数，使两个方程变形后有一个未知数的系数相同（或为相反数），然后将所得二方程相减（或相加），消掉一个未知数，解之.

3. 行列式法：

1）当方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$$

时，计算

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

可求出方程组的惟一解：

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D}.$$

2）当 $D=0$ 且 $D_x\neq 0$ 或 $D_y\neq 0$ 时，方程组无解.

3）当 $D=D_x=D_y=0$ 时，可从方程组中两个方

程的任意一个求出原方程组的解(参见“二元一次方程的解法”).

4. 图象法. 在直角坐标系 xOy 中，分别做出直线 $a_1x+b_1y=c_1$ 与 $a_2x+b_2y=c_2$，若两直线相交，则交点坐标是方程组的惟一解；若两直线平行，则方程组无解；若两直线重合，则重合直线上的每一点的坐标都是方程组的解.

二元二次方程组(system of binary quadric equations)　一种常用的代数方程组. 即只含两个未知数的(两个)整式方程组成，且各整式的最高次数为二的方程组. 二元二次方程组常有两种类型：第一类型是由一个二元二次方程和一个二元一次方程所组成的方程组，它的一般形式可写成

$$\begin{cases} F_1(x,y)=a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ F_2(x,y)=d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases}$$

其中 a_1,b_1,c_1，不全为零，d_2 和 e_2 也不全为零；第二类型是由两个二元二次方程所组成的方程组，它的一般形式可写成

$$\begin{cases} F_1(x,y)=a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ F_2(x,y)=a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0. \end{cases}$$

其中 a_1,b_1,c_1 不全为零，a_2,b_2,c_2 也不全为零.

二元二次方程组的解法(solving process of the system of binary quadric equations)　解二元二次方程组的一般方法. 一般应视方程组的具体特点选择适宜的解法. 求解的基本方法是消元、降次和换元. 具体作法是：

1. 第一类型的二元二次方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, & (1) \\ \varphi(x,y)=ax+by+c=0. & (2) \end{cases}$$

常用的解法有：

1) 降次法. 如果方程组中的二次方程 $F(x,y)=0$ 的左边能分解因式，即 $F(x,y)=f(x,y)\cdot g(x,y)$，那么方程组可变形为

$$\begin{cases} f(x,y)\cdot g(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

于是解下列两个二元一次方程组即可求得原方程组的解：

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} g(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

2) 消元法. 如果方程组中的二次方程(1)难以分解因式，常将方程组中的一次式(2)等价变形为 $y=\varphi(x)$ 代入(1)中，得 $F[x,\varphi(x)]=0$，消去了未知元 y(或者将(2)式等价变形为 $x=\varphi(y)$ 代入(1)中，得 $F[\varphi(y),y]=0$，消去了未知元 x)，得到一个一元方程. 可整理成 $lx^2+mx+n=0$(或 $py^2+qy+r=0$)的形式，解出 x(或 y)的值，最后求出方程组的解.

2. 第二类型的二元二次方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, & (3) \\ G(x,y)=A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, & (4) \end{cases}$$

常用的解法有：

1) 降次法. 如果方程组的两个方程中，有一个方程的左边能分解因式，假设(3)式能分解，设 $F(x,y)=f(x,y)g(x,y)$，则方程组可变形为

$$\begin{cases} f(x,y)g(x,y)=0, \\ G(x,y)=0. \end{cases}$$

然后解出下列两个第一类型的二元二次方程组：

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ G(x,y)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} g(x,y)=0, \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

就可得到原方程组的解. 如果方程组的两个方程中的所有同类二次项的系数成比例，则可用加减消元法消去二次项，使之降次为二元一次方程. 如果方程组的两方程的左边有公因式，而右边是不等于零的常数，则可将两方程的两边分别相除，以降低方程的次数.

2) 消元法. 在方程组的两个方程中，所有含某个未知元的对应项系数成比例，则可用加减消元法消去这个未知元，可得到一个一元方程.

3) 换元法. 如果方程组中的两个方程，均含有某个相同代数式，可另设某变元代换此式，使方程组化简.

4) 图象解法. 在直角坐标系中画出两个方程组对应的曲线，两曲线交点的坐标就是方程组的实数解. 这是方程组解的几何意义. 图象解法有时只能求出方程实数解的近似值.

三元一次方程组(system of ternary linear equations)　亦称三元线性方程组. 一种常见的代数方程组. 即由一个或几个(有限个)一次方程所组成的整式方程组中只含有三个未知数的方程组. 在初等数学中常指含有三个方程的三元一次方程组，它的标准形式为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases}$$

其中，每个未知数至少有一个系数不为零.

三元线性方程组(ternary system of linear equations)　即“三元一次方程组”.

三元一次方程组的解法(solving process of the system of ternary linear equations)　解三元一次方程组的一般方法. 三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, & (3) \end{cases}$$

常用的解法有：

1. 加减消元法. 任取两个方程(假设取方程(1)

和(2))两边乘以一个适当的数,使方程中要消去的那个未知数的系数的绝对值相等,然后相加减,即可消去一个未知数,得出另两个未知数组成的一个二元一次方程(令为(4)式);然后又取另外两个方程(取(2)(3)或(1)(3)均可),用相同的方法从这两个方程中仍消去前面被消去的那个未知数,又得到一个二元一次方程(令为(5)式),则(4),(5)式构成二元一次方程组,解之,可得到这两个未知数的值,将它代入三元方程组的任一方程都可求得第一次被消去那个未知数的值,从而求得这个三元一次方程组的解.

2. 代入消元法. 先从一个方程(设为(1)式)里,把一个未知数(例如 y)化成用另两个未知数(例如 x,z)的代数式来表示,把这个代数式代入另两个方程里,就从这两个方程里消去了一个未知数(消去 y)得到一个二元一次方程组.

3. 行列式解法. 在三元一次方程组中,如果系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

再计算

$$D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

可写出方程组的惟一解是

$$(x,y,z)=\frac{1}{D}(D_x,D_y,D_z).$$

当三元一次方程组无解或解不惟一时,必须区分情况解之. 现以行列式解法为例讨论如下:

1) 当 $D\neq 0$ 时,方程组有惟一解.

2) 当 $D=0, D_x, D_y, D_z$ 中至少有一个不为零时,方程组无解.

3) 当 $D=D_x=D_y=D_z=0$ 时,三个方程中至少有一个方程是另外两个的结果方程,可以从方程组中剔除它,假设方程组中的第三个方程是前两个方程的结果方程,被剔除后得方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (4) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2. & (5) \end{cases}$$

可如下解之:当三个行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

中至少有一个不为零时,不妨设

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

可将(4),(5)表为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1-c_1z, \\ a_2x+b_2y=d_2-c_2z. \end{cases}$$

将 z 看成参数,即设 $z=t$,解之得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1-c_1t & b_1 \\ d_2-c_2t & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1-c_1t \\ a_2 & d_2-c_2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

当

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

时,如果

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

中有一个不为零,则方程组无解,否则解 $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ 可确定方程组的解.

三元齐次线性方程组(system of ternary homogeneous linear equations) 亦称三元一次齐次方程组. 一种特殊的线性方程组. 即方程组中的各个方程的常数项都是零的三元线性方程组. 在初等数学中,三元齐次线性方程组常指如下形式的方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases}$$

三元齐次线性方程组总有零解 $(x,y,z)=(0,0,0)$. 当系数行列式不等于零时,它只有零解. 当系数行列式等于零时,有无穷多个非零解(参见本卷《高等代数》中的"齐次线性方程组").

三元一次齐次方程组(system of ternary homogeneous linear equations) 即"三元齐次线性方程组".

完全三角形方程组(system of complete triangle equations) 一种特殊的线性方程组. 形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的方程组称为完全三角形方程组,其中对角线上的系数 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 都不等于零. 在完全三角形方程组中,方程的个数等于未知数的个数;任何完全三角形方程组有惟一解. 求解时可用"逐步代入法",即先从第一个方程求出 x_1,代入第二个方程求出 x_2,将 x_1 与 x_2 之值代入第三个方程求出 x_3,如此继续下

去，直到求出每个未知数值.

分式方程组(system of fractional equations) 一种常用的代数方程组. 在有理方程组成的方程组中，至少有一个方程是分式方程时，称为分式方程组. 解分式方程组时，常把方程组中各个分式方程的两边乘以适当的整式(分母的最低公倍式)，将它变形为整式方程，然后解这个整式方程组. 由于对方程两边乘以适当的整式非同解变形，有增根的可能，因此，必须把求得的整式方程组的解代入所乘的整式或代入原方程组进行检验.

无理方程组(system of irrational equations) 一种常用的代数方程组. 即至少有一个是无理方程的代数方程组，其解法的一般步骤是：

1. 化无理方程为有理方程，化法参见“无理方程的解法”.
2. 解由有理方程组成的方程组.
3. 验根.

指数方程组(system of exponential equations) 一种常用的代数方程组. 指由几个指数方程，或至少有一个指数方程和几个代数方程组成的方程组. 其解法的一般步骤是：

1. 把方程组中的指数方程化为代数方程.
2. 解代数方程组.
3. 验根.

对数方程组(system of logarithmic equations) 一种常用的代数方程组. 指由几个对数方程，或至少有一个对数方程和几个代数方程组成的方程组. 解对数方程组的一般步骤是：

1. 把方程组中的对数方程化为代数方程，化法参见“对数方程的解法”.
2. 解代数方程组.
3. 验根.

函数与数列

函数(function) 见本卷《数学分析》同名条.

变量(variable) 亦称变数或变元. 见本卷《数学分析》同名条.

变元(variable) 即“变量”.

常量(constant) 亦称常数. 见本卷《数学分析》同名条.

常数(constant) 即“常量”.

中间变量(intermediate variable) 见本卷《数学分析》同名条.

函数的相等(equality of functions) 函数间的一种等价关系. 设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的定义域分别是 D_1 与 D_2，如果 $D_1=D_2=D$，且对任意 $x\in D$，有 $f_1(x)=f_2(x)$，则称函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 相等，常记为 $f_1(x)=f_2(x)$. 函数的相等也可表述为：若两个函数有相同的定义域和相同的对应关系，则称这两个函数相等.

函数的表示法(representative method of a function) 表示函数的一般方法. 常用的表示法有：

1. 解析法. 用解析式表示两个变量之间的函数关系. 如果把因变量直接表示成自变量的解析式，这种表示法称为函数的显式表示法，例如 $y=2\sin x+1$，$y=\lg\sqrt{1-x^2}$ 等；如果因变量与自变量之间的关系是用含两种变量的解析式的方程式表示，这种表示法称为函数的隐式表示法，例如 $x^2+y^2=1$，$x\sin y-xy=0$ 等.

2. 列表法. 把自变量的一系列值与相应的函数值列成一个表格，表示两种变量之间的函数关系. 例如各种数学用表.

3. 图象法. 对一元或二元函数，用函数在坐标系中的图象表示函数. 一元函数在平面直角坐标系中的图象常是曲线，二元函数在空间直角坐标系中的图象常是曲面.

函数的显式表示法(representation of a function in explicit form) 见“函数的表示法”.

函数的隐式表示法(representation of a function in implicit form) 见“函数的表示法”.

函数的图象(graph of a function) 见本卷《数学分析》同名条.

正比例函数(direct proportion function) 一种常用的函数. 即因变量与自变量成正比的函数. 即实变数函数 $y=kx$(k 为非零实常数)，其中 k 称为比例系数，它是一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 在 $b=0$ 时的特例. 其性质是：正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 是奇函数；当 $k>0$ 时，它是严格增函数，当 $k<0$ 时，它是严格减函数；它在 R 上连续，可导且存在任意阶导数：$y'=k$，$y^{(n)}=0$，$n=2,3,\cdots$

正比例函数的图象(graph of direct proportion function) 正比例函数的几何表示. 即在平面直角坐标系中，正比例函数 $y=kx$(k 为非零实常数)的图象是一条过原点(0,0)和点$(1,k)$的直线. 若直线的倾斜角为 α，则直线斜率 $k=\tan\alpha$，$0<\alpha<\pi$，当 $k>0$ 时，直线在Ⅰ，Ⅲ象限，当 $k<0$ 时，直线在第Ⅱ，Ⅳ象限.

反比例函数(inverse proportion function) 一种常用的函数. 即因变量与自变量成反比的函数. 即实变数函数

$$y=\frac{k}{x}\ (k\text{ 为非零实常数}),$$

其中 k 称为反比例系数. 反比例函数的定义域为 $\{x|x\neq0,x\in\mathrm{R}\}$；值域为 $\{y|y\neq0,y\in\mathrm{R}\}$. 反比例函数的反函数是它自身. 反比例函数

$$y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0),$$

是奇函数；当 $k>0$ 时，在区间 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上均是严格减函数；当 $k<0$ 时，在上述区间上均是严格增函数；除 $x=0$ 外，反比例函数处处连续且处处可导：

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!k}{x^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots).$$

反比例函数的图象(graph of inverse proportion function)　反比例函数的几何表示. 即在直角坐标系中，反比例函数

$$y=\frac{k}{x}\ (k\neq 0)$$

的图象是以坐标轴为渐近线的等轴双曲线. 当 $k>0$ 时，双曲线的两支分别在第 Ⅰ 与第 Ⅲ 象限内(图 1)；当 $k<0$ 时，双曲线的两支分别在第 Ⅱ 与第 Ⅳ 象限内(图 2).

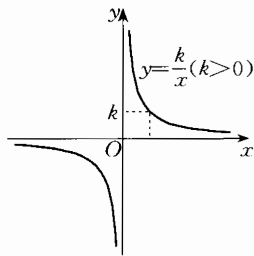


图1

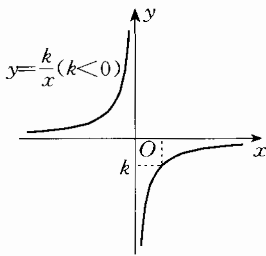


图2

线性函数(linear function)　一类重要的有理函数. 指一个或多个自变量的齐次或非齐次的一次整式所表示的函数. 分两种形式：

1. 一元线性函数. 通常指一次函数 $y=kx+b$ (k,b 均为常数，$k\neq 0$). 线性函数的基本性质是：函数值的增量与自变量的增量成正比例，在直角坐标平面中，线性函数的图象是一条直线.

2. 多元线性函数. 形如 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a$ (其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a$ 是常数，且 $a_1,\cdots,a_n$ 不全为零)的函数称为 n 元线性函数，又称 n 元一次函数. n 元线性函数的定义域是 n 个实(或复)变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的整个 n 维空间. 当 $a=0$ 时，上述形式的线性函数称为齐次线性函数或线性型. 如果变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a$ 都是实数，那么 n 维线性函数在变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y$ 的 $(n+1)$ 维空间中的图象是 n 维超平面 $y=a_1x_1+a_2x_2+\cdots a_nx_n+a$.

线性齐次函数的同义语是线性型.

一元一次函数(linear function of one variable)　见"线性函数". 实一元一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 具有下列性质：在平面直角坐标系中它的图象是一条直线，$k>0$ 时，函数是严格增函数，$k<0$ 时，函数是严格减函数；函数在 R 上处处连续，处处可微且存在任意阶导数：$y'=k,y^{(n)}=0(n=2,3,\cdots)$.

齐次线性函数(homogeneous linear functions)　见"线性函数".

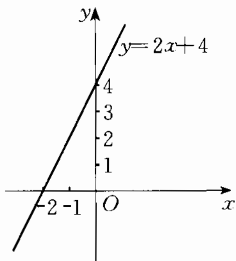
线性插值法(linear interpolation)　计算函数近似值的一种方法. 设已知函数 $y=f(x)$ 在自变量 x_1 与 x_2 处的函数值为 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$，为了计算在自变量 $x(x_1<x<x_2)$ 处的函数值 $f(x)$，可以假定坐标平面上三点 $(x_1,f(x_1))$，$(x,f(x))$，$(x_2,f(x_2))$ 在一条直线上(即认为函数 $y=f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的图象是一条直线)，利用公式

$$f(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)}(x-x_1)$$

来计算 $f(x)$. 这个公式称为线性插值公式.

线性插值公式(linear interpolation formula)　见"线性插值法".

一次函数的图象(graph of a linear function)　一次函数的几何表示. 即在平面直角坐标系中，一元一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象是一条过点 $(0,b)$ 与点 $(-b/k,0)$ 的直线，其斜率 $k=\tan\alpha$. 例如函数 $y=2x+4$ 的图象如图. 在空间直角坐标系中. 二元一次函数 $y=a_1x_1+a_2x_2+a_3$ 的图象是一个平面.



二次函数(quadratic function)　一类重要的有理函数. 指一个或多个自变量的二次整式所表示的函数. 分两种形式：

1. 一元二次函数. 形如 $y=ax^2+bx+c$ (a,b,c 为常数，且 $a\neq 0$)的函数称为二次函数. $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 称为二次函数的一般式，$y=a(x-m)^2+k(a\neq 0)$ 称为二次函数的顶点式，其中 m,k 分别是二次函数图象中抛物线顶点的横、纵坐标.

2. 多元二次函数. n 元二次多项式所表示的函数称为 n 元二次函数，它的标准形式是

$$y=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c,$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 不全为零.

实一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a,b,c\in$ R，$a\neq 0$，$x\in$ R)的主要性质有：在区间 $(-\infty,-b/2a)$ 内与区间 $(-b/2a,+\infty)$ 内皆是严格单调的. 当 $x=-b/2a$ 时，它有最大值或最小值，若 $a>0$，它有最小值

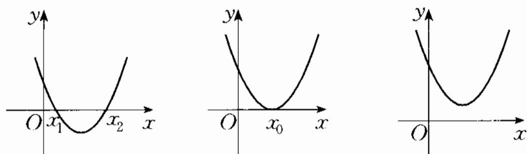
$$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a};$$

若 $a<0$，它有最大值

$$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

二次函数在R上连续、可导.二次函数在直角坐标系中的图象的性质详见“二次函数的图象”.

二次函数的图象(graph of a quadratic function) 二次函数的几何表示.即在平面直角坐标系中,二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象是抛物线,其位置和形状由系数 a,b,c 确定,并与二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有关:



1.二次项系数 a 决定抛物线的开口:$a>0$ 开口向上,曲线下凸;$a<0$ 开口向下,曲线上凸.

2.二次方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 决定抛物线相对于 x 轴的位置.

1) $\Delta<0$,二次方程无实根,抛物线与 x 轴不相交,抛物线在 $a>0$ 时全部在 x 轴之上,在 $a<0$ 时全部在 x 轴之下.

2) $\Delta=0$,二次方程有重根 $x_0=-b/2a$,抛物线与 x 轴交于一个点,即相切于其顶点 $(x_0,0)$.

3) $\Delta>0$,二次方程有两个实根 $x_1,x_2=(-b\pm\sqrt{\Delta})/2a$,抛物线与 x 轴相交于两个点 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$.

3.因 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$.将它看做抛物线的方程变形,得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{y+\frac{\Delta}{4a}}{a},$$

经移轴 $x=x'-b/2a$,$y=y'-\Delta/4a$,得新方程 $x'^2=y'/a$.这是抛物线在新直角坐标系里以 y' 轴为对称轴的标准方程(参见本卷《平面解析几何》中的“抛物线的标准方程”).于是可推得抛物线各个几何元素:对称轴方程 $x=-b/2a$,顶点 $(-b/2a,-\Delta/4a)$,焦参数 $p=1/2|a|$,焦点 $(-b/2a,(1-\Delta)/4a)$,准线方程 $y=-(\Delta+1)/4a$.

三次函数(cubic function) 一类重要的有理函数.指因变量用自变量的三次多项式表示的一元函数.三次函数的一般形式是 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$.一元三次实函数在直角坐标系中的图象常称为三次抛物线或立方抛物线.

立方抛物线(cubic parabola) 亦称三次抛物线(参见“三次函数”).在平面直角坐标系中,指函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d\in\mathrm{R}$ 且 $a\neq 0)$ 的图象所表示的曲线.当 $b=c=d=0$ 时,$y=ax^3(a\neq 0)$ 的图象是立方抛物线的特殊情况.如图1和图2所示.当 $a>0$ 时,曲线在Ⅰ,Ⅲ象限(图1);当 $a<0$ 时,曲线在Ⅱ,Ⅳ象限(图2).$y=ax^3$ 的图象总经过原点.

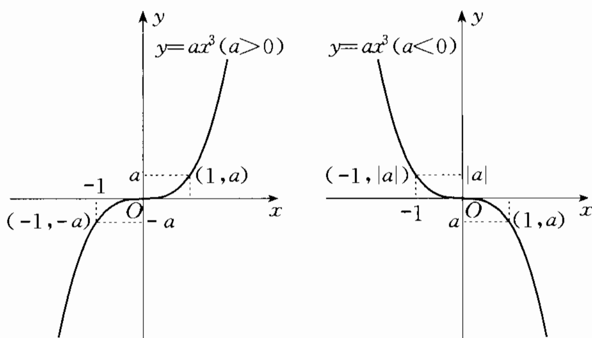


图1　　图2

立方抛物线常用于分段逼近其他曲线,生产上有着广泛应用,如计算船体放样中的样条曲线就用到立方抛物线.

三次抛物线(cubical parabola) 即“立方抛物线”.

代数函数(algebraic function) 见本卷《数学分析》同名条.

有理函数(rational function) 见本卷《数学分析》同名条.

无理函数(irrational function) 一种代数函数.不是有理函数的代数函数称为无理函数.或者说对应规律含对自变量的开方运算的代数函数称为无理函数.例如 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+x$,$f(x,y)=\sqrt{x}-3y$ 都是无理函数.

幂函数(power function) 见本卷《数学分析》同名条.

指数函数(exponential function) 见本卷《数学分析》同名条.

对数函数(logarithmic function) 见本卷《数学分析》同名条.

初等函数(elementary function) 见本卷《数学分析》同名条.

基本初等函数(fundamental elementary function) 见本卷《数学分析》同名条.

初等超越函数(elementary transcendental function) 不是代数函数的初等函数的统称.

函数的极大值(maximum of a function) 见本卷《数学分析》中的“函数的局部极值”.

函数的极小值(minimum of a function) 见本卷《数学分析》中的“函数的局部极值”.

函数的极值(extremum of a function) 函数的极大值与极小值的统称.

函数的最大值(largest value of a function) 见本卷《数学分析》同名条.

函数的最小值(smallest value of a function) 见本卷《数学分析》同名条.

函数的最值(largest or smallest value of a

function) 函数的最大值与最小值的统称.

求一元函数极值的方法(method of finding the extremum of a function of one variable) 一元函数求极值的方法.即寻求一个实变量的实值函数的极大值与极小值的方法.常用的方法有：

1.利用导数求极值.若连续函数 $f(x)$在 x_0 点的一个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$内有意义,$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$不存在,且 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时 $f'(x)<0$,$x\in(x_0,x_0+\delta)$时 $f'(x)>0$(或 $f''(x_0)>0$)则 $f(x)$在 $x=x_0$ 点有极小值;若 $f(x)$在 x_0 点的一个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内有意义,$f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$不存在,且 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时 $f'(x)>0$,$x\in(x_0,x_0+\delta)$时 $f'(x)<0$(或 $f''(x_0)<0$),则 $f(x)$在 $x=x_0$ 点有极大值.

2.利用函数的单调性求极值.若连续函数 $f(x)$在 x_0 的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内有定义,当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时,函数 $f(x)$单调增加,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时函数单调减少,则函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处有极大值;若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时 $f(x)$单调减少,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时单调增加,则函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处有极小值.

求一元函数最大值和最小值的方法(method of finding the largest or smallest value of a function of one variable) 求一元函数最值的方法.即寻求一个实变量的实值函数的最大值与最小值的方法.常用的方法有：

1.首先求出函数的极值(参见“求一元函数极值的方法”)、函数定义域的边界点的函数值、极值点不可微点的函数值,然后比较这些值的大小,以确定最大值,最小值.为了简便起见,可以不求极值,只解方程$f'(x)=0$,解出的根 x_i 是可能的极值点,把 $f(x_i)$与边界点函数值及不可微点函数值一同比较以确定最值.应注意,函数不一定存在最大值(或最小值),如果存在,必是惟一的,当然最大值点(或最小值点)不一定惟一.最大值最小值存在的一个充分条件是函数在闭区间上连续.

2.通过求出函数的值域确定最值.例如,设 $y=f(x)$是一元函数,将它变形为 $f(x)-y=0$,视 y 为参变数,找出这个方程有实解的必要充分条件,从而确定 y 需满足的条件,进而求出函数 $y=f(x)$的值域并求出函数的最值.

3.利用配方求最值.

4.利用换元法求最值.其要点是把函数式化为较易求出最值的函数.

5.利用函数的单调性求最值.

6.利用函数图象求最值.做出函数图象,从图象上读出函数最值(一般为近似值).

数列(progression) 见本卷《数学分析》同名条.

数列的通项公式(formula of the general term of progressions) 数列的一般项的表达式.指将数列的通项 a_n 表示成它的序号 n 的函数关系式 $a_n=f(n)$.例如,以 d 为公差的等差数列的通项公式是

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

常数列(constant progression) 一种特殊数列.即数列$\{x_n\}$的各项有相同的值,即 $x_n=a$(a 是定数,$n=1,2,3,\cdots$).

等差数列(arithmetic progression) 亦称算术数列.一种基本数列.从第二项开始,每一项与前一项的差都等于同一个常数 d 的数列.常数 d 称为这个等差数列的公差.首项为 a_1,公差为 d 的等差数列,其第 n 项(通项公式)是 $a_n=a_1+(n-1)d$,前 n 项之和是

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

各项不为零的有限数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列的充分必要条件是下列 $n-2$ 个等式成立：

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{a_ia_{i+1}}=\frac{k-1}{a_1a_k}\ (k=3,4,\cdots,n).$$

等差数列的主要性质如下：

1.若项数有限时,与首末两项等距离的两项之和等于首末两项之和.

2.在等差数列的各项加上(或减去)一个相同的数,所得的结果仍为等差数列.

3.在等差数列的各项乘以(或除以)同一个不等于零的数,所得的结果仍为等差数列.

4.若$\{a_n\}$为等差数列,则

$$a_1+a_2C_n^1+a_3C_n^2+\cdots+a_{n+1}C_n^n=(a_1+a_{n+1})\cdot 2^{n-1}.$$

5.若$\{a_n\}$为等差数列,则

$$a_1-a_2C_n^1+a_3C_n^2-\cdots+(-1)^na_{n+1}C_n^n=0.$$

算术数列(arithmetic progression) 即“等差数列”.

等差中项(arithmetic mean) 亦称算术中项.数列中的特殊项.如果三个数 a,b,c 构成等差数列,则数 b 称为数 a,c 的等差中项.显然,两数 a,c 的等差中项等于这两数的算术平均数$(a+c)/2$.反过来,如果三数 a,b,c 有 $b=(a+c)/2$,则它们是等差数列.一般地,如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列,则 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$称为 a_1 与 a_n 的 $n-2$ 个等差中项或等距中项,显然

$$a_k=a_1+\frac{a_n-a_1}{n-1}\cdot(k-1),$$

其中 $k=2,3,\cdots,n-1$(参见“平均”).

算术中项(arithmetic mean) 即“等差中项”.

算术级数(arithmetical series) 亦称等差级

数. 一种由等差数列构成的级数. 即把无穷等差数列的所有各项依次用“+”号连结起来得到的级数. 例如 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 是等差数列,那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

就是算术级数.

等差级数(arithmetic series) 即“算术级数”.

等比中项(geometric mean) 亦称几何中项. 数列中的特殊项. 如果三个数 a,b,c 构成等比数列,则 b 称为数 a,c 的等比中项. 它满足:$b^2=ac$. 显然 a,c 是同正或同负的实数,等比中项 $b=\pm\sqrt{ac}$. 一正一负的两个实数没有等比中项. 一般地,如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n(a_i,i=1,2,\cdots,n$ 均为实数)是等比数列,则称 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$ 是 a_1 与 a_n 的 $n-2$ 个等比中项:

1. 当 a_1 与 a_2 异号时,n 为偶数才有 $n-2$ 个等比中项,它们是

$$a_k=a_1\left(\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}\right)^{k-1}\quad(k=2,3,\cdots,n-1).\qquad(1)$$

2. 当 a_1 与 a_n 同号时,若 n 为偶数,它们有惟一的一组等比中项(1),若 n 为奇数,除(1)外还有另一组等比中项

$$a_k = (-1)^{k-1}a_1\left(\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}\right)^{k-1}(k = 2,3,\cdots,n-1),$$

(参见“平均”).

几何中项(geometric mean) 即“等比中项”.

等比数列(geometric progression) 亦称几何数列. 一种基本数列. 即从第二项起数列每一项与它的前一项的比等于一个非零常数 q 的数列. 常数 q 称为数列的公比. 首项为 a_1,公比为 q 的等比数列的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$,前 n 项和公式为

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1),\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1).\end{cases}$$

有三项以上的等比数列的每一项均不为零,公比也不会为零. 等比数列的主要性质如下:

1. 当项数有限时,与首末两项等距离的两项之积等于首末两项之积.

2. 在一个等比数列的各项中乘以同一个不等于零的数,所得的积仍组成等比数列.

3. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列,q 为公比,则

$$a_1 + a_2C_n^1 + a_3C_n^2 + \cdots + a_{n+1}C_n^n = a_1(1 + q)^n.$$

4. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列,q 为公比,则

$$a_1-a_2C_n^1+a_3C_n^2+\cdots+(-1)^na_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n.$$

几何数列(geometric progression) 即“等比数列”.

无穷递缩等比数列(infinite shrink geometric progression) 一种重要的等比数列. 即公比 q 满足 $|q|<1$ 的无穷等比数列 $\{a_n\}$.

递增数列(increasing sequence) 一类常见的数列. 若一个数列从第 2 项起,每一项都大于或等于它前面的一项($a_{n+1}\geqslant a_n$),则这个数列称为递增数列. 例如,数列

$$1,2,3,4\cdots;\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\cdots.$$

递减数列(decreasing sequence) 一类常见的数列. 若一个数列从第 2 项起,每一项都小于或等于它前面的一项($a_{n+1}\leqslant a_n$),则这个数列称为递减数列. 例如,数列 0.1,0.01,0.001,0.0001.…;2,1,0,−1,−2,…;

摆动数列(sequence of pendulum type) 一类常见的数列. 若一个数列既不是递增数列,又不是递减数列,则称为摆动数列. 例如,数列:

$$1,\ -\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\frac{1}{16},\ -\frac{1}{32},\cdots;$$

$$1,2,\ -3,\ -4,5,6,7,\ -8,\ -9,\ -10,\cdots.$$

几何级数(geometric series) 亦称等比级数. 一类重要级数. 即由等比数列构成的级数. 如果 $\{x_n\}$ 是首项为 a,公比为 q 的无穷等比数列,则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = a + aq + aq^2 + \cdots$$

称为几何级数. 该级数的前 n 项和为

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1),\\ na & (q=1).\end{cases}$$

当 $|q|<1$ 时,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q},$$

称为无穷几何级数的和. 它也是无穷递缩等比数列的所有项之和;当 $|q|\geqslant 1$ 时几何级数发散,即和不存在.

等比级数(geometric series) 即“几何级数”.

调和数列(harmonic progression) 一类特殊数列. 其各项的倒数构成等差数列. 例如,自然数的倒数依次组成的数列 1,1/2,1/3,…,是一个调和数列,调和数列可表成

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a+d},\ \cdots,\ \frac{1}{a+(n-1)d},\ \cdots,$$

调和数列无求和公式. 若用同质等粗的弦,以该数列各项的数值为弦的长度,以相等的张力安置于乐器上,其中两弦同时发音必能调和. 故得此数列之名.

调和中项(harmonic mean) 数列中的特殊项. 指成调和数列的三个数中的第二个数. 若三个非零数 a,b,c 成调和数列,则

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b},$$

于是有

$$b=\frac{2ac}{a+c},$$

非零数 b 就称为 a 和 c 的调和中项(参见"平均").

调和级数(harmonic series) 见本卷《数学分析》同名条.

平均(average) 亦称均值或平均值.数学的基本概念之一.实数列在各种意义下的均衡数统称为平均.设给定实数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,常见的平均为

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n},$$

称其为算术平均;而均衡数

$$G=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}\quad(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$$

称其为几何平均;而均衡数

$$H=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}\quad(a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$$

称其为调和平均;而均衡数

$$Q=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

称其为二次平均.当 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$时有
$\min\{a_1,\cdots,a_n\}\leqslant H\leqslant G\leqslant A\leqslant Q\leqslant\max\{a_1,\cdots,a_n\}$,
并且,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.当 $n=3$ 时,算术数列(即等差数列)、几何数列(即等比数列)和调和数列的中间项,即算术中项(等差中项)、几何中项(等比中项)和调和中项正好是此三数列的首尾两数的算术平均、几何平均和调和平均,这是这些平均命名的根源.在历史上,据说早在公元前6世纪,毕达哥拉斯学派就已使用三种中项:算术中项,几何中项和调和中项,其定义用现代符号表示为:对正数 $a,c,a>c$,由比例式

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a},\quad\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b},\quad\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$$

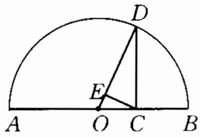
确定的正数 b 分别称为 a,c 的算术、几何、调和中项.易知这三种情形分别有

$$b=\frac{a+c}{2},\quad\sqrt{ac},\quad\frac{2}{a^{-1}+c^{-1}}.$$

当时也已知道:调和中项≤几何中项≤算术中项.古代数学家还提出过其他中项.例如,海伦(Heron,(A))提出的海伦平均为$(a+\sqrt{ac}+c)/3$,帕普斯(Pappus,(A))在其《数学汇编》第三卷中记载了12种中项.除算术、几何、调和中项外,还有由

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a},\quad\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a},\quad\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$$

等确定的中项 b.帕普斯还给出前三种中项的几何解释(见图):在半圆的直径 AB 上取圆心 O 外的点 C,从 C 作 AB 的垂线交半圆周于 D,设 E 是从 C 到 OD 的垂线足.于是 OD,CD,ED 分别是 AC 和 BC 的算术、几何、调和中项.算术中项 $b=(a+c)/2$ 得名于 b 是 a 和 c 的算术和的平均值;几何中项 $b=\sqrt{ac}$ 得名于 b 是长度为 a,c 的线段的比例中项.据说调和中项原名次反中项,后由毕达哥拉斯学派第二代门徒阿尔希塔斯(Archytas,(T))和希帕索斯(Hippasus,(M))改为调和中项.调和来源于音乐,一个音符的波长和它的八度音的波长的调和中项是这个音符的五度音的波长,和它的五度音的波长的调和中项又是它的大三度音的波长.按照调和中项设置音阶能得到和谐的乐声.对正数 a 和 c,



$$\frac{a^2+c^2}{a+c},\quad\left[\frac{a^2+c^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}},\quad 2\,\frac{a^2+ac+c^2}{3}(a+c)$$

分别称为它们的反调和、二次、重心中项.当 $a\neq c$ 时有:反调和中项>二次中项>重心中项>算术中项>海伦中项>几何中项>调和中项.

算术平均(arithmetic average) 见"平均".

几何平均(geometric average) 见"平均".

调和平均(harmonic average) 见"平均".

二次平均(second average) 见"平均".

海伦平均(Heron value) 见"平均".

高阶等差数列(arithmetic sequence of higher order) 等差数列的一种直接推广.该数列的高阶差分成等差数列.任一数列(第二项起)的每一项减去前一项的差称为差分.差分等于常数 d 的数列是等差数列,d 是其公差,任一数列的差分依序排成的数列称为该数列的一阶差分.等差数列的一阶差分是由公差 d 组成的常数列.常数列的一阶差分全由0组成.任一数列的一阶差分的差分称为原数列的二阶差分,二阶差分的一阶差分称为三阶差分等.因此,对任一数列可导出其任意(正整数)阶的差分.如果一个数列的高阶差分中出现等差数列而它本身又不是等差数列,则该数列称为高阶等差数列.当高阶等差数列的最先呈现为等差数列的差分(数列)的阶是 $r-1$ 时,它就称为 r 阶等差数列,可以把等差数列看成高阶等差数列而称为1阶等差数列.r 阶等差数列的一阶差分是 $r-1$ 阶等差数列,其 r 阶差分是常数,而 $r+1$ 阶以上的差分都是0.例如,对于数列 1,8,27,64,125,216…有:

一阶差分 7,19,37,61,91,…;

二阶差分 12,18,24,30,…;

三阶差分 6,6,6,…;

四阶差分及以后者皆为0.故此数列为3阶等差数列.设 r 阶等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots$,各阶

差分的首项分别为 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{r-1}$. 则第 n 项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{(n-1)\cdots(n-r)d_{r-1}}{1 \cdot 2 \cdots r-1}.$$

前 n 项和公式为

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)d_1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r)d_{r-1}}{1 \cdot 2 \cdots}.$$

高阶等差数列有如下重要性质：

1. 若将 r 阶等差数列的第 n 项公式展开，且依 n 之降幂排列，可得下面多项式 $a_n = b_0 n^r + b_1 n^{r-1} + \cdots + b_r$，其中系数 $b_0, b_1, \cdots, b_r$ 与项数 n 无关.

2. 设 $f(x)$ 代表任一 r 次有理整函数，如 $f(x) = b_0 x^r + b_1 x^{r-1} + \cdots + b_r$. 若在 $f(x)$ 中依次令 $x=1, 2, 3, \cdots$，所得之数列 $f(1), f(2), f(3), \cdots$ 为 r 阶等差数列(此为上述性质 1 的逆定理).

3. 连续整数的 r 次乘幂必组成 r 阶等差数列.

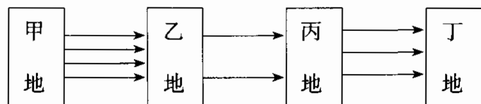
4. r 阶等差数列与 s 阶等差数列各对应项之积，必组成 $(r+s)$ 阶等差数列.

差分(difference)　见“高阶等差数列”.

排列组合与二项式定理

加法原理(addition principle)　排列组合的一个基本原理. 殊途同归行程走法总数的算法，此数等于按各途径可行的互斥走法数的和. 如果完成某事件有 k 种不同的途径，而每一途径又分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 种不同的方法，并且这些方法彼此互斥，那么完成这件事共有 $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 种不同的方法. 例如，从甲地到乙地可以乘飞机、火车、汽车. 飞机每天有 2 班，火车每天有 3 班，汽车每天有 4 班，那么从甲地到乙地共有多少种不同的走法？根据加法原理共有 $N=2+3+4=9$ 种不同的走法.

乘法原理(multiplication principle)　排列组合的一个基本原理. 需分步完成的事件做法总数的算法，它等于各步骤做法数的积. 如果完成某事件分 k 个步骤，而完成每一步骤又分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 种不同的方法，各个步骤均完成时，该事件才算完成，那么完成这事件共有 $N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ 种不同的方法. 例如，由甲地到乙地有 4 条路可走，乙地到丙地有 2



条路可走，丙地到丁地有 3 条路可走(如图)，从图中可看出从甲地经乙地、丙地到丁地共有 $N=4\times2\times3=24$ 种不同的走法.

阶乘(factorial)　乘法概念的一种推广. 从 1 到 n 这 n 个连续自然数的连乘积，称为 n 的阶乘，记为 $n!$ 或 $\underline{n|}$. 即 $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$. 当 $n=0$ 时，定义零的阶乘为 1，即 $0!=1$；当 n 较大时，可用如下的斯特林公式求出 $n!$ 的近似值

$$n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

伊夫斯(Eves, H.)在《数学史概论》上说“$n! \approx (2\pi n)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n} n^n$ 被误称为斯特林公式，其实起源于棣莫弗(De Moivre, A.)，这对大数的阶乘数的近似值计算很有用”.

双阶乘(double factorial)　亦称跳乘. 阶乘概念的推广. 指开头 n 个自然数中

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

个按 n 的奇偶性而定奇数或偶数的连乘积. 当 n 是奇自然数时，前 $(n+1)/2$ 个奇自然数的积称为 n 的双阶乘；当 n 是偶自然数时，前 $n/2$ 个偶自然数的积称为 n 的双阶乘. n 的双阶乘记为 $n!!$，

$$n!! = n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdots = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots\cdot 3\cdot 1 (n\text{ 为奇数}), \\ n(n-2)(n-4)\cdots\cdot 4\cdot 2 (n\text{ 为偶数}). \end{cases}$$

显然，$(2n)!! = 2^n \cdot n!$.

跳乘(double factorial)　即“双阶乘”.

排列(permutation)　数学的重要概念之一. 有限集的子集按某种条件的序化法排成列、排成一圈、不许重复或许重复等. 从 n 个不同元素中每次取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同元素，排成一列，称为从 n 个元素中取出 m 个元素的无重复排列或直线排列，简称排列. 两个排列相同，当且仅当所取到的元素相同并且排列的顺序完全一致. 只要所取元素个数不同，或虽然所取元素个数相同但有不同元素，或虽然所取元素相同但排列顺序不一致，作成的排列都是不同的排列. 从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的所有不同排列的个数称为排列种数或称排列数，记为 P_n^m(或 A_n^m, ${}_n\mathrm{P}_m$)，

$$\mathrm{P}_n^m = n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

排列可分选排列与全排列两种，在从 n 个不同元素取出 m 个不同元素的排列中，当 $m<n$ 时，这个排列称为选排列；当 $m=n$ 时，这个排列称为全排列. n 个元素的全排列的个数记为 P_n，

$$\mathrm{P}_n = n(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1 = n!$$

一个从 n 个元素中取 m 个元素的排列可以看成这 n 个元素组成的集合 A 的一个 m 元有序子集，于是 A 的 m 元有序子集的个数为 P_n^m.

选排列(choice permutation) 见"排列".

全排列(all permutation) 见"排列".

重复排列(permutation with repetition) 排列的一种.从 n 个不同的元素中,每次取出 m 个元素,但同一元素可以重复取出,排成一列,称为一个可重复排列.在作一个可重复排列时,如果元素 a 被取上几次,排列中它就出现几次,但同一元素的位置交换不能认为是不同排列.两个可重复排列相同当且仅当所取的元素相同,并且同一元素取的次数相同,在排列中占的位置也相同.从 n 个元素中可重复地选取 m 个元素的可重复排列个数称为可重复排列种数,记为$\bar{P}_n^m$. $\bar{P}_n^m=n^m$.如果记 n 个元素的集合为 A,那么从中可重复选取 m 个元素作成的一个排列,实质上是 A 的笛卡儿积

$$A^m=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{m\text{个}A}$$

的一个元素.如果从 n 个不同元素中取 m 个不同元素,使各元素可分别重复 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 次(这里 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=n$)这种不尽相异元素的全排列种数是

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!}=\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_m!}.$$

环排列(circular permutation) 亦称圆排列、循环排列等.排列的一种.指从 n 个不同元素中取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$个不同的元素排列成一个环形,既无头也无尾.两个环排列相同当且仅当所取元素的个数相同并且元素取法一致,在环上的排列顺序一致."环上排列顺序一致"有以下两种不同的意义:

1. 从某一元素起观察,各元素的先后顺序相同,并且环绕方向相同(同为顺时针方向环绕或同为逆时针方向环绕).

2. 从某一元素起观察,各元素的先后顺序相同,而不考虑环绕方向的不同.按前一种意义理解的环排列称为平面环排列,按后一种意义理解的环排列称为(三维)空间环排列.从 n 个不同元素中取 m 个不同元素作成的平面环排列的种数为

$$R_{n\text{平}}^m=\frac{2}{m}P_n^m=2C_n^m(m-1)!,$$

空间环排列的种数为

$$R_{n\text{立}}^m=\frac{1}{m}P_n^m=C_n^m(m-1)!.$$

圆排列(circle permutation) 即"环排列".

平面环排列(plane circular permutation) 见"环排列".

空间环排列(space circular permutation) 见"环排列".

排列总数(total number of permutations) 一个正整数.指从 n 个不同元素里每次取出 1 个,2 个,$\cdots$,n 个不同元素的所有排列数的总和为

$$\sum_{i=1}^{n}P_n^i.$$

n 元集合元素的排列总数等于它的非空有序子集的个数.

组合(combination) 数学的重要概念之一.从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素($0\leqslant m\leqslant n$),不管其顺序合成一组,称为从 n 个元素中不重复地选取 m 个元素的一个组合.所有这样的组合的种数称为组合数,这个组合数的计算公式为

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!},C_n^0=1.$$

n 元集合 A 中不重复地抽取 m 个元素作成的一个组合实质上是 A 的一个 m 元子集合.如果给集 A 编序 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$成为一个序集,那么 A 中抽取 m 个元素的一个组合对应于数段 $N_m=\{1,2,\cdots,m\}$到序集 A 的一个确定的严格保序映射.组合数 C_n^m 的常用符号还有

$$\binom{n}{m},\ C(n,m),\cdots$$

组合数(combination number) 见"组合".

组合总数(total number of combinations) 一个正整数.指从 n 个不同元素里每次取出 0 个,1 个,2 个,$\cdots$,n 个不同元素的所有组合数的总和,即 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$,$n$ 元集合的组合总数是它的子集的个数.从 n 个不同元素中每次取出 m 个不同元素而形成的组合数的性质是:

1. $C_n^m=C_n^{n-m}$.

2. $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}\ (m\leqslant n)$.

利用这两个性质,可化简组合数的计算及证明与组合数有关的问题.

重复组合(combination with repetition) 一种特殊的组合.从 n 个不同元素中可重复地选取 m 个元素,不管其顺序合成一组,称为从 n 个元素中取 m 个元素的可重复组合.两可重复组合相同当且仅当所取的元素相同且同一元素所取的次数相同.从 n 个不同元素中可重复地选出 m 个元素的不同组合种数记为 H_n^m 或$\bar{C}_n^m$,且

$$H_n^m=\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

若干排列组合恒等式(some identities of combination and permutation) 排列组合的一组重要公式.常用的排列组合恒等式有:

1. $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}=\frac{k+1}{n-k}C_n^{k+1}=\frac{n}{n-k}C_{n-1}^k$.

2. $C_{n+1}^k=C_n^k+C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-2}+\cdots+C_{n-k}^0$.

3. $C_{n+k+1}^{n+1}=C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\cdots+C_{n+k}^n$.

4. $C_{m+n}^k=C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\cdots+C_m^kC_n^0$ $(0\leqslant k\leqslant\min\{m,n\})$.

5. $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

6. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

7. $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\cdots+(n+1)C_n^n$
$=2^{n-1}(n+2)$.

8. $P_{n+1}^r=P_n^r+rP_n^{r-1}$.

9. $P_{m+n}^r=P_m^r+C_r^1P_m^{r-1}P_n^1+C_r^2P_m^{r-2}P_n^2+\cdots+P_n^r$.

二项式定理(binomial theorem) 亦称牛顿二项式公式. 数学的一个著名定理. 即二项式的自然数指数幂的展开式定理. 形如

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i$$
$$=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ia^{n-i}b^i+\cdots+C_n^nb^n,$$

其中 n 为自然数. 等号右端称为二项式的展开式，展开式中

$$C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}\quad(i=0,1,2,\cdots,n)$$

称为二项式展开式的系数，且是展开式的 $i+1$ 项的系数. 在 $(a+b)^n$ 的展开式中，$C_n^m a^{n-m}b^m$ 称为二项式展开式的通项. 它表示第 $m+1$ 项，记为

$$T_{m+1}(m=0,1,2,\cdots,n).$$

二项式定理可以推广到指数 n 不是自然数的情形. 对于任何实数 α，当 $a>0$ 且 $|b|<a$ 时，有

$$(a+b)^\alpha=\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{i}a^{\alpha-i}b^i,$$

其中

$$\binom{\alpha}{i}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}.$$

显然，当 α 为自然数时，展开式只有有限项且归结为前面的形式，也不必对 a,b 进行限制. 二项式定理也可以推广到多项式的情形：对任意自然数 n,k，有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n=\sum_{\substack{p+q+\cdots+s=n\\p,q,\cdots,s\geqslant 0}}\frac{n!}{p!q!\cdots s!}a_1^pa_2^q\cdots a_k^s.$$

二项式展开式的主要性质有：

1. 展开式的项数比二项式的次数多 1，即展开式中共有 $n+1$ 项.

2. 展开式中字母 a 的次数从第一项起由 n 依次减 1，直到 0 为止；b 的次数从第一项起由 0 依次增加 1，直到 n 为止；在每一项中 a 与 b 的次数和为 n.

3. 展开式中第 $r+1$ 项的系数是 C_n^r.

4. 展开式中与首末两项等距的两项系数相等，即有 $C_n^r=C_n^{n-r}$.

5. 展开式的中间项是系数最大的项，当 n 为偶次时，第 $(n/2+1)$ 项的系数 $C_n^{n/2}$ 最大，当 n 为奇数时，第 $(n+1)/2$ 项和第 $(n+3)/2$ 项的相等系数 $C_n^{(n+1)/2}$ 最大.

6. 展开式中各项的系数和为 2^n，即

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n.$$

7. 展开式中各奇数项系数的和等于各偶数项系数的和(都等于 2^{n-1})，即

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}.$$

8. 对于 $n=0,1,2,\cdots$ 时的所有二项式展开式的系数可以作成一个三角形数表，称为杨辉三角形(参见“杨辉三角形”).

二项式定理是一个古老的问题，很早就有人研究. 奥马·海亚姆(Omar Khayyami)在他的《代数学》中展开了 $(a+b)^6$，这是二项式定理的萌芽. 杨辉在他的《详解九章算术》(1261 年)中将二项式展开式的系数排成有规则的三角形(杨辉三角形)，使二项式展开式便于记忆和计算，并推动了对二项式定理的研究. 帕斯卡(Pascal, B.)也在 1653 年作了同样的工作. 约 1427 年，阿尔·卡西(al-Kāshī, G. al-D. J. M.)在他的《算术之钥》中已给出了自然数幂的二项式 $(a+b)^n$ 的展开式

$$(a+b)^n-a^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k,$$

他还发现了关系式 $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$. 1665 年，牛顿(Newton, I)也得到上述展开式. 1676 年，他在给奥丁堡的一封信中最先给出了带有有理指数的二项式展开式，但他未作严格论证，只用 $(1+x)^{1/2}$ 展开式自乘等于 $1+x$ 来验证. 格雷果里(Gregory, J.)也独立发现了这一定理. 自然数幂的二项式定理的严格证明是由雅各布第一·伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)做出的. 分指数和负指数的二项式定理的证明由欧拉(Euler, L.)提供，但缺乏严格根据，最后由高斯(Gauss, C. F.)于 1811 年完成.

牛顿二项式公式(Newton binomial formula) 即“二项式定理”.

杨辉三角形(Yang Hui triangle) 一个著名的三角形数表. 二项式展开式的系数组成的三角形数表. 如图所示，

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k=C_n^k(k=1,2,\cdots,n-1).$$

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
………………………………………
```

这个三角形数表可无限向下伸展，它的第 $n+1$ 行是 $(a+b)^n(n=0,1,2,3,\cdots)$. 展开式中的各项的系数. 由图可以看出，数表的两条边界都是数字 1 组成的，任一行相邻两数之和等于下一行该两数中间的数，它反映了组合数的一个重要性质：杨辉在他所著的《详解九章算法》(1261 年)的附录中，记载了贾宪的

《黄帝九章算法细草》中的一张图，这张图的名字是《开方作法本源图》，其实质也就是上述二项式展开式的系数的三角形数表. 因此，这张三角形数表既称为杨辉三角形，又称为贾宪三角形. 在欧洲，帕斯卡(Pascal, B.)也有类似的结果(1654)，所以，这一数表也称为帕斯卡三角形.

贾宪三角形(Jia Xian triangle)　即“杨辉三角形”.

帕斯卡三角形(Pascal triangle)　即“杨辉三角形”.

数学归纳法(mathematical induction)　数学中的一个重要证明方法. 即与自然数有关的命题的一种证明方法. 数学归纳法用下面两个步骤来证明命题的真实性：第一步，验证当 $n=0$ 时命题成立；第二步，假设当 $n=k(k\geqslant 0)$ 时命题成立，并以此为据，推证当 $n=k+1$ 时命题也成立. 根据以上两步断定对于所有自然数 n 命题都成立. 这样的证明方法也常称为第一数学归纳法. 上面的第一步称为归纳奠基. 证明的起点 $n=0$ 可以换为 $n=n_0$，n_0 取何自然数，视命题的具体内容而定，有时甚至可以将 n_0 的取值扩展到 0 和负数. 第二步称为归纳递推，其中所作的假设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时命题成立称为归纳假设，可直接用作证明 $n=k+1$ 时命题成立的依据. 这种归纳法所能证明的，只是命题对大于或等于 0 的所有自然数 n 成立，不管 n 有多大，它仍是有限数(基数)，不可能推出命题对超限基数成立，故这种数学归纳法实为有限数学归纳法. 在佩亚诺(Peano, G.)提出自然数的公理定义时，他已吸取数学归纳法而成为其中的归纳公理，于是就可以从佩亚诺公理推导出数学归纳法(参见“佩亚诺公理”). 数学归纳法是 16 世纪后期才被发现的，毛罗利科(Maurolico, F.)在他 1575 年发表的《算术》一书中，明确地应用数学归纳法证明了 $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$ 等有关自然数的命题. 数学归纳法有多种变形：如第二数学归纳法. 华罗庚在他的《数学归纳法》一书中另提出反向(倒推)归纳法，跳跃式归纳法，跷跷板归纳法，螺旋式归纳法，二重数学归纳法等名称.

第二数学归纳法(second mathematical induction)　数学归纳法的一种变形. 用第二数学归纳法证明的步骤是：第一步，证明 $n=0$ 时命题成立；第二步，假设对于 $0\leqslant n\leqslant k$ 时命题成立，推证出当 $n=k+1$ 时命题也成立. 根据以上两步断定对一切自然数 n 命题成立. 第一步中的起点 $n=0$ 可以视具体问题更换为任何一个整数 $n=n_0$. 第二数学归纳法的理论根据是最小数原理：自然数集的每一个非空子集中都有一个最小数. 自然数集的最小数原理与归纳公理是等价的.

数学归纳法的变形(alternate form of mathematical induction)　数学归纳法的其他几种形式. 指除常用的第一和第二数学归纳法外，华罗庚在其所著《数学归纳法》一书中提出一些略有变化的特殊名称的数学归纳法，均可用于证明与自然数有关的命题，概述如下：

1. 跳跃式归纳法. 设 $P(n)$ 是关于自然数 n 的命题. 证明：

1) $P(1), P(2), \cdots, P(l)$ 是成立的命题；

2) $P(k)\Rightarrow P(k+l)$；

则 $P(n)$ 对任何自然数 n 成立.

2. 跷跷板归纳法. 设 $A(n), B(n)$ 是关于两个独立自然数的命题. 证明：

1) $A(1)$ 成立；

2) $A(k)\Rightarrow B(k)$；

3) $B(k)\Rightarrow A(k+1)$；

则 $A(n), B(n)$ 对任何自然数均成立.

3. 倍跳倒退归纳法. 设定 $P(n)$，证明：

1) $P(2)$ 成立；

2) $P(k)\Rightarrow P(2k)$；

3) 对 $r\geqslant 2, P(r)\Rightarrow P(r-1)$；

则 $P(n)$ 成立.

4. 倒退(反向)归纳法. 设定 $P(n)$，证明：

1) 对严格单调递增无界自然数列 $k_1, k_2\cdots, k_n, \cdots, P(k_i)(i=1,2,\cdots)$ 成立；

2) 对 $r\geqslant 2, P(r)\Rightarrow P(r-1)$；

则 $P(n)$ 成立.

5. 二重数学归纳法. 设 $P(n,m)$ 是关于两个独立自然数的命题，证明：

1) $P(1,m)$ 和 $P(n,1)$ 成立；

2) $P(n+1,m)$ 和 $P(n,m+1)$
$\Rightarrow P(n+1,m+1)$；

则 $P(n,m)$ 对任何自然数 n,m 成立.

6. 螺旋式归纳法. 设 $P_1(n), P_2(n), \cdots, P_k(n)$ 是 k 个与自然数 n 有关的命题，证明：

1) $P_1(1)$ 成立；

2) $P_1(m)\Rightarrow P_2(m)$；

3) $P_2(m)\Rightarrow P_3(m)$；

…………；

$k+1$)　$P_k(m)\Rightarrow P_1(m+1)$；

则对任何自然数 $n, P_1(n), P_2(n), \cdots, P_k(n)$ 均成立.

撰　稿　王　健　王和宽　王春生　王洪绪　石　敏
任朝雁　刘　策　刘作斌　刘应平　杨淑勤
李求来　李宜顺　李建才　吴建平　谷生林
陈兆镇　林章衍　周光壁　周稳师　庞东辉
赵嗣元　夏有璞　席德茗
审　阅　阮一清　陈兆镇　陈森林　赵嗣元　唐复苏

平 面 几 何

平面几何(plane geometry)　几何学的基础学科,研究平面图形的性质的几何学.公元前约三百年,古希腊数学家欧几里得(Euclid)系统总结和研究了前人的几何知识,写成一本科学伟著《几何原本》.书中从少数定义和公理出发,通过逻辑推理,得到一系列的定理,建立了较严密的几何演绎体系,使几何成为一门独立学科,即欧几里得几何学.《几何原本》对几何学以后的发展和数学教育的发展都起了重要作用,它曾在西方近两千年的时间里,作为学校最主要的教科书,流传于世.

古希腊的数学分为四大科:算术、几何、天文、音乐,直到中世纪,古罗马帝国还以古希腊的学校为模式,建立了包括初等、中等、高等三类的教育系统,其中高等教育的数学教学仍分为此四科.以后,算术分为算术与代数,几何分为三角学与几何,在各个时期的各种几何课本,基本上都取材于《几何原本》,但中间曾有一度删去了所有证明.到14—15世纪文艺复兴时期,由于生产力的发展需要,学校的智育扩大到包括算术、几何、文学、历史、地理、机械学等十几个学科,在几何中又重新重视了证明,增加了计算、测量等内容.

18世纪,法国数学教师拉克鲁瓦(Lacroix,S.F.)编写教科书九卷(1796—1799),其中几何内容参考了数学家达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)的意见,分为平面几何与立体几何两部分;德国莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的学生沃尔费(Wolf,C. von)编写初等数学教材(1713),其中,几何部分先讲平面几何,后讲立体几何.此后,西欧各国中等学校大都将几何分为平面几何与立体几何讲授.

19世纪中叶以后,几何学发展出现了各种新的分支,它们都可以分别研究其平面、立体的,甚至高维空间的情况,但是,作为几何学最基础学科的平面几何,从历史发展的过程和学校教育的实际情况来看,它的内容体系仍属于欧几里得几何的范围,它所采用的研究方法仍是直接就图形来研究其性质的综合方法.

1899年,希尔伯特(Hilbert,D.)的《几何基础》一书发展,使平面几何有了一套完整而严格的公理基础,此后,许多数学家对平面几何的深度和广度作了进一步探索,使其内容更加丰富.但是,随着学校教学改革的发展,各国对平面几何教材内容改革出现了困难、曲折和反复,有的甚至予以取消.实践证明,平面几何不仅是几何学的最基础学科,而且对中学教育也是不可缺少的.因为平面几何演绎体系直观化、抽象化、公理化的特点,对培养学生直觉思维、逻辑思维和推理论证能力的作用,是别的学科无法代替的,它的基本知识接近生活、生产,也是作为一个公民所必须具备的.因此,各国都规定中学教育要学习平面几何.然而,作为中学教育的平面几何课程,与作为数学学科的平面几何,可以是不完全一致的,前者应当根据教学改革需要和学生年龄特征,对其内容作适当调整和取舍,各国的中学平面几何教材也不尽相同,这种改革还在进行和探索中.主要改革趋向是:

1.公理化方法仍是平面几何的基础,一些国家正在试验采用新的公理体系讲授平面几何,删去繁杂偏难的论证.

2.增加现代化观点:如集合、几何变换.

3.形数结合,引进坐标法和向量,用坐标法和向量法证明几何题有时比综合法简单.

但是,平面几何研究的基本图形仍然是相交线和平行线、三角形、四边形、相似形、圆和正多边形等.其基本内容包括:基本概念、基本定理的证明和各种类型的几何证明题、计算题(长度、角度、面积)、几何变换、作图、轨迹、测量等.有的几何学家对平面几何的发展仍在做进一步研究和探索,并发现平面图形的一些深刻性质,尽管这些结果对中学教学不一定是必需的,但它说明平面几何这一历史悠久,而现实性很强的学科,仍在放出绚丽多彩的光辉.

欧几里得几何(Euclidean geometry)　简称欧氏几何.几何学的一个分支.它是以欧几里得平行公理为基础建立的几何学.在欧几里得(Euclid)所著的《几何原本》中,总结了前人的几何学知识和研究成果,加以系统化,把人们公认的一些事实作为公设和公理,形成了在当时认为是最严密的体系.用这些公设和公理研究图形的几何性质,就形成了欧几里得几何.在克莱因(Klein,(C.)F.)的变换群的观点下,它是研究在正交变换下不变的几何性质的几何.相对于高等几何而言,常把它称为初等几何或度量几何.相对于解析几何而言,又常称它为综合几何或纯粹几何.按所讨论的图形在平面上或在空间中,分别称为平面几何与立体几何.刻画欧几里得几何的最关键的性质是平行公理,否定这一公理就会得出非欧几里得几何.欧几里得以其所著的《几何原本》闻名于世,他尚有不少著作,现已大部分失传,只有少数著作,如《已知数》《图形的分割》《光学》等保存

了下来.

欧氏几何(Euclidean geometry) 欧几里得几何的简称.

初等几何(elementary geometry) 即"欧几里得几何".

度量几何(metric geometry) 即"欧几里得几何".

纯粹几何(pure geometry) 即"欧几里得几何".

综合几何(synthetic geometry) 即"欧几里得几何".

原本(elements) 历史上最早的几何学著作.公元前3世纪,欧几里得(Euclid)搜集当时所有已知的几何知识,按照严密的逻辑原则,编纂成《原本》13卷.后人又续添14,15两卷.此书将前人的零散的几何知识加以系统整理,从一些最基本的概念、公理、公设出发,依据几何学的内在规律和逻辑原则,用公理化方法建立了几何学的演绎体系,使几何学成为比较系统的科学.《原本》对几何的发展和几何学的教学起了巨大作用,两千多年来,所有的初等几何教科书以及19世纪以前一切有关初等几何的论著,都以《原本》为依据,而欧几里得的名字成了几何学的代名词,人们一直把这种体系的几何学称为欧几里得几何学.

《原本》各卷的主要内容有:第一卷首先给出若干定义、5条公设和公理,以此为出发点,推导出48个命题,以毕达哥拉斯定理(勾股定理)结尾.欧几里得首先给出的基本定义是:

1.点是没有部分的.

2.线有长度没有宽度.

3.线的界限是点.

4.直线是这样的线,对于它上面的任何点来说都是同样地放置着的.

5.面只有长度和宽度.

6.面的界限是线.

7.平面是这样的面,对于它的任何直线来说都是同样地放置着的.

共有23个定义,包括角、直线、直角、圆等定义,最后是平行线的定义.欧几里得列出的公设是:

1.从每一点到另一点可引直线.

2.每条直线都可以无限延长.

3.以任意点为中心可作半径等于任意长的圆.

4.凡直角皆相等.

5.同一平面内的两条直线与第三条直线相交,若其中一侧的两个内角之和小于二直角,则该两直线必在这一侧相交.

最后一个公设就是有名的第五公设,又称欧几里得平行公设.由于它在叙述上比前四条公设冗长,意义又不够明显,应用也较晚,因而引起历代许多学者的怀疑,并试图给予证明,但没有人得到成功,却导致19世纪非欧几里得几何学的产生.欧几里得列出的公理是:

1.等于同量的量相等.

2.等量加等量,其和相等.

3.等量减等量,其差相等.

4.能重合的量相等.

5.全体大于部分.

第二卷是用几何的方法研究代数恒等式,包括14个命题,建立了与初等代数恒等式等价的一些关于图形面积相等的关系式.例如,命题7等价于$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$;命题11用几何方法解决了黄金分割问题;命题12,13是毕达哥拉斯定理的推广.第三卷有37个命题,论述了圆、弦、圆周角及与圆有关的图形,特别叙述了圆幂定理.第四卷有16个命题,论述了内切圆、外接圆、多边形及正多边形(包括正五边形、正六边形和正十边形)的作法.第五卷有25个命题,阐述比例论,将比例关系推广到无公度的量,但当时还未形成无理数的概念.第六卷有33个命题,论述面积与相似形.第七、八、九卷是算术,包括著名的欧几里得辗转相除法、连比例及质数个数无限的定理.第十卷主要论述不可公度的量的理论,包括与整数的开方有关的几何运算.第十一卷有40个命题,叙述立体几何基础知识,包括平面与直线、垂直与平行、多面角的平面角以及平行六面体体积定理.第十二卷利用穷竭法证明了圆面积的比等于半径平方比,球体积的比等于半径立方比,以及任何棱锥体体积等于同底等高的棱柱体体积的三分之一.第十三卷前半部分论述分线段成中外比,后半部分讨论正多面体,确立了正多面体只有面数为四、六、八、十二、二十这五种类型.最后一个命题(第19命题)判定除上述5种以外再没有其他正多面体.

《原本》全书13卷共467个命题.有些版本多两卷,讨论有关正多面体的更多的结果.但一般认为第十四卷出自亚历山大的许普西克勒斯(Hypsicles,(A))的手笔.第十五卷是6世纪初大马士革乌斯(Damascius,(D))所著.中国保存至今的最早的译本是1607年(明万历丁未年)由利玛窦(Ricci,M.)和徐光启合译为《几何原本》的前6卷,几何的名称因此而得.1857年(清咸丰7年),由伟烈亚力(Wylie,A.)和李善兰合译了后9卷.在此之前,元朝已有《几何原本》的阿拉伯文译本,译名是《兀忽烈的四擘算法段数十五部》,现已失传.

《原本》虽然是一部伟大的科学著作和几何教科书,但从严格的逻辑观点来看,并不是没有缺点的.它的缺点是在于基础部分不够完整和严密.由于它采用的公理、公设太少,又不够完善,因而不得不求

助于图形的直观性，承认了一些显然的事实. 19世纪末，希尔伯特(Hilbert，D.)在他的《几何学基础》一书中阐述了一套完整而严密的公理体系，称为希尔伯特公理体系，从而使欧几里得几何学的逻辑结构建立在牢固的理论基础上. 尽管《几何原本》还有不少缺点，但它开创了数学公理化的正确途径，因而对数学发展的影响超过以往任何著作.

几何原本(elements)　欧几里得(Euclid)所著《原本》的中译名. 徐光启和利玛窦(Ricci，M.)于1607年将外文的《原本》翻译为中文时，中译本命名为《几何原本》. 这是中国最早的译本. 几何一词即由此而来，沿用至今(参见“原本”).

平面几何的基础知识

平面(plane)　见本卷《立体几何》同名条.

轴(axis)　几何学术语. 指几何中具有特殊性质的直线，如对称轴、根轴、旋转轴、坐标轴等.

半平面(half plane)　见本卷《立体几何》同名条.

几何图形(geometric figure)　简称图形. 几何学研究的对象. 指点、线、面、体或者它们的集合. 平面几何中的图形的所有点都在同一个平面内.

图形(figure)　几何图形的简称.

平面图形(plane figure)　几何图形的一种. 指所有点都在同一平面内的图形. 如直线、三角形、平行四边形等都是基本的平面图形. 平面图形是平面几何研究的对象.

欧几里得第五公设(Euclidean fifth postulate)　简称第五公设. 对几何学的发展起着重要作用的一个公设. 在欧几里得(Euclid)的《几何原本》中，第五条公设是：同一平面内的两条直线与第三条直线相交，若其中一侧的两个内角之和小于二直角，则该两直线必在这一侧相交. 因它与平行公理是等价的，所以又称为欧几里得平行公设，简称平行公设. 由于第五公设的内容和叙述比前四条公设复杂，所以引起后人的不断研究和探讨，在两千多年间，许多学者试图用《几何原本》中其余公设和推论证明，然而都没有成功，但却从中获得了一些和第五公设等价的命题. 后来，到19世纪，几位数学家否定第五公设，推导出一些和欧几里得几何不同的新命题，从而导致非欧几里得几何的产生.

欧几里得平行公设(Euclidean parallel postulate)　即“欧几里得第五公设”.

平行公设(parallel postulate)　欧几里得平行公设的简称.

平行公理(parallel axiom)　几何学的重要公理之一. 即希尔伯特公理体系中的一个公理. 其内容是(在平面上)通过不在已知直线上的一点至多可引一条与已知直线平行(即不相交)的直线. 上述公理是普莱费尔(Playfair，J.)首先用来代替欧几里得第五公设的，它与第五公设是等价命题，也称为普莱费尔公理. 在中学几何教材中，平行公理叙述为：经过直线外一点，有一条而且只有一条直线和这条直线平行. 在希尔伯特公理体系中，有了前三组公理后，平行线的存在性是可以证明的，而平行线的惟一性才是必须由公理保证的. 平行公理在欧几里得几何中占有特殊地位，它不像其他公理、公设那么显然，因而从《几何原本》问世起，许多数学家企图把它当做定理来证明，然而都终归失败，但却导致了非欧几何的诞生，而且在探索平行公理的过程中，发现了不少与之等价的公理.

普莱费尔公理(Playfair axiom)　即“平行公理”.

射线(ray)　亦称半直线. 几何学的重要概念之一. 指直线上任一点一旁的部分. 这一点称为射线的端点. 射线亦可定义为从某一个确定的点出发沿固定方向运动的点的轨迹. 射线用表示它的端点和射线上任意一点的两个大写字母表示. 如图1中的射线可记为射线 OA. 同一直线上的两条射线，若其中一条包含另一条，则此两射线称为同向射线. 如图2中的射线 O_1A_1 与 O_2A_2. 若其中任一条都不包含另一条，则此二射线称为反向射线. 如图3中的射线 O_1A_1 与 O_2A_2.

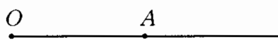


图1

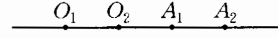


图2

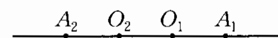


图3

半直线(half straight line)　即“射线”.

同向射线(same direction ray)　见“射线”.

反向射线(opposite direction ray)　见“射线”.

线段(line segment)　最基本的几何图形之一. 界于两点间的直线部分称为线段. 这两点称为线段的端点. 如果线段的两个端点分别用 A,B 来表示，则此线段可记为 AB. 其线段的长一般仍记为 AB.

线段的长度(length of a line segment)　亦称线段的量数. 描述线段长短的一个数. 指已知线段与取作长度单位的线段相比的比值. 这是一个确定的正实数. 作为长度单位的线段称为单位线段，其长度是1. 取定单位线段后，线段的长度是在线段与正实数之间的一个对应，满足条件：

1. 取定的单位线段与数1对应.
2. 相等的线段对应于同一个正实数.
3. 当线段 AB 被其上一点 C 分成两个线段 AC 和 CB 时，与 AB 对应的数等于与 AC 和 CB 对应的数的和.

线段的量数(length of a line segment)　即“线段的长度”.

单位线段(unit segment)　见“线段的长度”.

两点间的距离(distance between two points)　以两点为端点的线段的长度.

延长线(elongation line)　几何学的基本概念之一. 从射线和线段的端点出发，在它们所在的直线上引出的线段或射线. 如直线上任一点 O 将直线分为两条射线，其中每一条射线都称为另一条射线从 O 点引出的延长线(如图 1). 直线上两点 A,B 将直线分为线段 AB 和分别自 A,B 引出的两条射线，这两条射线分别称为线段 AB 从 A 和从 B 引出的延长线，其中从 A 引出的射线称为线段 AB 的反向延长线. 延长线一般用虚线画出(如图 2). 延长线也可以是线段. 例如，延长线段 AB 至 C，就得到 AB 的延长线段 BC，延长 BA 至 D，就得到 BA 的延长线段 AD，AD 亦称为 AB 的反向延长线段(如图 3).

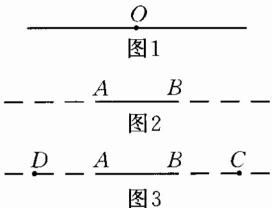


图1
图2
图3

反向延长线(oppositely elongated line)　见“延长线”.

线段的相等(equality of line segments)　线段间的一种等价关系. 下面给出线段相等的一种描述方法：把一条线段放到另一条线段上，若它们的两对端点重合，即两条线段完全重合，则称这两条线段相等. 线段 AB 与线段 CD 相等，记为 $AB=CD$，读作线段 AB 等于线段 CD. 相等线段具有如下性质：

1. 反身性，记为 $AB=AB$.
2. 对称性，若 $AB=CD$，则 $CD=AB$.
3. 传递性，若 $AB=CD$，$CD=EF$，则 $AB=EF$.

即线段的相等是一个等价关系.

线段的不等(inequality of line segments)　线段间的一种比较关系. 下面给出线段不等的一种描述方法：把一条线段放到另一条线段上，使一对端点重合，若另一对端点不重合，则称这两条线段为不相等的线段，简称线段的不等. 当一条线段的不重合端点落在另一条线段的内部时，则称该线段小于另一条线段，或称另一条线段大于该线段；反之，亦然. 线段 AB 小于线段 CD，记为 $AB<CD$，或 $CD>AB$.

线段的和、差、倍、分(sum, difference, multiple and division of line segments)　线段的运算. 设有线段 a,b,c 和一直线上的三点 A,B,C，且有 $AB=a$，$BC=b$，$AC=c$. 若点 B 介于点 A,C 之间，则线段 AC 称为线段 AB 与线段 BC 的和，或 c 称为 a 与 b 的和，记为 $AC=AB+BC$，或 $c=a+b$. 两线段的和可推广到 n 条线段的和. 线段 BC 称为线段 AC 与线段 AB 的差，或 b 称为 c 与 a 的差，记为 $BC=AC-AB$，或 $b=c-a$(如图 1)；当 $AB=BC$ 时，或 $a=b$ 时(如图 2)，则线段 AC 称为线段 AB 的 2 倍，或 c 称为 a 的 2 倍，记为 $AC=2AB$，或 $c=2a$，此时，AB 又称为 AC 的二分之一，记为 $AB=AC/2$，或 $a=c/2$. 如果一条线段 b 是 n 条线段 a 的和，则称 b 是 a 的 n 倍，或 a 是 b 的 n 分之一，记为 $b=na$，或 $a=b/n$；而当 $a=nc$，$b=mc$ 时，则称 a 是 b 的 m 分之 n，记为 $a=nb/m$，或 b 是 a 的 n 分之 m，记为 $b=ma/n$.

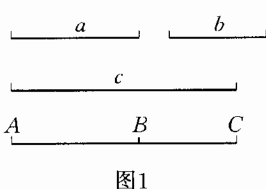


图1

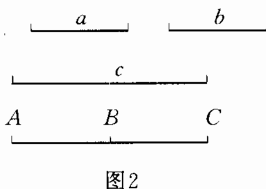


图2

线段的中点(midpoint of a line segment)　线段上的一个特殊点. 一点将线段平分为两个相等的线段，该点称为线段的中点. 每一条线段都有惟一的中点.

辅助线(auxiliary line)　几何学的基本概念之一. 为了解(证)几何题的需要，在原题给定的图上添置的线称为辅助线. 辅助线通常用虚线来表示. 作辅助线是要构造一个新的几何图形，以便集中条件、沟通联系、创造条件应用有关的定理，达到解题的目的. 平面几何的线通常只有直线(线段)和圆(圆弧). 最常作的辅助线有：延长一条已知射线(线段)；过两个已知点引直线(线段)；以已知点为圆心作过已知点的圆(圆弧)等.

角(angle)　最基本的几何图形之一. 在平面几何中，角是指以具有公共端点的两条射线为界的平面部分(或指由一条射线绕固定端点旋转到另一固定位置而扫过的平面部分). 这两条射线称为角的边或夹边，相应地，这角可称为这两边的夹角. 公共端点称为角的顶点，它常用来代表角. 形成角的平面部分(顶点和边不计)称为角的内部，平面的其他部分(顶点和边不计)称为角的外部. 内部的点称为角的内点，外部的点称为角的外点. 角一般用符号“∠”表示. 顶点为 O 的角可记为 $\angle O$，两边为射线 h,k 的角可记为 $\angle(h,k)$. 当在两边上分别取一点 A 和 B 时，亦可用 A,B 和顶点 O 共同来表示角而记为 $\angle AOB$.

角的相等(equality of angles)　角与角之间的一种等价关系. 下面给出角相等的一种描述方法：把一个角移放在另一个角上，若它们的顶点、角的两边及角的内部完全重合，则称这两个角相等. 若 $\angle A$ 与 $\angle B$ 相等，记为 $\angle A=\angle B$. 角的相等具有如下性质：

1. 反身性. 即每个角都等于它自身，记为

$$\angle A=\angle A.$$

2. 对称性. 即若$\angle A=\angle B$,则$\angle B=\angle A$.

3. 传递性. 即若$\angle A=\angle B$,$\angle B=\angle C$,则

$$\angle A=\angle C.$$

因此,角的相等是一个等价关系.

角的不等(inequality of angles)　角与角之间的一种比较关系.下面给出角的不等的一种描述方法:把一个角移放到另一个角上,使两个顶点和一组边分别重合,若另一组边不重合,则称这两个角为不相等的角,简称角的不等.当一个角的不重合边落在另一个角的内部时,则称该角小于另一个角,或称另一个角大于该角.$\angle A$小于$\angle B$或$\angle B$大于$\angle A$,记为$\angle A<\angle B$或$\angle B>\angle A$.

角平分线(angular bisector)　亦称角二等分线,又称分角线.有关角的一条重要射线.如果一条以角顶点为端点的射线在角的内部,且将此角分为两个相等的角,那么这条射线称为该角的平分线.每个角都有惟一的角平分线.

分角线(angular bisector)　即"角平分线".

角二等分线(bisector of an angle)　即"角平分线".

外二等分线(external bisector)　有关角的一条重要射线.指角的外角的二等分线.相对于外二等分线而言,角本身的二等分线便称为内二等分线.显然,每个角都有两条外二等分线,它们互为反向射线,都垂直于内二等分线.

内二等分线(internal bisector)　见"外二等分线".

角的三等分线(trisectrix of an angle)　有关角的重要射线.指从角的顶点出发,在角的内部,且将该角分为三个相等的角的两条射线.

角的和、差、倍、分(sum, difference, multiple and division of angles)　角的运算.若有$\angle\alpha$,$\angle\beta$,$\angle\gamma$和自点O引出的三条射线OA,OB,OC,且有$\angle AOB=\angle\alpha$,$\angle BOC=\angle\beta$,$\angle AOC=\angle\gamma$,OB在$\angle AOC$的内部,则$\angle AOC$称为$\angle AOB$与$\angle BOC$的和,或$\angle\gamma$称为$\angle\alpha$和$\angle\beta$的和,记为$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$,或$\angle\gamma=\angle\alpha+\angle\beta$(角的和也可

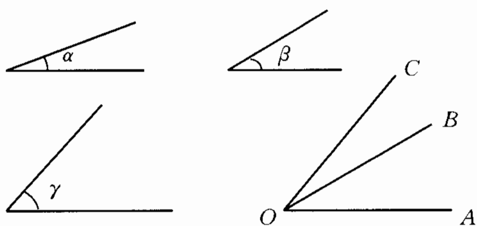


图1

推广到n个角的和).而$\angle AOB$称为$\angle AOC$与$\angle BOC$的差,或$\angle\alpha$称为$\angle\gamma$与$\angle\beta$的差,记为

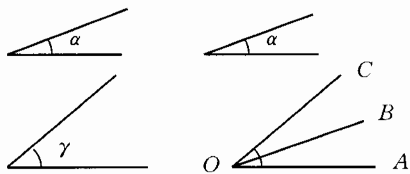


图2

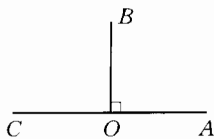
$\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC$,或$\angle\alpha=\angle\gamma-\angle\beta$(如图1).当$OB$是$\angle AOC$的角平分线时(如图2),$\angle AOC$称为$\angle AOB$的2倍,或$\angle AOB$称为$\angle AOC$的二分之一,记为$\angle AOC=2\angle AOB$,或$\angle AOB=(1/2)\angle AOC$.此时,有$\angle\gamma=2\angle\alpha$,或$\angle\alpha=(1/2)\angle\gamma$.如果一个$\angle\beta$是$n$个$\angle\alpha$的和,则称$\angle\beta$是$\angle\alpha$的$n$倍,或$\angle\alpha$是$\angle\beta$的$n$分之一,记为$\angle\beta=n\angle\alpha$,或$\angle\alpha=(1/n)\angle\beta$.而当$\angle\alpha=n\angle\gamma$,$\angle\beta=m\angle\gamma$时,则称$\angle\alpha$是$\angle\beta$的$m$分之$n$,记为$\angle\alpha=(n/m)\angle\beta$;或$\angle\beta$是$\angle\alpha$的$n$分之$m$,记为$\angle\beta=(m/n)\angle\alpha$.

平角(flat angle)　一种特殊的角.指两边组成一条直线的角.这时角的内部和外部都是以这条直线为边界的半平面.凡是平角都相等.1平角$=180°$.

周角(perigon)　一种特殊的角.指两边重合且角的内部(包括边)是整个平面的角.凡是周角都相等.1周角$=360°$.周角的外部是空集.除周角外,另有一个两边重合的角,其内部是空集,而外部连同角边是整个平面,这样的角称为零角.因此,周角有内点而无外点,零角有外点而无内点.

零角(null angle)　见"周角".

直角(right angle)　一种常用的角.指平角的一半.直角常用符号Rt∠表示.如图,$\angle AOC$是平角,OB是$\angle AOC$的平分线,则$\angle AOB$和$\angle BOC$都是直角.直角AOB记为$\angle AOB=\text{Rt}\angle$或$\text{Rt}\angle AOB$.如图,角的顶点处的符号"┐"表示直角.凡直角皆相等.1直角$=1/4$周角$=1/2$平角$=90°$.小于直角的角称为锐角.大于直角而小于平角的角称为钝角.锐角和钝角统称为斜角.

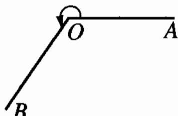


锐角(acute angle)　见"直角".

钝角(obtuse angle)　见"直角".

斜角(oblique angle)　锐角和钝角的统称.见"直角".

优角(reflex angle)　亦称凹角.一种特殊的角.指大于平角而小于周角的角.如图,箭头所示的$\angle AOB$为优角.



凹角(concave angle)　即"优角".

劣角(inferior angle)　锐角、直角和钝角的统

称. 相对于凹角而言，劣角亦称凸角.

凸角(convex angle) 即“劣角”.

共轭角(conjugate angles) 与一角有特殊关系的角. 从一点出发的两条射线形成的两个角，称为互为共轭角. 其中一个角的内部是另一个角的外部. 共轭的两个角除都是平角的情形外，必可分大小，其中小的一个称为劣共轭角，另一个称为优共轭角.

劣共轭角(inferior conjugate angle) 见“共轭角”.

优共轭角(reflex conjugate angle) 见“共轭角”.

余角(complementary angles) 与一锐角有特殊关系的角. 两个角的和等于直角时，其中一个角称为另一个角的余角. 或称两个角互为余角，简称两个角互余. 同角的余角相等，等角的余角相等.

补角(supplementary angles) 与一个劣角有特殊关系的角. 两角间的一种相依关系. 两个角的和等于平角时，其中一个角称为另一个角的补角，或称两个角互为补角，简称两个角互补. 同角的补角相等，等角的补角相等.

邻角(adjacent angles) 两角间的一种位置关系. 如果两个角有公共顶点和一条公共边，且它们的另一边分别在公共边的两旁，那么其中一个角称为另一角的邻角，或称两个角互为邻角.

邻余角(adjacent complementary angles) 与一锐角有特殊关系的角. 当两个邻角合成直角，即两条非公共边互相垂直时，这两个邻角则称互为邻余角. 同角或等角的邻余角相等.

邻补角(adjacent supplementary angles) 亦称外角或倚角. 与一劣角有特殊关系的角. 当两个邻角合成平角，即两条非公共边互为反向延长线时，这两个邻角则称互为邻补角. 同角或等角的邻补角相等.

外角(extevior angle) 即“邻补角”.

倚角(against angles) 即“邻补角”.

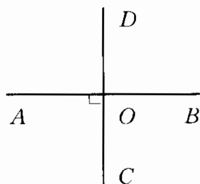
对顶角(vertical angles) 两角间的一种位置关系. 若一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，则这两个角互为对顶角. 对顶角相等.

数量相关角(relative angles in magnitude) 一种特殊的相关角. 即两角在大小上有特殊关系. 如互余角、互补角等.

位置相关角(relative angles in position) 一种特殊的相关角. 即两角在位置上有特殊关系. 如共轭角、邻角、邻余角、邻补角、对顶角、三线八角、三角形及凸四边形的外角及其内对角等.

点对线段的视角(visual angle of a point with respect to a line segment) 平面几何的基本概念之一. 自一点引出的两条射线分别通过已知线段的两端，则这两条射线所成的角称为该点对已知线段的视角.

垂直(perpendicular) 两条直线间的一种重要位置关系. 若两条直线相交所构成的四个角中有一个角是直角，则称这两条直线互相垂直，这时四个交角都是直角. 交点称为垂足，亦称垂趾. 垂直用符号“⊥”表示，读作垂直于(如图). 若 AB 和 CD 相交于点 O，$\angle AOC=90°$，则 AB 和 CD 互相垂直，记为：$AB\perp CD$，读作：AB 垂直于 CD. 交点是垂足. 若两条直线互相垂直，则其中一条称为另一条的垂线. 垂线的重要性质是：通过已知直线外或直线上一点都只能作已知直线的一条垂线.



垂线(perpendicular) 见“垂直”.

垂足(foot of a perpendicular) 见“垂直”.

垂趾(foot of a perpendicular) 见“垂直”.

两直线所成的角(angle between two intersecting straight lines) 描述两直线位置关系的角. 指两条直线相交所成的四个角. 其中对顶角相等，邻角互补. 两直线所成的角亦称两直线的交角或夹角.

交角(angle of intersection) 描述直线或曲线间位置关系的角. 首先是指相交的两直线所成的角. 其次，当直线与曲线(例如圆)或曲线与曲线相交时，如果曲线在切点处有切线(例如圆在它的每个点处都有切线)，就把直线与曲线的切线的交角称为直线与曲线的交角，同样把两条曲线在交点处的切线的交角称为两条曲线的交角.

直交(orthogonal) 亦称正交. 几何学的基本概念之一. 直线间、直线与曲线或曲线间之交角为直角时称直交. 若两条直线垂直相交，则称这两条直线

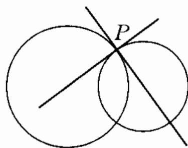


图1

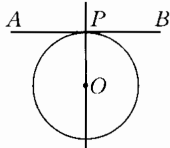


图2

直交；若两个圆相交，且在交点处的切线互相垂直，则称这两个圆直交(如图 1)；若一条直线和一个圆相交，在交点处圆的切线与直线垂直，则称直线和圆直交，和圆直交的直线通过圆心(如图 2).

正交(orthogonal) 即“直交”.

角度制(degree measure) 见本卷《平面三角》同名条.

点在直线上的正射影(projection from a point to a straight line) 亦称点在直线上的正投影. 一点. 即过直线外一点作直线的垂线所得垂足. 直线上点的正射影是它自身.

点在直线上的正投影(projection from a point to a straight line)　即“点在直线上的正射影”.

线段在直线上的射影(projection from a segment to a straight line)　一条线段. 即以线段 AB 的端点 A 和 B 在直线 l 上的正射影 A' 和 B' 为端点的线段 $A'B'$，是线段 AB 在 l 上的射影(如图 1). 当从直线 l 外一点 P 向直线 l 引斜线和垂线时，若斜足为 Q，垂足为 H，则线段 QH 就是斜线段 PQ 在直线 l 上的射影(如图 2). 当线段或线段的延长线与 l 垂直时，线段在 l 上的射影是直线上的一点，即垂足(如图 3). 线段 AB 在直线 l 上的射影 $A'B'$ 由公式 $A'B'=AB\cdot\cos\langle AB,l\rangle$ 确定，此公式对图 2、图 3 及 $AB/\!/l$ 的情形亦适用.

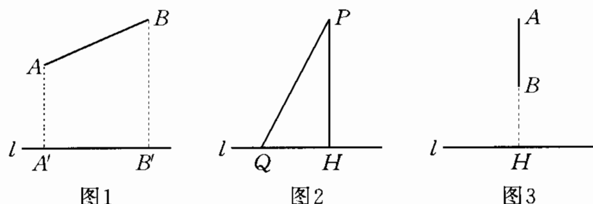


图1　　图2　　图3

斜线(oblique line)　一直线对另一直线的一种相对位置关系. 若两条直线相交而不互相垂直，则其中每一条直线都称为另一条直线的斜线. 其交点称为斜线足，简称斜足(图 1). 特别地，过直线 l 外一点 P 向直线 l 引斜线，自点 P 到斜足 Q 的线段 PQ 称为 P 向 l 引的斜线段，简称点 P 到 l 的斜线(图 2).

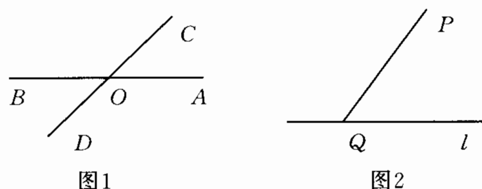


图1　　图2

斜线足(foot of an oblique line)　见“斜线”.

斜足(foot of an oblique line)　见“斜线”.

斜线段(oblique line segment)　见“斜线”.

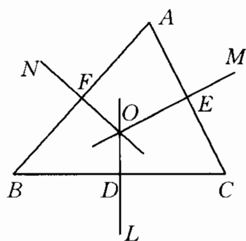
垂线段(perpendicular line segment)　描述点与直线位置关系的线段. 指以点和垂足为端点的线段. 从直线外一点向直线引垂线，以该点与垂足为端点的线段称为该点到直线的垂线段. 垂线段的长度称为点到直线的距离. 直线外一点与直线上各点连结的所有线段中，垂线段最短.

点到直线的距离(distance between a point and a straight line)　见“垂线段”(参见本卷《平面解析几何》和《空间解析几何》同名条).

线段的垂直平分线(perpendicular bisector of a line segment)　亦称线段的中垂线. 简称中垂线. 一条直线. 指垂直于一条线段并过这条线段中点的直线. 线段的中垂线具有如下性质：

1. 中垂线上的点到线段两端点的距离相等.

2. 到线段两端点距离相等的点必在线段的中垂线上.



简言之，中垂线是到线段两端点距离相等的点的轨迹. 例如，在$\triangle ABC$ 中，三边 AB,BC,CA 的垂直平分线分别为 FN,DL,EM，它们相交于 O 点，该点即为$\triangle ABC$ 的外心(如图).

线段的中垂线(perpendicular bisector of a line segment)　即“线段的垂直平分线”.

中垂线(perpendicular bisector)　线段的中垂线的简称.

共点(concurrent)　几何学的基本概念之一. 平面上或空间中若干几何元素共有的与点的结合关系. 若干直线(或圆或平面)共点是说它们通过同一个点，若干直线或若干平面都共点是说它们都通过一个公共点. 共点的直线(圆、平面)称为共点线(圆、平面).

共点线(圆)(concurrent lines(circle))　一组直线(圆)的集合. 有公共点的直线(圆)称为共点线(圆)(参见“共点”).

共线点(colinear points)　平面几何的基本概念之一. 位于同一条直线上的若干个点称为共线点，或称这些点共线. 例如，三角形的外心、重心、垂心三点共线. 在平面几何中，共线点问题是一个重要的研究课题.

折线(broken line)　一种几何图形. 指不全在同一直线上的几条线段顺次首尾相接组成的图形(如图 1，图 2). 各线段称为折线的边或折线的节；折线各边长之和称为折线的长；各线段的端点称为折线的顶点；相邻两个顶点称为邻顶点；不是两条线段公共端点的两个顶点都称为折线的端点；两端点重合(实际上即无端点)的折线称为封闭折线(图 2). 组成折线的所有线段都在同一平面内的折线称为平面折线，否则称为空间折线. 凡不相邻的两边不相交的折线称为简单折线. 把一条平面简单折线的任一条边向两方延长成直线，如果能使这条折线的其他各边都在这条直线的同侧，那么这条平面折线称为凸折线. 连结非封闭折线的两个端点的线段称为折线的锁线.

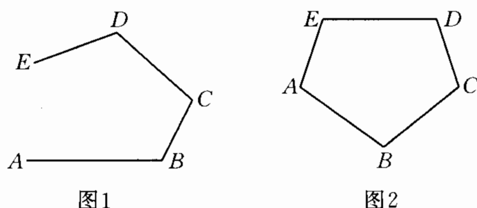


图1　　图2

折线的边(edges of a broken line)　见“折线”.

折线的节(nodes of a broken line)　见"折线".

折线的顶点(vertices of a broken line)　见"折线".

封闭折线(closed broken line)　见"折线".

锁线(lock line)　见"折线".

凸折线(convex broken lines)　见"折线".

平面折线(plane broken line)　见"折线".

简单折线(simple broken line)　最常见的一种折线.满足下列条件的折线称为简单折线：

1.对于任意两边,它们除顶点外无其他公共点.

2.顶点与边上异于端点的任一点不重合.

3.每一顶点至多是两条边的端点.

例如,图1是简单折线,而图2、图3、图4都不

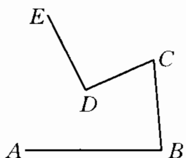


图1

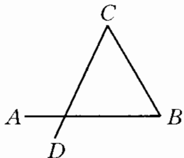


图2

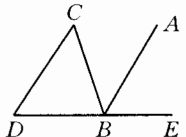


图3

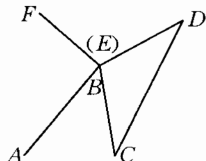


图4

是简单折线.关于简单折线,还有另外的几种等价定义:若折线的不相邻两边不相交(不含边的延长线相交),则这样的折线称为简单折线;不自交的折线称为简单折线;无重点的折线称为简单折线.

正折线(positive broken line)　一种特殊的平面折线.指各边相等、相邻两边的夹角相等,且相邻三边中的第一、三边总在第二边所在直线的同侧的折线.

区域(region)　几何学的基本概念之一.如果一个平面图形(封闭图形,不包含其内部)能将平面上不属于图形上的点分为若干个部分,使得同一部分任意两点可以用一条与图形无公共点的折线连结,不同部分的任意两点不能用与图形无公共点的折线连结,那么这个平面的每个部分都称为一个区域,该图形称为区域的边界.如果某一个区域的任意两点可以用与该图形无公共点的线段连结,那么这个区域称为凸区域.例如,一直线分平面为两个凸区域;两相交直线分平面为四个凸区域;三角形分平面为两个区域,其中只有一个凸区域(三角形的内部).一个区域连同它的边界称为闭区域.

凸区域(convex region)　见"区域".

闭区域(closed region)　见"区域".

凸图形(convex figures)　一种特殊图形.有如下两种定义：

1.在一个平面封闭图形内部任意取两点,如果连结这两点的线段仍在这图形的内部,那么这样的图形称为凸图形.

2.若一个平面图形将平面分为两个区域,其中至少有一个是凸区域,则该图形称为凸图形.凸区域称为该图形的内部,另一个区域称为该图形的外部.例如,平角、劣角、三角形、圆都是凸图形.

图形的内部(interior of a figures)　见"凸图形".

图形的外部(exterior of a figures)　见"凸图形".

图形的全等(congruence of figures)　图形间的一种等价关系.给定平面上或空间中的两个几何图形,如果经过合同变换(即正交变换),一个图形能与另一个图形重合,即一个图形能变成另一个图形,则说这两个图形全等或合同(也可说成图形相等),并把这两个图形称为全等(图)形或合同(图)形.例如,平面上有线段、角、三角形、圆等的全等,空间中有多面角、多面体、球等的全等.两个图形 F_1 和 F_2 全等,记为 $F_1 \cong F_2$ 或 $F_1 \equiv F_2$,图形的全等是等价关系,即具有：

1.反身性:对于任何图形 F,有 $F \cong F$.

2.对称性:对于图形 F_1 和 F_2,若 $F_1 \cong F_2$,则 $F_2 \cong F_1$.

3.传递性:对于图形 F_1,F_2,F_3,若 $F_1 \cong F_2$,$F_2 \cong F_3$,则 $F_1 \cong F_3$.

两个全等形重合时其重合的几何元素称为对应元素,如对应点、对应边、对应角等.两个全等形,若经过的变换只包括平移和旋转,即经过刚体运动(即第一种正交变换)而重合,则称为正向全等形或同向全等形;若经过的变换必须包括一个(且只有一个)反射(即不是刚体运动)才能重合,则称为逆向全等形或反向全等形.特别是只经过一次反射而重合的反向全等形,在空间中是经过镜面反射,因此在立体几何中把这种反向全等形称为镜像全等形或镜照全等形.

全等图形(congruent figures)　见"图形的全等".

合同图形(congruent figures)　见"图形的全等".

同向全等形(congruent figures of same direction)　见"图形的全等".

正向全等形(congruent figures of positive direction)　即"同向全等形".

逆向全等形(congruent figures of converse direction)　见"图形的全等".

反向全等形(congruent figures of negative di-

rection）　即"逆向全等形".

镜像全等形(congruent figures of mirror image)　见"图形的全等".

镜照全等形(congruent figures of mirror image)　即"镜像全等形".

相交(intersection)　见本卷《立体几何》同名条.

交线(intersecting line)　见本卷《立体几何》中的"相交".

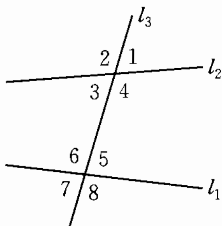
相交直线(intersecting straight lines)　两直线间的一种位置关系.指有惟一公共点的两条直线.该公共点称为两直线的交点.

两直线的交点(crossover point of two straight lines)　见"相交直线".

两直线的截线(section of two straight lines)　一条直线.指和两条直线都相交的直线.一直线与两条平行线相交是其特殊情况.这时,称这一直线为平行线的截线.

平行线的截线(section of parallel lines)　见"两直线的截线".

三线八角(three lines and eight angles)　几种常见的位置相关角.指同一平面上的两条直线被第三条直线所截形成的八个角.如图,两直线 l_1 和 l_2 被直线 l_3 所截形成八个角.其中∠1 和∠5,∠2 和∠6,∠3 和∠7,∠4 和∠8 位置分别相同,称为"同位角";∠3 和∠5,∠4 和∠6 相互交错,且均在内方,称为内错角;∠2 和∠8,∠1 和∠7 相互交错,且均在外方,称为外错角;∠4 和∠5,∠3 和∠6 在截线的同旁,且均在内方,称为同旁内角;∠1 和∠8,∠2 和∠7 在截线同旁,且均在外方,称为同旁外角.



同位角(corresponding angles)　见"三线八角".

内错角(alternate interior angles)　见"三线八角".

外错角(alternate exterior angles)　见"三线八角".

同旁内角(interior angles of the same side)　见"三线八角".

同旁外角(exterior angles of the same side)　见"三线八角".

平行线(parallel lines)　直线间的一种重要位置关系.它在几何学中占有特殊的地位.其定义的方式是多样的:

1.《几何原本》的定义是:平行的直线是同在一个平面上,而且尽量向两侧延长,也决不会相交的直线.

2.希尔伯特(Hilbert,D.)的定义是:同在一平面上,而且没有公共点的两直线称为平行线,或称两直线互相平行.

3.一般的定义是:在同一平面内不相交的两条直线称为平行线,或称两直线互相平行.

平行用符号"$/\!/$"表示.直线 AB 和直线 CD 是平行线,记为 $AB/\!/CD$(或 $CD/\!/AB$),读作 AB 平行于 CD(或 CD 平行于 AB);直线 a 与直线 b 平行,记为 $a/\!/b$(或 $b/\!/a$),读作 a 平行于 b(或 b 平行于 a).

两直线互相平行(mutually parallel of two straight lines)　见"平行线".

中间平行线(middle line between two parallel lines)　一条直线.指在两平行线之间与两平行线等距的直线.中间平行线具有性质:

1.中间平行线上的点到两平行线的距离相等.

2.凡到两条平行线距离相等的点必在中间平行线上.即到两条平行线的距离相等的点的轨迹是中间平行线.

平行线的公垂线(common perpendicular of parallel lines)　与两平行线有关的一条直线.和两条平行线都垂直相交的直线,称为平行线的公垂线.平行线的公垂线可作无数多条.公垂线上,以两垂足为端点的线段称为两平行线的公垂线段,两平行线的公垂线段的长度称为平行线间的距离.两平行线间的距离处处相等.

两平行线的公垂线段(common perpendicular segment of two parallel lines)　见"平行线的公垂线".

平行线间的距离(distance between parallel lines)　见"平行线的公垂线".

平行线的判定(decision of parallel lines)　判定两直线平行的几个充分条件.其判定方法如下:

1.两条直线被第三条直线所截,判定这两条直线平行可用下列条件的任何一个:

1) 同位角相等.

2) 内(外)错角相等.

3) 同旁内(外)角互补.

2.垂直于同一直线的两条直线平行.

3.平行于同一直线的两条直线平行.

4.三角形的中位线平行于第三边,且等于第三边的一半;梯形的中位线平行于底边,且等于两底和的一半.

5.如果一条直线截三角形两边,一边上所截得的两线段与另一边上所截得的对应线段成比例,则这条直线平行于第三边.

两组边分别平行的角(angles with respective

parallel sides） 一种位置相关角. 若一个角的两边与另一个角的两边分别平行，则称它们为两组边分别平行的角，且两个角相等或者互补.

平行线的性质(property of parallel lines) 平面几何研究的基本问题之一. 是对平行线的一种刻画，也是两直线平行的几个必要条件. 平行线的主要性质是：

1. 如果两条平行线被第三条直线所截，那么：

1）同位角相等.

2）内错角或外错角相等.

3）同旁内角或同旁外角互补.

2. 如果某直线与两平行线之一相交，则与另一平行线也必相交；如垂直于平行线之一，则必垂直于另一条.

3. 平行线间距离处处相等，且平行线间的平行线段彼此相等.

4. 一组平行线截两直线所得对应线段成比例（一组平行线如等分一线段，也必等分另一线段）.

5. 如果两条平行线被一线束（即过一点的许多直线）所截，那么两条平行线被线束分成比例线段.

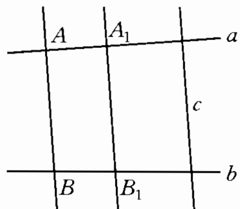
6. 平行于三角形一边的直线，截其他两边所得线段对应成比例.

7. 过不在已知直线上的一点，可引一条且只可引一条直线与已知直线平行.

两组边分别垂直的角(angles with respective perpendicular sides) 一种位置相关角. 若一个角的两边与另一个角的两边分别垂直，则称它们为两组边分别垂直的角，且两个角相等或者互补.

角平分线的性质(property of bisector of an angle) 对角平分线的一种刻画. 角平分线上的点到这个角的两边的距离相等. 到一个角的两边的距离相等的点，必在这个角的平分线上.

平行射影(parallel projection) 亦称平行投影. 平面几何的基本概念之一. 指点或线段与直线上点或线段的一种对应关系. 在平面上设有二直线 a 和 b，直线 c 与 a，b 都相交（如图），过直线 a 上任一点 A 作与直线 c 平行的直线交直线 b 于点 B，则称点 B 为点 A 沿平行于直线 c 的方向在直线 b 上的平行射影，简称 B 为 A 的平行射影. 直线 c 的方向称为投射方向. 设直线 a 上线段 AA_1 的端点在直线 b 上的平行射影为 B，B_1，则称线段 BB_1 为线段 AA_1 的平行射影. 当射影方向的直线 c 垂直于直线 b 时，平行射影称为正射影（或正投影），简称射影（或投影）.



平行投影(parallel projection) 即“平行射影”.

投射方向(projecting direction) 见“平行射影”.

正射影(orthogonal projection) 见“平行射影”.

正投影(orthogonal projection) 即“正射影”.

射影(projection) 正射影的简称.

投影(projection) 即“射影”.

三 角 形

直线形(rectilinear figure) 一类简单的几何图形. 指由直线、射线、线段组成的图形. 直线形常把它所划分的内部区域包括在内.

三角形(triangle) 平面几何中最基本、最重要的图形之一. 平面上不共线的三点及其每两点连结的线段所组成的封闭图形（包括它的内部区域）. 这三点称为三角形的顶点；三条线段称为三角形的边；每两条边组成的且三角形在其内部的角称为三角形的内角，简称三角形的角；三边长的和称为三角形的周长. 三角形通常用它的三个顶点字母来表示. 例如，三个顶点分别为 A，B，C 的三角形，记为 $\triangle ABC$，读作三角形 ABC. 三角形的三条边和三个角称为三角形的基本元素. 三角形分平面为两个区域：其中一个凸区域，称为三角形的内部（内部的点称为三角形的内点）；另一个区域称为三角形的外部（外部的点称为三角形的外点）. 三角形按它的内角分类，可分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形；按它的边长关系分类，可分为不等边三角形（三边两两不相等）和等腰三角形（最少有两边相等），等腰三角形又分为只有两边相等的三角形和等边三角形. 中国古算中，三角形田称为圭田. 亦称三角形图形为圭田.

三角形的基本元素(basic elements of a triangle) 见“三角形”.

三角形的顶点(vertex of a triangle) 见“三角形”.

三角形的边(side of a triangle) 见“三角形”.

三角形的内角(interior angle of a triangle) 见“三角形”.

三角形的外角(exterior angle of a triangle) 三角形内角的邻补角. 一个三角形有六个外角.

三角形的内部(interior of a triangle) 见“三角形”.

三角形的外部(exterior of a triangle) 见“三角形”.

圭田(gui tian) 见“三角形”.

三角形外角的内对角(opposite interior angle

of an exterior angle of a triangle) 一种重要的位置相关角. 对于三角形某一外角而言,与其不相邻的两个内角,称为这个外角的内对角.

锐角三角形(acute triangle) 三个角都是锐角的三角形.

钝角三角形(obtuse triangle) 有一个角是钝角的三角形.

直角三角形(right triangle) 亦称勾股形. 常见的特殊三角形. 指有一个角是直角的三角形. 直角的两边称为直角边,短的直角边称为勾,长的直角边称为股,直角的对边称为斜边,亦称弦. 直角三角形有许多重要性质(参见"直角三角形的性质").

勾股形(right triangle) 即"直角三角形".

斜三角形(oblique triangle) 常见的一般三角形. 即锐角三角形和钝角三角形的统称. 秦九韶在所著《数书九章》中,称三角形的三边为三斜,按边的长短分别称为大斜、中斜、小斜,并提出了与海伦公式等价的三斜求积术(参见"三角形的面积").

等腰三角形(isosceles triangle) 常见的特殊三角形. 指有两条边相等的三角形. 相等的两边称为腰,第三边称为底边,两腰的夹角称为顶角,腰和底边的夹角称为底角. 两腰垂直的等腰三角形称为等腰直角三角形.

等腰直角三角形(isosceles right triangle) 见"等腰三角形".

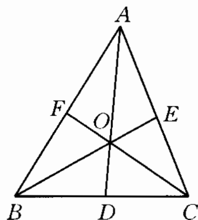
等边三角形(equilateral triangle) 亦称正三角形,又称等角三角形. 常见的特殊三角形. 指三边都相等的三角形. 等边三角形每个角都是 60°.

正三角形(regular triangle) 即"等边三角形".

等角三角形(equiangular triangle) 即"等边三角形".

不等边三角形(non-equilateral triangle) 三边两两不相等的三角形.

三角形的角平分线(angular bisector of a triangle) 三角形的重要元素之一. 指三角形每个角的平分线,亦指三角形的一个角的平分线和这个角的对边相交,这个角的顶点和交点之间的线段. 一个三角形有三条角平分线,它们相交于同一点,此点称为三角形的内心. 相对于三角形的外角平分线,三角形的角平分线亦称三角形的内角平分线. 如图,$\triangle ABC$ 的角平分线是 AD, BE, CF, O 点为 $\triangle ABC$ 的内心. 设 $\triangle ABC$ 的边长分别为 a, b, c,周长的一半为 $s=(a+b+c)/2$, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的平分线长分别为 t_a, t_b, t_c,角平分线长的计算公式分别为:



$$t_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)};$$

$$t_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)};$$

$$t_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

三角形的内角平分线(bisector of an interior angle of a triangle) 即"三角形的角平分线".

三角形的内心(incenter of a triangle) 三角形的特殊点之一. 三角形的三条角平分线的交点称三角形的内心. 它是三角形的内切圆的圆心. 它到三角形三边的距离相等.

三角形的外角平分线(bisector of an exterior angle of a triangle) 三角形的重要元素之一. 指平分三角形外角的直线. 一个三角形有三条外角平分线. 三角形任何两个角的外角的平分线和第三个内角的平分线交于一点,此点称为三角形的旁心(如图1). 若三角形的一个角的外角平分线和这个角的对边所在直线相交,则称这个角的顶点和交点之间的线段为外角平分线的长,此时将外角平分线理解为线段. 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的长分别为 a, b, c,周长的一半为 $s=(a+b+c)/2$,三个外角平分线的长分别为 t'_a, t'_b, t'_c(如图 2),则三角形的外角平分线长的计算公式分别为:

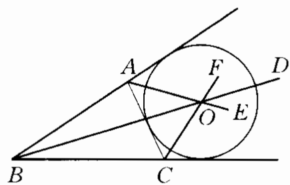


图1

$$t'_a = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(s-b)(s-c)} \quad (b \neq c);$$

$$t'_b = \frac{2}{|c-a|}\sqrt{ca(s-c)(s-a)} \quad (c \neq a);$$

$$t'_c = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b).$$

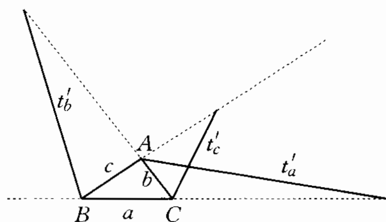
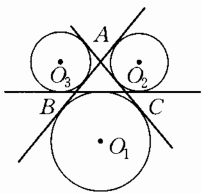


图2

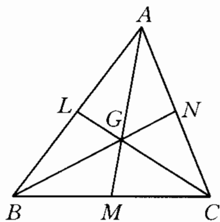
由于等腰三角形顶角的外角平分线及等边三角形的三个外角平分线都平行于对边,因此,外角平分线的长都不存在,或者为无穷大.

三角形的旁心(excenter of a triangle) 三角形的特殊点之一. 三角形任何两个角的外角的平分线与第三个内角的平分线的交点称为三角形的旁

心，它是三角形的旁切圆的圆心. 一个三角形有三个旁心. 如图，O_1, O_2, O_3 是$\triangle ABC$ 的三个旁心. 旁心到三角形三边所在直线的距离相等.



三角形的中线（median of a triangle） 三角形的重要元素之一. 指连结三角形一个顶点和它的对边中点的线段及其所在的直线. 一个三角形有三条中线，它们在三角形的内部相交于一点，此点称为三角形的重心. 如图，L, M, N 分别是$\triangle ABC$ 三边 AB, BC, CA 的中点，则 AM, BN, CL 是$\triangle ABC$ 的中线，交点 G 为$\triangle ABC$ 的重心. 设$\triangle ABC$ 的边长分别为 a, b, c，此三边上的中线长分别用 m_a, m_b, m_c 表示，那么中线长的计算公式分别为：



$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2};$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2};$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

三角形的重心（barycenter of a triangle） 三角形的特殊点之一. 三角形的三条中线的共同点称为三角形的重心. 重心位于三角形的内部，并将每条中线长分为二比一. 见“三角形的中线”条中的图，$\triangle ABC$ 的三条中线 AM, BN, CL 交于$\triangle ABC$ 的重心 G，且 $AG : GM=BG : GN=CG : GL=2 : 1$. 重心也是均匀三角板的物理重心.

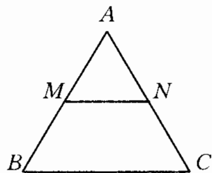
中线定理（median theorem） 平面几何的重要定理之一. 该定理表述为：若 P 为$\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，则 $AB^2+AC^2=2(AP^2+BP^2)$. 此定理是帕普斯（Pappus，（A））发现的，亦称帕普斯定理. 中线定理可以作为三角形余弦定理的推论.

帕普斯定理（Pappus theorem） 即“中线定理”.

三角形的中位线（segment through the midpoints of two sides of a triangle） 三角形的重要元素之一. 指三角形两边中点所连的线段. 如图，若 M, N 分别为 AB, AC 的中点，则 MN 为$\triangle ABC$ 的中位线. 一个三角形有三条中位线. 三角形的中位线有下列性质：

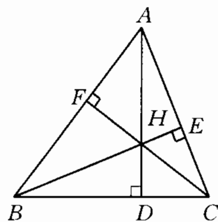
1. 三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半. 即 $MN /\!/ BC$，且 $MN=BC/2$.

2. 过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边. 若在$\triangle ABC$ 中，M 为 AB 的中点，$MN /\!/ BC$，MN 交 AC 于点 N，则 N 为 AC 的中点.



3. 三角形的三条中位线把原三角形分割成四个全等的三角形.

三角形的高（height of a triangle） 三角形的重要元素之一. 指从三角形的一个顶点向对边所在直线引的垂线或垂线段. 一个三角形有三条高. 三角形的三条高交于同一点，此点称为三角形的垂心. 如图，在$\triangle ABC$ 中，AD, BE, CF 分别为以 BC, CA, AB 为底边的三条高. 设$\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 的长分别为 a, b, c，三边上的高分别为 h_a, h_b, h_c，周长的一半为 $s=(a+b+c)/2$，那么三角形的高的计算公式分别为：



$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

三角形的垂心（orthocenter of a triangle） 三角形的特殊点之一. 三角形的三条高的交点称为三角形的垂心. 垂心的位置与三角形的形状有关. 锐角三角形的垂心位于三角形的内部（如图 1），直角三角形的垂心为直角的顶点（如图 2），钝角三角形的垂心位于三角形的外部（如图 3）.

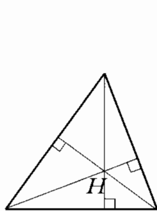


图1

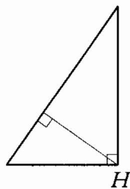


图2

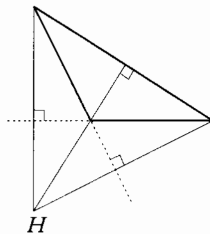
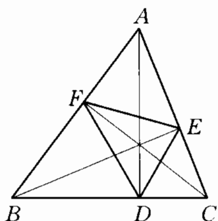


图3

垂足三角形（pedal triangle） 一种特殊三角形. 指从三角形的三个顶点向对边作垂线段（即高），连结三个垂足所得的三角形. 如图，AD, BE, CF 为$\triangle ABC$ 的高，则$\triangle DEF$ 是$\triangle ABC$ 的垂足三角形. 如果一个三角形的三个顶点分别在另一个三角形的三条边上，则该三角形称为另一个三角形的内接三角形. 锐角三角形的垂足三角形必是它的内接三角形. 在锐角三角形的所有内接三角形中，以垂足三角形的周



长为最短，该问题称为施瓦兹三角形问题.

三角形的内接三角形(triangle inscribed in a triangle) 见“垂足三角形”.

三角形边的垂直平分线(perpendicular bisector of the side of a triangle) 三角形的主要元素之一. 指过三角形任意一边中点而与这边垂直的直线. 一个三角形三条边的垂直平分线交于同一点，此点称为三角形的外心.

三角形的外心(excenter of a triangle) 三角形的特殊点之一. 三角形三条边的垂直平分线的交

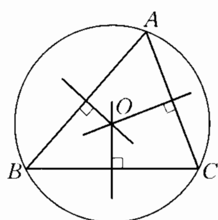


图1

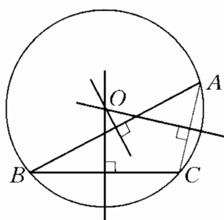


图2

点称为三角形的外心. 外心到三角形的三顶点的距离相等. 外心的位置与三角形的形状有关：锐角三角形的外心位于三角形的内部(如图 1)；直角三角形的外心为斜边的中点；钝角三角形的外心位于三角形的外部(如图 2)；正三角形的内心、重心、垂心和外心四心合一；等腰三角形的内心、重心、垂心、外心和顶点所对旁心五心共线.

三角形三边的关系(relation among three sides of a triangle) 三角形边的性质. 指三角形的任何两边的和大于第三边，任何两边的差小于第三边.

三角形的边角关系(relation between sides and angles of a triangle) 三角形边角的重要性质. 该性质表述为：三角形中，如果两条边不等，那么它们所对的角也不等，大边所对的角较大；如果两个角不等，那么它们所对的边也不等，大角所对的边较大.

垂心组(orthocentric system) 由三角形的特殊点组成的图形. 在四个点中，若有一点是其余三点连成的三角形的垂心，则其余三点也都有同样的性质，这样的四点合称为一个垂心组. 例如，三角形的三个顶点和它的垂心构成一个垂心组；三角形的内心和三个旁心也构成一个垂心组. 用线段连结垂心组的每两个点所得的图形称为垂心四角形.

垂心四角形(orthocentric quadrangle) 见“垂心组”.

三角形的五心(five centroids of a triangle) 三角形的一组特殊点. 三角形的内心、外心、垂心、重心、旁心统称三角形的五心.

三角形的巧合点(coincidence point of a triangle) 三角形的一组特殊点. 指三角形的内心、外心、垂心、重心和旁心，以及正等角中心、负等角中心、陪位重心.

三角形的全等(congruence of triangles) 三角形间的等价关系. 两个三角形的全等是指图形的全等. 即它们经过合同变换能完全重合. 这两个三角形也称全等三角形. $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等，记为 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，读作 $\triangle ABC$ 全等于 $\triangle A'B'C'$. (参见“图形的全等”).

全等三角形的判定(decision of congruent triangles) 判定三角形全等的几个充分条件. 满足下列五个条件之一的两个三角形为全等三角形：

1. 两边和夹角对应相等.
2. 两角和夹边对应相等.
3. 三边对应相等.
4. 两个角和其中一角的对边对应相等.
5. 两边及其中大边所对角对应相等.

全等三角形的性质(property of congruent triangles) 对三角形全等的几种刻画，也是三角形全等的几个必要条件. 两个全等三角形具有下列性质：

1. 对应边相等.
2. 对应角相等.
3. 对应中线、高、角平分线、外接圆半径、内切圆半径相等.
4. 对应线段组成的角相等.
5. 周长和面积相等.

直角三角形全等的判定(congruent decision of a right triangle) 判定直角三角形全等的几个充分条件. 满足下列条件之一的两直角三角形全等：

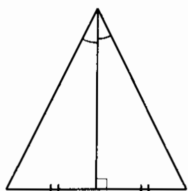
1. 两条直角边对应相等.
2. 一条直角边及一个锐角对应相等.
3. 斜边及一锐角对应相等.
4. 斜边及一条直角边对应相等.

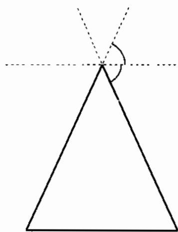
等腰三角形的判定(decision of an isosceles triangle) 判定三角形等腰的几个充分条件. 满足下列八个条件之一的三角形为等腰三角形：

1. 两角相等.
2. 两条边上的高相等.
3. 两条角平分线相等.
4. 两条中线相等.
5. 从同一个顶点引出的中线和高重合.
6. 从同一个顶点引出的中线和角平分线重合.
7. 从同一个顶点引出的高和角平分线重合.
8. 有一条对称轴的三角形.

等腰三角形的性质(property of an isosceles triangle) 对等腰三角形的几种刻画，也是三角形等腰的几个必要条件. 等腰三角形具有下列性质：

1. 两底角相等.
2. 等腰三角形是轴对称图形，底边上的高或中线或顶角平分线是对称轴(如图 1).


图1


图2

3. 两腰上的高相等.

4. 两腰上的中线相等.

5. 两底角平分线相等.

6. 顶角的平分线、底边上的高、中线、中垂线和对称轴五线合一.

7. 等腰三角形顶角的外角平分线平行于底边(如图 2).

等边三角形的判定(decision of a equilateral triangle) 判定三角形等边的几个充分条件. 满足下列六个条件之一的三角形为等边三角形：

1. 三个角相等.

2. 三条中线相等.

3. 三条高相等.

4. 三条角平分线相等.

5. 有一个角是 60°的等腰三角形.

6. 有三条对称轴的三角形.

等边三角形的性质(property of a equilateral triangle) 对等边三角形的几种刻画，也是三角形等边的几个必要条件. 等边三角形具有下列性质：

1. 三个角相等，都为 60°.

2. 三条中线、三条高和三条角平分线都相等，并且从同一顶点引出的中线、高和角平分线相重合.

3. 内心、外心、重心和垂心相重合.

4. 三条中线、高、和角平分线都是三条对称轴.

5. 外角平分线都和对边平行.

直角三角形的判定(decision of a right triangle) 判定三角形为直角三角形的几个充分条件. 满足下列三个条件之一的三角形为直角三角形：

1. 两个角的和为 90°.

2. 一边上的中线等于这条边的一半.

3. 两边的平方和等于第三边的平方.

直角三角形的性质(property of a right triangle) 对直角三角形的几种刻画，也是直角三角形的几个必要条件. 直角三角形具有下列性质：

1. 两个锐角互余.

2. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

3. 若一锐角等于 30°，则它所对的直角边等于斜边的一半.

4. 若一直角边等于斜边的一半，则它所对的锐角为 30°.

5. 三条高的交点(即垂心)为直角顶点.

6. 斜边为其外接圆的直径.

7. 斜边大于任一直角边，且两直角边的平方和等于斜边的平方.

8. 斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项；每一条直角边都是它在斜边上的射影和斜边的比例中项.

轴对称(axial symmetry) 几何学的基本概念之一. 指两个图形关于直线的一种对应关系. 若连结两点的线段被一条直线垂直平分，则称这两点关于这条直线对称；若两条线段的端点关于同一条直线对称，则称这两条线段关于这条直线对称. 一般地，若两个图形上的点全都关于同一条直线对称，则称这两个图形关于这条直线对称. 这种关于直线的对称称为轴对称，这条直线称为互相对称的图形的对称轴. 图形上任何两个互相对称的点称为对称点. 轴对称的两个图形经过轴反射变换可以互相合同(参见本卷《高等几何》中的“轴反射变换”).

对称轴(symmetric axis) 见“轴对称”.

对称点(symmetric points) 见“轴对称”.

轴对称图形(figures symmetric with respect to a straight line) 一类特殊的几何图形. 若关于一个图形，存在这样一条直线，使这图形上的每个点关于这条直线的对称点仍是这图形上的点，则称这图形关于这条直线对称. 这时称这个图形是轴对称图形，这条直线就称为这个图形的对称轴. 例如，由两个点组成的图形就是以连结这两点的线段的垂直平分线为对称轴的轴对称图形. 又如，等腰三角形是以它的顶角平分线为对称轴的轴对称图形. 轴对称图形具有如下性质：

1. 对称轴垂直且平分连结两对称点的线段.

2. 对应线段或其延长线若相交，则交点在对称轴上.

3. 平面图形的对称轴将轴对称图形分为两个全等的图形.

在以对称轴为反射轴的轴反射下，轴对称图形的每个点都变到它的对称点. 因此，轴对称图形是在此种轴反射下变到自身的图形.

线段垂直平分线的性质(property of perpendicular bisector of a line segment) 对线段垂直平分线的几种刻画. 线段的垂直平分线具有下列性质：

1. 线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离必相等.

2. 到一条线段两个端点距离相等的点，必在这条线段的垂直平分线上.

三角形的内角和(sum of interior angles of a triangle) 三角形内角的数量特征. 指三角形三个内角的和等于 180°.

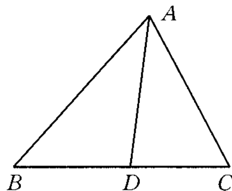
三角形的外角和(sum of exterior angles of a triangle)　三角形外角的数量特征. 指三角形三个外角和等于 360°.

三角形外角定理(exterior angle theorem of a triangle)　平面几何的重要定理之一. 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和. 由此可得:三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角.

三角形的稳定性(stability of a triangle)　三角形的一个重要性质. 任何多边形(n 边形)自然都可由它的 n 个顶点确定,但一般不能由它的 n 条边完全确定. 惟有三角形能由它的三条边(其实就是三条边长的三个数)完全确定. 三角形的这个性质称为三角形的稳定性. 三角形的稳定性具有重要的理论意义和实用价值.

三角形内角平分线的性质(property of bisector of interior angles of a triangle)　对三角形内角平分线的几种刻画. 三角形的内角平分线具有下列性质:

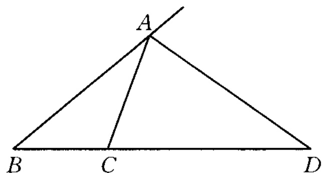
1. 三角形的内角平分线内分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例. 如图,若 AD 是$\triangle ABC$ 的一条角平分线,则 $BD/DC=AB/AC$.



2. 如果三角形一边上的一点将该边内分成两线段与另两边对应成比例,那么此点与该边所对角的顶点的连线是角平分线. 如图,$\triangle ABC$ 中,若 D 为 BC 上一点,且 $BD/DC=AB/AC$,则 AD 是$\angle BAC$ 的角平分线.

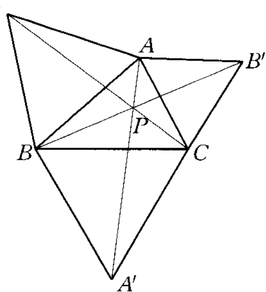
三角形外角平分线的性质(property of bisector of exterior angles of a triangle)　对三角形外角平分线的几种刻画. 三角形的外角平分线具有下列性质:

1. 如果三角形的外角平分线外分对边成两条线段,那么这两条线段和相应内角的两边对应成比例. 如图,$\triangle ABC$ 中,若 AD 是外角平分线,且交 BC 的延长线于点 D,则有 $BD/DC=AB/AC$.



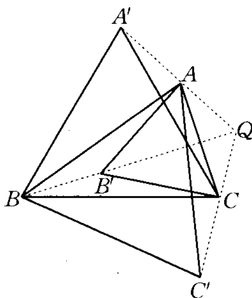
2. 如果三角形一边的延长线上一点将该边外分成两条线段与另两边对应成比例,那么此点与该边所对角的顶点连线是外角平分线. 如图,$\triangle ABC$ 中,若 D 是边 BC 的延长线上一点,且 $BD/DC=AB/AC$,则 AD 是$\angle BAC$ 的外角平分线.

正等角中心(positive isogonal centre)　亦称费马点. 三角形的巧合点之一. 若分别以$\triangle ABC$ 的三边为边,向形外作正三角形 ABC',BCA',CAB',则三直线 AA',BB',CC'交于同一点 P,并形成以 P 为顶点的六个相等的角,每个角等于 60°(如图). 点 P 称为$\triangle ABC$ 的正等角中心. 当$\triangle ABC$ 每个内角都小于 120°时,正等角中心是到三顶点距离之和为最小的点. 正等角中心早在古希腊时代已被发现. 公元 17 世纪时,费马(Fermat,P. de)曾提出这样的征解问题:求一点,使与定三角形三顶点的距离和为极小. 因此,各角均小于 120°的三角形的正等角中心又称费马点.



费马点(Fermat point)　即"正等角中心".

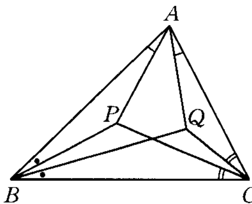
负等角中心(negative isogonal centre)　三角形的巧合点之一. 若$\triangle ABC$ 不是正三角形,分别以三边为边向$\triangle ABC$ 内侧作三个正三角形:$\triangle ABC'$,$\triangle BCA'$和$\triangle CAB'$,则三直线 AA',BB',CC'交于同一点 Q(如图). 点 Q 称为$\triangle ABC$ 的负等角中心.



等角线(isogonal line)　有特殊位置关系的两条对称直线. 给定一个角. 若存在两条直线过顶点,且关于该角的平分线对称,则称这两条直线关于该角互为等角线. 一个角的两边也是该角的等角线. 若等角线相重合,则称为自等角线. 例如,一个角的平分线就是这个角的自等角线. 一个角的邻补角的平分线也是该角的自等角线.

自等角线(self-isogonal line)　见"等角线".

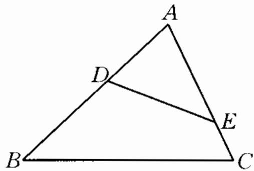
等角共轭点(isogonal conjugate points)　三角形的特殊点之一. 给定$\triangle ABC$,如果对于一点 P,三直线 AP,BP,CP 分别对角 A,B,C 的等角线通过同一点 Q,则称 Q 是 P 关于$\triangle ABC$ 的等角共轭点(如图). 显然,P 也是 Q 关于$\triangle ABC$ 的等角共轭点,即 P 与 Q 互为等角共轭点. 例如,三角形的外心和垂心互为等角共轭点. 若点 P 的等角共轭点与 P 重合,则 P 称为自等角共轭点. 例如,三角形的内心和三个旁心都是自等角共



轭点.

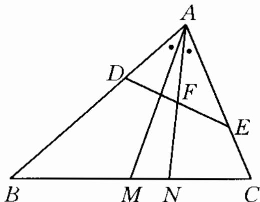
自等角共轭点(self-isogonal conjugate points) 见“等角共轭点”.

逆相似边(inversely similar side) 亦称逆平行线. 与三角形某一边有关的一条线段. 指连结三角形两边上点的具有逆相似性的线段. 如图所示,设在$\triangle ABC$的边AB和AC上分别取点D和E,使$AB:AC=AE:AD$,因而$\triangle AED\backsim\triangle ABC$,这时$\triangle AED$与$\triangle ABC$逆相似. 线段$DE$称为$\triangle ABC$的边$BC$的逆相似边,或称直线$DE$是边$BC$关于$\triangle ABC$的逆平行线.



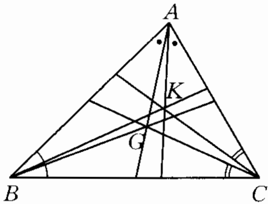
逆平行线(anti-parallel line) 即“逆相似边”.

陪位中线(symmedian) 亦称类似中线. 与三角形的某一中线有关的一条线段. 即三角形中线的等角线. 三角形每条中线的等角线称为该三角形的陪位中线. 在三角形中,一边上的陪位中线平分该边的逆相似边. 如图,AM是$\triangle ABC$的一条中线,AN是AM的等角线,则AN是陪位中线. 设DE是BC的逆相似边,则AN平分DE,即$DF=EF$.



类似中线(symmedian) 即“陪位中线”.

陪位重心(symmedian point) 亦称类似重心或勒穆瓦纳点. 与三角形重心有关的一个点. 三角形三条陪位中线的交点,称为该三角形的陪位重心,即三角形重心的等角共轭点. 如图,若G是$\triangle ABC$的重心,K是G的等角共轭点,则K是$\triangle ABC$的陪位重心. 勒穆瓦纳(Lemoine, É. M. H.)于1873年,向法国科学进步协会会议提交的论文《三角形特殊点的某些性质》中,提出了有关几何结构的类似重心学说. 后经多年的研究,使理论更完善而严密,形成一套包括基本公式、勒穆瓦纳圆定理等的三角形几何理论.



类似重心(symmedian point) 即“陪位重心”.

勒穆瓦纳点(Lemoine point) 即“陪位重心”.

拿破仑三角形(Napoleon triangle) 一个著名的正三角形. 若从任意三角形的各边向外作等边三角形,则它们的中心构成一个等边三角形,这个等边三角形称为原三角形的外拿破仑三角形(如图1);若从任意三角形的各边向三角形内侧作等边三角形,则它们的中心也构成一个等边三角形,这个等边三角形称为原三角形的内拿破仑三角形(如图2).

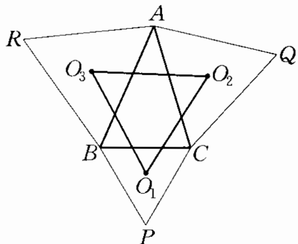


图1

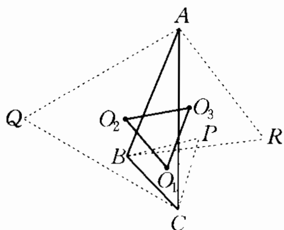
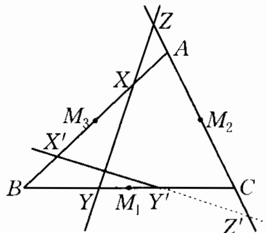


图2

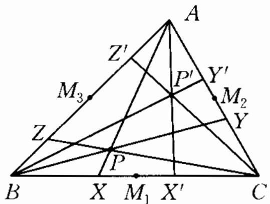
外拿破仑三角形和内拿破仑三角形统称拿破仑三角形. 任意一个三角形的外拿破仑三角形与内拿破仑三角形的面积之差等于原三角形的面积;外拿破仑三角形与内拿破仑三角形的中心重合. 拿破仑(Napoleon, B.)在他还未成为法国统治者之前,曾经对数学有爱好,特别是对几何有浓厚的兴趣,他曾和当时法国许多数学家有亲密的友谊. 在他当了将军之后,一次邀请了拉格朗日(Lagrange, J.-L.)和拉普拉斯(Laplace, P.-S.)讨论几何中的一些问题时,拿破仑就提出了“在三角形的每边向外(或向内)作正三角形,则这三个三角形的中心也构成正三角形”的问题,后来,这一命题被这些数学家收入书中并称为拿破仑三角形.

等截点(isotomic point) 三角形的特殊点之一. 指三角形的边上关于中点的对称点(可在边的延长线上). 三角形任一边所在直线上与该边中点距离相等的两个点,互为等截点. 如果一直线截$\triangle ABC$三边或其延长线于点X,Y,Z,则这三点的等截点X',Y',Z'必共线(如图).



垂心等截点(orthocentric isotomic point) 三角形的特殊点之一. 即三角形垂心的等截共轭点. 三角形的重心、陪位重心与垂心等截点三点共线,且重心到陪位重心的距离等于重心到垂心等截点距离的一半.

等截共轭点(isotomic conjugate points) 三角形的特殊点之一. 在$\triangle ABC$中,设X与X',Y与Y',Z与Z'各是三条边BC,CA,AB上的等截点,若AX,BY,CZ三线交于一点P,则AX',BY',CZ'三线也交于一点P'(或三线平行). 当P与P'存在时,点P与点P'称为$\triangle ABC$的等截共轭点,或称它们关于$\triangle ABC$互为等截共轭点(如图).



中点三角形(midpoint triangle) 亦称中位三角形. 一种特殊三角形. 指三角形三边中点连线所成

的三角形. 中点三角形具有下列性质：

1. 周长是原三角形周长的一半.

2. 面积是原三角形面积的四分之一.

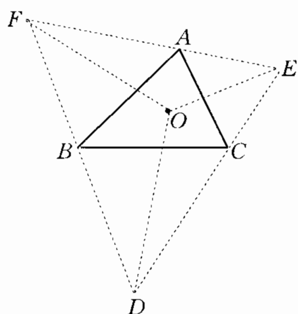
3. 与原三角形镜像相似.

4. 原三角形被分成的包括中点三角形在内的四个小三角形全等.

中位三角形(midpoint triangle)　即"中点三角形".

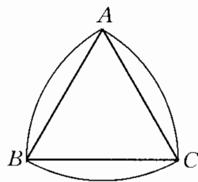
主旁心三角形(principal excenter triangle)　一种特殊三角形. 指连结三角形的三个旁心而成的三角形. 主旁心三角形面积等于该三角形的三个旁心三角形的面积的和(参见"旁心三角形"及其图).

旁心三角形(excenter triangle)　一种特殊三角形. 指连结三角形的内心与两个旁心所成的三角形. 一个三角形有三个旁心三角形(如图). 在$\triangle ABC$中，若O为$\triangle ABC$的内心，D，E，F三点为$\triangle ABC$的三个旁心，则$\triangle ODE$，$\triangle OEF$，$\triangle OFD$均为$\triangle ABC$的旁心三角形.



海伦三角形(Heron triangle)　一种特殊三角形. 指边长为连续的三个正整数，而且其面积也是正整数的三角形. 上述三角形是海伦(Heron，(A))研究海伦公式时得到的一种特殊情况. 它的一般解可用海伦公式求得. 例如三条边长分别为连续三个正整数 3，4，5；13，14，15；51，52，53；193，194，195 等的三角形均为海伦三角形.

鲁洛克斯三角形(Reuleaux triangle)　一种特殊三角形. 指分别以正三角形的顶点为圆心，以其边长为半径作圆弧，由这三段圆弧组成的曲边三角形称为鲁洛克斯三角形(如图). 鲁洛克斯三角形的特点是：在任何方向上都有相同的宽度，即能在距离等于其圆弧半径a(等于正三角形的边长)的两条平行线间自由转动，并且始终保持与两直线都接触. 机械加工业上利用这个性质，把钻头的横截面做成鲁洛克斯三角形的形状，就能在零件上钻出正方形的孔来. 这一性质是鲁洛克斯(Reuleaux，F.)在研究机械分类时发现的.



切线三角形(tangent triangle)　一种特殊三角形. 指从三角形的各顶点作外接圆切线所成的三角形称为切线三角形.

多 边 形

多边形(polygon)　亦称多角形. 平面几何中最基本、最重要的图形之一. 广义地说，多边形就是封闭折线. 但在平面几何中，采用以下稍窄的定义较为合适：平面上的多边形是由不自交的封闭折线和它所围成的区域共同组成的图形. 这封闭折线所围成的区域称为多边形的内部，内部的点称为多边形的内点. 平面的其他部分称为多边形的外部，外部的点称为多边形的外点. 封闭折线的边称为多边形的边，折线的顶点称为多边形的顶点. 顶点处两条边所夹的包含多边形内部的角称为多边形的角或内角. 边数(即角数)是n的多边形称为n边形或n角形. 连结多边形不相邻的两个顶点的线段称为多边形的对角线. 多边形各边长度的和称为多边形的周长，这也就是封闭折线的长度. 多边形常用连写它的各个顶点的字母来表示. 如图 1 和图 2 画的都是五边形$ABCDE$，它们的顶点是A，B，C，D，E，边是AB，BC，CD，DE，EA，对角线是AC，AD，BD，BE，CE，

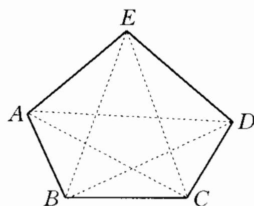


图1

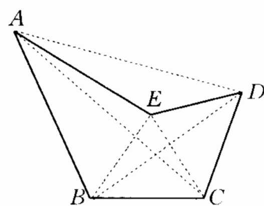


图2

周长是五条边长度之和. 不自交的封闭折线可以出现两个顶点相重合，一个顶点在另一条边上及两条边有一部分(或全部)重合的特殊情形. 因此，可以出现下面图 3 的六边形$ABCDEC$、图 4 的五边形和图

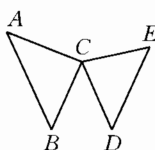


图3

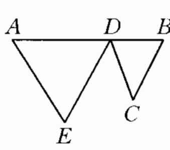


图4

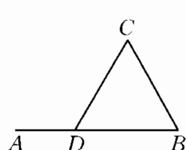


图5

5 的四边形. 为排除以上情况，引进以下概念：由简单闭折线所围成的多边形称为简单多边形，其他多边形称为复杂多边形. 上面图 1 和图 2 是简单多边形，图 3、4、5 都是复杂多边形. 通常提到多边形都是指简单多边形.

多角形(polygon)　即"多边形".

多边形的内部(interior of a polygon)　见"多边形".

多边形的内点(interior point of a polygon)　见"多边形".

多边形的外部(exterior of a polygon)　见"多

边形".

多边形的外点(exterior point of a polygon) 见"多边形".

多边形的边(side of a polygon) 见"多边形".

多边形的顶点(vertex of a polygon) 见"多边形".

多边形的内角(interior angle of a polygon) 多边形的基本元素之一(参见"多边形"). 多边形的内角和等于$(n-2)180°$(其中$n\geqslant3$). 特别地,正n边形的每个内角等于$(n-2)\cdot180°/n$.

多边形的对角线(diagonal of a polygon) 多边形的基本元素之一(参见"多边形"). n边形的对角线数等于$n(n-3)/2$(其中$n\geqslant3$).

多边形的外角(exterior angle of a polygon) 多边形的基本元素之一(参见"多边形"). 凸n边形的外角和等于360°(每个顶点处仅取一个外角),它与多边形的边数无关. 正n边形的每个外角等于$360°/n$.

简单多边形(simple polygon) 一类常见的多边形. 指由简单闭折线所围成的多边形(参见"多边形"). 简单多边形还可以定义成:

1. 周界不自交的多边形.
2. 满足条件:
   1) 顶点与顶点不重合.
   2) 顶点不在边上.
3. 边与边不相交的多边形.

简单多边形分凸多边形和凹多边形两种(参见"凸多边形").

凸多边形(convex polygon) 一种简单多边形. 指由简单凸闭折线所围成的多边形. 其他的简单多边形称为凹多边形. 凸多边形的下列性质,每一条都可用来判定凸多边形,即具有任何一条性质的简单多边形是凸多边形:

1. 凸多边形的内角都是劣角(即都小于平角). 凸多边形的内角的邻补角称为它的外角. 因此在提到多边形的外角时,一般指的是凸多边形.

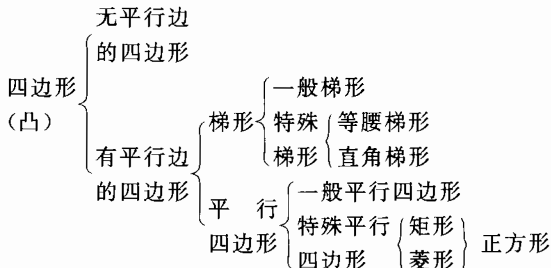
2. 凸多边形是凸图形,即连结凸多边形内部任意两点的线段仍在多边形内部.

3. 凸多边形的对角线都在凸多边形内部.

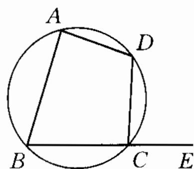
4. 凸多边形各边的延长线都将所在平面划分为两个半平面,而凸多边形的整个图形都在同一个半平面上(即处在各边延长线的同一侧).

凹多边形(concave polygon) 见"凸多边形".

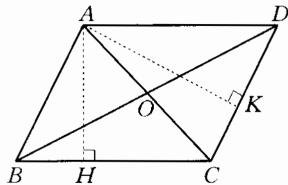
四边形(quadrilateral) 一类重要的几何图形. 有四条边的多边形称为四边形,一般常指凸四边形. 四边形的内角之和与外角之和都等于360°,它有两条对角线. 四边形可以分类如下:



四边形的内对角(opposite interior angle of a quadrilateral) 平面几何术语. 在凸四边形中,某个内角的对角,称为这个角的外角的内对角. 这个术语将经常用到,如图,当A,B,C,D四点共圆,即$ABCD$是圆内接四边形时,每个外角等于其内对角,反之亦然. 即为一例.



平行四边形(parallelogram) 最基本、最重要的一种四边形. 两组对边分别平行的四边形称为平行四边形. 平行四边形的任一条边可作为平行四边形的底,这条边和对边的距离称为这个底上的高(高是对于确定的底来说的). 如图,四边形$ABCD$中,$AB\parallel CD$,$AD\parallel BC$,四边形$ABCD$是平行四边形,记为▱$ABCD$,读作平行四边形$ABCD$. 若把BC作为该平行四边形的底,则BC上的高为AH;若把CD作为底,则CD上的高为AK. 平行四边形中,不具有公共顶点的两条边称为对边(如AB与CD,AD与BC互为对边);具有公共顶点的两条边称为邻边(如AB与BC,AB与AD等互为邻边);顶点不在同一条边上的两个角称为对角(如$\angle A$与$\angle C$,$\angle B$与$\angle D$互为对角);连结对角两顶点的线段称为对角线(如AC,BD);顶点在同一条边上的两个角称为相邻的角(如$\angle A$与$\angle B$,$\angle C$与$\angle D$等互为相邻的角). 矩形、菱形、正方形是特殊的平行四边形. 平行四边形是一个中心对称图形(如图),即它绕对角线AC和BD的交点O旋转180°后,能够和自身重合. 这点O称为平行四边形的对称中心.



平行四边形有如下性质:

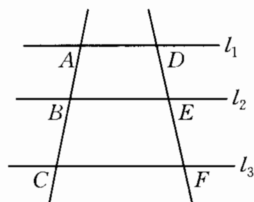
1. 对角相等.
2. 对边相等.
3. 对角线互相平分.
4. 相邻两角互补.
5. 被一条对角线分为两个全等的三角形.
6. 是中心对称图形,其对角线交点是它的对称中心.
7. 各边的平方和等于两对角线的平方和.

平行四边形的对称中心(symmetric center of a parallelogram)　见"平行四边形".

平行四边形的判定(decision of a parallelogram)　判定平行四边形的几个充分条件.满足下列诸条件中之一的凸四边形,均为平行四边形：

1. 两组对边分别相等.
2. 一组对边平行且相等.
3. 两条对角线互相平分.
4. 每相邻两内角互补.
5. 两组对角分别相等.
6. 中心对称.

平行线分线段成比例(dividing the segments into proportional by parallel lines)　亦称平行截割定理.平面几何术语.指三条平行线截两条直线,所得的四条线段对应成比例.如图,$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$,则



$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$

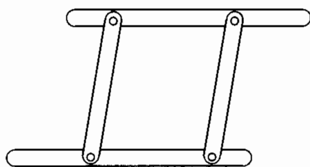
平行截割定理是研究相似形最常用的一个性质.它的重要特例:在一直线上截得相等线段的一组平行线,也把其他直线截成相等的线段,称其为平行线等分线段.

平行截割定理(theorem of parallel section)　即"平行线分线段成比例".

平行线等分线段(bisecting the segment by parallel line)　见"平行线分线段成比例".

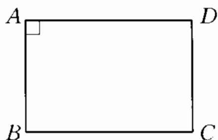
平行四边形的不稳定性(instability of a parallelogram)　平行四边形的一个重要性质.平行四边形的形状、大小不能仅由平行四边形的四条边确定,这种性质称为平行四边形的不稳定性.把两两相等的四根木条用可活动的铰钉钉成如下图所示的平行四边形木框,推动木条可以得出形状、大小各不相同的平行四边形,这足以说明平行四边形的不稳定性.

铰链四边形(hinge quadrilateral)　一种特殊的四边形.如果四边形的四条边的边长一定,其四个内角不固定,这样的可以变形的四边形称为铰链四边形(如图).铰链四边形显示四边形的不稳定性.



矩形(rectangle)　亦称长方形.特殊的平行四边形之一.有一个角是直角的平行四边形称为矩形.在▱$ABCD$ 中,若$\angle A=\mathrm{Rt}\angle$,则▱$ABCD$ 为矩形,记为▭$ABCD$,读作矩形 $ABCD$.矩形的两条邻边中,长边通常称为矩形的长,短边通常称为矩形的宽.中国古算书中,矩形田称为直田.亦称矩形图形为直田.

矩形是一种特殊的平行四边形,因此,它除具有平行四边形的性质外,还具有下列性质：



1. 四个角相等,且都是直角.
2. 两条对角线相等.
3. 每条对角线分矩形为两个全等的直角三角形.
4. 是轴对称图形,它有两条对称轴,这两条对称轴是过矩形的对称中心而与该矩形相邻两边分别平行的两直线.
5. 有一个外接圆,矩形两对角线都是外接圆的直径.

长方形(oblong)　即"矩形".

直田(zhi tian)　见"矩形".

矩形的判定(decision of a rectangle)　判定矩形的几个充分条件.满足下列条件之一的四边形是矩形：

1. 有一个角为直角的平行四边形.
2. 两条对角线相等的平行四边形.
3. 邻角相等的平行四边形.
4. 有三个角是直角的四边形.
5. 对角线互相平分且相等的四边形.
6. 四个角相等的四边形.
7. 关于过对角线交点,且分别与两邻边平行的两条直线成轴对称的四边形.

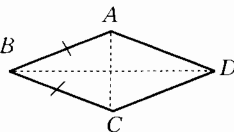
黄金矩形(golden rectangle)　几何学的著名图形.指长和宽的比为φ∶1 的矩形.其中

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033989\cdots.$$

这种比在艺术造形中有美学价值,如工艺美术品的长和宽按这种比例则谐调美观.

菱形(rhombus)　特殊的平行四边形之一.有一组邻边相等的平行四边形称为菱形.如图,在▱$ABCD$ 中,若 $AB=BC$,则▱$ABCD$ 是菱形,记为◇$ABCD$,读作菱形 $ABCD$.

菱形是一种特殊的平行四边形.它除具有平行四边形的性质外,还具有下列性质：



1. 四条边都相等.
2. 对角线互相垂直平分,并且每一条对角线平分一组对角.
3. 每一条对角线分菱形为两个全等的等腰三角形.
4. 是轴对称图形,它的两条对角线是对称轴.
5. 有一个内切圆,对角线交点是内切圆圆心,内切圆的直径等于菱形的高.

菱形的判定(decision of a rhombus) 判定菱形的几个充分条件.满足下列条件之一的四边形是菱形：

1. 四条边都相等的四边形.
2. 对角线互相垂直平分的四边形.
3. 两条对角线分别平分每组对角的四边形.
4. 对角线互相垂直的平行四边形.
5. 有一条对角线平分一个内角的平行四边形.
6. 一组邻边相等的平行四边形.

筝形(kite) 亦称偏菱形.特殊的四边形之一.有一条对角线是另一条对角线的垂直平分线的四边形称为筝形.筝形分凸筝形(如图 1)和凹筝形(如图 2)两种.凹筝形又称鸢形.筝形是轴对称图形,其中一条对角线为对称轴.如图中,对角线 AC 分别为它们的对称轴.凸筝形有一个内切圆(如图 1),凹筝形有一个旁切圆(如图 2).

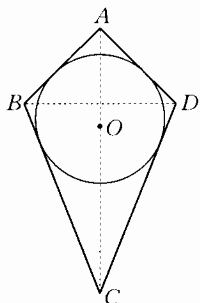


图1

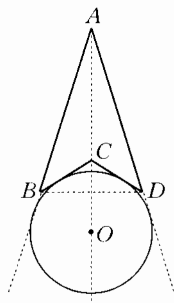
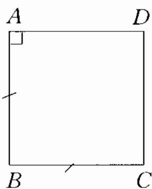


图2

凸筝形(convex kite) 见"筝形".

凹筝形(concave kite) 见"筝形".

正方形(square) 特殊的平行四边形之一.有一组邻边相等,并且一个角是直角的平行四边形称为正方形.它的每条边的长称为正方形的边长.如图,在$\square ABCD$ 中,若 $AB=BC$, $\angle A=\mathrm{Rt}\angle$,则$\square ABCD$ 为正方形,记为$\square ABCD$,读作正方形 $ABCD$.中国古算书中,正方形田称为方田.亦称正方形图形为方田.



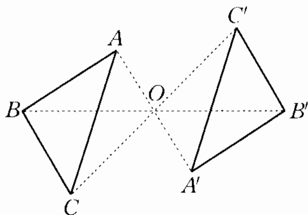
正方形是特殊的平行四边形,也是特殊的矩形和菱形.因此,它具有平行四边形、矩形和菱形的一切性质.

方田(fang tian) 见"正方形".

正方形的判定(decision of a square) 判定正方形的几个充分条件.满足下列条件之一的四边形是正方形：

1. 四边相等且有一个角是直角的四边形.
2. 对角线互相垂直平分且相等的四边形.
3. 有一个角是直角且一组邻边相等的平行四边形.
4. 有一组邻边相等的矩形.
5. 有一个角为直角的菱形.

中心对称(central symmetry) 几何学的基本概念之一.指两图形间的一种特殊的对应关系.若一个图形经过中心反射能和另一个图形重合,则称这两个图形关于反射中心成中心对称.反射中心称为对称中心.凡图形上能重合的任意两点都称为对应点,又称为中心对称的对称点.如图,将$\triangle ABC$ 经过中心反射能和$\triangle A'B'C'$重合,故$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$关于定点 O 成中心对称,点 O 为对称中心.一般地,如果两个图形的对应点的连线的中点都与一定点 O 重合,那么这两个图形关于定点成中心对称,定点 O 就是对称中心(参见本卷《高等几何》中的"中心反射变换").



对称中心(center of symmetry) 见"中心对称".

对称点(symmetry point) 见"中心对称".

中心对称图形(central symmetric figure) 一类特殊的几何图形.一个平面图形绕着定点旋转180°后,能够和自身重合的图形称为中心对称图形,这个定点称为图形的对称中心.例如,平行四边形是中心对称图形,对角线的交点是其对称中心;圆也是中心对称图形,圆心是对称中心.在以对称中心为反射中心的中心反射下,中心对称的每个点都变到它的对称点.因此,中心对称图形是在此种中心反射下变到自身的图形.

图形的中心(center of a figure) 几何学的基本概念之一.一般是指具有对称性质的图形的一个特殊点.例如,中心对称图形的对称中心,或具有两条以上对称轴的图形的对称轴的交点.圆的中心即为圆心,正多边形的中心即为这一正多边形的内切圆和外接圆的圆心.

中心对称图形的性质(property of a central symmetric figure) 对中心对称图形的刻画.中心对称图形具有下列性质：

1. 连结两对称点的线段经过对称中心,并且被对称中心平分.
2. 对应线段相等且平行(或在同一条直线上).
3. 对应角相等.

梯形(trapezoid) 特殊的四边形之一.一组对边平行而另一组对边不平行的凸四边形称为梯形.平行的两边称为梯形的底边,它们必不相等,通常把短的称为上底,长的称为下底;不平行的两边分别称为梯形的腰;上底与腰的夹角称为上底角,下底与腰

的夹角称为下底角，并统称为梯形的底角；两底之间的距离称为梯形的高．梯形两腰中点的连线称为梯形的中位线，梯形的中位线平行于底边，通过两对角线中点且等于两底之和的一半．梯形两对角线的中点的连结线段平行于底边，且等于两底之差的一半．梯形的面积等于两底之和与高的乘积的一半．两腰相等的梯形称为等腰梯形；有一个角是直角的梯形称为直角梯形．梯形还有一种定义：一组对边平行的四边形称为梯形．按这种定义平行四边形成为特殊的梯形．中国古算书中，梯形田为邪田．亦称梯形图形为邪田．

梯形的中位线(median line of a trapezoid)　见“梯形”．

等腰梯形(isosceles trapezoid)　见“梯形”．

邪田(xie tian)　见“梯形”．

等腰梯形的判定(decision of an isosceles trapezoid)　判定等腰梯形的几个充分条件．满足下列条件之一的梯形是等腰梯形：

1．在同一底上的两个角相等．

2．对角线相等．

3．内接于圆．

4．关于过两底的中点的直线成轴对称．

等腰梯形的性质(property of an isosceles trapezoid)　对等腰梯形的几何刻画，也是梯形等腰的几个必要条件．等腰梯形具有下列性质：

1．在同一底上的两个角相等．

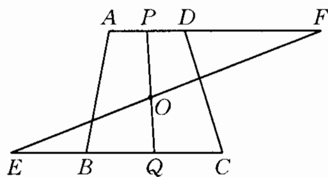
2．对角线相等．

3．对角互补．

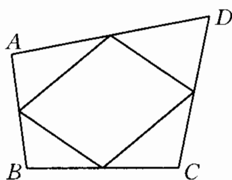
4．是轴对称图形，其对称轴是过两底的中点的直线．

5．有一个外接圆．

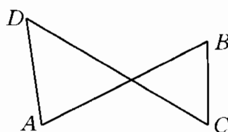
梯形重心的求法(method of finding a trapezoidal barycenter)　求梯形重心的方法．是一个简单的作图题．要求梯形 $ABCD$ 的重心，可采用下面的方法：如图，延长 AD 到点 F，使 $DF=BC$，延长 CB 到点 E，使 $BE=AD$，连结 EF，取 AD 中点 P 和 BC 中点 Q，连结 PQ 交 EF 于点 O，则 O 就是梯形 $ABCD$ 的重心．



瓦里尼翁平行四边形(Varignon parallelogram)　四边形的一个特殊内接四边形．顺次连结四边形各边中点而成的四边形是平行四边形，称为瓦里尼翁平行四边形(如图)．它的面积是原四边形面积的一半．这个平行四边形是瓦里尼翁(Varignon，P.)发现的，但迟至 1731 年才发表．



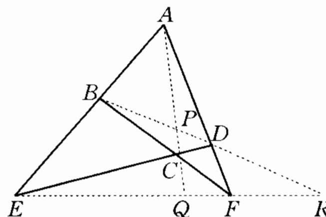
折四边形(broken quadrilateral)　亦称自交四边形，又称星形四边形．一种特殊的四边形．有一组对边相交的四边形称为折四边形(如图)．折四边形属于复杂多边形．



自交四边形(self-intersecting quadrilateral)　即“折四边形”．

星形四边形(star quadrilateral)　即“折四边形”．

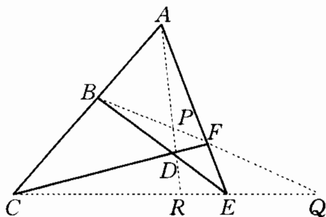
完全四边形(complete quadrilateral)　亦称完全四线形．一种特殊的四边形．每三条不共点的四条直线两两相交于六个点，这四条直线六个点所构成的图形称为完全四边形．如图，$ABECFD$ 是一个完全四边形．四条线段 AE，ED，AF，FB 称为这个完全四边形的边；六个交点 A，B，C，F，D，E 称为它的顶点；不共边的两个顶点，如 A 与 C，B 与 D，E 与 F 称为它的对顶点；对顶点的连线，如 BD，AC，EF 称为它的对角线或对顶线．三条对角线组成的三线形称为对顶三线形或对顶三角形，如$\triangle PQR$．帕普斯(Pappus，(A))的《数学汇编》第七篇中命题 130 讨论了完全四边形的性质．德萨格(Desargues，G.)的著作中进一步发现了完全四边形的一些射影性质．



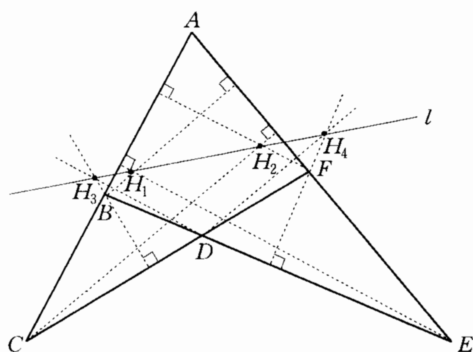
完全四线形(complete quadrilateral)　即“完全四边形”．

对顶三角形(vertically opposite triangles)　见“完全四边形”．

完全四边形的对节(opposite node of a complete quadrilateral)　完全四边形的特殊线段．指完全四边形中所包含的各个四边形的对边．如图，完全四边形 $ABCDEF$ 中包含凸四边形 $ABDF$，凹四边形 $ACDE$ 和折四边形 $BCFE$，因而完全四边形 $ABCDEF$ 共有六对对节，即 AB 与 DF，BD 与 AF，AC 与 DE，AE 与 DC，BC 与 EF，BE 与 CF．

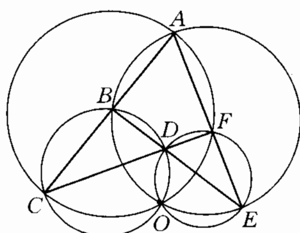


完全四边形的垂心线(orthocenter line of a complete quadrilateral)　完全四边形的特殊线.指完全四边形的四条边所成的四个三角形的垂心所同

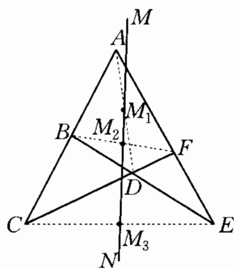


在的直线.它平行于西姆森线(参见"西姆森定理").如图,H_1,H_2,H_3,H_4 分别是完全四边形的四条边交成的四个三角形△ABE,△ACF,△BCD,△DEF 的垂心,这四个垂心同在垂心线 l 上.完全四边形 $ABCDEF$ 的三条对角线 AD,BF,CE 相交所成的△PQR 就是对顶三角形.

完全四边形的米奎尔点(Miqule point of a complete quadrilateral)　完全四边形的特殊点.指完全四边形的四条边相交所成的四个三角形的外接圆所共有的惟一的点.如图,完全四边形 $ABCDEF$ 的四条边相交成四个三角形 ABE,ACF,BCD 和 DEF,它们的外接圆⊙ABE,⊙ACF,⊙BCD 和⊙DEF 的公共点 O 就是米奎尔点(参见"米奎尔定理").



完全四边形的牛顿线(Newton line of a complete quadrilateral)　完全四边形的特殊线.指完全四边形的三条对角线的中点所同在的直线.如图,M_1,M_2,M_3 分别是完全四边形 $ABCDEF$ 的对角线 AD,BF,CE 的中点,它们同在牛顿线 MN 上,它是牛顿(Newton, I.)所发现(参见"牛顿定理").

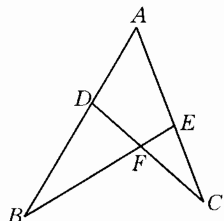


规形定理(theorem of compasses form)　在完全四边形边上求分点比值的定理.指在完全四边形 $ADFEBC$ 中(如图),如果 $BD:DA=1:\lambda$,$CE:EA=1:n$,则有

$$BF:FE=1:\frac{\lambda}{1+n},$$

$$CF:FD=1:\frac{n}{1+\lambda},$$

式中 1,λ,n 表示在同一直线上的两线段的比例数.应用此定理对形如二脚规的凹四边形在已知部分分点所得比值的情况下,可求出另外分点的比值.



正多边形(regular polygon)　亦称正多角形.一类重要的几何图形.各边相等且各角也相等的多边形称为正多边形.各边都相等的多边形称为等边多边形.各内角都相等的多边形称为等角多边形.正多边形既是等边多边形又是等角多边形.边数是 n 的正多边形称为正 n 边形,当 n 为 3 和 4 时,分别称为正三角形和正方形.正多边形的面积等于它的周长与边心距乘积的一半.若正 n 边形周长为 P_n,边心距为 r,面积为 S_n,则

$$S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot r.$$

正 n 边形的每一边长为

$$a=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n},$$

其中 n 为边数,a 为边长,R 为外接圆半径.正 n 边形的每个内角都等于

$$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}.$$

在边数不超过 100 的正多边形中,仅用尺规作出的正多边形只有 24 个.

正多角形(regular polygon)　即"正多边形".

等边多边形(equilateral polygon)　见"正多边形".

等角多边形(equiangular polygon)　见"正多边形".

圆内接正多边形(inscribed regular polygon of circle)　一类重要的正多边形.指顶点都在同一圆周上的正多边形.正多边形总内接于圆,故称为圆内接正多边形,该圆称为正多边形的外接圆.因此,可以把圆等分而得到正多边形.即把圆分成 $n(n\geqslant 3)$ 等份,依次连结各分点而得到圆的内接正 n 边形.这个圆称为这个正 n 边形的外接圆.当边数 n 增大时,圆的内接和外切正 n 边形的周长趋近圆周长,它们的面积趋近圆面积.希腊和中国古代数学家体验到这种符合近代极限理论的思想,都曾由此计算出圆周率的近似值(参见"圆周率"与"割圆术").

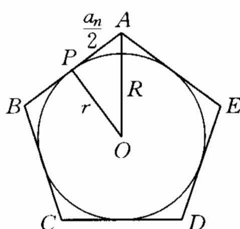
正多边形的外接圆(circumcircle of a regular polygon)　见"圆内接正多边形".

圆外切正多边形(circumscribed regular polygon of circle)　一类重要的正多边形.指各边都切于同一圆的正多边形.正多边形总外切于圆,故称为圆外切正多边形,该圆称为正多边形的内切圆.因

此，可以把圆等分而得到正多边形，即把圆分成 n（$n\geqslant 3$）等份，经过各分点作圆的切线，以相邻切线交点为顶点的多边形是这个圆的外切正 n 边形. 该圆是这个正 n 边形的内切圆. 当边数 n 增大时，圆的内接和外切正 n 边形的周长趋近圆周长，它们的面积趋近圆面积. 希腊和中国古代数学家体验到这种符合近代极限理论的思想，都曾由此计算出圆周率的近似值（参见“圆周率”与“割圆术”）.

正多边形的内切圆（inscribed circle of a regular polygon） 见“圆外切正多边形”.

正多边形的边心距（apothem of a regular polygon） 正多边形的一个重要线段. 即正多边形的内切圆半径（如图）. 正 n 边形边心距 $r=R\cdot\cos(180°/n)$，其中 R 为正 n 边形半径. 若正 n 边形的半径为 R，边长为 a_n，边心距为 r，则有关系



$$R^2=r^2+\left(\frac{a_n}{2}\right)^2.$$

正多边形的中心（center of a regular polygon） 正多边形的一个特殊点. 任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆，它们的共同圆心称为正多边形的中心. 外接圆的半径称为正多边形的半径. 内切圆的半径称为正多边形的边心距. 各边所对外接圆的圆心角称为正多边形的中心角.

正多边形的半径（radius of a regular polygon） 见“正多边形的中心”.

正多边形的中心角（central angle of a regular polygon） 正多边形的一个重要角. 指正多边形各边所对外接圆的圆心角. 正 n 边形的中心角 $\alpha_n=360°/n$. 正多边形的中心角与它的内角互补.

倍边公式（formula of multiple sides） 求正多边形边长的公式. 由正 n 边形边长 a_n 求同半径 R 的正 $2n$ 边形的边长 a_{2n} 的公式为

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$

倍边公式曾被中外古代数学家用于计算圆周率的近似值.

等角半正多角形（equiangular semiregular polygon） 亦称等角半正多边形. 一种特殊的凸多边形. 边数为偶数，相间的边相等，且所有的角都相等的凸多角形称为等角半正多角形. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，

$$AB=CD=EF, BC=DE=FA,$$

且 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F$，因而它是等角半正多角形.

等角半正多边形（equiangular semiregular polygon） 即“等角半正多角形”.

正多边形的性质（property of a regular polygon） 对正多边形的几种刻画，也是正多边形的几个必要条件. 正多边形具有下列性质：

1. 任何正多边形都有外接圆和内切圆，这两个圆是同心圆.

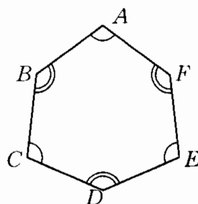
2. 正多边形是轴对称图形，正 n 边形有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心.

3. 边数为偶数的正多边形是中心对称图形，它的中心就是对称中心.

4. 边数相同的正多边形相似，周长的比等于边长（或半径，边心距）的比，面积的比等于边长（或半径、边心距）平方的比.

5. 正多边形的每个内角为 $(n-2)\cdot 180°/n$；每个外角为 $360°/n$.

等边半正多角形（equilateral semiregular polygon） 亦称等边半正多边形. 一种特殊的凸多角形. 顶点个数为偶数，所有边都相等，且相间的角相等的凸多角形称为等边半正多角形. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=BC=CD=DE=EF=FA$，$\angle A=\angle C=\angle E$，$\angle B=\angle D=\angle F$，因而它是等边半正多角形.



等边半正多边形（equilateral semiregular polygon） 即“等边半正多角形”.

正星形多角形（regular star polygon） 亦称等边半正凹多角形或等边半正凹多边形. 一种特殊的凹多角形. 指顶点个数为偶数，所有边都相等，且相间的角相等的凹多角形. 正星形多角形的 $2n$ 个角中，有 n 个相等的优角，另外 n 个角必是相等的锐角. 整个图形成为星形，因此，正星形 $2n$ 角形也称为 n 角星，最常见的正五角星也就是正星形十角形.

等边半正凹多角形（equilateral semiregular concave polygon） 即“正星形多角形”.

等边半正凹多边形（equilateral semiregular concave polygon） 即“正星形多角形”.

比例与相似形

线段的公度（commensurability of line segments） 平面几何的基本概念之一. 若两线段都恰好含有第三线段的整数倍，则第三条线段称为这两条线段的公度. 这时亦称两线段是可公度的. 公度的概念在数学史中曾有过重要作用.

有公度线段（commensurable line segments）

亦称可通约线段或称可公度线段.平面几何的基本概念之一.指有公度的两线段.

可通约线段(commensurable line segments) 即"有公度线段".

最大公度(maximal commensurability) 平面几何的基本概念之一.指两线段的公度中的最长线段.有公度的两线段一定有最大公度而无最小公度.在两条线段中,较长线段恰好含有较短线段的整数倍,则较短线段就是它本身和较长线段的最大公度.在两条线段中,如果较长线段含有较短线段的整数倍而有剩余,则这两线段的最大公度(如果存在)等于较短线段和剩余线段的最大公度.

无公度线段(incommensurable line segments) 亦称这两线段是不可公度的或不可通约的.平面几何的基本概念之一.指没有公度的两线段.无公度线段是存在的.例如,正方形的一边和它的对角线就是无公度线段.无公度概念在古希腊(前500—前300)数学史上有过近两个世纪的争论,当时数学家们对无公度线段还没有认识,毕达哥拉斯学派的希帕索斯(Hippasus,(M))发现了正方形的边和对角线之间是无公度线段,使学派内大为震惊,被认为是邪说而不被承认,并将希帕索斯抛入大海处死(亦有史料说是被开除出毕达哥拉斯学派,把他当做死人,还为他建了一个墓).直到欧多克索斯(Eudoxus,(C))通过"量"概念的引入,用几何方法去处理无公度比,才被数学界所接受.欧几里得(Euclid)的《几何原本》第五卷中的"比例论"就是基于欧多克索斯的材料而写的.由于无公度量的发现和争论促使了当时一大批数学家去研究这个问题,从而促进了当时数学的发展.

不可通约线段(non-commensurable line segments) 即"无公度线段".

线段的比(ratio of line segments) 平面几何的基本概念之一.指线段 a 与线段 b 的比,记为 $a:b$,是一个惟一确定的实数.当线段 a,b 有公度 d 时,即当 $a=md$ 和 $b=nd$(m,n 为自然数)时,

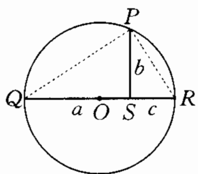
$$a:b=m:n=\frac{m}{n}.$$

这时线段 a 与线段 b 的比是有理数.当线段 a,b 无公度时,也可以得到一个确定的实数.但是必须用到与实数性质有关的极限概念.例如,用有理数列来规定实数,就可以得到这个确定的实数.只是这时得到的不是有理数而是无理数.必须注意,不能把线段的比定义为用同一单位线段去量两条线段所得的量数(即长度)的比.因为长度是用已知线段与取定的单位线段的比来定义的,这样定义就犯了逻辑学上"循环定义"的错误.

成比例的线段(proportional segments) 简称比例线段.平面几何术语.当两条线段的比等于另外两条线段的比时,这四条线段称为成比例的线段,亦称四条线段成比例.例如,对四条线段 a,b,c,d,若 $a:b=c:d$,则 a,b,c,d 称为成比例的线段.其中 a 和 d 称为这个比例的外项,b 和 c 称为这个比例的内项,d 称为 a,b,c 的第四比例项.

比例线段(proportional segments) 成比例的线段的简称.

线段的比例中项(mean proportional of line segments) 简称比例中项.比例线段的特殊项.在比例线段中,如果两内项相同,即三条线段 a,b,c 之间满足 $a:b=b:c$,那么线段 b 称为线段 a 和 c 的比例中项.例如,直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上的射影的比例中项(如图).这时,由于 a,b,c 是等比数列,所以比例中项亦称等比中项和几何中项.c 称为 a,b 的第三比例项(参见本卷《算术》中的"比例中项"和"直角三角形的性质").



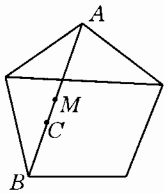
线段的内分(internal division of a line segment) 点分割线段的一种方式.如果在线段 AB 内任取一点 C,且点 C 将 AB 分为两条线段 AC, CB,那么将 AC 和 CB 称为点 C 内分 AB 而得的两条线段,该分法简称线段的内分,点 C 称为线段 AB 的内分点.比值 AC/CB 称为点 C 对线段 AB 的内分比.

内分比(ratio of internal division) 见"线段的内分".

线段的外分(external division of a line segment) 点分割线段的一种方式.若在线段 AB 的延长线上任取一点 D,使点 D 和 A,B 构成两条线段 AD,DB,则将 AD 和 DB 称为点 D 外分 AB 而得的两条线段,该分法简称线段的外分,点 D 称为线段 AB 的外分点,比值 AD/DB 称为点 D 对线段 AB 的外分比.

外分比(ratio of external division) 见"线段的外分".

黄金分割(golden section) 亦称黄金律.几何学历史中的一个著名问题.把一条线段内分成两条线段,使其中较长的线段是原线段与较短线段的比例中项.这种分割称为对于这条线段的黄金分割,亦称分线段成黄金比、中外比、中末比等.这个内分点称为这条线段的黄金分割点.



中国古代称中外比为弦分割.运用相似三角形的方法,可以证明:正五边形的任意两条对角线的交

点，分每一对角线成中外比. 中外比有一个重要性质：如图，若点 C 分线段 AB 成中外比，则它对于 AB 的中点的对称点 C' 必分线段 AC 成中外比. 黄金分割中分得的较长线段与线段全长之比为

$$\frac{(\sqrt{5}-1)}{2} \approx 0.618.$$

黄金分割的来历说法不一. 有一种说法是，从古希腊到 19 世纪，人们都认为这种分割法在艺术造形中具有美学价值，故称之为黄金分割；另一种说法是，开普勒(Kepler, J.)曾说过"勾股定理和中末比是几何中的双宝，前者好比珠玉，后者有如黄金"，后来，黄金分割之名逐渐得以通用. 黄金分割的实际应用之一是优选法中的黄金分割法或 0.618 法，它是基弗(Kiefer, J. C.)于 1953 年提出的. 中国在华罗庚的倡导下，得到了较普遍的推广，并取得了很大成绩.

人们对黄金分割的研究具有悠久的历史，毕达哥拉斯学派对此已有研究. 以后的柏拉图学派的欧多克索斯(Eudoxus, (C))研究比例论时，对黄金分割作了深入研究. 至中世纪，帕乔利(Pacioli, L.)在 1509 年出版的《神圣比例》一书中也论述了黄金分割. 中国清代康熙晚年组织学者整理编写的初等数学全书《数理精蕴》中的"六宋三要""中外比"指的就是黄金分割.

黄金律(golden law) 即"黄金分割".

弦分割(chord section) 见"黄金分割".

黄金比(golden ratio) 见"黄金分割".

中外比(extreme and mean ratio) 即"黄金比".

中末比(extreme and mean ratio) 即"黄金比".

黄金分割点(golden section point) 见"黄金分割".

相似形(similar figures) 平面几何中最基本、最重要的图形之一. 设有两个几何图形 F 和 F'，如果在它们的所有点之间可以建立一一对应，并且图形 F 上的任一线段与图形 F' 上对应线段之比为一常数，那么 F 和 F' 称为相似图形或相似形. 两图形 F 和 F' 相似，记为 $F \backsim F'$，记号"$\backsim$"读作相似于. 对应线段的比称为它们的相似比(或相似系数). 图形的相似关系具有性质：

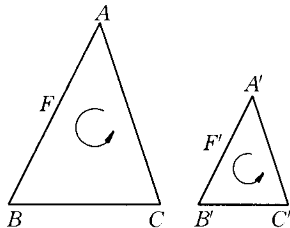
1. 反身性：即 $F \backsim F$.
2. 对称性：即若 $F \backsim F'$，则 $F' \backsim F$.
3. 传递性：即若 $F \backsim F'$，$F' \backsim F''$，则 $F \backsim F''$.

所以图形的相似是一种等价关系. 如果两个图形 F 和 F' 相似，那么它们的对应线段之比等于相似比；它们的对应角相等；它们的对应面积之比等于相似比的平方；它们的对应体积之比等于相似比的立方. 相似形是在相似变换下互相变换的图形(参见本卷《高等几何》中的"相似变换").

相似比(similar ratio) 见"相似形".

相似系数(coefficient of similarity) 即"相似比".

真正相似(true similar) 亦称直接相似、同向相似或本质相似. 一种特殊相似形. 设图形 F 与 F' 是相似形，在图形 F 上任取不共线三点 A, B, C，它们在图形 F' 上的对应点分别是 A', B', C'(如图)，若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的方向相同，即三对对应点的排列(沿周界 $ABCA$ 与 $A'B'C'A'$ 的环绕方向)或同为顺时针方向或同为逆时针方向，则称图形 F 与图形 F' 真正相似. 真正相似图形的重要特例是真正相似三角形. 当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，且沿周界 $ABCA$ 与沿周界 $A'B'C'A'$ 的环绕方向相同，即同为逆时针方向或同为顺时针方向，则这两个三角形是真正相似三角形.

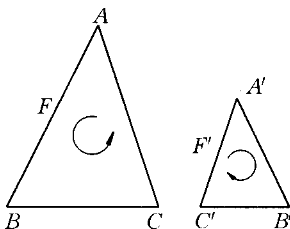


直接相似(directly similar) 即"真正相似".

同向相似(directly similar) 即"真正相似".

本质相似(essential similar) 即"真正相似".

镜像相似(mirror image similar) 亦称逆相似或异向相似. 一种特殊相似形. 设图形 F 与 F' 是相似形，在图形 F 上任取不共线的三点 A, B, C，它们在图形 F' 上的对应点分别是 A', B', C'(如图)，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的方向相反，例如，沿周界 $ABCA$ 的环绕方向与沿周界 $A'B'C'A'$ 的环绕方向一个为逆时针方向，而另一个为顺时针方向，则称图形 F 与图形 F' 镜像相似. 镜像相似图形的重要特例是镜像相似三角形. 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，且沿周界 $ABCA$ 及 $A'B'C'A'$ 环绕方向相反，若一个为逆时针方向，另一个为顺时针方向，则这两个三角形是镜像相似三角形.



异向相似(diversity similar) 即"镜像相似".

逆相似(inversely similar) 即"镜像相似".

线段的相似分(similar division of the line segment) 线的一种划分方式. 指以已知线段的分割比划分另一线段. 一线段以另一线段的已知二分比划分，则这一线段的划分称为另一线段的相似分.

相似三角形(similar triangles) 一类重要的相似形，指两个三角形是相似形(参见"相似形").

三角形相似的判定(decision of the similarity

of triangles) 判定三角形相似的几个充分条件. 满足下列条件之一的两个三角形是相似三角形：

1. 一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且它们所夹内角相等.

2. 一个三角形的两个内角和另一个三角形的两个内角对应相等.

3. 一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例.

4. 一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，且这两边中大边的对角对应相等.

5. 对应边分别平行或者在同一直线上.

6. 对应边分别垂直.

相似三角形的性质(property of similar triangles) 对相似三角形的几种刻画，也是三角形相似的几个必要条件. 相似三角形具有下列性质：

1. 对应角相等，对应边成比例.

2. 对应线段(如对应的高、中线、角平分线、内切圆半径、外接圆半径)的比等于相似比.

3. 周长的比等于相似比.

4. 面积的比等于相似比的平方.

直角三角形相似的判定(decision of the similarity of right triangles) 判定直角三角形相似的几个充分条件. 满足下列条件之一的两个直角三角形是相似三角形：

1. 一个锐角相等.

2. 两条直角边对应成比例.

3. 斜边和一条直角边对应成比例.

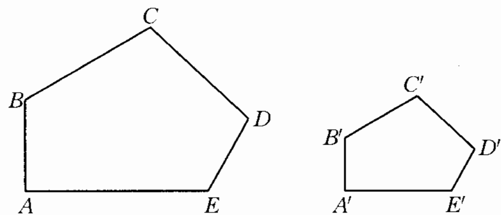
直角三角形中的比例线段(proportional segments in a right triangle) 直角三角形的一个重要性质. 其中包括：

1. 直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上射影的比例中项.

2. 每一条直角边是这条直角边在斜边上的射影和斜边的比例中项.

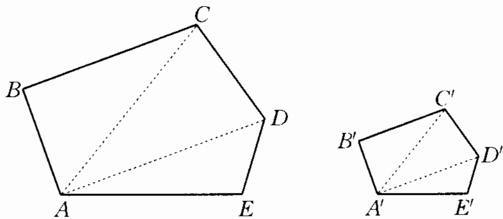
直角三角形中的相似三角形(similar triangles in a right triangles) 直角三角形的特殊性质. 指直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形相似. 并且其中每一个直角三角形和原直角三角形相似.

相似多边形(similar polygons) 一类重要的



相似形. 指两个多边形是相似形. 例如，五边形 $ABCDE$ 相似于五边形 $A'B'C'D'E'$(如图)(参见“相似形”).

多边形相似的判定(decision of the similarity of polygons) 判定多边形相似的条件. 由两组个数相等、排列顺序相同、对应相似的三角形组成的两个多边形相似. 如图，已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$，$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$，由 $\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADE$ 组成五边形 $ABCDE$；由 $\triangle A'B'C'$，$\triangle A'C'D'$，$\triangle A'D'E'$ 组成五边形 $A'B'C'D'E'$，那么五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$.



相似多边形的性质(property of similar polygons) 对相似多边形的几种刻画，也是多边形相似的几个必要条件. 相似多边形具有下列性质：

1. 对应角相等，对应边成比例.

2. 两个相似多边形都可以用对角线分成个数相等，且排列顺序相同的相似三角形，其相似比等于相似多边形的相似比.

3. 周长之比等于它们的相似比.

4. 面积之比等于它们相似比的平方.

位似形(homothetic figures) 具有特殊位置的相似形. 若两个图形 F 和 F' 的点之间可以建立一一对应关系，并且满足：

1. 连结任一双对应点的直线都通过同一点 O.

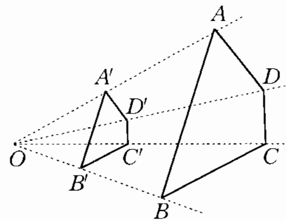


图1

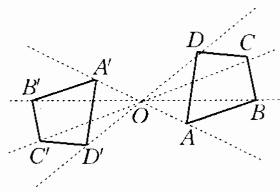


图2

2. 每双对应点均在点 O 的同侧(如图 1)，或均在点 O 的异侧(如图 2).

3. 对任一双对应点 A 和 A'，有 $OA'/OA=k$，则称图形 F 和 F' 位似，或称图形 F 位似于图形 F'，又称图形 F 和 F' 配景相似. 图形 F 和 F' 称为位似图形或位似形，点 O 称为位似中心，对应点称为位似点，定比 k 称为“位似比”或位似系数，或位似率. 当任一双对应点 A，A' 在点 O 的同侧，这时，图形 F 和 F' 称为顺位似图形，或称图形 F 和 F' 外位似，点 O 称为外位似中心，或外相似中心. 这时规定位似比 $k>0$. 当任一双对应点 A，A' 在点 O 的两侧，这时图形 F 和 F' 称为逆位似，或称图形 F 和 F' 内位似，点

O 称为内位似中心，或内相似中心. 这时规定位似比 $k<0$. 位似图形必为相似图形，但反过来不一定成立. 两个位似图形必为真正相似图形. 位似形是在位似变换下互相变换的图形.

配景相似(homothetic figures) 见“位似形”.

位似中心(homothetic center) 见“位似形”.

位似点(homothetic point) 见“位似形”.

位似比(homothetic ratio) 见“位似形”和本卷《高等几何》同名条.

位似系数(homothetic coefficient) 即“位似比”.

位似率(ratio of homothetic) 即“位似比”.

位似图形的性质(property of homothetic figures) 对位似图形的几种刻画，也是图形位似的几个必要条件. 位似图形具有下列性质：

1. 必为真正相似图形，它们的相似比等于位似比.

2. 不通过位似中心的对应边或对应线段平行.

3. 对应角相等，且有相同的旋转方向.

4. 对应点连线交于同一点.

位似多边形(homothetic polygons) 两个多边形是位似形(参见“位似形”).

位似多边形的性质(property of homothetic polygons) 对位似多边形的几种刻画，也是位似多边形的几个必要条件. 位似多边形具有下列性质：

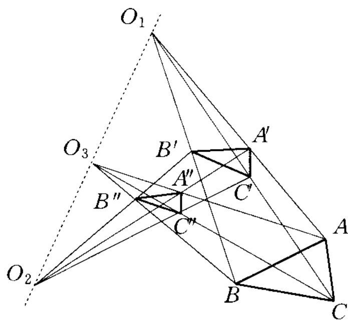
1. 必为真正相似多边形，它们的相似比等于位似比.

2. 不通过位似中心的对应边或对应线段平行，且对应边的比等于它们的位似系数.

3. 对应点连线交于同一点.

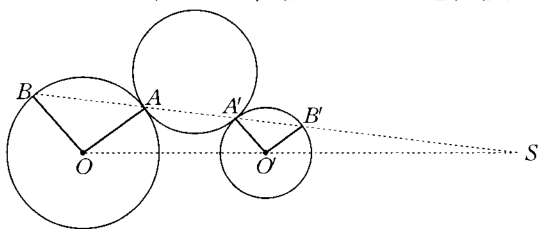
4. 对应角相等，且有相同的旋转方向.

位似轴(homothetic axis) 亦称相似轴. 与三个位似图形有关的一条直线. 指平面上或空间中的三个互相位似的图形的三个位似中心所在的同一条直线. 位似轴上外位似中心的个数一定是奇数，即或是一个或是三个.



相似轴(similar axis) 即“位似轴”.

逆位似点(inverse homothetic points) 与两圆位似点相关的一对点. 指一个圆与两已知圆分别相切于 A 和 A'，S 为两已知圆的位似中心，若直线 AA' 通过 S，且 A，A' 不是对于 S 的位似点，则 A 和 A' 称为两已知圆的位似中心的逆位似点. 如图，A 和 A'，B 和 B' 都是对于位似中心 S 的逆位似点.



圆

圆(circle) 平面几何中最基本、最重要的图形之一. 圆的定义方式很多，常见的有以下三种：

1. 平面上到定点 O 的距离等于定长 r 的全体点组成一条曲线称为以点 O 为圆心、以 r 为半径的圆周，简称圆，记为$\odot O$ 或$\odot O(r)$.

2. 到定点的距离等于定长的动点的轨迹称为圆. 该定点称为圆心，定长称为圆的半径.

3. 给定一条线段，使其绕着它的一个固定的端点在平面内旋转一周，其另一个端点所经过的封闭曲线称为圆. 线段的固定端点称为圆心，线段长称为圆的半径. 到圆心的距离不大于半径的点的全体通常称为圆盘(或闭圆盘)，有时也简称圆.

总之，圆是圆周和圆盘的统称. 在平面几何中，圆一般多指圆周. 在不同的学科和不同的场合，将圆理解为圆周或圆盘，要视具体情况而定. 一个圆(圆周)将平面上不在圆周上的点分为两部分：一部分是到圆心的距离小于半径的所有点的集合，称为圆的内部，内部的点称为内点；另一部分是到圆心的距离大于半径的所有点的集合，称为圆的外部，外部的点称为外点.

中国古代《墨经》上是这样给出圆的定义的：“圆，一中同长也.”这种定义与上面三种定义的实质是一样的. 中国古算书中，圆形的田称为圆田. 亦称圆形图为圆田.

下列三个条件之一，都能确定一个圆：

1. 已知圆心的位置和半径的长度.

2. 已知直径的位置和长度.

3. 不在同一直线上的三点.

圆心(center of a circle) 见“圆”.

圆的半径(radius of a circle) 见“圆”.

圆田(yuan tian) 见“圆”.

同心圆(concentric circles) 具有特定位置关系的两个圆. 指圆心相同，半径不相等的两个(或两个以上的)圆.

异心圆(circles with different centers) 具有特定位置关系的两个圆. 指圆心不相重合的两个圆.

等圆(equal circles) 半径相等的两个圆.

单位圆(unit circle) 见本卷《平面三角》同名

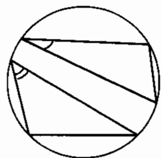
条.

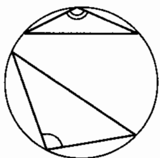
弦(chord) 圆周上的一种特殊线段. 指连结圆周上任意两点的线段. 过圆心的弦称为直径,直径是半径的二倍,它是最长的弦. 对于弦有如下的性质:

1. 在同圆或等圆中,等弦对等弧,等弧对等弦.

2. 在同圆或等圆中,等弦距圆心等远,较大的弦距圆心较近;距圆心等远的弦等长,距圆心较近的弦较大.

3. 在同圆或等圆中,等弦对等圆心角,较大的弦对较大圆心角;等圆心角对等弦,较大的圆心角对较大弦.

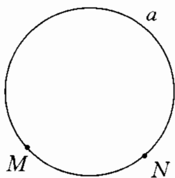

图1


图2

4. 在同圆或等圆中,相等的圆周角,所对的弦相等;非钝角的圆周角,大角所对的弦也大(如图 1);非锐角的圆周角,大角所对的弦反而小(如图 2).

直径(diameter) 见"弦".

圆弧(circular arc) 简称弧. 一种弧线. 指圆周上任意两点间的部分. 该两点称为弧的端点. 如图,在圆周上以 M,N 为端点的弧,记为 $\overset{\frown}{MN}$,读作 MN 弧或弧 MN. 若需特别指某一弧时,则可在弧的两端点间加写一个字母,



例如,在圆周上加写 a 后,可记成 $\overset{\frown}{MaN}$,读作 MaN 弧或弧 MaN. 圆的任意一条直径的两个端点分圆周成两条弧,每一条弧称为半圆. 大于半圆的弧称为优弧,小于半圆的弧称为劣弧. 圆周上任意两点分圆周成两条弧,若不特别声明,一般常指一段劣弧.

弧(arc) 即"圆弧".

优弧(major arc) 见"圆弧".

劣弧(minor arc) 见"圆弧".

半圆(semicircle) 一种特殊的圆弧. 圆的任一直径的两端点分圆成两条弧,每一条弧都称为半圆. 在平面几何学中,半圆多指圆周一半的弧.

半圆形(figure of semicircle) 平面几何的基本图形之一. 由半圆周和连结它的两个端点的直径所围成的图形. 它是同圆和等圆中的最大弓形.

共轭弧(conjugate arcs) 具有特殊位置关系的两弧. 在同圆中,若两条弧可合成一个圆,则称这两条弧互为共轭弧. 例如,圆周上任意两点分圆周所成的两条弧是共轭弧.

象限弧(quadrantal arc) 一种特殊的弧. 指含圆周四分之一的弧. 在同圆或等圆中,若两条弧可合成一个象限弧,则称这两条弧互为余弧.

余弧(complement of an arc) 见"象限弧".

等弧(equal arc) 两条有等价关系的弧. 指在同圆或等圆中能够互相重合的弧.

弧的中点(middle point of an arc) 弧上的特殊点. 指弧上将弧分为两段相等弧的点. 过弧的中点的直径垂直且平分该弧所对的弦.

弓形(segment of a circle) 亦称圆弓形. 圆上

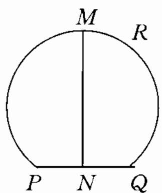


图1

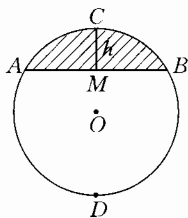


图2

的一种特殊图形. 指由弦和它所对的圆弧围成的图形. 组成弓形的弧称为弓形弧,弧的中点到弦的距离称为弓形的高,也称为弓形的矢或圆弧的矢. 由弦 PQ 和弧 $\overset{\frown}{PRQ}$ 组成的弓形,记并读为弓形 PRQ,MN 为弓形 PRQ 的高,如图 1. 在⊙O 中,由弦 AB 和弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 组成弓形 ACB,$\overset{\frown}{ACB}$ 是弓形弧,CM 是弓形的高. 在圆内,弦与其所对的劣弧所围成的弓形称为劣弓形,如图 2 中的弓形 ACB;弦与其所对的优弧所围成的弓形称为优弓形,如图 2 中的弓形 ADB. 弓形的高将弓形分成两个相等的部分,每一部分称为半弓形. 中国古算书中,弓形田称为弧田. 亦称弓形图为弧田.

圆弓形(circular segment) 即"弓形".

弓形的高(height of the segment of a circle) 见"弓形".

圆弧的矢(vector of a circular arc) 见"弓形".

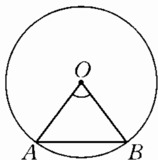
劣弓形(minor segment of a circle) 见"弓形".

优弓形(major segment of a circle) 见"弓形".

弧田(hu tian) 见"弓形".

共轭弓形(conjugate segments of a circle) 具有特殊位置关系的两个弓形. 在同圆中,指弦与其所对的劣弧和优弧所围成的两个弓形.

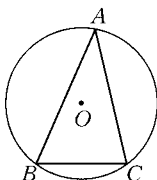
圆心角(central angle) 亦称中心角. 圆内的一个特殊角. 指顶点在圆心的角,通常画成圆心与圆上任意两点连结线段所成的角. 如图,在⊙O 中,$\angle AOB$ 为圆心角,也称为弧 $\overset{\frown}{AB}$(或弦 AB)所对的圆心角.



中心角(central angle) 即"圆心角".

圆心角的量度(measure of a central angle)　度量圆心角的方法.指圆心角和它所对的圆弧采用相同的量度,并具有相同的量数.因此,当角采用角度制时,周角和整个圆周都是360°,即1°的圆心角所对的是1°的弧.采用弧度制时,1弧度的圆心角所对的是1弧度的弧.在单位圆的情形下,1弧度的圆心角所对的1弧度的弧的长度正好是1.在一般圆的情形下,圆心角的弧度数等于它所对的弧的长度与半径长度的比.总之,圆心角可以用它所对的弧来量度.

圆周角(angle of circumference)　亦称圆的内接角.圆周上的一种特殊角.指从圆周上任一点出发的两条弦所形成的角.它是顶点在圆周上,两边都与圆相交的劣角.如图,在⊙O中,$\angle BAC$是⊙O的圆周角.也称为弧$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角.



圆的内接角(inscribed angle in circle)　即"圆周角".

圆周角定理(theorem of the angle of circumference)　平面几何的重要定理之一.指圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半,或一条弧所对的圆周角的度数等于它所对的圆心角的度数的一半.圆周角具有性质:

1. 同弧或等弧所对的圆周角相等;同圆或等圆中,相等的圆周角所对的弧也相等.

2. 半圆(或直径)所对的圆周角是直角,90°的圆周角所对的弦是直径.

弓形角(angle of the segment of a circle)　亦称弓形的内接角或弓形弧的内接角.一种特殊的圆周角.指弓形弧所含的圆周角.

弓形弧的内接角(inscribed angle in arc of the segment of a circle)　即"弓形角".

弓形的内接角(inscribed angle in segment of a circle)　即"弓形角".

相似弓形(similar segments of a circle)　两个相关的弓形.指两个弓形是相似形.它们的弧(或弦)所对的圆心角相等.反之亦然.

扇形(sector)　亦称圆扇形.圆上的一种特殊圆形.指由一条圆弧和过这条弧的端点的两条半径

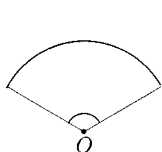


图1

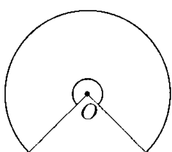


图2

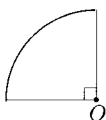


图3

所组成的图形.扇形的两条半径所夹的角称为扇形角.劣弧与过其端点的半径所组成的扇形称为劣扇形(如图1);优弧与过其端点的半径所组成的扇形称为优扇形(如图2);扇形角为直角的扇形称为直角扇形(如图3).

圆扇形(circular sector)　即"扇形".

劣扇形(minor sector)　见"扇形".

优扇形(major sector)　见"扇形".

直角扇形(sector of a right angle)　见"扇形".

扇形角(angle of sector)　见"扇形".

相似扇形(similar sectors)　两个相关的扇形.指两个扇形是相似形.它们的扇形角相等,反之亦然.

弦的中点(middle point of a chord)　弦上的特殊点.指弦的二等分点.过弦的中点的直径垂直于弦,且平分该弦所对的弧.

极小弦(minimal chord)　具有特殊位置的弦.指过圆内一点的最短弦.过圆内一定点的所有弦中,以此定点为中点的弦最短,这条弦称为过该点的极小弦.它是被此定点平分的弦.过圆内一定点的极小弦必与过该定点的直径垂直.

弦心距(distance from the center to a chord)　一个正实数.指圆心到弦的距离,即圆心与弦的中点间的距离.弦心距与该弦所对弧的矢高之和等于圆的半径.

相等圆心角的性质(property of equal central angles)　关于圆心角的一组重要定理.指在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等,所对弦的弦心距相等.还可推知,在同圆或等圆中,如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等,那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

垂径定理(theorem of diameter perpendicular to a chord)　平面几何的重要定理之一.即在圆中,垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的弧.一般称其为垂直于弦的直径的性质定理,简称垂径定理.与垂径定理有关的性质还有:

1. 平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,且平分弦所对的弧.

2. 平分弦所对的一条弧的直径,垂直且平分弦.

3. 弦的垂直平分线经过圆心,且平分该弦所对的弧.

平行弦(parallel chords)　圆内有特殊位置关系的两条弦.指圆中的两条平行弦.它们所夹的弧相等.反之,在同圆中,若两弦所夹的圆弧相等,则此两弦为平行弦,或者说连结圆中二等弧端点的不相交的弦是平行弦.

圆的对称性(symmetry of a circle)　圆的重要性质.指圆是最完善的对称图形:

1. 圆是中心对称图形.圆心是它的对称中心,也是中心对称的一个二重点(不动点),任何一条直径

都是中心对称的二重直线段(不动直线段).

2. 圆对于它的任何直径是轴对称图形,因而圆的任何一条直径都是它的对称轴,这是因为垂直于弦的直径必平分此弦,圆的直径把圆周分为两段相等的弧.

3. 圆绕圆心旋转任意角度后仍与其自身重合.圆心是旋转中心,旋转角可以是任意角.

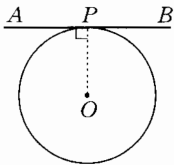
点和圆的位置关系(positional relation between a point and a circle) 对点和圆的位置关系的一种刻画.指点在圆内、圆上、圆外三种,可由点和圆心的距离来判定.点在圆内的充分必要条件是点和圆心的距离小于圆的半径;点在圆上的充分必要条件是点和圆心的距离等于圆的半径;点在圆外的充分必要条件是点和圆心的距离大于圆的半径.

点到圆的距离(distance between a point and a circle) 与点和圆有关的一条线段.设在平面上有一圆和一点,过该点及圆心作直线交圆于两点,该点与两交点连结的两条线段中较短线段的长度称为该点到圆的距离.这是该点与圆上的点的最短距离.特别地,圆上的点到该圆的距离为零.

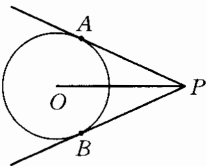
圆的割线(secant line of a circle) 一条直线.指和圆有两个公共点的直线.

圆的切点(contact point of a circle) 圆周上的特殊点.指圆和直线、圆和圆仅有的一个公共点.若直线和圆只有一个公共点,或两圆只有一个公共点,则此公共点称为它们的切点.

圆的切线(tangent line of a circle) 与圆有特殊位置关系的一条直线或线段.指和圆只有一个公共点的直线.这个公共点称为切点.如图,直线 AB 与⊙O 只有一个公共点 P,AB 是⊙O 的切线,AB 切⊙O 于 P 点.切线垂直于过切点的半径.如图,OP 为⊙O 的半径,$AB\perp OP$.



圆的切线长(length of a tangent line of a circle) 一个正实数.指与点和圆有特殊关系的一条线段的长度.从圆外一点向圆引切线,该点到切点之间线段的长.从圆外一点可以向圆引两条切线,且两条切线长相等.同时,圆心和已知点的连线平分两条切线的夹角.如图,从圆外一点 P 向⊙O 引切线 PA,PB,A,B 为切点,则切线长 $PA=PB$,OP 平分 $\angle APB$.过圆上一点只能引圆的一条切线,且切线长等于零.



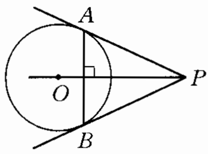
圆的切线的判定(decision of tangent of a circle) 判定直线与圆相切的几个充分条件.满足下列条件之一的直线为圆的切线:

1. 与圆只有一个公共点.
2. 到圆心的距离等于半径.
3. 过半径外端点且与半径垂直.

圆的切线的性质(property of tangent of a circle) 对圆的切线的几种刻画,也是直线与圆相切的几个必要条件.圆的切线具有下列性质:

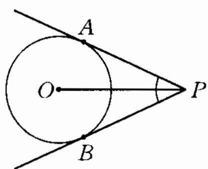
1. 圆的切线垂直于过切点的半径.
2. 经过圆心,且垂直于切线的直线,必经过切点,换言之,圆心在切线上的射影是切点.
3. 经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.
4. 自圆外一点向圆所引的两条切线等长.

切弦(chord of contact) 亦称切点弦.一条特殊弦.从圆外一点向圆引两条切线,连结此两切点的弦称为切弦.此时,圆心与已知点的连线垂直平分切弦.如图,P 是圆外一点,PA,PB 与⊙O 相切,切点是 A,B,AB 是切弦.此时,OP 垂直平分 AB.

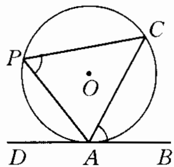


切点弦(chord at contact) 即"切弦".

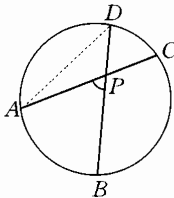
点对圆的视角(visual angle of a point with respect to a circle) 相对于点和圆有特殊关系的一个角.自圆外一点向圆引两条切线,这两条切线的夹角称为该点对圆的视角.如图,PA 切⊙O 于点 A,PB 切⊙O 于点 B,则$\angle APB$ 是 P 点对⊙O 的视角.



弦切角(angle between chord and tangent) 圆周上的一种特殊角.一个圆的一条切线和过切点的弦所成的角称为弦切角.如图,AC 是⊙O 的弦,DAB 为⊙O 的切线,则$\angle BAC$ 和$\angle CAD$ 都是⊙O 的弦切角.弦切角等于它两边所夹弧上的圆周角.若两个弦切角各自两边所夹的弧相等,则这两个弦切角也相等.

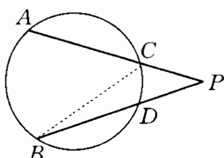


圆内角(angle in a circle) 圆内的一个特殊角.指顶点在圆内的角.圆内角的度数等于它所对的弧与它的对顶角所对的弧的度数之和的一半.或圆内角等于它本身及其对顶角夹弧所对的圆周角之和.如图,$\angle APB$ 为圆内角,$\angle CPD$ 为其对顶角,则$\angle APB$ 的度数$=1/2(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})$的度数,或$\angle APB=\angle ADB+\angle CAD$.

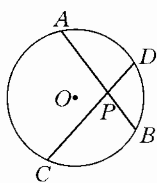


圆外角(angle out of a circle) 圆外的一个特

殊角. 指顶点在圆外，并且两边和圆相交的角. 圆外角的度数等于它包含的弧的度数之差的一半，或圆外角等于它包含的两弧所对圆周角之差. 如图，$\angle APB$ 是圆外角，它所包含的两弧为 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$，则 $\angle APB$ 的度数 $=1/2(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$ 的度数，或 $\angle APB=\angle ACB-\angle CBD$.

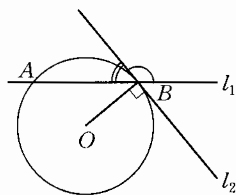


相交弦(intersecting chords)　圆内相关的两条弦. 在圆的内部相交的两条弦，称为相交弦. 圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段的积相等. 如图，弦 AB 和 CD 相交于 $\odot O$ 内一点 P，那么 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$. 如果弦与直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项.



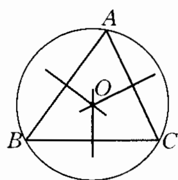
直线和圆的位置关系(positional relation between a straight line and a circle)　对直线和圆的相关位置的一种刻画. 有相离、相切、相交三种，这相当于直线和圆没有、仅有一个、有两个公共点，可由圆心到直线的距离判定. 直线和圆相离的充分必要条件是圆心到直线的距离大于圆的半径；直线和圆相切的充分必要条件是圆心到直线的距离等于圆的半径；直线和圆相交的充分必要条件是圆心到直线的距离小于圆的半径.

直线和圆的交角(angle between a straight line and a circle)　圆周上的一种特殊角. 若一直线与圆相交，过交点作圆的切线，则此切线与直线的交角中的任一个称为直线和圆的交角. 这两个交角正是这圆的弦切角和它的补角. 如图，设直线 l_1 与 $\odot O$ 相交于两点 A，B，过 B(或 A)点作直线 l_2 与 $\odot O$ 相切，则 l_1 与 l_2 的任一交角即是直线 l_1 与 $\odot O$ 的交角. 当直线与圆相切时，直线和圆的交角为零；当直线过圆心时，直线和圆的交角为 $\pi/2$，即直线与圆直交(正交).



直线与圆直交(perpendicularity of a straight line and a circle)　见“直线和圆的交角”.

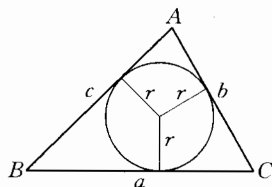
三角形的外接圆(circumcircle of a triangle)　与三角形相关的一个圆. 指通过三角形三个顶点的圆. 这个三角形称为该圆的内接三角形. 三角形外接圆的圆心称为三角形的外心，它是三角形三边的垂直平分线的交点(如图). 若 $\triangle ABC$ 的边长分别为 a，b，c，周长的一半为 $s=(a+b+c)/2$，外接圆的半径为 R，则



$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

圆的内接三角形(inscribed triangle in a circle)　见“三角形的外接圆”.

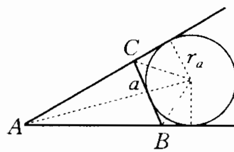
三角形的内切圆(inscribed circle of a triangle)　与三角形相关的一个圆. 指在三角形内部和三边都相切的圆. 该三角形称为这个圆的外切三角形. 三角形内切圆的圆心称为三角形的内心，它是三角形三条内角平分线的交点(如图). 若 $\triangle ABC$ 的边长分别为 a，b，c，周长的一半为 $s=(a+b+c)/2$，内切圆的半径为 r，则



$$r=\frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

圆的外切三角形(circumscribed triangle of circle)　见“三角形的内切圆”.

三角形的旁切圆(escribed circle of a triangle)　与三角形相关的一个圆. 指和三角形的一边及另两边的延长线都相切的圆. 旁切圆的圆心称为三角形的旁心，它是三角形的一条内角平分线和两条外角平分线的交点(如图). 一个三角形有三个旁切圆. 若 $\triangle ABC$ 的边长分别为 a，b，c，周长的一半为 $s=(a+b+c)/2$，旁切圆的半径分别为 r_a，r_b，r_c，则：



$$r_a=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}};$$

$$r_b=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}};$$

$$r_c=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}.$$

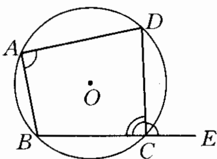
三重相切圆(triple contact circles)　与三角形相关的一组圆. 三角形的内切圆与三个旁切圆都分别和三角形的三条边(或边的延长线)相切，它们统称为三角形的三重相切圆. 一个三角形有四个三重相切圆.

多边形的外接圆(circumcircle of a polygon)　与一多边形相关的一个圆. 指通过多边形各个顶点的圆. 这个多边形称为这个圆的内接多边形.

圆的内接多边形(inscribed polygon in a circle)　见“多边形的外接圆”.

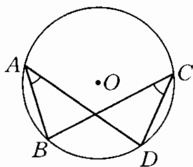
圆内接四边形(inscribed quadrilateral in a cir-

cle） 与圆相关的一个四边形. 指四个顶点在同一个圆上的四边形. 此圆称为四边形的外接圆. 圆内接四边形中，不相邻的两个角称为对角. 圆内接四边形具有下述性质：圆内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角. 如图，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，那么 $\angle BAD+\angle BCD=180°$，又 $\angle DCE$ 为 $\angle BCD$ 的外角，$\angle BAD$ 为 $\angle DCE$ 的内对角，则 $\angle DCE=\angle BAD$. 由上述性质可以推出：内接于圆的梯形必是等腰的.



四边形的外接圆(circumcircle of a quadrilateral) 见“圆内接四边形”.

圆内接折四边形(inscribed broken quadrilateral in a circle) 与圆相关的一个折四边形. 指四个顶点在同一圆上的折四边形. 此圆称为折四边形的外接圆. 圆内接折四边形判定定理：如果折四边形的一组对角相等，那么这个折四边形内接于圆. 如图，折四边形 $ABCD$ 中，一组对角 $\angle A=\angle C$，那么折四边形内接于一个圆. 反之，圆内接折四边形的两组对角都相等. 如图，折四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，那么 $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.



折四边形的外接圆(circumcircle of broken quadrilateral) 见“圆内接折四边形”.

四点共圆(four concyclic points) 平面几何术语. 指四个点在同一个圆周上. 对于四点共圆的判定定理有：

1. 若四边形对角互补，则四顶点共圆.

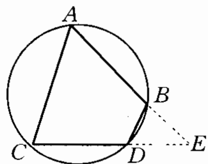
2. 若四边形任一外角等于它的内对角，则四顶点共圆.

3. 同斜边的两直角三角形，四顶点共圆.

4. 底相同，顶角相等，且顶角在底边同侧的两三角形，四顶点共圆.

5. 若四边形对角线被交点分成的两线段乘积相等，则四顶点共圆.

6. 延长四边形的一组对边 AB，CD 相交于点 E，若 $AE\cdot BE=CE\cdot DE$，则 A，B，C，D 四点共圆(如图).



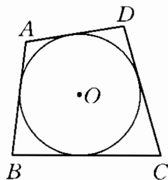
7. 若四边形两对角线乘积等于两组对边乘积之和，则四顶点共圆.

8. 等腰梯形的四个顶点共圆.

以上八个定理亦可作为圆内接四边形的判定定理.

圆内接四边形的判定定理(decision theorem of inscribed quadrilateral in a circle) 见“四点共圆”.

圆外切四边形(circumscribed quadrilateral of a circle) 与圆相关的一种四边形. 指各边都与同一个圆相切的四边形. 该圆称为四边形的内切圆(如图). 四边形外切于一个圆的充分必要条件是对边的和相等.



四边形的内切圆(inscribed circle of a quadrilateral) 见“圆外切四边形”.

圆外切多边形(circumscribed polygon of a circle) 与圆相关的一种多边形. 指各边与同一圆相切的多边形. 此圆称为多边形的内切圆.

多边形的内切圆(inscribed circle of a polygon) 见“圆外切多边形”.

点对圆的幂(power of a point with respect to a circle) 亦称点对圆的方幂. 一个实常数. 即过一定点对圆任作一条割线，交该圆于两点，自定点至两交

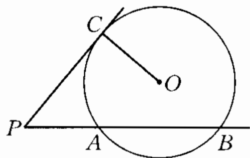


图1

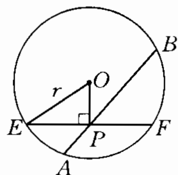


图2

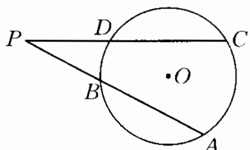
点的两条有向线段的积(线段同向时积为正，线段异向时积为负)是一个实常数，此常数称为定点对于该圆的幂，简称圆幂. 在此意义下“幂”这个词是德国著名数学家施泰纳(Steiner, J.)首先使用的. 设 P 点为定点，⊙O 为定圆，半径为 r，则 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=k$(常数)，$k$ 就是 P 点对于⊙O 的幂. 当 P 点在⊙O 的外部时(如图 1)，k 值为正，这时 $k=PC^2$，其中 PC 是 P 点到⊙O 的切线的长；当 P 点在⊙O 内部时(如图 2)，k 值为负，它的绝对值等于过 P 点的极小弦 EF 的一半的平方；当 P 点在⊙O 上时，k 的值为零. 无论何种情况，k 的值都可以表示为

$$k=PO^2-r^2.$$

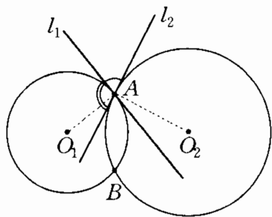
点对圆的方幂(power of a point with respect to a circle) 即“点对圆的幂”.

圆幂(circular power) 见“点对圆的幂”.

圆的割线定理(secant theorem of a circle) 圆幂定理之一. 指从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等. 如图，PA，PC 是⊙O 的割线，且分别交⊙O 于点 B，A 及 D，C，则 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.



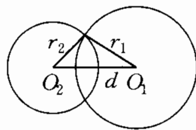
圆的切割线定理(theorem of tangent and secant of a circle)　圆幂定理之一. 指从圆外一点引圆的切线和割线,切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项. 如图,P 是$\odot O$ 外一点,PT 是切线,T 是切点,割线 PA 交$\odot O$ 于点 A,B,则



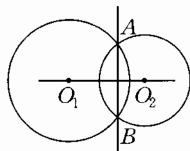
$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

圆心距(distance of centers of circles)　两圆的圆心的距离.

两圆相交(intersection of two circles)　两圆间的一种位置关系. 指两圆有两个公共点. 两圆相交的充分必要条件是:圆心距小于两圆半径的和,而大于两圆半径的差的绝对值. 如图,$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的半径分别为 r_1,r_2,圆心距为 d,则$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交$\Leftrightarrow |r_1-r_2|<d<r_1+r_2$. 若两圆相交且过交点所作的切线互相垂直,则称这两圆正交. 若两圆正交,则过交点的半径必互相垂直,且一圆过交点的半径是另一圆的切线,此时,圆心距的平方等于两圆半径的平方和,即 $d^2=r_1^2+r_2^2$.

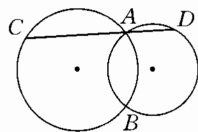


两圆的公割线(common secant of two circles)　与两圆相交的直线. 两圆相交,过二交点的直线称为两圆的公割线. 公割线上两交点间的弦称为两圆的公共弦. 连心线垂直于两圆的公割线,并垂直平分公共弦. 如图,$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于点 A,B,则直线 AB 即为$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的公割线.

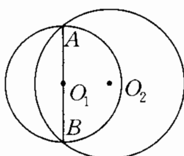


公共弦(common chord)　见"两圆的公割线".

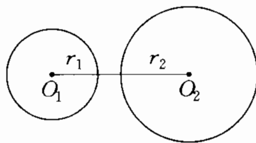
倍弦(multiple chord)　一种特殊弦. 指与相交两圆有特定位置关系的线段. 如图,若两圆相交,过一交点引直线与两圆再交于此交点的两侧,则所交两点间的线段(CD)称为倍弦.



径割(diameter section)　平面几何术语. 指两圆的一种特殊位置关系. 若一个圆通过另一个圆的一条直径的两个端点,则称这个圆径割另一个圆. 如图,已知 AB 为$\odot O_1$ 的直径,$\odot O_2$ 通过 A,B 两点,则称$\odot O_2$ 径割$\odot O_1$.



两圆的交角(angle between two intersecting circles)　过两圆交点的切线所成的角. 若两圆相交,过交点分别作两圆的切线,这两切线交角中的任一个,称为两圆的交角. 如图,$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A,B 两点,过 A(或 B)点分别作$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的切线 l_1 与 l_2,则 l_1 与 l_2 的交角中的任一个即是$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的交角. 当 $l_1 \perp l_2$ 时,$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 正交.



两圆正交(two orthogonal cirlces)　见"两圆相交"及"两圆的交角".

两圆相离(separation of two circles)　两圆间的一种位置关系. 指两圆没有公共点. 相离两圆分两圆外离和两圆内含两种情况. 两圆外离是指每个圆上的点都在另一个圆的外部(如图 1). 两圆外离的充分必要条件是圆心距大于两圆半径的和,即 $d>r_1+r_2$. 两圆内含是指一个圆上的点都在另一个圆的内部(如图 2). 两圆内含的充分必要条件是圆心距小于两圆半径的差的绝对值,即 $d<|r_1-r_2|$.

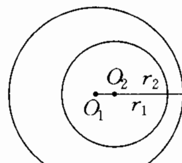


图1

图2

两圆外离(separation of two circles)　见"两圆相离".

两圆内含(inclusion of two circles)　见"两圆相离".

两圆相切(contact of two circles)　两圆间的一种位置关系. 指两圆只有惟一的公共点. 惟一的公共点称为切点. 相切两圆分两圆外切和两圆内切两种情况. 两圆外切是指除它们的公共点外,每个圆上的点都在另一个圆的外部(如图 1). 两圆外切的充分必要条件是圆心距等于两圆半径的和,即 $d=r_1+r_2$. 两圆内切是指除它们的公共点外,一个圆上的点都在另一个圆的内部(如图 2). 两圆内切的充分必要条件是圆心距等于两圆半径的差的绝对值,即 $d=|r_1-r_2|$,两圆重合即 $d=0,r_1=r_2$,可看做两圆内切的特例. 两圆相切时,连心线必过切点.

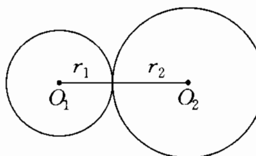


图1

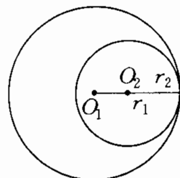


图2

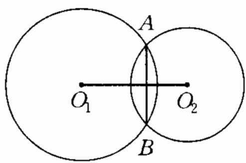
两圆外切(externally contact circles)　见"两

圆相切”.

两圆内切(internally contact circles)　见“两圆相切”.

两圆重合(coincidence of two circles)　见“两圆相切”.

两圆的连心线(connecting line of centers of two circles)　与两圆位置有关的直线.指经过两圆的圆心的直线.相切的两圆的连心线必过切点(此为相切两圆连心线性质).相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦(此为相交两圆连心线性质).如图中两圆的连心线 O_1O_2 垂直平分公共弦 AB.



两圆的公切线(common tangent of two circles)　与两圆位置有关的直线.指与两圆都相切的直线.公切线分为内公切线和外公切线两种:两圆在公切线的同旁时称为外公切线;两圆在公切线的两旁时称为内公切线.当两圆外离时,有两条外公切线和两条内公切线(如图1);当两圆外切时,有两条外公切线和一条内公切线(如图2);当两圆相交时,只有两条外公切线(如图3);当两圆内切时,只有一条外公切

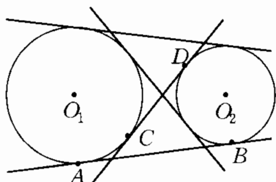


图1

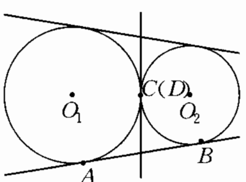


图2

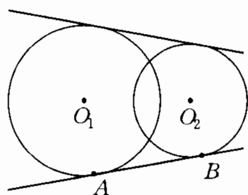


图3

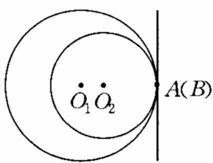


图4

线(如图4);当两圆内含时没有公切线.两个圆的公切线上的两个切点间的距离称为公切线长.公切线长分为外公切线长和内公切线长两种.如图1中的 AB 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的一条外公切线,点 A 和 B 为切点,A,B 间的距离是外公切线长;CD 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的一条内公切线,点 C 和 D 为切点,C,D 间的距离是内公切线长.两圆的两条外公切线长相等,两条内公切线长也相等.两圆的两条外公切线的交点及内公切线的交点,都与两圆的圆心共线.且把连心线段分成定比 λ,λ 的绝对值等于两圆的半径之比.

两圆的内公切线(internal common tangent of two circles)　见“两圆的公切线”.

两圆的外公切线(external common tangent of two circles)　见“两圆的公切线”.

公切线长(length of common tangent)　见“两圆的公切线”.

公切圆(common contact circle)　一种特殊圆.指和几个圆都相切的圆.

连结(connection)　亦称光滑连结和吻接.几何学的基本概念之一.指线段与圆弧、圆弧与圆弧的一种特殊的连结方式.若一线段和一圆弧有公共端点,并且线段所在的直线与圆弧所在的圆在该点相

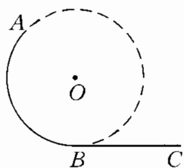


图1

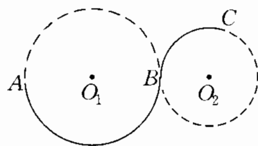


图2

切,线段和圆弧分别在过切点与圆心所在直线的两侧,则称线段和圆弧在该点连结(如图1);或两圆弧有公共端点,并且两圆弧所在的圆在该点相切,两圆弧分别在连心线的两侧,则称两圆弧在该点连结(如图2).对于两圆弧的连结,若两弧所在的圆外切,则此连结称为外连结;若两圆弧所在的圆内切,则此连结称为内连结.线段与圆弧连结或圆弧与圆弧连结的切点称为连结点;和两个圆弧都连结的线段称为连结线;和两条线段或一条线段、一条圆弧或两条圆弧都连结的弧称为连结弧.连结弧所在圆的圆心称为连结中心.连结弧的半径称为连结半径.应该注意,为了技术应用的需要,这里的“连结”是指光滑连结,即所连成曲线要处处光滑,特别是在连结点,不能出现不光滑的“尖点”.

光滑连结(smooth connection))　即“连结”.

外连结(exterior connection))　见“连结”.

内连结(interior connection)　见“连结”.

吻接(coincide joint)　即“连结”.

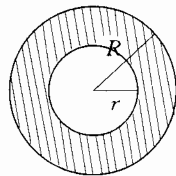
连结点(connected points)　见“连结”.

连结线(connected lines)　见“连结”.

连结弧(connected arcs)　见“连结”.

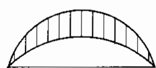
等边圆拱(equilateral circular arch)　一种特殊的平面图形.指由一条线段及分别以其两端为圆心,以该线段长为半径的两个圆弧组成的封闭图形.线段称为等边圆拱的底边,两圆弧的公共端点称为等边圆拱的顶点.

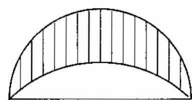
圆环(circular ring)　一种特殊的平面图形.指两个同心圆之间的平面部分组成的图形.若大圆半径为 R,小圆半径为 r,则圆环面积为 S(如图),则



$$S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R+r)(R-r).$$

月形(lune)　一种特殊的平面图形. 指有相同的底,且在底的同一侧的两个弓形弧所围成的图形称为月形. 如图 1 中的阴影部分. 月形中的一种特殊

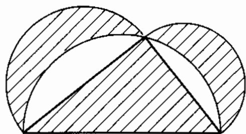

图1


图2

情形是镰刀形,即由半圆和扇形的弧所围成的图形,如图 2 中的阴影部分.

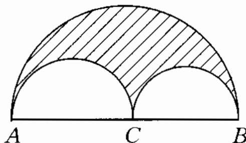
镰刀形(sickle)　见"月形".

月形定理(lunar theorem)　勾股定理的推广. 以直角三角形的两直角边为直径分别向形外作半圆,再用直角三角形的外接(半)圆截这两个半圆而成的两个月形面积的和等于该直角三角形的面积(如图). 月形定理实际上是把"直角三角形斜边上图形的面积等于两直角边上相似图形面积的和"用在半圆上. 它最先是由希俄斯的希波克拉底(Hippocrates, (C))提出来的,所以也称希波克拉底定理. 他用此定理去研究化圆为方问题,由于他的疏忽,而用了不正确的推论,以致有一时期有人误认为化圆为方的问题已经解决,实际上化圆为方是一个尺规作图不能问题.

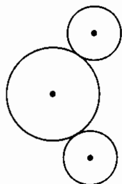


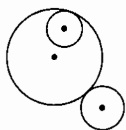
希波克拉底定理(Hippocrates theorem)　即"月形定理".

鞋匠刀形(arbeloa)　一种特殊的图形. 若 C 是线段 AB 上的任一点,分别以 AB,BC,CA 为直径且在 AB 的同侧作半圆,则这三个半圆周所围成的图形称为鞋匠刀形. 如图中的阴影部分.



两圆与同圆相切(simultaneous contact of a circle with two circles)　两圆的公切圆. 指两圆同时与第三个圆相切. 这种相切可分同态相切和异态相切两种. 同态相切是指两圆与同一圆都是外切或


图 1


图 2

都是内切(如图 1);异态相切是指两圆与同一圆相切时,一个外切,一个内切(如图 2).

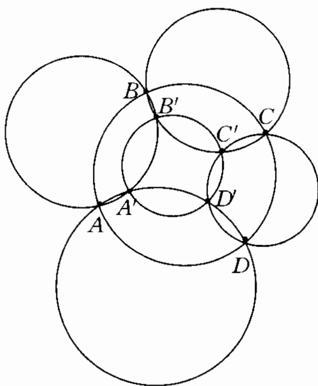
同态相切(like contact)　见"两圆与同圆相切".

异态相切(diversity contact)　见"两圆与同圆相切".

共圆(concyclic)　平面几何术语. 指多个点的一种特殊位置关系. 若干个点在同一圆周上称为共圆. 而这些点称为共圆点.

共圆点(concyclic points)　见"共圆".

六连环(six concatemer)　亦称古镂钱. 平面几何术语. 指具有特殊位置关系的六个圆构成的图形. 若 A,B,C,D 为定圆上的四个点,分别通过 A 和 B,B 和 C,C 和 D,D 和 A 各作一圆轮回相交(如图所示),则所得另外四个交点 A',B',C',D' 共圆或共线. 当所得四交点共圆时,此图形共有六个圆,称此六个圆为六连环.



古镂钱(gu lou qian)　即六连环. 中国古称.

共点圆(concurrent circles)　平面几何术语. 指多个圆的一种特殊位置关系. 若干圆都通过同一个点称为共点圆. 如图 1,$\odot O_1$,$\odot O_2$,$\odot O_3$ 有同一个公共点 P,则$\odot O_1$,$\odot O_2$,$\odot O_3$ 是共点圆. 又如图 2,设 A',B',C' 分别是$\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 在直线 l 上的射影,X,Y,Z 分别是 l 上任一点 P 在 BC,CA,AB 上的射影,则$\odot XYZ$,$\odot XB'C'$,$\odot YC'A'$,$\odot ZA'B'$共点于 Q.

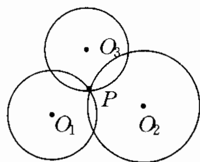


图1

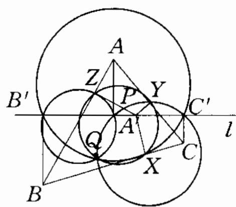


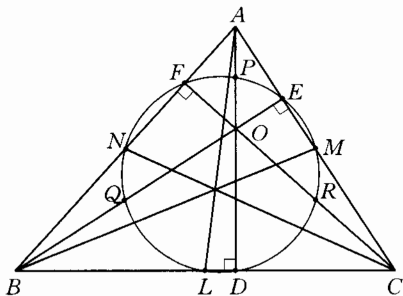
图2

通过与三角形有关的特定三个垂足点的圆. 由一点向三角形每边所在直线作垂线,通过三垂足的圆称为该点对于三角形的垂足圆. 例如图 2 中的$\odot XYZ$ 即点 P 对于$\triangle ABC$ 的垂足圆.

垂足圆(foot of a perpendicular circle)　见"共点圆".

九点圆(nine-points circle)　亦称费尔巴哈圆,又称欧拉圆. 一个著名的圆. 在一个三角形中,三边的中点、三条高的垂足和垂心到三个顶点连线段的中点,这九个点在同一个圆上,该圆称为这个三角形的九点圆. 例如,在$\triangle ABC$ 中,三边的中点分别为 L,M,N;三条高的垂足分别为 D,E,F;垂心 O 到三

个顶点连线段的中点分别为 P,Q,R;上述九点共圆(如图).它的一个重要性质是:三角形九点圆的半径

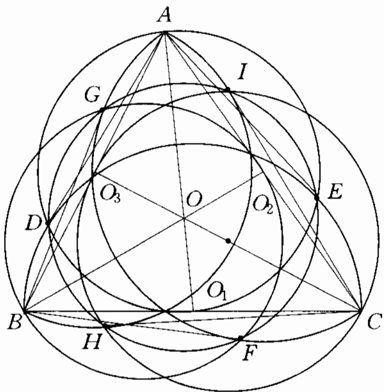


等于三角形外接圆半径的一半.九点圆是1820年和1821年间,由热尔岗(Gergonne,J.-D.)与彭赛列(Poncelet,J.-V.)首先发表的,九点圆的名称是彭赛列给出的.费尔巴哈(Feuerbach,K. W.)在1922年也发现了九点圆,并指出九点圆与该三角形的内切圆内切、三个旁切圆外切,因而通常也把九点圆称为费尔巴哈圆.欧拉(Euler,L.)早在1765年就证明了垂足三角形和中位三角形有共同的外接圆.因此人们常把发现九点圆的功绩归于欧拉,有的著作中把九点圆称为欧拉圆.

费尔巴哈圆(Feuerbach circle) 即"九点圆".

欧拉圆(Euler circle) 即"九点圆".

重圆(weight circle) 一种特殊的圆.由三角形

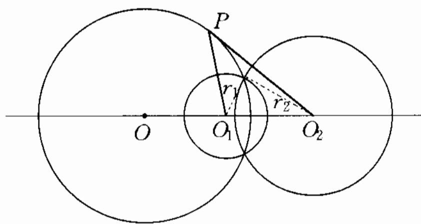


三个顶点向以各自对边为直径的圆分别作切线,则所有六个切点共圆,此圆的圆心是三角形的重心,故称此圆为三角形的重圆(如图).

变态圆(abnormal circle) 一种特殊的圆.指半径为零和无限长的圆.将点和直线分别看做半径为零及半径为无限长的圆,这两种圆称为变态圆.点作为变态圆时又称为点圆.

点圆(point circle) 见"变态圆".

两定圆的相似圆(similia circle of two constant circles) 一种特殊的圆.指与两个定圆有特定条件的点的轨迹.若一点至不同心两定圆的中心的距离之比等于两圆半径之比,则该点的轨迹是与两定圆



共轴的一个圆,该圆称为两定圆的相似圆.如图,$\odot O_1(r_1)$与$\odot O_2(r_2)$是两定圆,则任意一点 P 到 O_1, O_2 的距离之比若为 $r_1 : r_2$,则点 P 的轨迹是$\odot O_1(r_1)$与$\odot O_2(r_2)$的相似圆,即$\odot O$.经过三圆心 O,O_1,O_2 的直线是它们的公共轴.

根轴(radical axis) 亦称等幂轴.一条特殊的直线.指对于不同心两圆有相等幂的点的轨迹.即向不同心两圆引相等切线的点的轨迹,是垂直于两圆连心线的一条直线,该直线称为这两圆的根轴.

等幂轴(radical axis) 即"根轴".

共轴圆束(coaxial pencil of circles) 亦称共轴圆系.平面几何术语.指具有某种共性的圆的集合.即平面上具有同一等幂轴的所有圆的集合.共同的

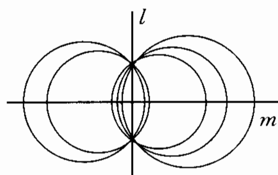


图1

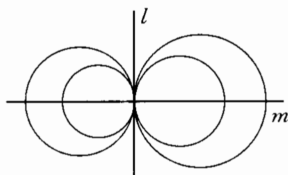


图2

等幂轴称为共轴圆束的等幂轴(或根轴),如图中的直线 l.共轴圆束中任意选取 n 个圆称为共轴圆或称这 n 个圆共轴.共轴圆束的所有圆心在同一直线上,该直线称为圆束的圆心轴,如图中的直线 m.共轴圆束是最常讨论的圆束,因此,也常把它简称圆束.若圆束的一圆与等幂轴有两个公共点,则该圆束中所有圆都通过这两个公共点.这样的圆束称为椭圆型圆束(如图1).若圆束中的一圆与等幂轴相切,则该圆束中的所有圆都彼此相切于同一点.这样的圆束称为抛物型圆束(如图2).若圆束中的一圆与等幂轴无公共点,则该圆束中的所有圆都与等幂轴无公共点,且各圆间也无公共点.这样的圆束称为双曲型圆束(如图3).

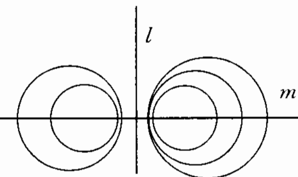


图3

共轴圆系(coaxial system of circles) 即"共轴圆束".

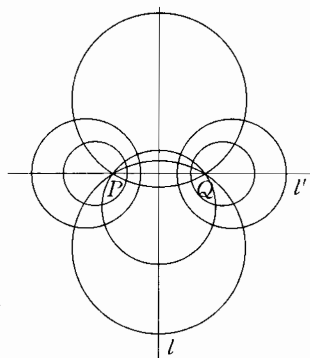
圆心轴(central axis) 见"共轴圆束".

椭圆型圆束(elliptic pencil of circles) 见"共轴圆束".

抛物型圆束(parabolic pencil of circles)　见"共轴圆束".

双曲型圆束(hyperbolic pencil of circles)　见"共轴圆束".

圆束的极限点(limit point of a pencil of circles)　一种与圆束有关的特殊点. 指双曲型和抛物型圆束中的点圆. 椭圆型圆束中所有圆的公共点,可以看做是与其共轭的双曲型圆束中的点圆,这两个点称为双曲型圆束的极限点. 如图,点 P 和 Q 是圆心在直线 l' 上的圆束的极限点;抛物型圆束的极限点为所有圆的公共点.



根轴的作图及其性质(construction and properties of radical axis)　关于根轴的一些基本知识. 由于不同心的两圆可以确定一个圆束,所以两圆的根轴也是由此两圆所确定的圆束的根轴. 若两圆相交,则过两交点的直线是它们的根轴. 若两圆相切,则它们的公切线即为其根轴. 若两圆外离,则它们的根轴在两圆之间(距大圆较近),并与连心线直交(如图 1),其垂足由公式

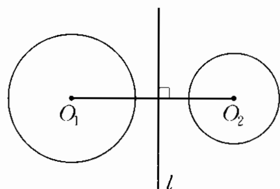


图1

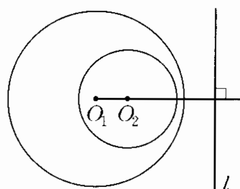


图2

$$d=\frac{r_1^2-r_2^2}{2p}$$

确定,式中 d 是垂足与连心线的中点间的距离,p 是两圆 $\odot O_1(r_1)$,$\odot O_2(r_2)$ 的圆心距,且 $r_1>r_2$. 当 $r_1=r_2$ 时,连心线的中垂线即为它们的根轴,若两圆内离而又不同心,则根轴在两圆的外部,与连心线直交于两圆距离较近的一侧,其垂足由公式

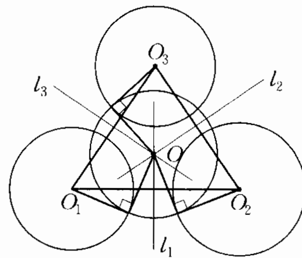
$$d'=\frac{[r_1^2-(r_2^2+p^2)]}{2p}$$

确定,式中 p 是 $\odot O_1(r_1)$ 与 $\odot O_2(r_2)$ 的圆心距,且 $r_1>r_2$,d' 是垂足到小圆圆心 O_2 的距离(如图 2). 根轴有如下性质:

1. 两圆的公切线段(两切点间的线段)被其根轴平分.

2. 以两圆外部根轴上任意一点为圆心,以该点向两圆所作切线长为半径的圆,必与两已知圆直交.

根心(radical center)　亦称等幂心. 一个特殊的点. 若三个已知圆的圆心不共直线,则三圆中的每两圆的根轴共点,此点称为三个已知圆的根心,如图所示. 根心有如下性质:



1. 圆心不共直线的三个圆存在惟一的根心,它对三个已知圆有相同的方幂.

2. 若圆心不共直线的三个圆仅交于一点 O,则点 O 即为根心.

3. 若根心在三个已知圆之一的外部,则它也在另外两圆的外部,且它是平面上惟一能向三个已知圆引等长切线的点.

4. 若三个已知圆的根心在每个圆的外部,则它是惟一的与三个已知圆直交的圆的圆心,这个圆的半径等于根心到已知圆的切线长.

5. 若根心在三个已知圆之一的内部,则它在每个圆的内部.

等幂心(radical center)　即"根心".

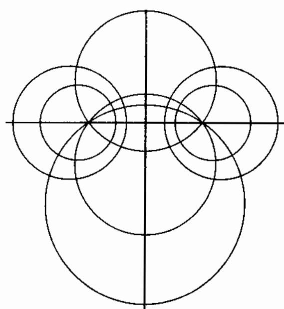
圆簇(family of circles)　亦称共幂圆系. 平面几何术语. 指具有某种共性的圆的集合. 即有公共根心的圆的全体. 公共的根心称为圆簇的中心,该中心对圆簇中每一个圆的幂都是相等的,这个值称为圆簇的幂. 若圆簇的幂是正的,则这个圆簇称为双曲型圆簇;若圆族的幂是负的,则这个圆簇称为椭圆型圆簇;若圆簇的幂为零,则这个圆簇称为抛物型圆簇.

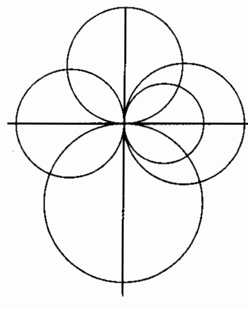
共幂圆系(family of circles of equal power)　即"圆簇".

圆簇的中心(center of family of circles)　见"圆簇".

圆簇的幂(power of family of circles)　见"圆簇".

共轭圆束(conjugate pencil of circles)　亦称伴随圆束. 平面几何术语. 指具有某种共性的两个圆束. 即两个垂直相交的圆束. 与已知圆束垂直相交的圆有无限多个,这些圆又组成一个新的圆束,这样的


图1


图2

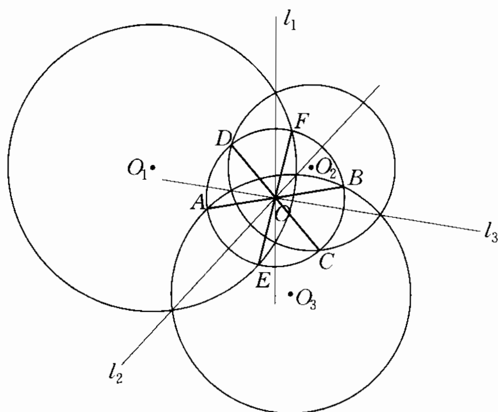
两个圆束称为共轭圆束.若两共轭圆束之一是椭圆型的,则另一个圆束必是双曲型的(如图1);若两共轭圆束之一是抛物型的,则另一个圆束也是抛物型的(如图2).

伴随圆束(adjoint pencil of circles)　即"共轭圆束".

根圆(radical circle)　亦称基圆.一种特殊的圆.指与已知三圆都正交的圆.此圆必以已知三圆的根心为圆心,此圆称为已知三圆的根圆(参见"双曲型圆簇").

基圆(basic circle)　即"根圆".

椭圆型圆簇(elliptic family of circles)　圆簇的



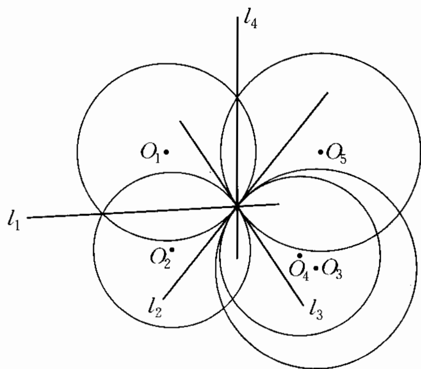
一种.指幂是负的圆簇.椭圆型圆簇有如下性质:

1.它的中心在圆簇中所有圆的内部.

2.以中心 O 为圆心,以圆簇幂的绝对值的正的平方根为半径的圆与圆簇中的所有圆相交于它的直径的两个端点.如图,它与 $\odot O_1$ 相交于点 E,F,与 $\odot O_2$ 相交于点 C,D,与 $\odot O_3$ 相交于点 A,B. EF, CD, AB 都是 $\odot O$ 的直径. $\odot O$ 是圆簇中最小的圆.

3.椭圆型圆簇中只包含椭圆型圆束.

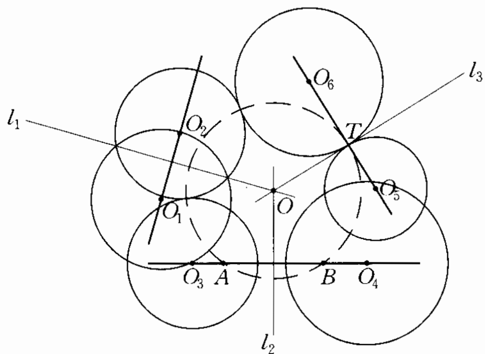
抛物型圆簇(parabolic family of circles)　圆簇的一种.指幂是零的圆簇.抛物型圆簇有下列性质:



1.它的中心在圆簇中所有的圆上,即圆簇中所有圆都通过圆簇的中心.

2.抛物型圆簇中只包含椭圆型圆束和抛物型圆束,而不包含双曲型圆束(因所有圆都相交于圆簇中心).图中 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$, $\odot O_1$ 与 $\odot O_5$ 所确定的圆束是椭圆型的; $\odot O_1$ 与 $\odot O_3$, $\odot O_2$ 与 $\odot O_5$ 所确定的圆束是抛物型的.

双曲型圆簇(hyperbolic family of circles)　圆簇的一种.指幂是正的圆簇.如图,以圆簇中心为圆心,以圆簇中心到各圆所作切线长(这些切线长均相等)为半径的圆称为圆簇的基圆,亦称圆簇的根圆,



它与圆簇中的所有圆都直交.图中 $\odot O$ 为该圆簇的基圆.双曲型圆簇有以下性质:

1.它的中心在圆簇中所有圆的外部.

2.圆簇中每两个圆所确定的圆束的根轴均通过圆簇中心,形成通过这个中心的直线束.

3.基圆与圆簇中椭圆型圆束的连心线相离.

图中 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 所确定的圆束是椭圆型的,其连心线 O_1O_2 与基圆 O 相离;基圆与圆簇中双曲型圆束的连心线相交于两点,图中 $\odot O_3$ 与 $\odot O_4$ 所确定的圆束是双曲型的,其连心线 O_3O_4 与基圆 O 相交于 A,B 两点;基圆与圆簇中抛物型圆束的连心线相切,图中 $\odot O_5$ 与 $\odot O_6$ 所确定的圆束是抛物型的,其连心线 O_5O_6 与基圆 O 相切于 T 点.

等分圆周(circumference in equal parts)　圆内接正多边形的作图问题.若圆周上依次有 n 个点 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$,把整个圆周分成 n 段相等的弧:

$$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{A_2A_3}=\cdots=\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}=\overset{\frown}{A_nA_1}.$$

则称点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 把圆周 n 等分,简称 n 等分圆周.除二等分圆周外,用圆规直尺等分圆周与内接正多边形的作图实质是相同的问题.高斯(Gauss,C.F.)对等分圆周曾做出巨大贡献.1796年,年仅19岁的高斯根据式子

$$\cos\frac{360°}{17}=\frac{1}{16}+\frac{\sqrt{17}}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{6}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$

发现,圆内接正十七边形可用圆规直尺作图.1801年,高斯又研究确定用圆规直尺等分圆周,等分数所应满足的充分必要条件(参见"用圆规直尺等分圆周

问题”). 高斯临终遗言“在墓碑上刻正十七边形”,德国格丁根大学为他建立了一座以正十七棱柱为底座的纪念像.

用圆规直尺等分圆周问题(problem of dividing the circumference with ruler and compasses) 几何学历史中的一个著名问题. 能仅用圆规直尺把圆周 n 等分,当且仅当 n 是如下形式的整数:

1. $n=2^m$(m 为大于 1 的正整数).

2. $n=2^m\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k$,

其中 $m=0,1,2,\cdots,k=1,2,\cdots,p_i$ 为

$$2^{2^t}+1\quad(t=0,1,2,\cdots)$$

型的不同素数,这是 1801 年高斯(Gauss,C. F.)证明的. 因此,在 100 以内可以用圆规直尺等分圆周的等分数只有 24 个:1 型的五个为 4,8,16,32,64;2 型的十九个为 3,6,12,24,48,96,5,10,20,40,80,15,30,60,17,34,68,51,85. 在什么条件下可以用圆规直尺等分圆周问题,自 19 世纪初叶被高斯解决以后,仍有许多数学家为此问题着迷. 比较有趣的是

$$p=2^{2^t}+1$$

是素数时的情形. 当 $t=0,1,2$ 时,$n=3,5,17$ 的作图法已经解决. 当 $t=3,4$ 时,$n=257,65537$,这两个数都是素数,正 257 边形的作图,于 1832 年为里歇洛(Richelot,F. J.)所完成;赫姆斯(Hermes,P.)费了十年的时间才完成正 65537 边形的作图. 关于费马数

$$p=2^{2^t}+1$$

是否素数的探讨参见本卷《初等数论》中的“费马数”.

等周问题(isoperimetric problem) 几何学的一个典型问题. 在周长一定的平面闭曲线(面积一定的闭曲面)条件下,寻求曲线(曲面)围成的图形的面积(体积)最大的问题. 例如,“在周长一定的平面闭曲线中,什么曲线围成的图形面积最大?”就是一个典型的等周问题. 公元前 180 年左右,芝诺多罗斯(Zenodorus)写了一本《等周论》的书,其中有:

1. 周长相等的 n 边形中,正 n 边形的面积最大.

2. 周长相等的正多边形中,边数越多的正多边形的面积越大.

3. 圆的面积比同样周长的正多边形的面积大.

4. 表面积相同的所有立体中,球的体积最大.

17 世纪,沃利斯(Wallis,J.)用代数及几何两种方法证明了“周长相等的矩形中,正方形的面积最大”. 费马(Fermat,P. de)在处理“把线段分成两个部分,使以这两部分为邻边的矩形面积最大”问题时,已应用了微积分中求极值的初步思想. 1697 年 5 月的《教师学报》中,雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)提出一个包含几种情形的相当复杂的等周问题,向他的弟弟挑战. 外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))于 1870 年,用变分法解决了等周问题. 此间,施泰纳(Steiner,J.)用综合方法证明了“一定周长的平面图形中,圆周包含的面积最大”,并作出各种各样的证明.

圆周长(length of circumference) 平面几何的重要概念之一. 作圆的内接正多边形和圆的外切正多边形,当边数无限倍增时,根据阿基米德(Archimedes)的“凸折线小于其包围折线之长”的原理,圆内接正多边形的周长是单调递增且有上界的数列,圆外切正多边形的周长是单调递减且有下界的数列,这两个数列趋近于同一极限,这个极限定义为圆周长. 若一个圆的半径为 R,直径为 d,圆周长为 C,则$C=2\pi R$或 $C=\pi d$(其中 π 为圆周率). 对于用弧度量的圆弧,其弧度为 a 的圆弧长是 aR;对于用角度量的圆弧,其圆心角为 $n°$的圆弧长是

$$\frac{n\pi R}{180}.$$

圆周率(ratio of the circumference of a circle to its diameter) 数学中的重要常数之一. 在欧氏平面上,圆的周长和直径的比称为圆周率,记为 π. 数 π 的常用值取为 3.1416,它在天文、数学、物理、工程等学科中都有着广泛的应用. 1973 年,法国计算机专家利用大型电子计算机,将 π 的值算到小数点后 100 万位,1984 年,日本计算机科学家已把 π 算到小数点后 16777216 位. 现在能把 π 值计算到小数点后多少位,已成为衡量计算机运算速度、内存容量及其总体能力的一项内容了.

由于圆周率所涉及的计算面很广,在数学研究的历史进程中,世界各国都曾有许多数学家为此做出贡献. 对 π 的研究最早的文献记载,首推古埃及的不知名数学家,约公元前 1650 年,莱因德纸草书中就有对于圆周率的记载,译为今文是

$$\pi=\left(\frac{4}{3}\right)^4\approx 3.160.$$

约公元前 240 年,阿基米德(Archimedes)利用计算圆内接和外切正 96 边形周长的方法,求得

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

约公元 150 年,托勒密(Ptolemy,C.)用 60 进制记数法表示出

$$\pi\approx 3^{\circ}8'30''=3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2}=\frac{377}{120}\approx 3.1416.$$

在中国,《周髀算经》载有中国远古就有的“周三径一”之说,取 π 的经验值为 3,魏晋时代数学家刘徽运用类似于阿基米德算法的割圆术,先算到圆内接 192 边形面积,求得

$$3.14+\frac{64}{625}\times 10^{-2}<\pi<3.14+\frac{169}{625}\times 10^{-2},$$

从而得到准确至小数点后两位的 $\pi=3.14$ 的值，他尚不满意这一结果，又提出："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣."刘徽用他创造的圆幂法进而推得更精确的比率：

圆幂：外方幂：内方幂=3 927：5 000：2 500

及

圆周：直径=3 927：1 250，

从而得到

$$\pi=\frac{3927}{1250}\approx 3.1416.$$

后人把 $\pi=3927/1250$ 称为徽率. 这时他比较满意的说："若此者，盖尽其纤微矣！"，但他仍怕有误，锲而不舍，又用割圆术继续算至圆内接 3072 边形，得

$$\pi=S_{3072}=768\times(a_{768}\times R)\approx 3.14159\approx 3.1416.$$

式中 a 为内接 3072 边形的边长，R 为圆半径. 后来，中国南北朝（公元 420—589）时代的杰出科学家祖冲之继承了刘徽的数学思想，求得

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

并得到 π 的两个重要近似值：

$$\text{“约率”(也称疏率)}\ \frac{22}{7}\ \text{和“密率”}\ \frac{355}{113},$$

祖冲之用盈亏二限来限定一个尚未完全知道的数值范围是一种创见，盈亏二限的平均值 3.14159265 已精确到小数点后第 8 位，是当时世界上的最佳结果. 因此，三上义夫提出把 355/113 命名为祖率，以纪念祖冲之的贡献. 圆周率计算的重大突破，肇始于寻求 π 的解析表达式. 1579 年，韦达（Viete，F.）从圆内接正多边形与圆周率的关系的分析中得出如下关系式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \cdots$$

虽然此公式在计算上要多次开平方而不方便，但他开创了一条用解析式计算圆周率 π 值的道路. 1671 年，格雷果里（Gregory，J.）给出下面计算 π 值的无穷级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots,$$

他首创了用无穷级数计算 π 值的新方法，人们将此级数命名为格雷果里级数. 1676 年，牛顿（Newton，I.）也给出了类似的级数

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots.$$

1706 年，梅钦（Machin，J.）提出了计算 π 值的梅钦公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

从而使计算 π 值的精确度迅速提高，他用此公式将 π 值的计算首次突破 100 位大关. 近代计算 π 的近似值利用幂级数的展开式

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots(|x|\leqslant 1).$$

1761 年，朗伯（Lambert，J. H.）利用连分数展开式第一次证明了 π 是无理数；1882 年，林德曼（Lindemann，(C. L.)F. von）利用关系式 $e^{\pi i}=-1$，第一次证明了 π 是超越数. 对于圆周率的符号，最早有人采用方框□或希伯来文字母 Π（读作 men）来表示圆周率，意即化圆为方；1600 年，奥特雷德（Oughtred，W.）首先使用 π/δ 表示圆周率，他的依据为 π 是希腊文圆周一词的第一个字母，奥特雷德用它来表示圆周长，而 δ 是希腊文直径的第一个字母，奥特雷德用它来表示直径，所以，π/δ 理应表示圆周率，但人们在推求圆周率的过程中，常设 $\delta=1$，于是 π/δ 就可简记为 π 了. 1706 年，琼斯（Jones，W.）首先采用 π 表示圆周率，1736 年，经欧拉（Euler，L.）的提倡和推广使用，才得普遍应用至今.

徽率（Hui rate） 见"圆周率".

祖率（Zu rate） 见"圆周率".

约率（about rate） 中国古称. 见"圆周率".

密率（close rate） 中国古称. 见"圆周率"（在本卷《初等数论》中有其他含意的同名条）.

割圆术（cyclotomy） 中国古算术语. 指一种近似计算圆面积的方法. 对于一个已知圆，用它的一系列内接正多边形面积或者外切正多边形面积来逼近圆面积，如果再建立一个绝对误差界限的公式，就可以通过适当边数的正多边形面积来近似圆面积. 这种计算圆面积的方法称为割圆术. 刘徽曾于魏景元四年（公元 263 年）注《九章算术》，提出割圆术，从圆内接正六边形面积开始，顺次计算正十二边形，正二十四边形……直至正一百九十二边形面积. 刘徽曾用不等式

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$$

来计算圆的面积. 其中 S 为圆面积，S_n 表示圆内接正 n 边形的面积. $S_{2n}-S_n$ 称为差幂，当 n 很大时，差幂很小，因而 S_{2n} 很接近于 S. 刘徽的"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣！"与近代极限方法十分相近.

差幂（difference power） 见"割圆术".

调和四边形（harmonic quadrilateral） 一种特殊的圆内接四边形. 指两组对边的乘积相等的圆内

接四边形.

几何变换与轨迹

对应(correspondence)　亦称映射或映照.数学最基本、最重要的概念之一.指两个集合元素之间的一种关系.设 M 与 M' 是两个集合,若有一法则 φ,通过它,对于 M 中的任一元素 m,能确定 M' 中的惟一的元素 m' 与之对应.则称 φ 为从 M 到 M' 的一个对应.这一关系常记为 $\varphi: m \to m'$ 或者 $m'=\varphi(m)$,m' 称为 m 在 φ 下的象,m 称为 m' 在 φ 下的一个原象(参见本卷《高等几何》同名条).

一一对应(one-to-one correspondence)　一种常见的对应.指二集合元素之间有一对一关系的对应.设 φ 是集合 M 到 M' 的对应,如果在对应 φ 下,M 的任二不同元素 m_1 与 m_2 所对应的 M' 的元素 m'_1 与 m'_2 也不同,而且 M' 的每个元素在 φ 下都在 M 中有它的原象,则 φ 是从 M 到 M' 的一个一一对应.若 φ 是从 M 到 M' 的一个一一对应,则可确定一个从 M' 到 M 的一一对应,它把 M' 中的每个元素映射成它在 φ 下的原象上去.这个一一对应称为 φ 的逆对应.并记为 φ^{-1}(参见本卷《高等几何》同名条).

变换(transformation)　数学最基本、最重要的概念之一.同一个集合元素之间的一个一一对应,称为这个集合的一个变换.若 φ 是从集合 M 到它自身的一个一一映射,则 φ 便是 M 的一个变换(参见本卷《高等几何》同名条).

点变换(point transformation)　一种特殊的变换.指点集合的变换.设集合 M 的元素都是点,φ 是 M 的一个变换,则 φ 称为集合 M 的一个点变换.平面几何中所研究的点变换,一般都是平面 π(一个点集合)到它自身的点变换.

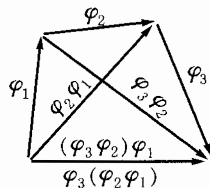
不动点(fixed point)　亦称二重点.点变换中的特殊点.指点变换中以自身作象的点.这种点称为该变换中的不动点.一般点变换未必有不动点(参见本卷《高等几何》同名条).

幺变换(identical transformation)　亦称恒等变换、恒同变换或不动变换.一种特殊的变换.设 M 是一个点集合,使得 M 的每个点都以它自身为象,则这一对应法则显然是一一映射,称为幺变换,通常记为 ε(参见本卷《高等几何》同名条).

变换的乘积(product of transformations)　连续依次施行各变换的结果.即相对于一个点集合的两个或多个点变换的一个点变换.设 φ_1 与 φ_2 是点集合 M 的两个点变换,对于 M 中任一点 X,在变换 φ_1 下,其像是 $\overline{X}$;点 $\overline{X}$ 在变换 φ_2 下,其像是 X'.这种从点 X 找出点 X' 的法则 φ 是点集合 M 的一一映射,也是从 M 到它自身的一个点变换.称为变换 φ_1 与 φ_2 的乘积,记为 $\varphi=\varphi_2\varphi_1$.这里,第一次变换须写在第二次变换右边,因为

$$\varphi_2\varphi_1(x)=\varphi_2[\varphi_1(x)].$$

两个变换的乘积与它们相乘的顺序有关.一般地 $\varphi_1\varphi_2 \neq \varphi_2\varphi_1$,即变换的乘法未必满足交换律.但变换的乘积却满足结合律,即



$$\varphi_3(\varphi_2\varphi_1)=(\varphi_3\varphi_2)\varphi_1$$

(参见本卷《高等几何》同名条).

逆变换(inverse transformation)　亦称反变换.它是相对于任一变换,都有一个与之特殊相关的变换.设 φ 是点集合 M 的一个点变换,根据 φ 是集合 M 到它自身的一一映射,M 的每个点 X 在 φ 下只有一个象,也只有一个原象.因此可从变换 φ 得出一个与它相关的变换.它把 M 的任一点映射到该点在变换 φ 下的原象上去,这个新的映射也是一一映射,也是一个 M 到它自身的点变换,称为变换 φ 的逆变换,通常记为 φ^{-1}.

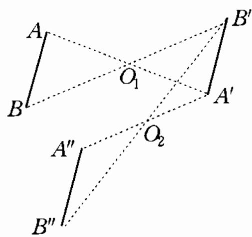
关于幺变换与逆变换有两个重要的等式:设 φ 是集合 M 的任一个点变换,则有 $\varepsilon\varphi=\varphi\varepsilon=\varphi$.若 φ^{-1} 是 φ 的逆变换,则 φ 也是 φ^{-1} 的逆变换,φ 和 φ^{-1} 满足 $\varphi^{-1}\varphi=\varphi\varphi^{-1}\varepsilon$(参见本卷《高等几何》同名条).

反变换(inverse transformation)　即"逆变换".

合同变换(congruent transformation)　见本卷《高等几何》同名条.

平移变换(translation transformation)　见本卷《高等几何》同名条.

点反射变换(reflection transformation of in a point)　亦称点对称变换或中心对称变换.一种合同变换.若平面到其自身的一一变换,使任意对应点的连结线段都通过某定点且被该点平分,则这个一一变换称为点反射变换,简称点反射,定点称为反射中心或对称中心,对应点称为关于反射中心(对称中心)的对称点,点反射下的两个对应图形称为关于反射中心(对称中心)的对称图形,简称中心对称图形.点反射有如下主要性质:



1. 一一变换 f 是点反射的充分必要条件是,在 f 下对应线段平行、反向且相等.

2. 具有不同中心的两个点反射的乘积是平移变换.如图,点 A,B 关于 O_1 的对称点分别是 A',B',而点 A',B' 关于 O_2 的对称点分别是 A'',B'',显然,

线段 AB 与 $A''B''$平行、同向且相等，因而，这两个点反射的乘积是平移变换.

3. 点反射的逆变换仍是点反射.

4. 反射中心是惟一的一个二重点，通过反射中心的任意一条直线都是二重直线.

5. 平移变换与点反射的乘积是关于另一个点为中心的点反射.

6. 将中心对称图形中的任意一个图形绕对称中心旋转 180°必与其对应图形重合，因而，旋转角等于±180°的旋转是关于旋转中心的一个点反射.

点对称变换(transformation of point symmetry)　即“点反射变换”.

中心对称变换(transformation of central symmetry)　即“点反射变换”.

点反射(point reflection)　点反射变换的简称.

反射中心(reflection center)　见“点反射变换”.

反射中心的对称点(symmetric points of reflection center)　见“点反射变换”.

直线反射变换(reflection transformation of in a line)　亦称轴对称或轴反射变换，见本卷《高等几何》中的“轴反射变换”.

旋转变换(rotation transformation)　见本卷《高等几何》同名条.

反演变换(inversion transformation)　一种重要的几何变换. 设 O 是平面(空间中)上的一个定点，A,A'是该平面上满足下列条件的点：

1. 三点 O,A,A'共线.

2. $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=k\neq 0$，$k$ 为实常数.

对平面上(空间中)任何已知点 A，可按上述条件得到 A'的对应关系称为反演变换，简称反演. 定点 O 称为反演中心或反演极，常数 k 称为反演幂，并称 A 与 A'互为反演点. 在反演变换下，当 A 异于反演中心 O 时，一定有惟一的反演点 A'. 根据反演变换定义，反演中心 O 无反演点，故反演变换中平面上空间中点与点的对应不是一对一的. 但平面上空间中去掉反演中心后，反演变换是一一对应的. 另一解决方案是不从平面(或空间)去掉反演中心，设想平面(空间)增加一个理想点作为每次反演的反演中心所对应的象. 这种平面(空间)称为反演平面(空间). 这样，反演变换也是一对一的. 而且可以考虑反演变换的乘积，形成反演变换群. 简称反演群. 反演变换与初等几何中其他的变换不能合在一起进行变换的乘法. 因为平面(空间)已经不一致了. 若在反演变换中，将图形 F 变换成图形 F'，则称 F 与 F'互为反象或反形. 根据反演变换的定义，互为反演点的两点与反演中心共线，因此，凡通过反演中心的直线上的点(反演中心除外)的反演点仍在这条直线上，这样的直线称为反演变换的二重直线. 反演变换是德国著名数学家施泰纳(Steiner, J.)于 1830 年发现的；默比乌斯(Möbius, A. F.)对反演变换作过详尽的研究.

反演(inversion)　反演变换的简称.

反演中心(inversion center)　见“反演变换”.

反演极(inversion center)　即“反演中心”.

反演幂(inversion power)　见“反演变换”.

反演点(inversion point)　见“反演变换”.

反象(inversion image)　见“反演变换”.

反形(inverse image)　即“反象”.

反演变换的二重直线(double line of inversion transformation)　见“反演变换”.

反演平面(inversion plan)　见“反演变换”.

反演空间(inversion space)　见“反演变换”.

反演群(inversion group)　见“反演变换”.

双曲型反演变换(hyperbolic inversion transformation)　反演变换的一种. 指反演幂 $k>0$ 的反演变换. 这时 k 可表为 $k=r^2(r>0)$. r 称为反演半径. 以反演中心 O 为圆(球)心，以反演半径 r 为半径作圆(球)，根据反演变换的定义，此圆(球)上的点的反演点是它自身，这样的点称为反演变换的二重点，并将此圆(球)称为反演基圆(球). 由于这个圆的存在，因而通常称双曲型反演变换为关于反演基圆(球)的反演变换. 只要给定反演中心 O 和反演幂 $k>0$，这个双曲反演变换就是确定的. 因而对于平面上(空间中)的非反演中心的任意一点 A，都可利用

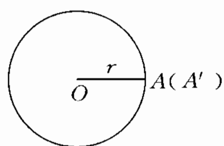


图1

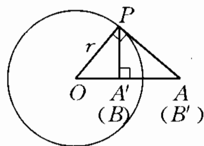


图2

几何作图求出其反演点 A'. 首先以 O 为圆心，以 $r=\sqrt{k}$ 为半径作反演基圆. 求反演点的方法：

1. 若 A 点在⊙$O(r)$上，则点 A'与点 A 重合(如图 1).

2. 若 A 点在⊙$O(r)$外，从 A 点向⊙$O(r)$作一条切线，切点为 P，从 P 点引 OA 的垂线，垂足即为 A'(如图 2).

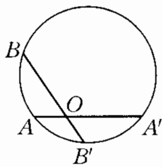
3. 若 B 点在⊙$O(r)$内，则与 2 的作图相反，即过 B 点作 OB 的垂线交⊙$O(r)$于点 P，过 P 点作⊙$O(r)$的切线交 OB 的延长线于 B'点，B'即为 B 的反演点(如图 2).

反演半径(radius of inversion)　见“双曲型反演变换”.

反演基圆(basic circle of inversion)　见“双曲型反演变换”.

反演变换的二重点(double point of inversion transformation)　见"双曲型反演变换".

椭圆型反演变换(elliptic inversion transformation)　反演变换的一种. 指反演幂 $k<0$ 的反演变换. 根据反演变换的定义及任何一个实数的平方不会是一个负数,椭圆型反演变换不存在二重点. 当共线三点 A, O, A' 确定一个椭圆型反演变换时,对任一点 B,均可用几何作图求出其反演点 B'. 当 A, A', B 不共线时,过该三点作圆,此圆与直线 OB 的第二交点 B' 即为 B 的反演点(如图);当 A, A', B 共线时,可按比例第四项作图,求出 OB' 的长以确定 B' 点.



直线与圆的反演(inversion a line and a circle)　一种常见的反演变换. 关于直线与圆的反演有如下结论:

1. 不通过反演中心的任一直线,它的反象是通过反演中心的一圆,反之亦然.

2. 不通过反演中心的两条平行线,它们的反象是在反演中心相切的两圆.

3. 不通过反演中心的任一圆其反象仍是一不通过反演中心的圆.

4. 以反演中心为圆心的任一圆,它的反象是一个同心圆.

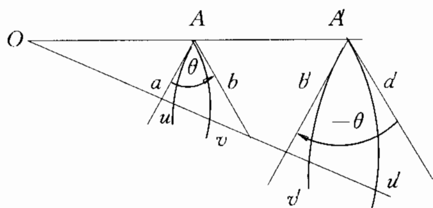
5. 相切两圆的反象仍相切,但当切点为反演中心时,所得反象是二平行线.

6. 正交两圆的反象仍正交.

7. 在双曲型反演变换中,凡通过任一对反演点的圆都和反演基圆正交.

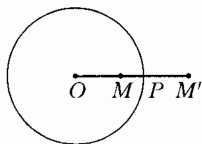
8. 在双曲型反演变换中,凡和反演基圆正交的圆,反象是其自身.

反演变换的保角性(conformality of inversion transformation)　反演变换的重要性质. 如图,



在反演变换下,两条曲线 u, v 在某交点 A 的交角,等于 u, v 反象 u', v' 在 A 点的反演点 A' 的交角,反演变换的这个重要的不变性,称为反演变换的保角性. 反演变换的保角性不仅对几何学本身十分重要,而且在其他学科以至许多科学技术中具有重要的理论和实际价值.

变态的反演(abnormal inversion)　反演变换的一种极限状态. 当双曲型反演变换的基圆半径无限增大,并在极限情况下变态成直线时,相应地,反演变换变态成关于这条直线的反射. 因此,可将反射看成反演的极限状态,称此为变态的反演变换.



变态的反演变换没有反演中心,也没有反演幂. 如图,设 M 与 M' 关于⊙O 互为反演点,⊙O 的半径为 r, P 为 MM' 与⊙O 的交点. 由

$$r^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = (\overline{OP} - \overline{PM}) \cdot (\overline{OP} + \overline{PM'})$$

可推出

$$\overline{PM'} = -\frac{\overline{PM}}{1 + \frac{\overline{PM}}{r}}.$$

当 M 与 P 固定时,有

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\overline{PM}}{r} = 0,$$

于是

$$\lim_{r\to\infty} \overline{PM'} = -\overline{PM}.$$

因此,反射是双曲反演变换的极限状态.

点的轨迹(locus of points)　简称轨迹. 几何学的重要概念之一. 指符合某条件的点的集合. 一动点按照某条件运动所形成的图形,称为点的轨迹. 点的轨迹具有两方面的基本属性:

1. 图形上的每一点都符合某条件(称其为轨迹的纯粹性).

2. 符合某条件的每一点都在图形上(称其为轨迹的完备性).

例如,和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹,是这条线段的垂直平分线. 其中包括两层意思:线段的垂直平分线上的每一点都和线段两端的距离相等(纯粹性);和线段两端距离相等的点都在这条线段的垂直平分线上(完备性). 古希腊毕达哥拉斯学派的阿尔希塔斯(Archytas,(T))首先引入曲线是点的轨迹,曲面是曲线移动的产物的观点,从而把静态的曲线与动态的轨迹联系起来了. 阿基米德(Archimedes)就是用点运动的观点定义螺线的,但直到17世纪,笛卡儿(Descartes,R.)创立了解析几何学,点的轨迹才真正与曲线结合起来,并用代数方程描绘.

轨迹(locus)　点的轨迹的简称.

轨迹的完备性(completeness of locus)　见"点的轨迹".

轨迹的纯粹性(purity of locus)　见"点的轨迹".

轨迹命题(proposition of locus)　几何学研究的重要课题之一. 叙述有关轨迹内容的几何命题,称为轨迹命题. 轨迹命题有三种类型:

1. 在轨迹命题的结论中指明了轨迹的形状、位

置和大小.

2. 在轨迹命题的结论中指明了轨迹的形状,但未指出其位置和大小.

3. 在轨迹命题的结论中未指明轨迹的形状、位置和大小.

第一、二两种类型的轨迹命题具有定理的形式,所以称为轨迹定理;第三种类型的轨迹命题属于问题的形式,所以称为轨迹问题.例如,"和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹,是这条线段的垂直平分线"是第一种类型的轨迹命题;"和已知线段两端点距离相等的点的轨迹是一条直线"是第二种类型的轨迹命题;"求和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹"是第三种类型的轨迹命题.对于第一种类型轨迹命题,只需对命题加以证明;对于第二种类型轨迹命题,需在明确轨迹位置和大小之后,对命题加以证明.对于第三种类型轨迹命题,要首先探求轨迹的形状、位置和大小,然后给以证明.对于后两种类型的一些轨迹命题,有时还要给以必要的讨论,以推究轨迹可能发生的变化.

轨迹定理(theorem of locus) 见"轨迹命题".

轨迹问题(problem of locus) 见"轨迹命题".

轨迹命题的证明(proof of proposition of locus) 一种特殊的证明方法.为了确认轨迹命题的真实性,证明轨迹命题"合乎某条件的点的轨迹是图形 F",要包括两方面的证明:

1. 完备性.任取符合某条件的一点 P,证明 P 在图形 F 上.

2. 纯粹性.在图形 F 上任取一点 P',证明 P' 符合某条件.

也可证明 1 和 2 的等价命题:

1′. 不在图形 F 上的点 Q 不符合条件.

2′. 不符合条件的点 Q' 不在图形 F 上.

综上所述,证明完备性时,可证 1 或 1′.证明纯粹性时,可证 2 或 2′.因此,对一个轨迹命题的证明有四种证法:证 1 和 2,证 1 和 2′,证 1′ 和 2,证 1′ 和 2′.究竟选用哪种证法要根据实际情况,以便于思考和证明简捷为选用标准.真实性得到证明的轨迹命题,称为轨迹定理.

合成轨迹(compound locus) 轨迹的一种类型.若轨迹是由两个或两个以上的图形组成,则称为合成轨迹.若轨迹由一个图形构成,则称为单一轨迹.例如,"与相交两定直线等距的点的轨迹,是两条互相垂直的直线,它们平分两定直线的各交角"就是合成轨迹."和两定点距离相等的点的轨迹是连结两定点线段的垂直平分线"是单一轨迹.

单一轨迹(simple locus) 见"合成轨迹".

基本轨迹(elementary locus) 一类常用的轨迹.求各种轨迹时,经常把它归结为求一些简单的已知轨迹,它们就称为基本轨迹.通常使用的基本轨迹有以下六种:

1. 到定点的距离等于定长的点的轨迹是以定点为圆心,定长为半径的圆.

2. 和已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线.

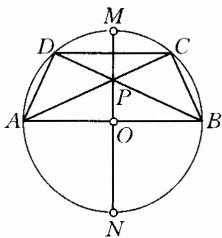
3. 与两条相交直线距离相等的点的轨迹是平分这两条直线交角的两条互相垂直的直线.

4. 到一条已知直线距离等于定长的点的轨迹,是在已知直线两旁平行于这条直线,并且到这条直线的距离等于定长的两条直线.

5. 与两条平行直线的距离相等的点的轨迹是这两条平行线的公垂线段的垂直平分线.

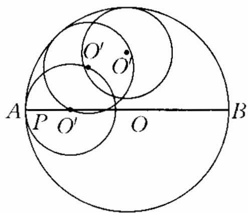
6. 和已知线段两个端点连线的夹角等于已知角的点的轨迹,是以已知线段为弦,所含圆周角等于已知角的两段弧(端点除外).特别地,当和已知线段两端点连线的夹角等于直角时,轨迹便是以已知线段为直径的圆,即两个半圆周合为一个圆周(两个端点除外).

轨迹的临界点(critical point of locus) 一种特殊点.轨迹的极限点中处于极端位置的点,称为轨迹的临界点.例如,以⊙O 的直径 AB 为底的圆内接梯形 $ABCD$,其对角线 AC,BD 的交点 P 的轨迹是与 AB 垂直的直径 MN,轨迹 MN 并不包括 O,M,N 三个点,这三个点都是极限点(如图),而点 M,N 处于极端位置,所以是轨迹的临界点(参见"轨迹的极限点").



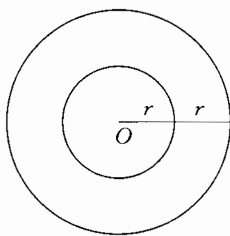
轨迹的极限点(limit point of locus) 一种特殊点.如果在某点的任何近旁都含有符合轨迹条件的点,惟独这点本身不符合轨迹条件,这样的点称为轨迹的极限点.例如,和已知线段两个端点连线的夹角等于已知角的点的轨迹,是以已知线段为弦,所含圆周角等于已知角的两段弧(端点除外),这两段弧的端点就是轨迹的极限点.一般地说,极限点不属于轨迹上的点,但有时对于处在特殊地位的极限点,也规定其为轨迹上的点,以保持图形的连续性.

轨迹的终止点(terminal point of locus) 一种特殊点.符合指定条件的轨迹的端点称为轨迹的终止点.例如,已知两个不等圆,其小圆半径是大圆半径的一半,大圆固定,而小圆在大圆内内切而滚动;若在小圆上指定一点 P(如图),则 P



点随小圆滚动的轨迹是如图中大圆的直径 AB,其中 A,B 两点是符合条件的轨迹的端点,即是轨迹的终止点.

轨迹的孤立点(isolated point of locus) 一种特殊点.如果轨迹中的点的某个近旁,除这个点之外,没有轨迹上的点,那么这个点称为轨迹的孤立点.例如,和$\odot O(r)$的距离等于其半径 r 的点的轨迹是 O 点及以 O 为圆心,$\odot O(r)$的直径 $2r$ 为半径的一个圆 $\odot O(2r)$,轨迹中的 O 点就是轨迹的孤立点(如图).



轨迹的特殊点(special point of locus) 一种点集.轨迹的极限点、临界点、终止点、孤立点和其他值得研究的符合指定条件的点,统称轨迹的特殊点.轨迹的特殊点对于探求轨迹有非常重要的意义.

尺 规 作 图

尺规作图问题(problem of construction with ruler and compass) 几何学研究的重要课题之一.只限用直尺(无刻度)和圆规两种工具进行作图的问题,称为尺规作图问题.不可能用尺规作图完成的作图问题,称为尺规作图不能问题.例如,三等分角问题;化圆为方问题,即求作一个正方形,使它的面积等于一已知圆的面积;立方倍积问题,即求作一个立方体,使它的体积等于一已知立方体的体积的二倍,都是著名的尺规作图不能问题.另外,如"在已知圆中,求作内接等腰三角形,使一腰的高落在一条定弦上""已知三条角平分线,求作三角形"等一般都不能用尺规作图法作出,因而也是尺规作图不能问题.可以用尺规作图完成的作图问题,称为尺规作图可能问题.例如,"n 等分线段""已知三边(每两边之和大于第三边)作三角形"等都可用尺规作图,是尺规作图可能问题.

尺规作图可能问题(construction problem for possiblity with ruler and compass) 见"尺规作图问题".

尺规作图不能问题(construction problem for impossiblity with ruler and compass) 见"尺规作图问题".

尺规作图法(method of construction with ruler and compasses) 亦称初等几何作图法或欧几里得作图法.初等几何所设定的作图方法.即仅限用直尺(无刻度)和圆规来完成几何作图的方法.在实际作图中,为提高作图速度和减少误差,有时也可用有刻度直尺、三角板、丁字尺、比例规、量角器等作为辅助工具作图,但必须以"作图成法"(基本作图题)为依据,并在作图题的"作法"步骤中给以明确叙述.

初等几何作图法(elementary geometric construction method) 即"尺规作图法".

欧几里得作图法(Euclid construction method) 即"尺规作图法".

尺规作图可能性准则(possibility criterion for construction with ruler and compasses) 尺规作图术语.指尺规作图可能的一种代数解释.凡可以用尺规作图的线段 x,只能表为 $x=R(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,式中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$是已知线段,R 是仅含对 a_i 的有限次有理运算及开平方运算的一次齐次式.这就是尺规作图可能性准则的代数表达式.它亦可表述为:如果一个给定作图题的所求未知量,能由若干个已知量的有限次有理运算及开平方运算而得到,那么这个作图题可仅用尺规作出;否则,即所求未知量表达式中的运算超出上面指出的范围,给定作图题不能仅用尺规作出.

线段的齐次式(homogeneous expression of a line segment) 尺规作图术语.设 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,若以 $tx_1,tx_2,\cdots,tx_n$ 分别代替 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,得

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

式中 $t\in\mathrm{R}$,则称函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 k 次齐次函数,简称 k 次齐次式.由几何产生的关系式,一般由线段长度组成(若式中含有三角函数,可将三角函数视为两线段长度之比),这些关系式对于式中所含线段,都是齐次的,并称它们是线段的齐次式.设 B 是线段上的点,$AC=AB+BC$ 或 $AB=AC-BC$ 是线段的一次齐次式.在图 1 的$\triangle ABC$ 中,$DE /\!/ BC$,从而有关系式

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB},$$

它们都是线段的零次齐次式.若将它们改写成

$$AD\cdot AC=AB\cdot AE,$$
$$AD\cdot EC=AE\cdot DB,$$
$$AB\cdot DE=AD\cdot BC,$$

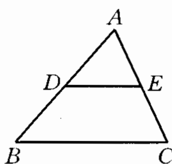


图1

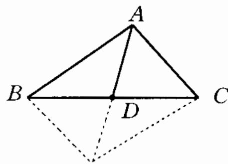


图2

则它们都变成了二次齐次式.在图 2 的$\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的中线,则有 $AB^2+AC^2=BC^2/2+2AD^2$,它也是线段的二次齐次式.面积公式都是二次齐次式,体积公式都是三次齐次式.一切线段组成

的关系式无一不是齐次的，这个特性，称为几何线段关系式的齐次性. 如果一个关系式是非齐次的，则它无几何意义；除次数 $n=0,1,2,3$ 的齐次式或可以转化成 $n=0,1,2,3$ 的齐次式外的任何齐次式也是无几何意义的.

尺规作图公法(postulate of construction with ruler and compasses) 尺规作图术语. 指一类最常用最简单的尺规作图法. 用直尺和圆规解作图题，就是把问题归结为以下五个认可的简单作图：

1. 过两已知点可作一直线.
2. 已知圆心和半径可作一圆.
3. 确定两已知直线的交点.
4. 确定已知直线和已知圆的公共点.
5. 确定两已知圆的公共点.

上述五条称为作图公法. 每个作图题，都是有限次反复运用这五条公法而完成的.

单规作图(compass construction) 一种作图方法. 即只用一个圆规作为工具的作图. 假如作出两个点，就认为过该两点的直线已经作出，那么单规作图就能完成尺规作图的全部任务. 这个结论是由莫尔(Mohr,G.)于 1673 年首先发现的，并刊于他编的小册子《欧氏几何趣味补录》中. 1797 年，马斯凯罗尼(Mascheroni,L.)又重新发现它，并刊于《圆规几何》一书之中.

单直尺作图(construction with a ruler) 一种作图方法. 即只用一个直尺为工具的几何作图. 早在 1759 年，朗伯(Lambert,J. H.)在苏黎世为他出版的著作中，只用一个直尺解了一整套几何作图题，他是单直尺作图的鼻祖. 此后，彭赛列(Poncelet,J.-V.)也着手于用直尺作图的研究，于 1822 年在他的著作《图形的射影性质》中，论述了"在平面上已知一圆及其圆心时，则直尺和圆规能解的作图问题，只用直尺就能得解". 对这一事实，施泰纳(Steiner,J.)在他的著作《一个定圆与直线可解的几何作图》中，给了进一步的论证.

几何三大问题(three famous problems in geometry) 亦称三大作图问题. 几何学中的著名问题. 指二千四百多年前，古希腊几何学家提出了尺规作图三大问题：

1. 三等分任意角问题，即把任意一个已知角三等分.

2. 立方倍积问题，即求作一个立方体，使它的体积等于已知立方体的体积的 2 倍.

3. 化圆为方问题，也称圆积问题，即求作一个正方形，使它的面积等于一个已知圆的面积.

这三个问题吸引了历代许多学者进行研究，长期未能解决，被称为几何三大问题. 直至 1837 年，旺策尔(Wantzel,P.-L.)用代数方法首先证明了第一、二两个问题均属尺规作图不能问题. 1882 年，林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)证明了 π 的超越性，从而证明了第三个问题也属于尺规作图不能问题. 1895 年，克莱因(Klein,(C.)F.)总结了前人的研究，著有《几何三大问题》一书，给出三大问题不可能用尺规来作图的简明证法，彻底解决了两千多年的悬案. 如果不限制作图工具，几何三大问题根本就不是什么难题，而且早已解决. 公元前 5 世纪，雅典的智人学派以上述三大问题为中心开展研究. 正因为问题不能用尺规来解决，常常使人进入新的领域中去，促进了数学的发展. 如激发了圆锥曲线、割圆曲线以及三、四次代数曲线的出现.

三大作图问题(three problems of construction) 即"几何三大问题".

立方倍积问题(problem of duplication of a cube) 亦称倍立方体问题. 几何三大问题之一. 假设已知立方体的棱长为 a，所求立方体的棱长为 x，则 $x^3=2a^3$，令 $a=1$，有 $x^3-2=0$. 可以证明，若此方程有有理根，不外乎 $\pm1,\pm2$，但它们都不是方程的根，因而不存在有理根，根据"有理系数的三次方程若无有理根，则长度等于它的任何实根的线段不能仅用尺规作图"的定理，立方倍积属尺规作图不能问题(参见"几何三大问题"和"尺规作图问题可能性的准则").

三等分角问题(problem of trisection of an angle) 几何三大问题之一(参见"几何三大问题"和"尺规作图可能性的准则").

化圆为方问题(problem of quadrature of the circle) 亦称圆积问题. 几何三大问题之一. 假设已知圆的半径为 r，所求正方形的边长为 x，则 $x^2=\pi r^2$，令 $r=1$，有 $x=\sqrt{\pi}$. 这样的线段 x 是存在的，但由于 π 是超越数，自然不是有理系数代数方程的根，更不能用加减乘除及开平方表示，因而不能用尺规作图解决(参见"几何三大问题"和"尺规作图可能性的准则"). 若不受尺规的限制，化圆为方问题并非难事.

圆积问题(problem of quadrature of the circle) 即"化圆为方问题".

活位作图(indeterminate position construction) 几何作图题的一种类型. 对几何作图题中的某些类型，若对所求作图形的位置不做限制，就称为活位作图. 如果限定作图范围，而不限定位置，就称为半活位作图. 例如，在已知圆中作内接正方形，就是半活位作图. 如果作图范围、位置都不加限制，就称为全活位作图. 例如，"已知边长，作正方形"就是全活位作图. 全活位作图又称为不定位作图. 如果求作的图形必须在指定的位置，就称为定位作图. 例如，"过三

角形一边上某定点作一直线，使三角形的面积二等分”就是定位作图.

不定位作图(indeterminate position construction) 见“活位作图”.

定位作图(fixed position construction) 见“活位作图”.

作图不定问题(indeterminate problem of construction) 一种作图问题. 可得无数解答的作图问题称为作图不定问题. 例如，已知三角形的底与高作三角形，则可作出无数三角形. 故此问题可称为作图不定问题.

作图题(construction problem) 数学问题的一种类型. 先给出一些条件，再求作符合这些条件的图形，这类问题称为作图题. 作为其他作图基础的一些作图题，称为基本作图题. 如：

1. 作一个角等于已知角.
2. 平分一个已知角.
3. 经过一点作已知直线的垂线或平行线.
4. 作线段的垂直平分线.
5. 分一线段为若干等份.
6. 已知三边作三角形.
7. 已知斜边及一直角边，作直角三角形.
8. 作已知三角形的外接圆(或内切圆、旁切圆).
9. 从圆上(或圆外)一点作圆的切线.
10. 作三已知线段的第四比例项.
11. 内分或外分已知线段等于已知比.
12. 作两已知线段的比例中项，等.

解作图题时，一般要求写出以下六个步骤：

1. 已知(假设). 详细写出题中给定的具体条件，并配以必要的图形(线段、角等).

2. 求作. 说明所求适合条件的图形.

3. 分析. 假定所求图形已经作出，并给出草图，通过考察研究已知与未知条件间的关系，寻求作图途径与方法，特别要找出作图的关键所在. 在分析的过程中，伴随思维可以加必要的辅助线和常用标志. 分析的过程，实质是探求作图途径与方法的过程.

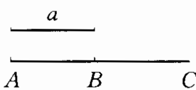
4. 作法. 依次叙述作图过程，但对所涉及的基本作图可不必详述.

5. 证明. 证明所作图形都符合条件.

6. 讨论. 探讨何时无解、一解或多解.

基本作图题(base problem of construction) 见“作图题”.

作一线段等于已知线段(to construct a segment which equals the given segment) 亦称迁线作图. 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知线段 a，求作线段 AB，使 $AB=a$.



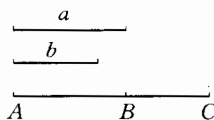
其具体作法是：

1. 作射线 AC；

2. 在射线 AC 上截取 $AB=a$，则线段 AB 为所求线段.

迁线作图(construction by transfer segment) 即“作一线段等于已知线段”.

作两条线段的和(construction of the sum of two given line segments) 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知线段 a 和 b，求作线段 AC，使 $AC=a+b$.



其具体作法是：

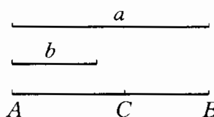
1. 作线段 AB，使 $AB=a$；

2. 延长 AB 至 C，使 $BC=b$，则线段 AC 即为所求线段.

作两条线段的差(construction of the difference of two given line segments) 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知线段 a 和 b，且 $a>b$，求作线段 AC，使 $AC=a-b$. 其具体作法是：

1. 作线段 $AB=a$；

2. 在线段 AB 上截取 BC，使 $BC=b$，则线段 AC 为所求线段.

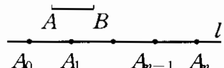


作已知线段的 n 倍(construction of a segment n times length of the given line segment) 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知线段 AB，求作一线段等于 nAB($n\in\mathrm{N}$). 其具体作法是：

1. 作直线 l；

2. 在 l 上任取一点 A_0；

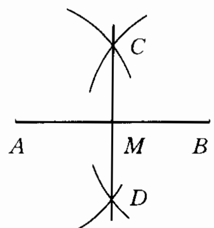
3. 以 AB 为单位，自 A_0 开始，连续截取 n 次至 A_n，则 $A_0A_n=nAB$，于是 A_0A_n 即为所求线段.



作线段的垂直平分线(construction of the mid-perpendicular of a given line segment) 简称为线段的中垂线. 基本作图题(作图成法)之一. 可具体表述为：已知线段 AB，求作 AB 的垂直平分线. 其具体作法是：

1. 分别以 A，B 为圆心，大于 $AB/2$ 的线段为半径作弧，两弧分别相交于 C，D 两点；

2. 连结 CD，则直线 CD 为所求的直线. 直线 CD 与线段 AB 的交点 M，即为线段 AB 的中点，也是垂足.

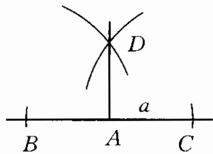


作线段的中垂线(perpendicular bisector of a given line segment) 见“作线段的垂直平分线”.

作线段的中点(construction of the midpoint of a given line segment) 亦称平分线段.基本作图题(作图成法)之一.作图方法详见“作线段的垂直平分线”.

平分线段(bisector a line segment) 即“作线段的中点”.

过直线上的一点作直线的垂线(construction of the perpendicular of a line through a point on the line) 基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:已知直线 a 及 a 上一点 A,求作过 A 而垂直于 a 的直线.思路要点是,首先在 a 上作线段,使 A 成为它的中点,然后作该线段的中垂线.其具体作法是:

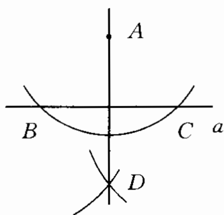


1.以 A 为圆心,任意长为半径作弧交直线 a 于 B,C 两点;

2.分别以 B,C 为圆心,大于 $BC/2$ 的线段为半径作弧,两弧分别交于 D 点;

3.连结 D,A 点,则 AD 即为所求垂线.

过直线外一点作直线的垂线(construction of the perpendicular of a line through a point outside the line) 基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:已知直线 a 及 a 外一点 A,求作过 A 而垂直于 a 的直线.其具体作法是:

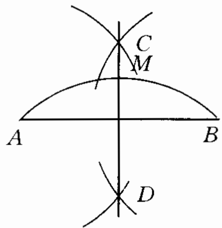


1.以 A 为圆心,适当长为半径作弧与直线 a 交于 B,C 两点;

2.分别以 B,C 为圆心,大于 $BC/2$ 的线段为半径作弧,两弧交点之一为 D;

3.连结 AD,则直线 AD 即为所求垂线.

作弧的中点(construction of the midpoint of a given arc) 亦称平分圆弧.基本作图题(作图成法)之一.可具体表述为:已知 $\overset{\frown}{AB}$,求作 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.其具体作法是:

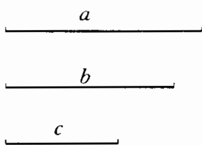


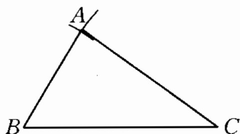
1.连结 AB;

2.作线段 AB 的垂直平分线 CD,与 $\overset{\frown}{AB}$ 交于点 M,则 M 为已知弧的中点.

平分圆弧(bisecting circular arc) 即“作弧的中点”.

已知三边作三角形(construction of a triangle from given its three sides) 基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:已知线段 a,b,c,求作 $\triangle ABC$,使 $BC=a$,$CA=b$,$AB=c$.其具体作法是:





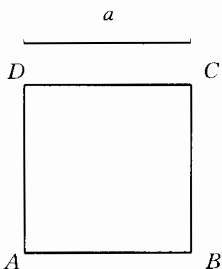
1.作线段 $BC=a$;

2.以点 B 为圆心,线段 c 为半径作弧,以点 C 为圆心,线段 b 为半径作弧,且两弧相交于点 A;

3.连结 AB,AC,则 $\triangle ABC$ 即为所求.当 a,b,c 中最大线段小于另二线段之和,最小线段大于另二线段之差时,此三角形可作,否则无解.

已知一边作正三角形(constructing a regular triangle of given side) 基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:以已知线段为边,作正三角形.其具体作法与已知三边作三角形相同,且恒有解(参见“已知三边作三角形”).

已知一边作正方形(constructing a square of given side) 基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:以已知线段 a 为边,作正方形.其具体作法是:



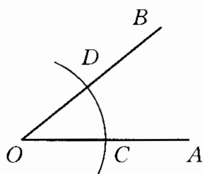
1.作线段 AB,使 $AB=a$;

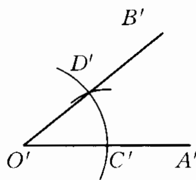
2.在 AB 的同旁分别过 A,B 点作线段 AB 的垂线;

3.在两条垂线上,分别截取线段 AD,BC,使 $AD=AB$,$BC=AB$;

4.连结 DC,则 $ABCD$ 即为所求的正方形.

作一个角等于已知角(construction of an angle equal to a given angle) 基本作图题(作图成法)之一.可具体表述为:已知 $\angle AOB$,求作 $\angle A'O'B'$,使 $\angle A'O'B'=\angle AOB$.其具体作法是:





1.作射线 $O'A'$;

2.以点 O 为圆心,以任意长为半径作弧,分别交 OA,OB 于点 C,D;

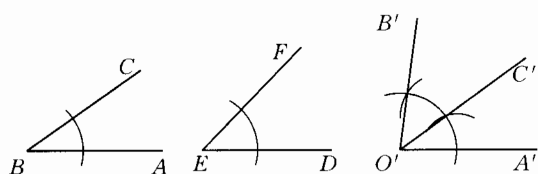
3.以点 O' 为圆心,以 OC 为半径作弧,交 $O'A'$ 于点 C';

4.以点 C' 为圆心,以 CD 为半径作弧,交前弧于点 D';

5.经过点 D' 作射线 $O'B'$,则 $\angle A'O'B'$ 就是所求的角.

作两个已知角的和(construction of the sum of two given angles) 基本作图题(作图成法)之一.

可具体表述为：已知$\angle ABC$，$\angle DEF$，求作$\angle A'O'B'$，使得$\angle A'O'B'=\angle ABC+\angle DEF$. 其具体作法是：



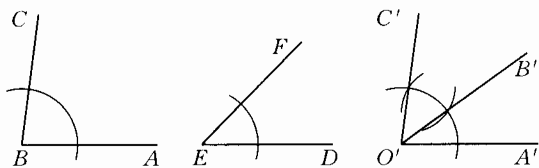
1. 作$\angle A'O'C'=\angle ABC$；

2. 以$O'C'$为一边，在$\angle A'O'C'$外部作$\angle C'O'B'=\angle DEF$，则$\angle A'O'B'$为所求的角. 由于$\angle A'O'C'$的位置可以在平面上任意选取，因而该作图亦可在任一个已知角的任一侧实施上述作图.

作两个已知角的差(construction of the difference of two given angles) 基本作图题(作图成法)之一. 可具体表述为：已知$\angle ABC>\angle DEF$，求作$\angle A'O'B'$，使得$\angle A'O'B'=\angle ABC-\angle DEF$. 其具体作法是：

1. 作$\angle A'O'C'=\angle ABC$；

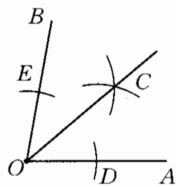
2. 以$O'C'$为一边，在$\angle A'O'C'$内部作$\angle C'O'B'=\angle DEF$，则$\angle A'O'B'$为所求的角. 上述作图亦可在较大的已知角内进行，而不必另作$\angle A'O'C'=\angle ABC$.



作已知角的平分线(construction of bisector of a given angle) 亦称平分角. 基本作图题(作图成法)之一. 可具体表述为：已知$\angle AOB$，求作射线OC，使$\angle AOC=\angle COB$. 其具体作法是：

1. 以O点为圆心，适当长为半径作弧，交OA，OB于D，E点；

2. 分别以D，E为圆心，大于$DE/2$的线段为半径作弧，在$\angle AOB$内，两弧交于点C.



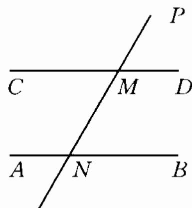
3. 经过点C作射线OC，则OC就是所求已知角的平分线.

平分角(bisecting angle) 即"作已知角的平分线".

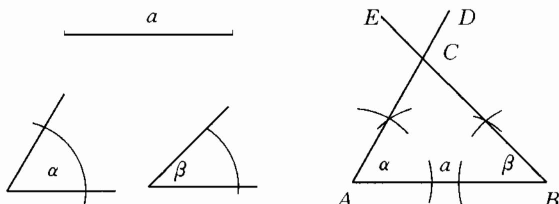
过定点作已知直线的平行线(construction of a line parallet to a give ling, through a given point) 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知直线AB和AB外一点M，求作直线$CD/\!/AB$，且CD过点M. 其具体作法是：

1. 过点M作直线PN，交直线AB于点N；

2. 过点M作直线CD，使同位角$\angle PMD=\angle MNB$，则直线CD即为所求平行线.



已知两角及其夹边作三角形(construction of a triangle with two given angles and one side between then) 基本作图题(作图成法)之一. 可具体表述为：已知$\angle\alpha$和$\angle\beta$及线段a，求作$\triangle ABC$，使$\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$，$AB=a$. 其具体作法是：

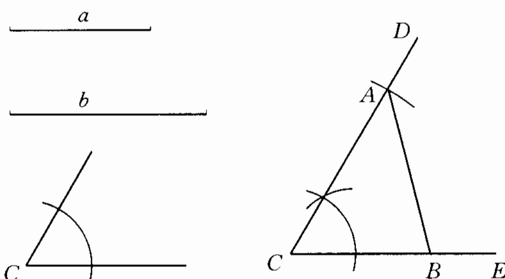


1. 作线段$AB=a$；

2. 过点A作射线AD，使$\angle BAD=\angle\alpha$；

3. 过点B在线段AB的同侧作射线BE，使$\angle ABE=\angle\beta$，BE与AD交于点C，则$\triangle ABC$即为所求. 当$\alpha+\beta<180°$时，此三角形可作，否则无解.

已知两边及其夹角作三角形(construction of a triangle from two given sides and the included angle of the sides) 基本作图题(作图成法)之一. 可具体表述为：已知线段a和b及角$\angle C$，求作$\triangle ABC$，使$BC=a$，$AC=b$，$\angle ACB=\angle C$. 其具体作法是：

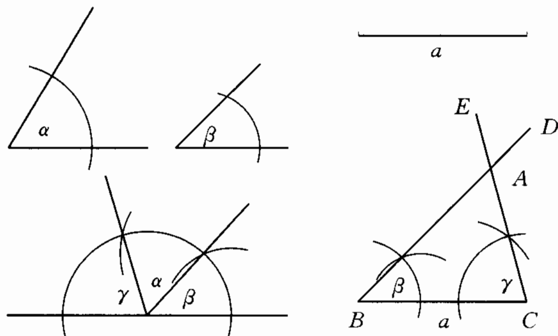


1. 作$\angle DCE=\angle C$；

2. 在边CD上截取线段$CA=b$，在边CE上截取线段$CB=a$；

3. 连结AB，则$\triangle ABC$为所求. 只要给定$\angle C<180°$，则三角形总可作出.

已知两角及其中一角的对边作三角形(construction of a triangle with two given angles and one side opposite an angle) 基本作图题(作图成法)之一. 可具体表述为：已知$\angle\alpha$，$\angle\beta$和线段a，求作$\triangle ABC$，使$\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$，$BC=a$. 其具体作法是：



1. 作角$\angle\gamma=180°-(\angle\alpha+\angle\beta)$；

2. 作线段$BC=a$；

3. 过点B作射线BD，使$\angle CBD=\angle\beta$；

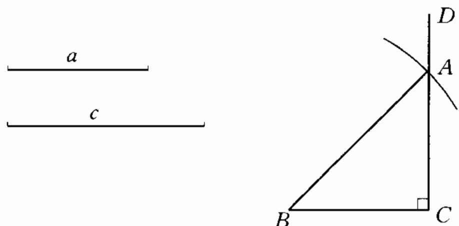
4. 过点C在D点的同旁作射线CE，使$\angle BCE=\angle\gamma$，CE交BD于点A，则$\triangle ABC$即为所求. 当$\angle\alpha+\angle\beta<180°$时，此三角形可作，否则无解.

已知斜边和一条直角边作直角三角形(construction a right triangle from its given hypotenuse and one adjacent side) 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知线段c和a，求作$Rt\triangle ABC$，使斜边$AB=c$，$BC=a$. 其具体作法是：

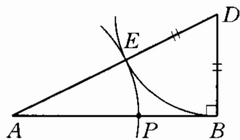
1. 作线段BC，使$BC=a$；

2. 过点C作BC的垂线CD；

3. 以点B为圆心，线段c为半径作弧，交CD于A，则$\triangle ABC$即为所求直角三角形. 当$c>a$时，此直角三角形可作，否则无解.



作线段的黄金分割点(construction of the golden section point of a given line segment) 亦称黄金分割法. 一个有名的作图问题. 或称分已知线段成中外比. 具体表述为：已知线段AB，求作AB的内分点P，使$AP^2=AB\cdot PB$(如图). 其具体作法是：

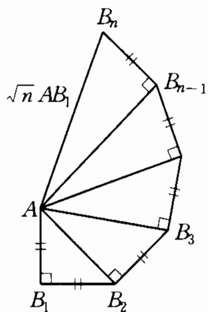


1. 作$BD\perp AB$，并取$BD=AB/2$；

2. 连结AD，在DA上截取$DE=DB$；

3. 在AB上截取$AP=AE$，则P点为所求的分点，$AP=[(\sqrt{5}-1)/2]AB\approx0.618\ 033\ 983\ AB$.

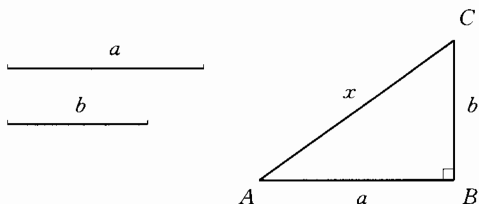
作已知线段的$\sqrt{n}$倍(construction of a segment $\sqrt{n}$ times the length of a given segment) 基本作图题(作图成法)之一. 即"勾股求弦"作图法的有限次运用. 该作图题可具体表述为：已知线段AB_1，求作一线段$\sqrt{n}AB_1$. 其具体作法是：



1. 以AB_1为直角边作等腰$Rt\triangle AB_1B_2$；

2. 以AB_2为直角边，$B_2B_3=AB_1$为另一直角边，作$Rt\triangle AB_2B_3$……如此继续下去，每次以前一个直角三角形的斜边作为直角边再作一个直角三角形，使另一直角边等于AB_1，经过$n-1$次得$Rt\triangle AB_{n-1}B_n$(如图)，则$AB_n=\sqrt{n}AB_1$. 即AB_n为所求作的线段.

作$x=\sqrt{a^2+b^2}$(construing a segment x which equals $\sqrt{a^2+b^2}$ for known a and b) 亦称勾股求弦作图. 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知线段a和b，求作线段x，使$x=\sqrt{a^2+b^2}$. 其具体作法是：以a和b为直角边作$Rt\triangle ABC$，使$\angle B=90°$，则线段AC即为所求线段x.



勾股求弦作图(construction of seeking hypotenuse chord of given legs of a triangle) 即"作$x=\sqrt{a^2+b^2}$".

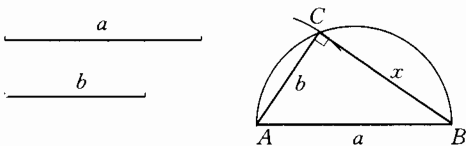
作$x=\sqrt{a^2-b^2}$(construing a segment x which equals $\sqrt{a^2-b^2}$ for known a and b) 亦称弦勾求股(或弦股求勾)作图. 基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知线段a和b，且$a>b$，求作线段x，使$x=\sqrt{a^2-b^2}$. 其具体作法是：

1. 作线段$AB=a$；

2. 以AB的中点为圆心，$AB/2$为半径作半圆弧；

3. 以A为圆心，线段b为半径作弧，交半圆弧于点C；

4. 连结BC，则线段BC为所求线段x.

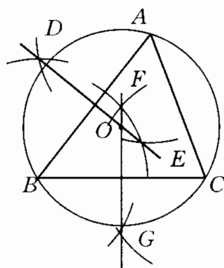


作已知三角形的外接圆(construction of the circumscribed circle of a given triangle) 基本作图

题(作图成法)之一.具体表述为:已知$\triangle ABC$,作它的外接圆.其具体作法是:

1. 作AB,BC的垂直平分线DE,GF,交点为O;

2. 以点O为圆心,OB为半径作$\odot O$,则$\odot O$即为所求外切圆.



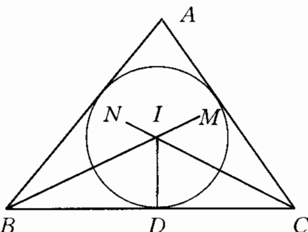
过不共线的三点作圆(construction of the circle through three non-colinear points) 基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:已知平面上的三点A,B,C不共线,过三点作圆.其具体作法是:将不共线的三点连结成三角形,作此三角形的外接圆即为所求.见"作已知三角形的外接圆".

作已知三角形的内切圆(construction of the inscribed circle of given a triangle) 基本作图题(作图成法)之一.对于已知的$\triangle ABC$,其内切圆的具体作法是:

1. 作$\angle B$,$\angle C$的角平分线BM和CN,交于点I;

2. 过点I作$ID\perp BC$,垂足为D;

3. 以I为圆心,ID为半径作$\odot I$,则$\odot I$即为所求内切圆.

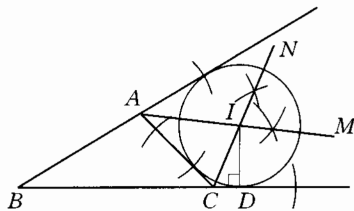


作已知三角形的旁切圆(construction of the escribed circles of a given triangle) 基本作图题(作图成法)之一.对于已知的$\triangle ABC$,其旁切圆的具体作法是:

1. 作$\angle A$和$\angle C$的外角的平分线AM,CN,交点为I;

2. 过点I作$ID\perp BC$,垂足为D;

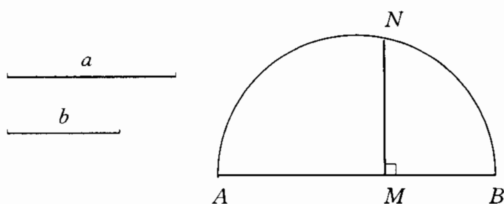
3. 以I为圆心,ID为半径作圆,则$\odot I$即为所求旁切圆.



在作法1中亦可改换成作$\angle B$的内角平分线与$\angle A$(或$\angle C$)的外角平分线相交于I点.用同样的方法可作出$\triangle ABC$的其余两个旁切圆.

作两条已知线段的比例中项(construction of the mean proportional of two given segments) 简称比例中项作图.基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:已知线段a和b,求作线段c,使$c^2=ab$.其具体作法是:

1. 作线段AM,使$AM=a$;延长AM到B,使$MB=b$;



2. 以线段AB为直径作半圆弧;

3. 过点M作AB的垂线交半圆弧于点N,则线段MN即为所求比例中项.

比例中项作图(construction of mean proportional) 作两条已知线段的比例中项的简称.

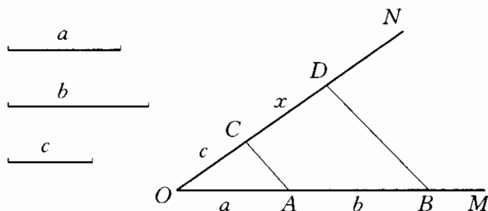
作已知线段的第四比例项(construction of the fourth term of proportional from three given segment) 简称第四比例项作图.基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:已知线段a,b,c,求作线段x,使$a:b=c:x$.其具体作法是:

1. 作射线OM,ON;

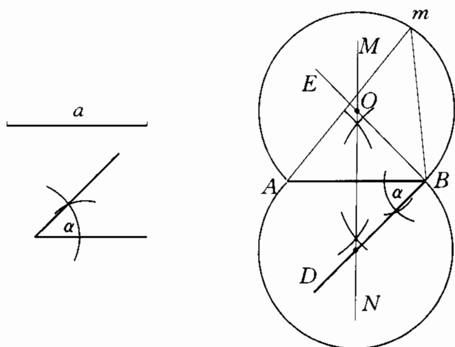
2. 在OM上截取$OA=a$,$AB=b$,在ON上截取$OC=c$;

3. 连结AC;

4. 过点B作$BD/\!/AC$,交ON于D点,则线段$x=CD$就是所求的线段.



已知线段及所含圆周角作弧(construction of an arc from given its chord and the corresponding angle at the circumference) 亦称已知弦和内接角作弓形弧.基本作图题(作图成法)之一.具体表述为:已知线段a及$\angle\alpha$,求作以a为弦的圆弧$\widehat{AmB}$,使$\angle AmB=\angle\alpha$.其具体作法是:



1. 作线段$AB=a$及它的垂直平分线MN;

2. 过点 B 作射线 BD，使 $\angle ABD=\angle\alpha$；

3. 过点 B 作 BD 的垂线 BE，交 MN 于点 O；

4. 以 O 为圆心，OA 为半径，在 $\angle ABD$ 的外部作 $\overset{\frown}{AmB}$，即为所求，所求弧可作两条. 当 $\angle\alpha=90°$ 时，两弧合成一圆周.

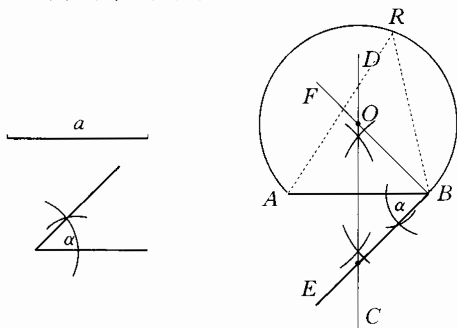
已知弦和内接角作弓形弧(constructing segment of a circle with given chord and inscribed angle)　基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知弦 a 及内接角 $\angle\alpha$，求作以 a 为弦的弓形弧 ARB，使 $\angle ARB=\angle\alpha$(参见“已知线段及所含圆周角作弧”). 其具体作法是：

1. 作线段 $AB=a$ 及它的垂直平分线 CD；

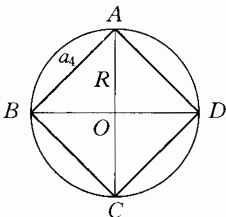
2. 过点 B 作射线 BE，使 $\angle ABE=\angle\alpha$；

3. 过点 B 作 BE 的垂线 BF，交 CD 于点 O；

4. 以 O 为圆心，OA 为半径，在 $\angle ABE$ 的外部作 $\overset{\frown}{ARB}$，即为所求的弓形弧.



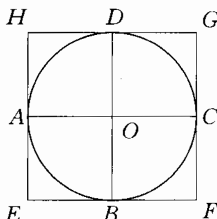
作已知圆的内接正方形(construction of the inscribed square of a given circle)　基本作图题(作图成法)之一. 对于已知的 $\odot O(R)$，其内接正方形的具体作法是：



1. 作互相垂直的直径 AC，BD；

2. 连结 AB，BC，CD，DA，得正方形 $ABCD$，即为所求圆的内接正方形，且每边长为 $a_4=\sqrt{2}R$.

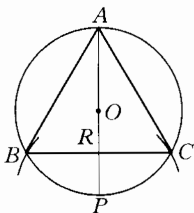
作已知圆的外切正方形(construction of the circumscribed square of a given circle)　基本作图题(作图成法)之一. 对于已知的 $\odot O$，其外切正方形的具体作法是：



1. 作 $\odot O$ 的两条垂直直径 AC，BD；

2. 过点 A，B，C，D 作 $\odot O$ 的切线，分别交于点 E，F，G，H，则正方形 $EFGH$ 即为所求.

作已知圆的内接正三角形(construction of the inscribed regular triangle of a given circle)　基本作图题(作图成法)之一. 对于已知的 $\odot O(R)$，其内接正三角形的具体作法是：

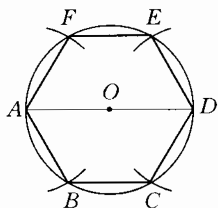


1. 以 $\odot O(R)$ 上任一点 P 为圆心，R 为半径作弧，交 $\odot O(R)$ 于 B，C 两点；

2. 过点 P 作直径 PA；

3. 连结 AB，BC，CA，则 $\triangle ABC$ 即为所求. 且每边长为 $a_3=\sqrt{3}R\approx 1.732R$.

作已知圆的内接正六边形(construction of the inscribed regular hexagon of a given circle)　基本作图题(作图成法)之一. 对于已知的 $\odot O(R)$，其内接正六边形的具体作法是：

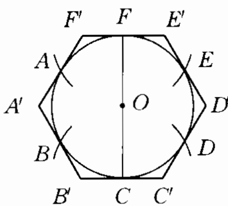


1. 作 $\odot O(R)$ 的直径 AD；

2. 分别以 A，D 为圆心，R 为半径画弧，两弧交 $\odot O$ 于 B，F 及 C，E 点；

3. 顺次连结 AB，BC，CD，DE，EF，FA，得六边形 $ABCDEF$，即为所求. 且每一边长为 $a_6=R$.

作已知圆的外切正六边形(construction of the circumscribed regular hexagon of a given circle)　基本作图题(作图成法)之一. 对于已知的 $\odot O$，其外切正六边形的具体作法是：

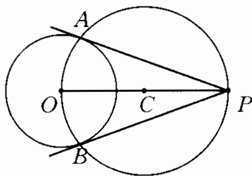


1. 作 $\odot O$ 的内接正六边形 $ABCDEF$；

2. 过各顶点分别作 $\odot O$ 的切线，这些切线分别交于点 A'，B'，C'，D'，E'，F'；

3. 连结 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'E'$，$E'F'$，$F'A'$，则六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 即为所求. 亦可过圆周的六等分点作切线而得到该圆的外切正六边形.

过圆外一点作圆的切线(construction of the tangent line of a circle through a point outside the circle)　基本作图题(作图成法)之一. 具体表述为：已知 $\odot O$ 及圆外一点 P，求作经过 P 点的 $\odot O$ 的切线. 其具体作法是：



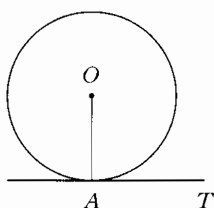
1. 连结 OP；

2. 以 OP 为直径作 $\odot C$，交 $\odot O$ 于 A，B 两点；

3. 作直线 PA，PB，即为所求的切线.

过圆上一点作圆的切线(construction of the tangent line of a circle through a point on the

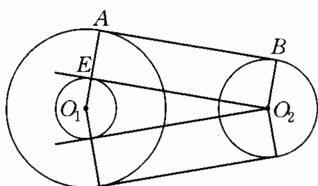
circle）　基本作图题（作图成法）之一. 具体表述为：已知$\odot O$及圆上一点A，求作经过点A的$\odot O$的切线. 其具体作法是：



1. 连结OA；

2. 过点A作OA的垂线AT，则直线AT即为所求的切线.

作两圆的外公切线（construction of the external common tangents of two circles）　基本作图题（作图成法）之一. 对于已知的$\odot O_1(r_1)$和$\odot O_2(r_2)$ $(r_1>r_2)$，其外公切线的具体作法是：



1. 以O_1为圆心，r_1-r_2为半径作圆，过点O_2作这个圆的切线O_2E，E为切点；

2. 连结O_1E，并延长交$\odot O_1(r_1)$于点A；

3. 过O_2作$O_2B // O_1A$，交$\odot O_2(r_2)$于点B；

4. 连结AB，则AB就是一条外公切线（如图）.

一般两圆的外公切线可作两条. 当两圆内含时，外公切线不存在；当两圆内切时，过切点作连心线的垂线即为惟一的一条外公切线；当两圆相等即$r_1=r_2$时，作法较简单，只要连结O_1O_2并过点O_1，O_2作O_1O_2的垂线，此二垂线与$\odot O_1$，$\odot O_2$的四个交点就是两条外公切线的切点.

作两圆的内公切线（construction of the internal common tangents of two circles）　基本作图题（作图成法）之一. 对于已知的$\odot O_1(r_1)$和$\odot O_2(r_2)$ $(O_1O_2>r_1+r_2)$，其内公切线的具体作法是：

1. 以O_1为圆心，r_1+r_2为半径作圆，过点O_2作这个圆的切线O_2E，E为切点；

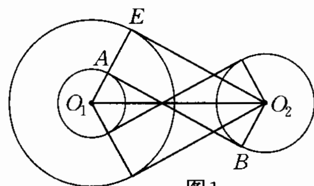


图1

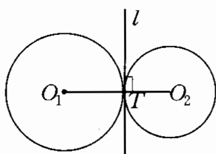


图2

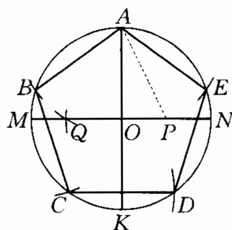
2. 连结O_1E，交$\odot O_1(r_1)$于点A；

3. 过点O_2作$O_2B // O_1A$并交$\odot O_2(r_2)$于点B；

4. 连结AB，即为所求的一条内公切线（如图）.

当两圆外离时，可作两条内公切线；当两圆外切时，可作一条内公切线（过切点的连心线的垂线，如图2）；当两圆内含、内切或相交时，内公切线均不存在.

作圆内接正五边形（construction of the inscribed regular pentagon of a circle）　基本作图题（作图成法）之一. $\odot O(R)$的内接正五边形的具体作法是：



1. 作$\odot O$的两条互相垂直的直径$AK \perp MN$；

2. 取半径ON的中点P；

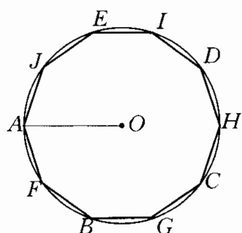
3. 以P为圆心，PA为半径作弧，交OM于点Q；

4. 从A点起，以AQ为半径，依次在$\odot O$上连续截取等弧，得B,C,D,E四点；

5. 顺次连结AB,BC,CD,DE,EA，则五边形$ABCDE$即为所求的内接正五边形（如图），且每边长为

$$a_5=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}R\approx 1.1755R.$$

作圆内接正十边形（construction of the inscribed regular decagon of a circle）　基本作图题（作图成法）之一. $\odot O(R)$的内接正十边形的具体作法是：

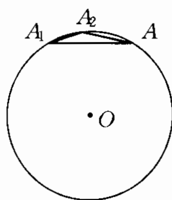


1. 作$\odot O(R)$的内接正五边形$ABCDE$；

2. 将各边所对的弧平分；

3. 顺次将各弧中点与正五边形顶点相连，即得圆内接正十边形.

作圆内接正十五边形（construction of the inscribed regular pentadecagon of a circle）　基本作图题（作图成法）之一. $\odot O$的内接正十五边形的具体作法是：



1. 作$\odot O$的内接正六边形，设其一边为AA_1；

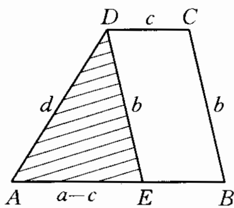
2. 作$\odot O$的内接正十边形，设其一边为AA_2，且$\overset{\frown}{AA_2}$在$\overset{\frown}{AA_1}$的内部；

3. 以A_1A_2长为半径在$\odot O$上依次截取得点$A_3,A_4,\cdots,A_{15}$，并顺次连结$A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,\cdots,A_{14}A_{15},A_{15}A_1$，则十五边形$A_1A_2A_3\cdots A_{15}$即为所求. 因为

$$\overset{\frown}{A_1A_2}=\overset{\frown}{AA_1}-\overset{\frown}{AA_2}=\frac{\text{圆周}}{6}-\frac{\text{圆周}}{10}=\frac{\text{圆周}}{15}.$$

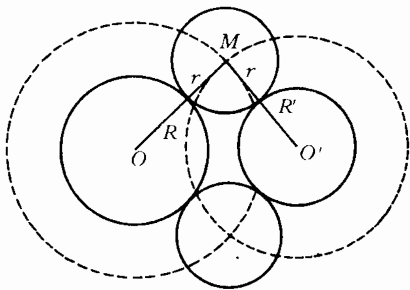
三角形奠基法（construction method by frist construct some triangle）　解作图题的一种常用方法. 解某些作图题时，如果先作出图形中的某个三角形，然后在此基础上作出所要求作的图形，此种解作图题的方法称为三角形奠基法，该三角形称为作图

的奠基三角形. 例如,已知四条线段 a,b,c,d,求作梯形 $ABCD$,使 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,AB\parallel CD$. 该作图题的思路要点是:假设梯形 $ABCD$ 已经作出,且 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d$. 作 $DE\parallel BC$,则 $DE=b,AE=a-c$. 于是$\triangle AED$ 可以确定(如图),并成为奠基三角形,在此基础上,所求作的梯形极易作出. 当 $a,b,a-c$ 中最大者小于其他两线段之和时该作图题有解,否则无解.



奠基三角形(triangle as the foundation of construction) 见"三角形奠基法".

轨迹交点法(method of intersection point of locus) 解作图题的一种重要方法. 解作图题常归结到确定某一点的位置. 如果这个点的位置是由两个条件确定的,先放弃其中一个条件,那么这个点的位置就不定而形成一个轨迹;若改换放弃另一个条件,这个点就在另一个轨迹上,故此点便是两个轨迹的交点. 这种利用轨迹的交点来解作图题的方法称为轨迹交点法,或称为交轨法、轨迹交截法、轨迹法.



用这种方法来作图,称为轨迹法作图. 例如,设⊙O 与⊙O'相离,半径分别为 R 与 R',求作半径为 r 的圆,使其与⊙O 及⊙O'外切. 该作图题的思路要点是:设⊙M 是合条件的圆,即其半径为 r 并与⊙O 及⊙O'外切(如图). 显然,M 点是由两个轨迹确定的,即 M 点既在以 O 为圆心以 $R+r$ 为半径的圆上,又在以 O' 为圆心以 $R'+r$ 为半径的圆上,因而所求圆的圆心位置可确定,于是该作图题可以求解. 若⊙O 与⊙O'相距为 b,当 $2r<b$ 时,该题无解;当 $2r=b$ 时,有惟一解;当 $2r>b$ 时,有两解.

交轨法(method of intersection point of locus) 即"轨迹交点法".

轨迹法(method of locus) 即"轨迹交点法".

轨迹交截法(method of intersection point of locus) 即"轨迹交点法".

代数法作图(construction with algebraical method) 作图方法的一种. 解作图题时,往往首先归纳为求出某一线段长,而这一线段长的表达式能用代数方法求出,然后根据线段长的表达式设计作图

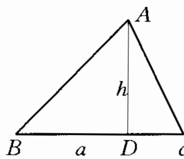


图1

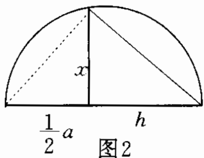
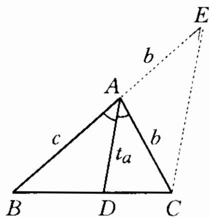


图2

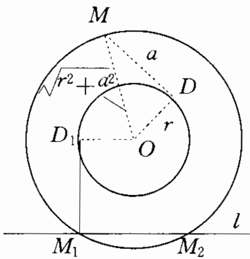
步骤. 用这种方法解作图题,称为代数法作图. 例如,求作一个正方形,使其面积等于已知$\triangle ABC$ 的面积. 该作图的思路要点是:设$\triangle ABC$ 的底边为 a,高为 h(图 1). 此题关键在于求出正方形的边长 x. 由题意,$x^2=a/2\cdot h$,所以 x 是 $a/2$ 与 h 的比例中项(图 2). 于是,x 可由代数基本作图法做出,从而符合条件的正方形可以做出.

比例线段法作图(constructing by proportional segments) 一种常用的作图方法. 利用比例线段的有关定理解作图题,称为比例线段法作图. 例如,已知两边 b,c 及 b,c 夹角的平分线 t_a,求作三角形. 其思路要点是:如图,假设$\triangle ABC$ 为所求,即 $AB=c,AC=b,\angle A$ 的平分线 $AD=t_a$. 延长 BA 至 E,使 $AE=b$,连结 EC. 因而 $AD\parallel EC$,所以利用成比例线段 $AD/EC=BA/BE,EC=t_a(b+c)/c$. 于是$\triangle ACE$ 可作出并成为奠基三角形(如图). 当 t_a 同时大于或等于 b,c 时,本题无解,否则有一解.



辅助圆法作图(construction with the auxiliary circles) 一种常用的作图方法. 通过引辅助圆解作图题的一种方法. 对一些作图题,在分析或作图中,需引入辅助圆,以确定某些点、线段或角的相对位置. 利用这种方法解作图题,称为辅助圆法作图. 辅助圆法作图的特例是游移切线法(参见"游移切线法作图").

游移切线法作图(constructing by shifting tangent) 作图方法的一种. 如果作图的关键在于确定某一直线的位置,可暂时放弃这直线所应满足的条件之一,于是这直线可能因位置不定而常切于某曲线,而这曲线实际就是点的轨迹(例如圆). 这样一来,只要先把这轨迹作出,然后作它的某切线,使它符合所放弃的条件,问题便得以解决. 用这种方法作图称为游移切线法作图. 一般都是圆或圆弧,而不适宜用于别的曲线.



例如，在已知直线 l 上求一点 M_1，使它向已知圆⊙$O(r)$所引切线长等于已知长 a（如图）.

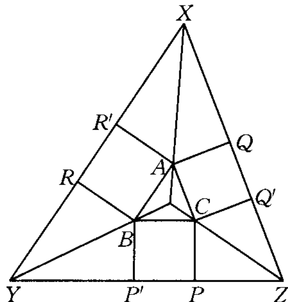
设 M_1 是已知直线 l 上符合条件的点. M_1D_1 为从点 M_1 向已知圆所引的切线，$OD_1=r$，$M_1D_1=a$. 问题关键在确定点 M_1 在直线 l 上的位置. 若暂不考虑点 M_1 须在直线 l 上的条件，只研究点 M 到圆 O 所引切线 MD 须等于已知长 a，它便是⊙$O(r)$的一条游移切线. 端点 M 到⊙$O(r)$圆心 O 的距离

$$MO=\sqrt{OD^2+MD^2}=\sqrt{r^2+a^2},$$

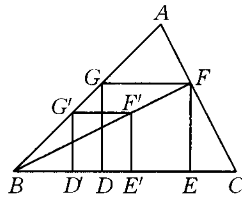
其轨迹是已知圆的一个同心圆 C. 它与直线 l 的公共点便是所求的点. 因此，M_1 便是圆 C 与直线 l 的公共点.

当圆 C 与直线 l 相切时，一解；当圆 C 与直线 l 相交时，二解；当圆 C 与直线 l 相离时，无解.

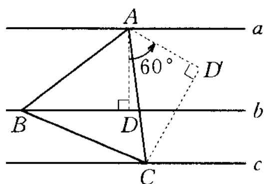
格雷贝作图法(Grebe construction method) 求作三角形的陪位重心的一种方法. 如图，在 $\triangle ABC$ 的外面作正方形 $BCPP'$，$CAQQ'$和 $ABRR'$，设 QQ'与 RR'，RR'与 PP'，PP'与 QQ'分别交于点 X,Y,Z，则 AX,BY,CZ 三直线交于$\triangle ABC$ 的陪位重心. 用这个方法来求作三角形的陪位重心称为格雷贝作图法.



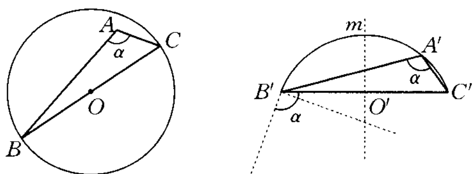
位似法作图(construction with homothetic method) 一种常用的作图方法. 利用位似变换的方法作图. 要作出满足某些条件的图形，可以先放弃一两个条件，作出与其位似的图形，然后利用位似变换，将这个与其相似的图形放大或缩小，以满足全部条件，从而作出所要求作的图形. 例如，要求作锐角三角形 ABC 的内接正方形 $DEFG$，先放弃一个顶点 F 在边 AC 上的条件，作出与正方形 $DEFG$ 位似的正方形 $D'E'F'G'$（如图），然后利用位似变换将正方形 $D'E'F'G'$放大，以满足全部条件，从而求得所要作的正方形 $DEFG$.



旋转法作图(construction by rotation) 解作图题的一种方法. 有些作图题，需要将某些几何元素或图形绕某一定点旋转适当角度，以使已知图形与所求图形发生联系，从而发现作图途径. 例如，已知三条平行线求作一个正三角形，使三个顶点分别在这三条平行线上. 其思路要点是：假设$\triangle ABC$ 是正三角形，且顶点 A,B,C 分别在直线 a,b,c 上. 作 $AD\perp b$，将$\triangle ABD$ 绕 A 点逆时针旋转 60°后置于$\triangle ACD'$的位置. 此时，点 D'可以确定，从而 C 点亦可确定. 再作 $\angle BAC=60°$，B 点又可确定，故符合条件的正三角形可以作出（如图）. 若不考虑正$\triangle ABC$ 的具体位置，而只考虑三个顶点分别在三条平行线上，则此题只有一解.



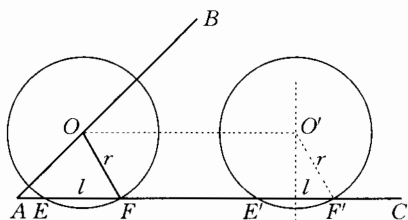
逆序法作图(construction by reverse order) 与一般作图程序相反的一种作图方法. 某些作图题，需要在给定图形上做出具体的符合某种性质的新图形. 如果这样的图形不易作出，那么可以首先在任意位置上按要求条件作出新图形，然后再把这个新图形移到给定图形上，并使移动后保持图形的合同. 例如，在定圆中求作一直径，使它对圆内已知点所张开的角等于已知角. 其思路要点是：如图，在⊙O 内作一直径 BC，使它对圆内已知点 A 所张开的角等于已知角 α，相当于已知底边、顶角和底边的中线作三角形. 但由于顶点 A 是固定的，底边是直径，所以这个三角形的位置在⊙O 内无法确定. 然而，如果在任意位置上作出这样的三角形，再将它移入⊙O 内，是容易做到的，因此，本题采用逆序法作图为宜. 由于 A 点在⊙O 内，所以 $\alpha>90°$，否则无解；若 $\alpha>90°$，当 $AO>h$（弓形弧 $\widehat{A'mB'}$ 的高）时，$\triangle A'B'C'$有两解；当 $AO=h$ 时，$\triangle A'B'C'$有一解. 在将$\triangle A'B'C'$移入⊙O 时，由于 AB 一般有两解，因而符合条件的直径 BC 的解数比$\triangle A'B'C'$的解数要加倍.



平移法作图(construction by translation) 解作图题的一种常用方法，利用平行移位的方法解作图题. 它分为以下两种类型：

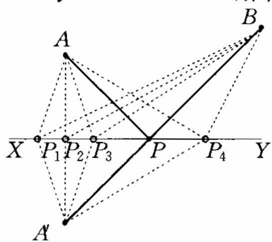
1. 平移图形中的几何元素. 有些几何作图题，需要利用平移将所求作的几何元素或将已知几何元素移到适当位置，使条件相对集中，构成新的容易做出的图形.

2. 平移整个图形. 另有一些作图题，需要暂时舍弃题中要求的某条件，首先按其他要求条件在适当位置作图，然后利用平移将所作图形移到能同时满足曾暂时舍弃条件的位置. 例如，已知$\angle BAC$、线段 l 与 r，求作一⊙O，使圆心在 AB 上，半径为 r，且在 AC 上截出的弦等于 l. 其思路要点是：暂舍弃圆心



在 AB 上这一条件.半径为 r 且在 AC 上截出的弦等于 l 的⊙O'容易作出(如图),然后将⊙O'沿 CA 方向平移至⊙O 的位置上即为所求作的圆.当 $r\leqslant l/2$ 或 E,F 中一点或两点在 CA 的延长线上时无解,除此以外恒有解.

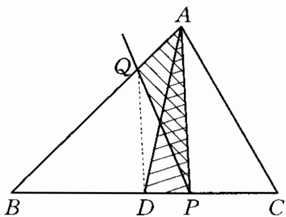
翻折法作图(construction by reflection) 解作图题的一种常用方法.一些作图题可以通过固定图形中适当的一条直线或一点,将图形翻折,利用图形的对称性使某些几何元素移位,以寻求到作图的途径和方法,从而作出所求图形.例如,已知直线 XY 同侧的两点 A,B,在直线 XY 上求作一点 P,使 $PA+PB$ 为最短(如图).简要分析如下:



若将点 A 从直线 XY 所划分的上半平面翻折到下半平面的点 A',则斜线(或垂线)$AP,AP_1,AP_2,AP_3,\cdots$的长分别与对应斜线(或垂线)$A'P,A'P_1,A'P_2,A'P_3,\cdots$的长相等.因此折线 $APB,AP_1B,AP_2B,AP_3B,\cdots$之长分别与对应折线(或线段)$A'PB,A'P_1B,A'P_2B,A'P_3B,\cdots$之长相等.于是使 $PA+PB$ 最短的问题便化为使 $PA'+PB$ 最短的问题.根据两点之线段比两点间折线短的原理知,线段 $A'B$ 与直线 XY 的交点便是所求的点.

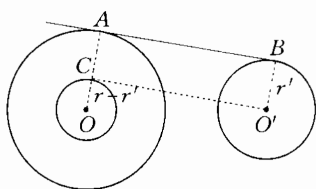
本题恒有解,包括直线 AB 与 XY 互相垂直的情形在内,那时 AB 的垂足即所求的点.

面积割补法作图(construction by excision and fill vacancy area) 解作图题的一种常用方法.对于等积变形的作图题,通常在给定图形或某一确定图形上割下一个三角形,再借助平行线补上一个同底等高的另一个三角形,使面积不变,从而完成所求作图形.例如,过△ABC 的底边 BC 上一定点 P 求作一条直线,使它分△ABC 的面积为相等的两部分.其思路要点是:因为中线 AD 平分△ABC 的面积,所以首先作中线 AD,假设 PQ 平分△ABC 的面积(如图).在△ADC 中,割去△APD,再补上△APQ.由于△APD 与△APQ 同底等高,面积相等,所以符合条件的 PQ 可以作出.本题一解.

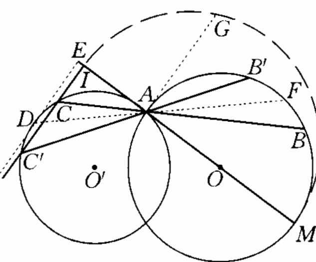


变更问题法作图(construction by changing problem) 解作图题的一种常用方法.一些几何作图题,当对原题直接作图较繁或较困难时,可将原题变更(转化)为另一种类型的已知问题或易解问题.这样可以化繁为简,化难为易.

伸缩进退法作图(construction by elasticity) 应用伸缩变换解作图题的一种方法.伸缩变换就是位似变换(参见本卷《高等几何》同名条),它将一个已知圆⊙$O(r_1)$变为一个确定的同心圆⊙$O(r_2)$.它的变态是将一圆收缩到圆心.应用收缩变换解作图题称为伸缩进退法作图.例如,求作两个定圆的外公切线.其思路要点是:设⊙O 与⊙O'的半径分别为 r,r',且 $r>r'$.假设外公切线 AB 已作出.对⊙$O(r)$,⊙$O'(r')$实施收缩变换:将⊙$O(r)$收缩为⊙$O(r-r')$,⊙$O'(r')$收缩为点圆 O',于是外公切线 AB 随之退到 CO'的位置,离开原位置的距离为 r',这样⊙$O(r-r')$是与 CO'相切的圆.由于⊙$O(r-r')$的确定,AB 也就可以确定(如图).因为从 O'向⊙$O(r-r')$引切线时一般有两解,所以通常本题有两解;当 $OO'=r-r'$时,有一解;当 $OO'<r-r'$时,无解.



反演法作图(construction by inversion transformation) 解作图题的一种特殊方法.对一些作图题,可借助反演变换的性质发现作图途径,将比较复杂的问题转化为已知的或简单的问题,从而得出作图方法.例如,过⊙O 和⊙O'的交点 A,求作割线 BAC,分别割两圆于点 B,C,使 AB 与 AC 的乘积的绝对值等于 k^2.本题的思路要点是:假设割线 BAC 已作出,由 $AB\cdot AC=k^2$ 知,点 C 必在⊙O 的反演图上,同时点 C 又在⊙O'上,以点 A 为⊙O 的反演中心,则⊙O 的反演图为垂直于 OA 的直线,且 $AI\cdot AM=k^2$,点 I 就可以确定了.自点 I 作 AI 的垂直线(就是⊙O 的反演圆),交⊙O'于点 C,CAB 即为所求(如图).本题通常有两解,即 BAC 和 $B'AC'$.k^2 有它的最大限.当⊙O 的反演图与⊙O'相切时(图中 ED 位置),则 AI 达到它的极大值 AE,从而有 $AM\cdot AE=k^2$,这时本题只有一解 DAF.若 $k^2>AM\cdot AE$,则



$\odot O$ 的反演图与$\odot O'$不相交，本例无解.

以人名、特征命名的定理

门纳劳斯定理(Menelaus theorem)　关于共线点的一个重要定理. 设 X,Y,Z 分别是$\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点(如图)，则它们共线的必要充分条件是

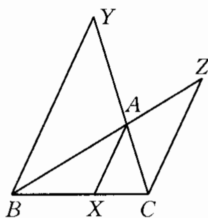
$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

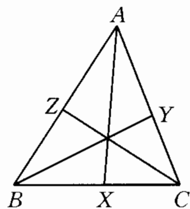
门纳劳斯(Menelaus,(A))在《球面学》中证明了这个定理在球面三角形上的推广. 可知他已经掌握了平面三角形的门纳劳斯定理. 但是直到 1678 年，才由切瓦(Ceva,G.)重新发现，并把它与自己发现的定理(切瓦定理)一起刊行.

切瓦定理(Ceva theorem)　关于共点线的一个重要定理. 设 X,Y,Z 分别是$\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 上或其延长线上的点(如图)，则 AX,BY,CZ 三线共点或互相平行的必要充分条件是：

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=-1.$$

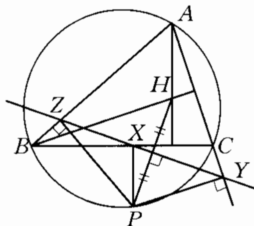
这个定理是由切瓦(Ceva,G.)首先发现的，最早见于 1678 年切瓦著《直线论》一书.



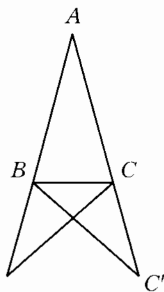


施泰纳-莱默斯定理(Steiner-Lehmus theorem)　几何学史中一个著名的定理. 若一个三角形的两条内角平分线相等，则此三角形是等腰三角形. 这个命题是 1840 年莱默斯(Lehmus,C. L.)在给斯图姆(Sturm,C.-F.)的一封信中提出的，他希望能用纯几何的方法证明. 施泰纳(Steiner,J.)首先给出证明. 施泰纳的原证相当复杂，此后乃至近 100 年间还有这方面的文章，可见这个定理是何等引人入胜.

施泰纳定理(Steiner theorem)　关于西姆森线通过特定点的定理. 如图，设$\triangle ABC$ 的垂心为 H，其外接圆上的任意点为 P，则关于$\triangle ABC$ 的点 P 的西姆森线通过 PH 的中点. 这个定理是施泰纳(Steiner,J.)证明的.



驴桥定理(donkey bridge theorem)　欧几里得几何的一个重要定理. 即欧几里得(Euclid)的《几何原本》第 1 卷第 5 命题：等腰三角形两底角必相等，两底角的外角也相等. 欧几里得不是用作顶角平分线的方法来证明的，因为作角平分线在《几何原本》中是第 9 命题. 他采用了虽麻烦但巧妙的方法证明，即延长 AB 至 B'，延长 AC 至 C'，使 $AB'=AC'$，连结 $B'C$ 和 BC'，可证$\triangle AB'C\cong\triangle AC'B$，故 $B'C=C'B$，$\angle AB'C=\angle AC'B$，$\angle ABC'=\angle ACB'$，进一步可证$\triangle BB'C\cong\triangle CC'B$，故得$\angle CBC'=\angle BCB'$，于是得$\angle ABC=\angle ACB$(如图). 这个命题的证法使初学者感到困难，被称为笨蛋的难关，有"驴桥在此，愚者没过"之说，故得此名. 勾股定理或等腰直角三角形的勾股定理，有时也称为驴桥定理.

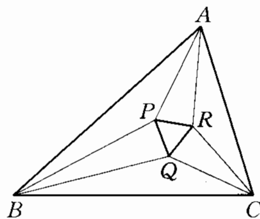


欧拉定理(Euler theorem)　欧几里得几何的两个著名定理. 欧拉(Euler,L.)的两个定理：

1. 设一直线上的四点顺次为 A,B,C,D，则以 AC,BD 为边之矩形面积等于以 AB,CD 为边的矩形面积与以 BC,AD 为边的矩形面积之和. 即 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$.

2. 设三角形外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，外心和内心的距离为 d，则 $d^2=R(R-2r)$.

莫利定理(Morley theorem)　在一般三角形中构成特殊三角形的定理. 三角形中，每两个角的相邻的三等分线的交点连线构成一个正三角形(如图). 这个定理称为莫利定理. 该正三角形称为莫利正三角形. 莫利定理是初等几何中最令人惊叹的定理之一. 莫利(Morley,F.)于 1904 年左右发现此定理. 他是在给英国剑桥大学的一位朋友的信中提到这个定理的，20 年后才在日本发表. 如果运用三角知识，则可求得莫利三角形的边长为 $8R\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$，其中 R 为已知三角形的外接圆半径，α,β,γ 为已知三角形的三个内角的三分之一.



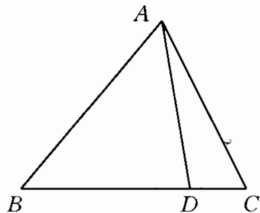
莫利正三角形(Morley regular triangle)　见"莫利定理".

斯图尔特定理(Stewart theorem)　关于三角形三边与一条边被点分成的两个线段的关系式. 如果 D 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，那么有等式：

$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD$

或 $AD^2=\frac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD}{BC}-DC\cdot BD.$

成立.定理的发现者未得确实考证.1751年,西姆森(Simson,R.)首次给出了该定理的证明.由于早在1746年,斯图尔特(Stewart,M.)曾说明了这个定理,故习惯上称它为斯图尔特定理(如图).



牛顿问题(Newton problem) 一个著名的作图问题.已知三边,求作有外接圆的凸四边形,而使第四边恰为外接圆的直径.此问题无异于已知三边,求作面积极大的四边形.因它由牛顿(Newton,I.)提出而得名.

牛顿定理(Newton theorem) 关于四边形对角线中点的两个定理:

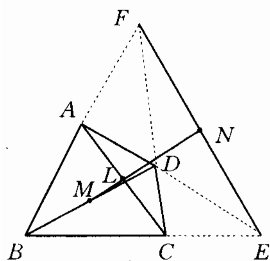


图1

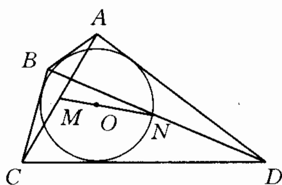


图2

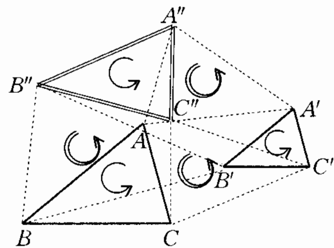
1.若四边形 $ABCD$ 的一组对边 BA 和 CD 的延长线的交点为 F,另一组对边 AD 和 BC 的延长线的交点为 E,这时,对角线 AC 的中点 L,BD 的中点 M 和线段 EF 的中点 N 在同一直线上.该定理亦可简述为:完全四边形三条对角线的中点共线.直线 MLN 称为四边形 $ABCD$ 的牛顿线(如图1).

2.若外切于⊙O 的四边形 $ABCD$ 中对角线 AC,BD 的中点分别为 M,N,则 O,M,N 三点在同一直线上(如图2).

这两个定理是牛顿(Newton,I.)发现的,故名牛顿定理.

牛顿线(Newton line) 见“牛顿定理”.

佩特森-斯豪特定理(Petersen-Schoute theorem) 关于三角形真正相似的传递定理.该定理断言:若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是真正相似三角形,并且 $\triangle AA'A''$,$\triangle BB'B''$ 和 $\triangle CC'C''$ 也是真正相似三角形,则 $\triangle A''B''C''$ 和 $\triangle ABC$ 也是真正相似三角形(如图).



爱可尔斯定理(Echols theorem) 欧几里得几何的两个著名定理.正三角形的两个定理:

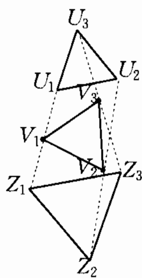


图1

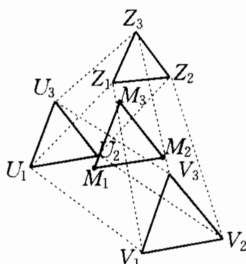


图2

1.若 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 和 $\triangle U_1U_2U_3$ 都是同向正三角形,则线段 Z_1U_1,Z_2U_2,Z_3U_3 的中点作成正三角形.

2.若 $\triangle Z_1Z_2Z_3$,$\triangle U_1U_2U_3$,$\triangle V_1V_2V_3$ 都是同向正三角形,则 $\triangle Z_1U_1V_1$,$\triangle Z_2U_2V_2$,$\triangle Z_3U_3V_3$ 的重心作成正三角形(如图中的 $\triangle M_1M_2M_3$).

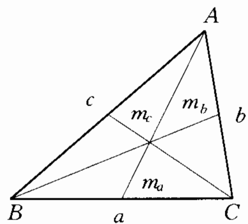
该定理是爱可尔斯(Echols)在1932年论述的,这两个定理故名爱可尔斯定理.

阿波罗尼奥斯定理(Apollonius theorem) 关于三角形边长与中线长关系的定理.设 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 之长,m_a,m_b,m_c 分别为 BC,CA,AB 上的中线,那么有关系式

$$b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2m_a^2,$$

$$c^2+a^2=\frac{b^2}{2}+2m_b^2,$$

$$a^2+b^2=\frac{c^2}{2}+2m_c^2$$

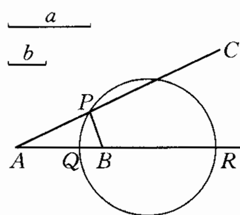


成立(如图).阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))是以研究圆锥曲线而著名的,与欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)合称为古希腊亚历山大前期的三大数学家.

阿波罗尼奥斯问题(Apollonius problem) 数学史上一个著名作图题.在平面上求作一圆与三个已知圆都相切.此作图题一般有八解,特殊情况下有无穷多解(当三个圆相切于一点时)或无解(当三个圆两两内含时).若三个已知圆发生变态而成点或直线时,问题的解的个数也相应地发生变化.例如,三个圆退缩为三个点时,问题变为过三个点作一个圆,当三点不共线时,有惟一解.三个圆中有一个退缩为一点,一个变为直线时,问题变成“求作一圆,过已知点并和已知直线及已知圆相切”.阿波罗尼奥斯(Apollonius)在他的著作《论切触》中提出了这个问题,并研究解决了一些特殊情况.韦达(Viete,F.)和牛顿(Newton,I.)都曾对这个问题做过研究,并给出了解答.

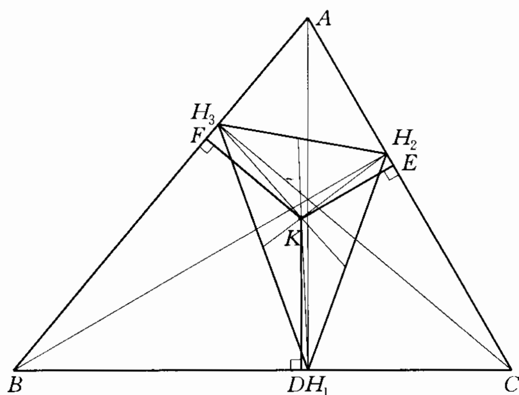
阿波罗尼奥斯轨迹定理(Apollonius locus theorem) 一个著名轨迹问题.若一动点至两定点的距离之比等于两不等的已知线段之比,则该点的轨

迹是一个圆．如果 A,B 为定点，P 是动点，a,b 为不等的已知线段，$PA/PB=a/b$，Q,R 为线段 AB 的内、外分点，即 $QA/QB=RA/RB=a/b$，则点的轨迹是以 QR 为直径的圆（如图）．这个圆称为阿波罗尼奥斯圆．



阿波罗尼奥斯圆(Apollonius circle)　见“阿波罗尼奥斯轨迹定理”．

卡塔朗定理(Catalan theorem)　一个著名的极值问题．自$\triangle ABC$ 内的一点作各边的垂线，若以各垂线长作成的正方形面积之和为最小，则该点为连



结三垂线垂足所成三角形的重心．如图，$KD\perp BC$，$KE\perp AC$，$KF\perp AB$，且 $KD^2+KE^2+KF^2$ 为最小，则 K 是垂足$\triangle H_1H_2H_3$ 的重心．此点又是原三角形的类似重心．

费马问题(Fermat problem)　著名的几何极值问题．费马(Fermat，P. de)曾提出一问题征解：“已知一个三角形，求作一点，使其与这个三角形的三个顶点的距离之和为极小．”它的答案是：当三角形的三个角均小于 120°时，所求的点为三角形的正等角中心(图 1)；当三角形有一内角大于或等于 120°时，所求点为三角形最大内角的顶点(图 2)．在费马问题中所求的点称为费马点．

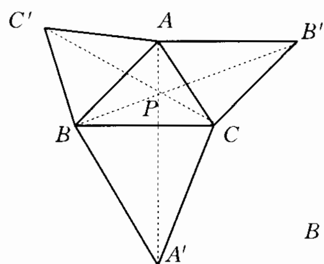


图1

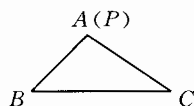


图2

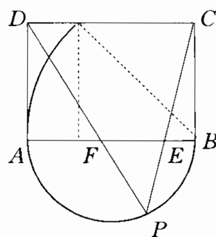
费马点(Fermat point)　见“费马问题”．

费马定理(Fermat theorem)　与矩形边长有关的一个等式．如图，若矩形 $ABCD$ 的边

$$AD=\frac{AB}{\sqrt{2}},$$

以 AB 为直径在矩形之外作半圆，在半圆上任取一点 P，连结 PC,PD，分别交 AB 于点 E,F，则

$$AE^2+BF^2=AB^2.$$



施瓦兹三角形问题(Schwarz triangle problem)　关于三角形的极值问题．在锐角三角形的内接三角形中，以垂足三角形的周长为最短．此问题最早由法尼亚诺(Fagnano，dei. T. G. C.)提出，他用微积分的方法给出了一个解答，因此，这个问题也称为法尼亚诺问题．施瓦兹(Schwarz，H. A.)在一篇论文中，利用垂足三角形的性质及反射原理巧妙地证明了这个问题，施瓦兹三角形因此而得名．他的证明后来被莫利(Morley，F.)和莫莱(Morle，F. V.)推广到 $2n+1$ 角形的情况．

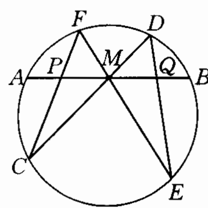
法尼亚诺问题(Fagnano problem)　见“施瓦兹三角形问题”．

布雷特-施奈德公式(Bretschneider formula)　关于四边形的一个面积公式．设简单四边形的四边为 a,b,c,d，两对角线为 e,f，面积为 S，则

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}.$$

欧拉线(Euler line)　阐明三角形三心的位置关系的一条直线．三角形的外心、重心和垂心在一条直线上，并且外心到重心的距离等于重心到垂心的距离的一半．外心、重心和垂心所在的直线称为三角形的欧拉线．关于欧拉线的这个定理是欧拉(Euler，L.)于 1765 年，在他所著《三角形的几何学》一书中首先提出的．

蝴蝶定理(butterfly theorem)　几何学史中一个有名的定理．过一圆的弦 AB 的中点 M 引任意两条弦 CD 和 EF，连结 CF 和 ED，交弦 AB 于 P,Q，则 $PM=MQ$．由于上述定理的图形如一只展翅的蝴蝶(如图所示)，故得此名．这个定理的提出由来已久，证明方法也多，霍纳(Horner，W. G.)在 1815 年，给出了这个定理的一个证明方法，被称为霍纳法，而秦九韶在《数书九章》中，对此命题的证明方法已有叙述，比霍纳早五百多年．



婆罗摩笈多定理(Brahmagupta theorem)　关于圆内接四边形的性质和计算的两个定理：

1. 若圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，则连结 AB 的中点 M 和对角线交点 E 的直线垂直于 CD，反之，从对角线交点 E 向 CD 作垂线 EH，其

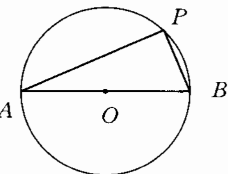
延长线必通过边 AB 的中点 M(如图).

2. 若圆内接凸四边形的四边为 a,b,c,d,周长之半为 s,面积为 S,则

$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

此定理最初登载于婆罗摩笈多(Brahmagupta)30岁(628年)时写成的书《婆罗摩修正体系》中.

泰勒斯定理(Thales theorem)　欧几里得几何的一个基本定理. 如图,若 AB 为圆的直径,P 为圆周上异于 A,B 的点,则 $\angle APB$ 为直角. 泰勒斯(Thales,(M))在数学方面的贡献是开始了命题的证明.

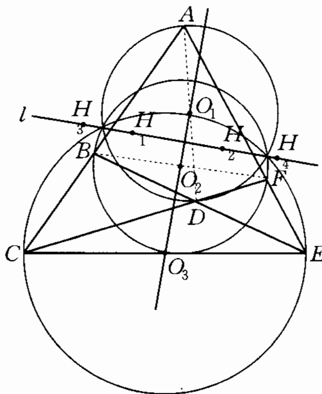


托勒密定理(Ptolemy theorem)　关于圆内接四边形的边和对角线的关系的定理. 即圆内接四边形两组对边乘积之和等于对角线的乘积. 这个定理的逆命题也成立,因而可作为判定四边形内接于圆的一种方法(如图). 本定理可推广:对于一般四边形 $ABCD$,有

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD.$$

高斯定理(Gauss theorem)　关于圆共轴及 n 等分圆周的两个定理:

1. 以一完全四边形的对角线各为直径所作的三个圆共轴,它们的等幂轴就是完全四边形的垂心线(如图).



2. 给出用圆规直尺等分圆周、等分数 n 所应满足的充分必要条件(参见"用直尺圆规等分圆周问题"). 第二个定理由高斯(Gauss,C. F.)于1801年给出证明.

西姆森定理(Simson theorem)　关于平面几何中的点共线的两个定理:

1. 从三角形的外接圆上任一点向三边所在直线作垂线,则三个垂足在同一直线上. 这条直线称为西姆森线或称垂足线. 如图1,P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上任一点,X,Y,Z 是从点 P 分别向 BC,CA,AB 所引垂线的垂足,X,Y,Z 同在 $\triangle ABC$ 的西姆森线上.

2. 完全四边形的米奎尔点在四边上的正射影在同一条直线上. 这条直线称为完全四边形的西姆森线. 如图2中,M 是完全四边形 $ADBCE$ 的米奎尔点,X,Y,Z,K 分别是 M 在边 AB,BC,DE,AE 上的正射影,X,Y,Z,K 同在完全四边形的西姆森线 m 上. 通常认为关于三角形的西姆森线是西姆森(Simson,R.)发现的,后经马开(Mackay)考证表明,该直线是1797年由华莱士(Wallace,W.)发现的. 但习惯上仍称西姆森线.

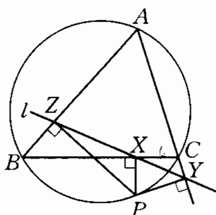


图1

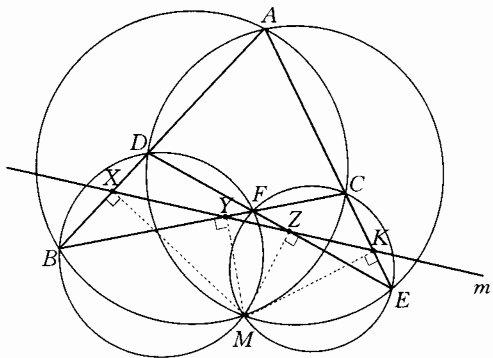
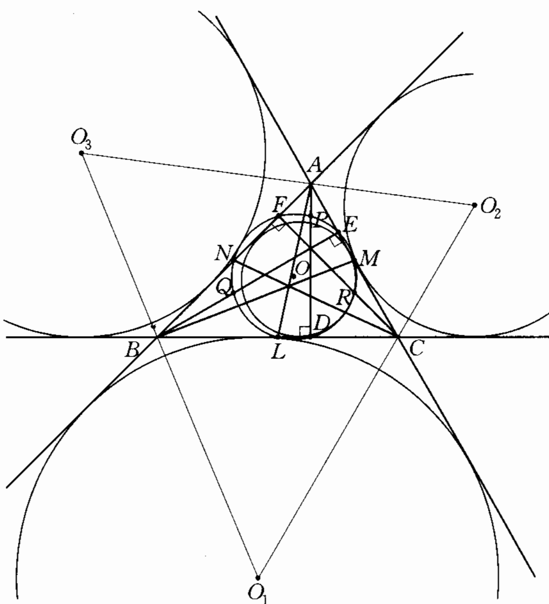


图2

西姆森线(Simson line)　见"西姆森线定理".

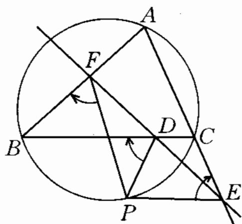
垂足线(pedal line)　即西姆森线,见"西姆森定理".

费尔巴哈定理(Feuerbach theorem)　九点圆的性质之一. 三角形的内切圆内切于该三角形的九点圆,而三角形的三个旁切圆外切于该三角形的九点圆(如图). 费尔巴哈(Feuerbach,K. W.)研究了



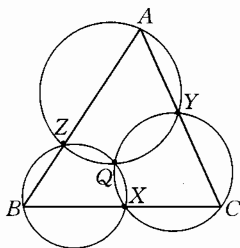
九点圆之后，于 1822 年发表了《直角三角形的一些特殊点的性质》的文章，他在该文中同时叙述了九点圆的一些特殊性质，费尔巴哈定理就是其中的一个性质.

卡诺定理(Carnot theorem)　对西姆森定理的推广. 通过$\triangle ABC$的外接圆上的一点P，引与三边所在直线BC,CA,AB分别成同向的等角的直线PD,PE,PF，与三边的交点分别为D,E,F，则D,E,F三点在同一直线上(如图). 此定理是卡诺(Carnot，L.(-N.-M.))对西姆森定理的推广. 他把"垂足"推广为"同向等角"，就得此定理. 卡诺对近代综合几何的基础有过贡献.



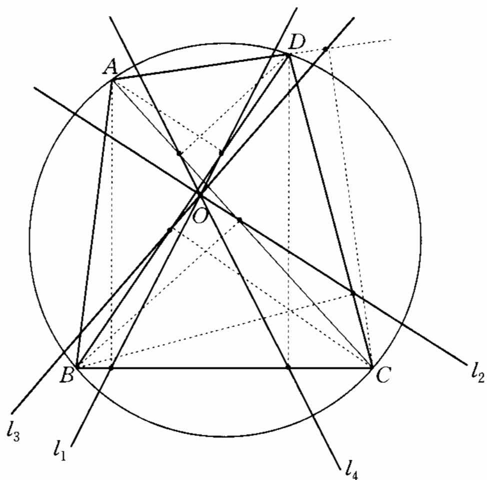
米奎尔定理(Miqule theorem)　关于米奎尔点的两个定理：

1. 在$\triangle ABC$的三边BC,CA,AB所在直线上各任取一点X,Y,Z，则$\odot AYZ,\odot BZX,\odot CXY$三圆共点. 交点$Q$称为$X,Y,Z$对于$\triangle ABC$的米奎尔点(如图). 米奎尔(Miqule，A.)于 1838 年证明了此命题.



2. 五直线交成五个完全四边形，它们的五个米奎尔点共圆.

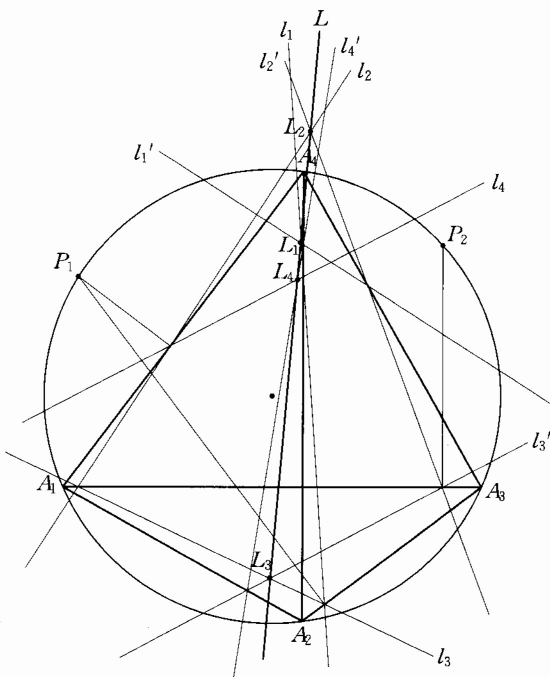
安内定理(Anney theorem)　关于共点线的一个定理. 若一圆周上有四点，以其中任三点作三角形，再作其余一点的关于该三角形的西姆森线，则这些西姆森线交于一点(如图).



康托尔定理(Cantor theorem)　关于圆周上若干个点的性质的四个定理：

1. 一个圆周上有$n(n\geqslant 3)$个点，从其中任意$n-2$个点的重心向余下两点的连线所引的垂线都通过同一点.

2. 一个圆周上有A_1,A_2,A_3,A_4四点及P_1,P_2两点，则点P_1和P_2关于四个三角形$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_4A_1A_2$中，每一个的两条西姆森线的交点在同一条直线上，此直线称为P_1，P_2关于四边形$A_1A_2A_3A_4$的康托尔线(如图).



3. 一个圆周上有A_1,A_2,A_3,A_4四点和P_1,P_2,P_3三点，则P_2,P_3两点关于四边形$A_1A_2A_3A_4$的康托尔线；P_3,P_1两点关于该四边形的康托尔线；P_1,P_2两点关于该四边形的康托尔线都交于同一点，这点称为P_1,P_2,P_3三点关于四边形$A_1A_2A_3A_4$的康托尔点.

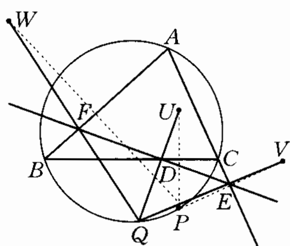
4. 一个圆周上有A_1,A_2,A_3,A_4,A_5五点及P_1,P_2,P_3三点，则P_1,P_2,P_3三点关于四边形$A_2A_3A_4A_5$，$A_3A_4A_5A_1$，$A_4A_5A_1A_2$，$A_5A_1A_2A_3$，$A_1A_2A_3A_4$中每一个的康托尔点在同一直线上，这直线称为P_1,P_2,P_3三点关于五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$的康托尔线. 康托尔(Cantor，M. B.)最重要的著作是 4 卷本的《数学史讲义》. 这部书奠定了数学史这门学科的基础.

康托尔线(Cantor line)　见"康托尔定理".

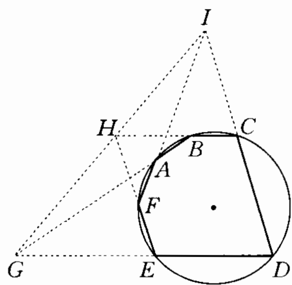
康托尔点(Cantor point)　见"康托尔定理".

凯西定理(Casey theorem)　关于四个圆同切一个圆的条件. 四个圆C_1,C_2,C_3,C_4有一个公切圆K的充分必要条件是$\pm t_{41}\cdot t_{23}\pm t_{42}\cdot t_{31}\pm t_{43}\cdot t_{21}=0$. 其中，$t_{ij}$表示$C_i$与$C_j$的公切线长$(i,j=1,2,3,4)$，其为外公切线或内公切线，要看$C_i,C_j$与$K$系同态相切或异态相切而定.

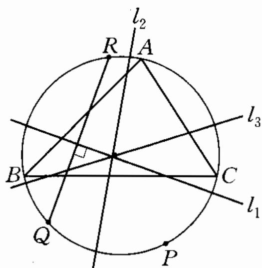
清宫定理(Shimiya theorem) 关于共线点的一个定理.若 P,Q 为 $\triangle ABC$ 外接圆周上的异于 A,B,C 的两点,P 点关于三边 BC,CA,AB 的对称点分别为 U,V,W,且 QU,QV,QW 分别和边 BC,CA,AB 或其延长线的交点为 D,E,F,则 D,E,F 三点在同一直线上(如图).传说清宫俊雄 16 岁时发现这个定理.



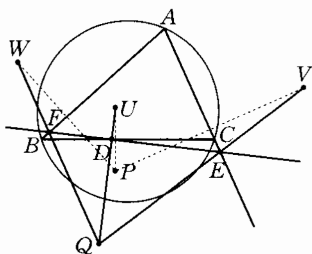
帕斯卡定理(Pascal theorem) 一个著名的共线点定理.圆内接六边形三组对边(所在直线)的交点共线.这条直线称为该六边形的帕斯卡直线.如图中的 G,H,I 分别是圆内接六边形 $ABCDEF$ 三组对边的交点,它们在一直线上.



阿里加定理(Ariga theorem) 关于共点线的一个定理.若 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上的一点,l_1 为点 P 关于 $\triangle ABC$ 的西姆森线,QR 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的弦,且 $QR\perp l_1$,又 l_2,l_3 分别为点 R,Q 关于 $\triangle ABC$ 的西姆森线,则 l_1,l_2,l_3 交于一点(如图).

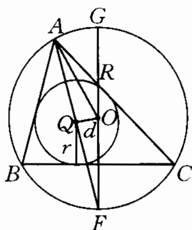


特纳定理(Turner theorem) 关于共线点的一个定理.若 P,Q 是关于 $\triangle ABC$ 外接圆的一对反演点,点 P 关于 BC,CA,AB 三边的对称点分别为 U,V,W,且 QU,QV,QW 和边 BC,CA,AB 或其延长线的交点分别为 D,E,F,则 D,E,F 在同一直线上(如图).

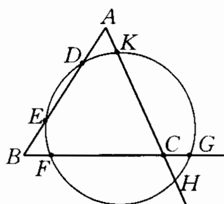


库利奇-大上定理(Coolidge-Oue theorem) 关于共圆点的定理.若过圆周上四点的任三点作三角形,则所作四个三角形的九点圆的圆心都在同一圆上.过这四个九点圆圆心的圆,称为同一圆上四点所构成的四边形的九点圆.若过圆周上五点的任四点做四边形,则所作五个四边形的九点圆的圆心在同一圆上.过这五个九点圆圆心的圆,称为同一圆上五点所构成的五边形的九点圆.这样可继续给出圆上六点、七点……的情形.库利奇(Coolidge,J. L.)于 1910—1911 年发表此定理.大上茂乔于 1916 年发表此定理.

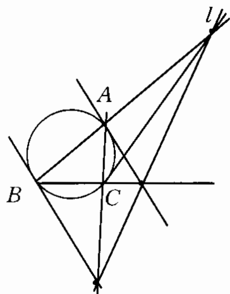
夏普尔定理(Chapple theorem) 亦称欧拉定理.关于三角形外接圆和内切圆半径与圆心距的关系定理.若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,内切圆(或旁切圆)半径为 r,内切圆与外接圆的圆心距为 d,则 $d^2=R^2\mp 2Rr$,等式中对于内切圆取负号,对于旁切圆取正号.如图所示.



戴维士定理(Davis theorem) 关于六点共圆的一个重要定理.若三角形的各边或其延长线上各有一对点,其中每两对点为共圆点,则六点为共圆点.如图,在 $\triangle ABC$ 中,$D,E;F,G;H,K$ 分别为三边或其延长线上的一对点,若 $D,E,F,G;F,G,H,K;H,K,D,E$ 分别共圆,则六点 D,E,F,G,H,K 为共圆点.



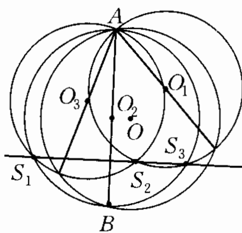
勒穆瓦纳线(Lemoine line) 一个共线点问题.过三角形的顶点所作外接圆的切线各与对边所在直线的交点在一直线上(如图所示).这条直线称为勒穆瓦纳线.



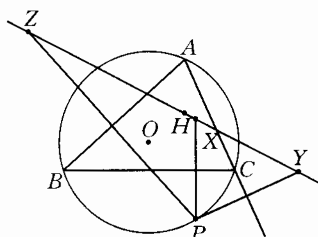
萨蒙定理(Salmon theorem) 关于点共线和距离成比例的两个定理:

1. 自圆上一点引三弦,并以它们各为直径画圆,则所画三圆的两两相交的三个与 A 不同的交点共线(如图).

2. 圆心 O 至 A,B 两点的距离与 A 至 B 的极线 b 的距离及 B 至 A 的极线 a 的距离成比例.

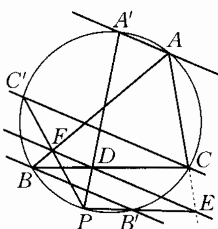


镜像线(mirror image line) 关于几个点共线的问题.$\triangle ABC$ 的外接圆上的点 P 关于边 BC,CA,AB 的对称点 X,Y,Z 和 $\triangle ABC$ 的垂心 H 在同一条直线上.这条直线称为点 P 关于

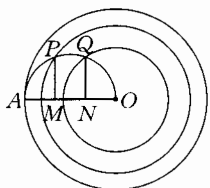


$\triangle ABC$ 的镜像线. 如图所示.

奥倍尔定理(Auber theorem)　关于共线点的一个定理. 通过$\triangle ABC$的三顶点引互相平行的三条直线,它们和$\triangle ABC$外接圆的交点分别为A',B',C'. 若在$\triangle ABC$外接圆上取一点P,设PA',PB',PC'与$\triangle ABC$的三边BC,CA,AB或其延长线的交点分别为D,E,F,则D,E,F三点在同一条直线上(如图).



伽利略定理(Galilei theorem)　著名的圆面积等分定理. 若OA为$\odot O$的半径,点M,N为OA的三等分点,以OA为直径作半圆,且过点M,N作OA之垂线交半圆于点P,Q,则以O为圆心,OP,OQ为半径之圆,必将最初的圆面积三等分. 如图所示. 此定理由伽利略(Galilei,G.)提出.



勒穆瓦纳圆(Lemoine circle)　两个著名的多点共圆问题. 由勒穆瓦纳(Lemoine,É. M. H.)提出的两个多点共圆问题. 设G是$\triangle ABC$的重心,K是陪位重心,过K作三边的平行线l_1,l_2,l_3(图1),这种平行线称为勒穆瓦纳平行线.

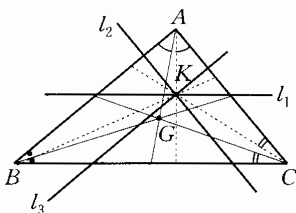


图1

1. 三条勒穆瓦纳平行线与三角形周界的六个交点在同一个圆上(图2). 这个圆称为这个三角形的第一勒穆瓦纳圆. 该圆在三角形三边上所截的弦与三边的立方成比例,故又称为三重比圆.

2. 过三角形的陪位重心所作三边的逆平行线(即逆相似边)的六个端点在同一个圆上(图3). 这个圆称为这个三角形的第二勒穆瓦纳圆. 该圆在三角形三边上所截的弦与对角的余弦成比例,故又称为余弦圆.

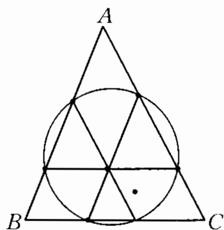


图2

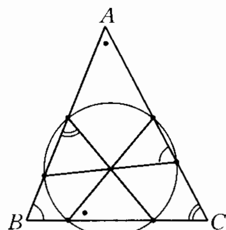


图3

勒穆瓦纳平行线(Lemoine parallels)　见"勒穆瓦纳圆".

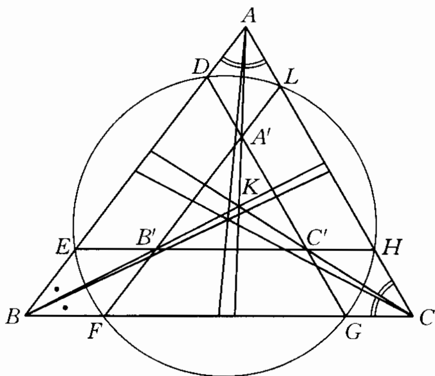
第一勒穆瓦纳圆(first Lemoine circle)　见"勒穆瓦纳圆".

三重比圆(triplicate ratio circle)　即"第一勒穆瓦纳圆".

第二勒穆瓦纳圆(second Lemoine circle)　见"勒穆瓦纳圆".

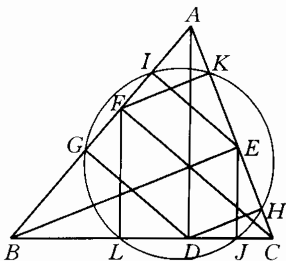
余弦圆(cosine circle)　即"第二勒穆瓦纳圆".

塔克圆(Tucker circle)　关于几个点共圆的问题. 设K是$\triangle ABC$的陪位重心(如图),A',B',C'各是直线AK,BK,CK上的点,若$A'B' /\!/ AB$,$A'C' /\!/ AC$,则$B'C' /\!/ BC$,且$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的非对应边所在直线的六个交点D,E,F,G,H,L在同一个圆上. 这个圆称为$\triangle ABC$的塔克圆. 当A',B',C'三点依条件分别在直线AK,BK,CK上变动位置时,得到一系列的圆,称为塔克圆系.



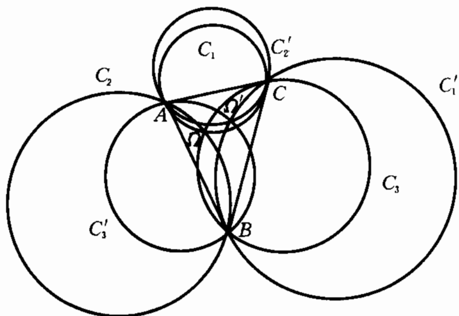
塔克圆系(Tucker circle system)　见"塔克圆".

泰勒圆(Taylor circle)　关于几个点共圆的问题. 若$\triangle ABC$三边上的高线AD,BE,CF的垂足分别为D,E,F,三垂足在另外两边上的射影共六个点分别为G,H,I,J,K,L在一个圆上(如图). 这个圆称为三角形的泰勒圆.



布罗卡尔点(Brocard point)　刻画三个圆相关位置的特殊点. 在$\triangle ABC$中,设C_1是过C而切AB于A的圆,C_2是过A而切BC于B的圆,C_3是过B而切CA于C的圆;又设C_1'是过C而切AB于B的圆,C_2'是过A而切BC于C的圆,C_3'是过B而切CA于A的圆,则C_1,C_2,C_3三个圆交于一点Ω;C_1',C_2',C_3'三个圆交于一点Ω'. 点Ω和Ω'称为$\triangle ABC$的布罗卡尔点. Ω称为正布罗卡尔点,Ω'称为负布罗卡尔点,Ω与Ω'是$\triangle ABC$的等角共轭点. 布罗卡尔点具有性质:

$\angle\Omega AB=\angle\Omega BC=\angle\Omega CA$；
$\angle\Omega' AC=\angle\Omega' CB=\angle\Omega' BA$.



当这六个角相等时，称为$\triangle ABC$的布罗卡尔角.研究布罗卡尔点的有关性质的几何内容称为布罗卡尔几何.点Ω和Ω'是由克雷尔(Crelle,A.L.)首先发现的，但当时并未引起人们重视.布罗卡尔(Brocard,P.R.J.B.H.)于1881年向法国科学进步协会提交的论文《三角平面一个新圆的研究》宣布布罗卡尔圆的重新发现，并由此产生布罗卡尔点、布罗卡尔三角形等概念.

布罗卡尔角(Brocard angle)　见“布罗卡尔点”.

布罗卡尔几何(Brocard geometry)　见“布罗卡尔点”.

索蒂圆(Soddy circle)　关于多圆相切问题的著名定理.彼此相切的三圆必有两圆与它们相切.以三个不同点为圆心作三个彼此相切的圆，若两两的切点是三个不同的点(可能共线)，则有两个圆与这三个圆都相切而这两个圆不相交.这两个圆称为索蒂圆(如图1,图2所示).

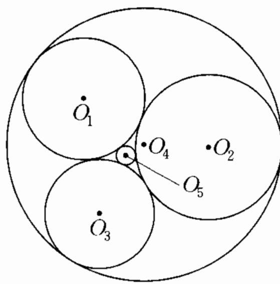


图1

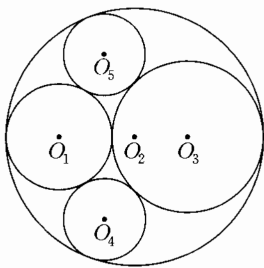
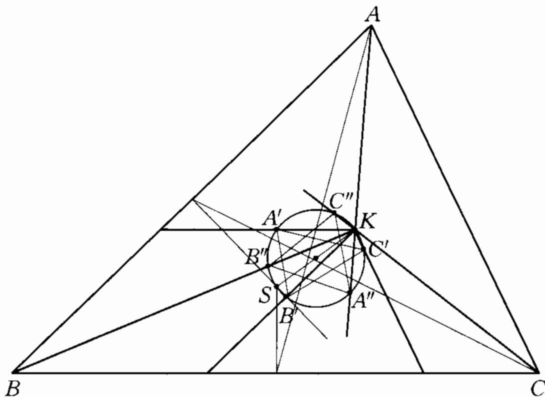


图2

布罗卡尔三角形(Brocard triangle)　一些特殊点构成的三角形：

1.设S为$\triangle ABC$的外心，K为它的陪位重心，以SK为直径作圆，称这个圆为$\triangle ABC$的布罗卡尔圆，该圆交三边的勒穆瓦纳平行线于A',B',C'，则$\triangle A'B'C'$称为第一布罗卡尔三角形.

2.若K为$\triangle ABC$的陪位重心，连结AK,BK,CK，与$\triangle ABC$的布罗卡尔圆分别交于A'',B'',C''，



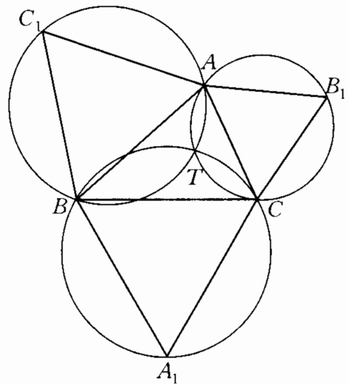
则$\triangle A''B''C''$称为第二布罗卡尔三角形(如图).

第一布罗卡尔三角形(first brocard triangle)　见“布罗卡尔三角形”.

第二布罗卡尔三角形(second brocard triangle)　见“布罗卡尔三角形”.

布罗卡尔圆(Brocard circle)　见“布罗卡尔三角形”.

托里切利点(Torricelli point)　三个具有特殊位置的圆的交点.在$\triangle ABC$的三边上各向外侧作等边三角形ABC_1,BCA_1,CAB_1，这三个等边三角形的外接圆交于一点T(如图)，这一点T称为$\triangle ABC$的托里切利点.这三个外接圆称为托里切利圆.当$\triangle ABC$的三内角都小于$120°$时，$\triangle ABC$的托里切利点T具有性质：它到三个顶点距离之和$AT+BT+CT$达到最小.求一个到三角形三个顶点的距离之和为最小的点这个问题是由费马(Fermat,P.de)提出而由托里切利(Torricelli,E.)解决的，所以托里切利点也称为费马点.

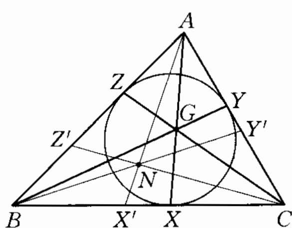


托里切利圆(Torricelli circle)　见“托里切利点”.

佩多不等式(Pedoe inequality)　两个三角形的边长和它们的面积组成的不等式.若$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的边长分别是a,b,c和a',b',c'，它们的面积分别记为Δ和Δ'，则$a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(a^2+c^2-b^2)+c'^2(b^2+a^2-c^2)\geqslant 16\Delta\Delta'$；当且仅当$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$等号成立.此不等式是佩多(Pedoe,D.)在所著《代数与几何方法》中给出的.

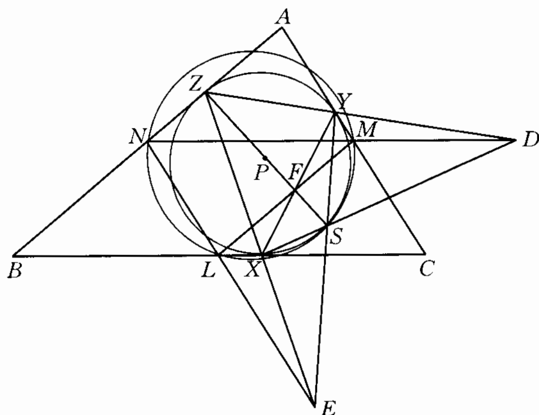
热尔岗点(Gergonne point)　三角形三条特殊直线的交点.若X,Y,Z分别是$\triangle ABC$的三边BC,CA,AB与其内切圆或旁切圆的切点，则三线AX，

BY,CZ 共点. 这样的点共有四个,称它们为$\triangle ABC$的热尔岗点. 热尔岗点的等截共轭点称为$\triangle ABC$的纳格尔点(如图).

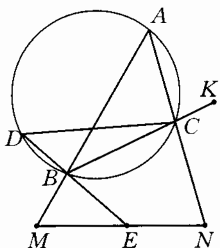


纳格尔点(Nagell point) 见"热尔岗点".

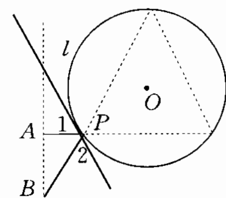
封田点(Fontaine point) 一个著名的三线共点问题. 在$\triangle ABC$中,L,M,N各是三边BC,CA,AB的中点;X,Y,Z是一点P在BC,CA,AB上的正射影,若MN与YZ,NL与ZX,LM与XY交点分别为D,E,F,则XD,YE,ZF三线交于一点S,且是过LMN的圆与过XYZ的圆(特殊情况是直线)的交点之一. 对于$\triangle ABC$来说,S称为P的封田点(如图).



卡斯蒂隆问题(Castillon problem) 关于作已知圆内接三角形的作图问题. 已知一圆及不在圆上的三点,求作这圆的内接三角形,使它的三边或其延长线分别通过该三点.



阿尔哈逊问题一(Alhazen problem Ⅰ) 一个著名的作图题. 一个圆所在的平面上有两个已知点,在圆周上寻求一点,使它与两已知点的连线和过该点的切线成等角. 这个问题为阿尔哈逊(Alhazen)所解决(如图).



阿尔哈逊问题二(Alhazen problem Ⅱ) 与圆有关的极值问题. 若P为已知圆周上一动点,A,B为二定点,问P位于何处,可使:

1. PA^2+PB^2(如图1).

2. $PA+PB$

为极大或极小(如图2).

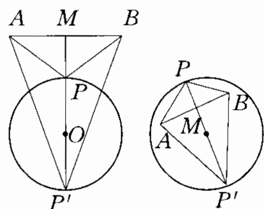


图1

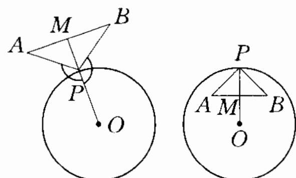


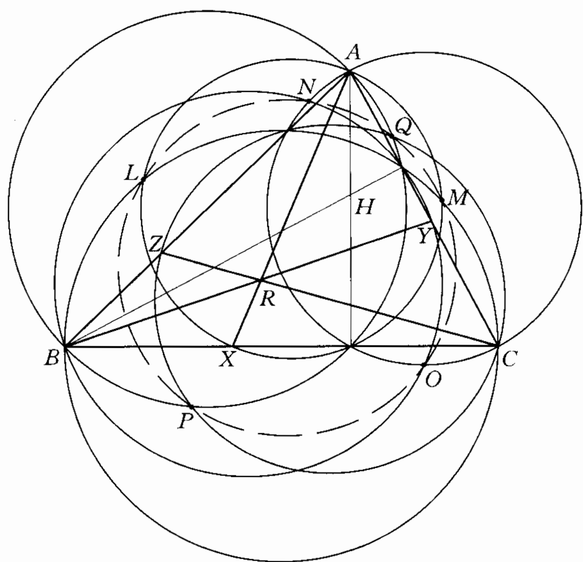
图2

哈格定理(Hagge theorem) 关于点共圆的三个定理:设H是$\triangle ABC$的垂心;X,Y,Z分别是BC,CA,AB上的点,并假设AX,BY,CZ三线共点于R(如图).

1. 若直径为BC,CA,AB的圆分别与直径为AX,BY,CZ的圆相交,则诸交点共圆或共线. 如图中以BC,AX为直径的两圆交于L,M两点;以AC,BY为直径的两圆交于N,O两点;以AB,CZ为直径的两圆交于P,Q两点,则L,M,N,O,P,Q六点共圆.

2. 过点H所引AX,BY,CZ的垂线分别与直径为BC,CA,AB的圆相交,则诸交点共圆.

3. 过点H所引AX,BY,CZ的垂线分别与直径为AX,BY,CZ的圆相交,则诸交点共圆.



富尔曼定理(Fuhrmann theorem) 关于三角形的若干特殊点的共线与共圆的两个定理:

1. 关于圆上四点所成三角形内心与旁心分布状态定理. 圆上四点两两连成四个三角形,它们的内心、旁心合计十六点分配在八条直线上,每线上四点,而这八线是两组互相垂直的平行线. 每组含四线(如图1).

2. 关于与三角形垂心、内心(或旁心)有关的八点共圆问题. 在$\triangle ABC$中,H是垂心,I是内心或旁心,N是对应的"纳格尔点";连结AI,BI,CI交$\odot ABC$于点A',B',C',命这三点分别关于BC,CA,AB的对称点为A_2,B_2,C_2;引$NA_1\perp AH$,NB_1

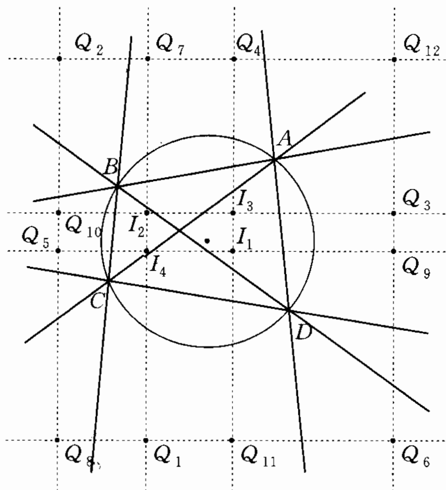


图1

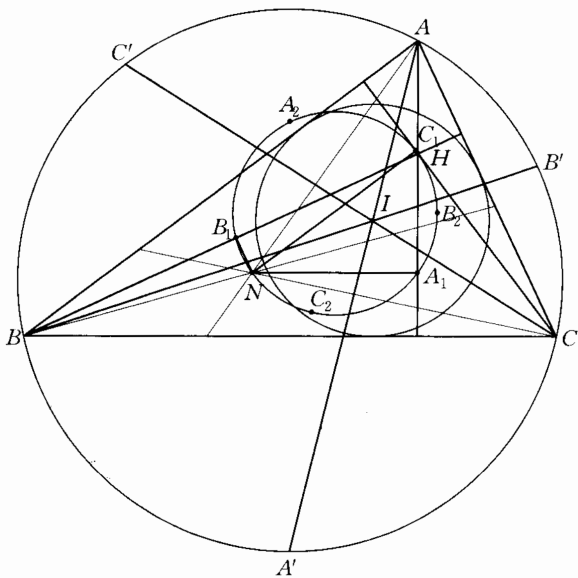


图 2

$\perp BH, NC_1 \perp CH$，垂足为 A_1, B_1, C_1，则 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, H, N$ 八点共圆(如图 2).

面　　积

面积(area)　几何学的基本概念之一. 对于每一个封闭图形，用惟一的非负实数与它对应，如果这种对应满足：

1. 边长为 1 个长度单位的正方形作为面积单位，与数 1 相对应.

2. 合同变换(即正交变换)下的不变性. 即全等图形与相同的实数相对应.

3. 有限可加性. 将一个图形分成两个至多只有公共边界的部分图形的并集，则该图形所对应的数就等于两个部分图形所对应数的和.

那么该图形对应的非负实数称为该图形的面积. 面积相等的图形不一定是全等形.

面积问题是古老的课题，几何学的起源几乎直接联系着面积的计算，从计算最简单的矩形面积，到精确计算任意形状的图形面积，经历了漫长的历史发展过程，在这个发展过程中，世界各国的数学家都做出了自己的贡献. 从现有资料看，许多文明古国都有用长乘宽计算矩形面积的记载，这是最原始的面积定理，而其他多边形的面积都是通过矩形面积导出来的. 如古埃及人用公式

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

来近似计算四边顺次为 a, b, c, d 的四边形的面积，并对此公式作了推论，让四边形的一边为零，而得三角形面积的近似公式：

$$\frac{c}{2} \cdot \frac{a+b}{2}.$$

现在看来这些计算公式并不精确，但在古代能有这样的公式，也算是很有价值的成果. 公元前 5 世纪，希俄斯的希波克拉底(Hippocrates，(C))就提出了月形定理，他把两个月形面积转化为一个直角三角形的面积. 1 世纪，海伦(Heron，(A))在几何学的面积方面已有许多研究成果，例如，他以几何形式推算出求三角形面积的海伦公式

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 S 为三角形面积，a, b, c 是三角形的边长，s 是三角形周长之半. 6 世纪前后，婆罗摩笈多(Brahmagupta)在他的著作中给出了与海伦公式形式类似的圆内接四边形的面积公式

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

其中 A 为圆内接四边形的面积，a, b, c, d 是四边形的边长，s 是四边形的周长之半. 刘徽用割补术计算出三角形面积、梯形面积的准确公式. 秦九韶独立发现了与海伦公式等价的三角形面积公式——三斜求积公式

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2 - \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}.$$

其中 S 为三角形的面积，三边 a, b, c 分别称为大斜、中斜、小斜($a>b>c>0$).

在计算图形面积的历史发展过程中，极限思想早已孕育和萌发. 公元前 3 世纪，阿基米德(Archimedes)就运用穷竭法求出了抛物弓形面积及直线与螺线围成的区域的面积，这是数学史上最早的极限思想的体现. 公元 3 世纪，刘徽用割圆术求圆面积的方法，12 世纪，印度人用“印度圆”求圆面积的方法，开普勒(Kepler，J.)用无限个微小三角形求圆面积的方法等，都是极限方法的雏形，为 17 世纪微积分的创立打下了基础. 至 17 世纪后，才确立了用特定数学结构的和式极限——定积分计算图形

的面积.

面积单位(area unit)　度量面积的标准.度量一个图形的面积时,取边长为 1 的正方形做标准,这个正方形称为单位正方形,它的面积称为面积单位(参见本卷《算术》同名条).

单位正方形(unit square)　见“面积单位”.

三角形的面积公式(area formula of a triangle)　平面几何的基本公式之一.设$\triangle ABC$的三边 BC,CA,AB 的长分别为 a,b,c,边 BC 上的高为 h,周长的一半为 $s=(a+b+c)/2$,内切圆的半径为 r,外接圆的半径为 R,面积为 S,则有面积公式:

1. $S=\frac{1}{2}ah$.

2. $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ca\cdot\sin B$.

3. $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$(海伦公式).

4. $S=r\cdot s$.

5. $S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$.

6. $S=\frac{abc}{4R}=2R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$.

7. $S=s^2\cdot\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$.

8. $S=s(s-a)\cdot\tan\frac{A}{2}$.

9. $S=\frac{(a^2-b^2)\cdot\sin A\cdot\sin B}{2\sin(A-B)}$.

海伦(Heron,(A))在《测地术》一书中写出海伦公式,并在《经纬仪》和《度量》两书中均作出证明.秦九韶在他所著《数书九章》中提出了与海伦公式等价的三斜求积术(公式),即

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]},$$

其中 a,b,c 分别称为大斜、中斜、小斜($a>b>c>0$).三斜求积术的原文叙述是:“以小斜幂并加大斜幂减中斜幂半除之自乘于上;以小斜幂乘大斜幂减上;余四约之为实;一为隅,开方得之.”海伦公式亦称为海伦-秦九韶公式或三斜求积公式.

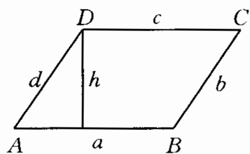
海伦公式(Heron formula)　见“三角形的面积公式”.

海伦-秦九韶公式(Heron-Qin Jiushao formula)　见“三角形的面积公式”.

三斜求积公式(formula of seek area of triangle by given three sides)　见“三角形的面积公式”.

正方形的面积公式(area formula of a square)　平面几何的基本公式之一.若正方形的一边长为 a,面积为 S,则 $S=a^2$.一般选用一边为长度单位的正方形面积作为图形的面积单位,它对应于数 1.

平行四边形的面积公式(area formula of a parallelogram)　平面几何的基本公式之一.若平行四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 的长分别为 a,b,c,d,边 AB 上的高为 h,面积为 S(如图),则平行四边形的面积公式为:



1. $S=a\cdot h$.

2. $S=ad\cdot\sin A=ab\cdot\sin B=bc\cdot\sin C=cd\cdot\sin D$.

等底等高的平行四边形面积相等.

矩形的面积公式(area formula of a rectangle)　平面几何的基本公式之一.若矩形 $ABCD$ 的边 AB 为矩形的长,长度为 a,边 BC 为矩形的宽,长度为 b,面积为 S,则 $S=ab$.这一公式也可表述为:矩形的面积等于它的长和宽的积.

菱形的面积公式(area formula of a rhombus)　平面几何的基本公式之一.若菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 的长度为 a,BD 的长度为 b,面积为 S,则 $S=ab/2$.此公式也可表述为:菱形的面积等于它的两条对角线的积的一半.

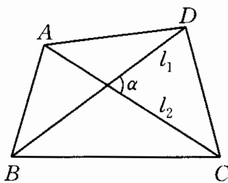
梯形的面积公式(area formula of a trapezoid)　平面几何的基本公式之一.若梯形 $ABCD$ 的上、下底长度为 a,b,高为 h,中位线长为 m,面积为 S,则:

1. $S=(a+b)/2\cdot h$.

2. $S=m\cdot h$.

这两个公式可表述为:梯形面积等于它的两底的和与高的积的一半,亦等于中位线与高的积.

四边形的面积公式(area formula of a quadrilateral)　平面几何的基本公式之一.四边形的面积公式为:



1. 设任意四边形的两条对角线长分别为 l_1,l_2,两对角线夹角为 α(如图),面积为 S,则

$$S=\frac{1}{2}l_1\cdot l_2\cdot\sin\alpha.$$

2. 设四边形的四边为 a,b,c,d,两对角之和为 2α,且设 $s=(a+b+c+d)/2$,面积为 S,则

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha}.$$

特别地,当四边形内接于圆时,则面积

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

圆面积公式(area formula of a circle)　平面几何的基本公式之一.若圆的半径为 r,直径为 d,圆周长为 l,圆面积为 S,则圆的面积公式为

$$S=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2=\frac{1}{2}rl.$$

其中 π 为圆周率.作圆的内接正 n 边形和外切正 n

边形，当这些正 n 边形边数无限倍增时，内接正 n 边形面积是单调递增且有上界的数列，外切正 n 边形面积是单调递减且有下界的数列，这两个数列有同一极限，这个极限值为圆的面积. 刘徽用割圆术同时求得了圆周长和圆面积，他是中国第一位应用极限方法解决数学问题的人.

扇形面积公式(area formula of a sector) 平面几何的基本公式之一. 若扇形的圆半径为 r，圆心角为 $n°$或 α 弧度，弧长为 l，面积为 $S_{扇形}$，则

$$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi r^2=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}r^2\alpha.$$

弓形面积公式(area formula of the segment of a circle) 平面几何的基本公式之一. 把弓形弧两端与圆心连结得一个扇形和一个三角形. 当弓形弧为劣弧时，弓形面积等于扇形面积减去三角形面积(如图 1)；当弓形弧为优弧时，弓形面积等于扇形面积

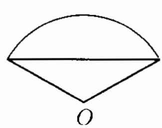


图1

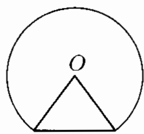
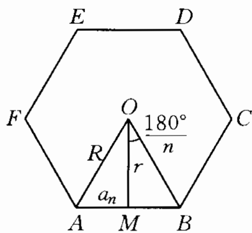


图2

加上三角形面积(如图 2). 设弓形所在圆的半径为 r，弓形弧所对中心角为 θ，则弓形的面积公式为

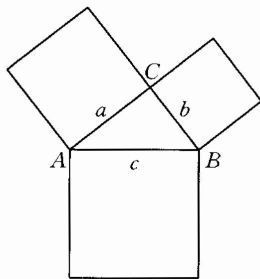
$$S=\frac{\theta\pi r^2}{360}\pm\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\theta.$$

正多边形的面积公式(area formula of a regular polygon) 平面几何的基本公式之一. 若正 n 边形的边长为 a_n，内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，周长为 P_n，面积为 S(如图)，则正 n 边形的面积公式为：



1. $S=\frac{n}{2}a_nr.$
2. $S=\frac{1}{2}P_nr.$
3. $S=nr^2\tan\frac{180°}{n}.$
4. $S=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360°}{n}.$

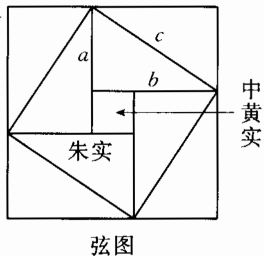
勾股定理(Pythagoras theorem) 初等几何的著名定理之一. 它有十分悠久的历史. 直角三角形两直角边上正方形面积的和等于斜边上的正方形面积(如图)，即如果直角三角形两直角边的长度为 a 和 b，斜边长度为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$. 中国古代称直角三角形的直角边为勾和股，斜边为弦，故此定理称为勾股定理，或勾股弦定理. 此定理在中国古代和西方早已被发现. 数学史上普遍认为最先证明这个定理的是毕达哥拉斯(Pythagoras)，所以，很多数学书上把此定理称为毕达哥拉斯定理. 在中国，最早是三国时代东吴赵爽在注《周髀算径》时，用弦图证明了这个定理. 两千多年来，勾股定理由于应用的广泛性，吸引了历代众多的人，对它的证明已达数百种.



勾股弦定理(gou gu xuan theorem) 即"勾股定理".

毕达哥拉斯定理(Pythagoras' theorem) 即"勾股定理".

弦图(chord figure) 证明勾股定理的一种方法. 赵爽(字君卿，三国时吴人)在注《周髀算径》时，用几何方法证明了勾股定理，他在证明的同时还画了一张图，称为弦图. 赵爽在他的注里写道："按弦图，又可以勾股相乘为朱实二(即 $a\cdot b$ 等于两个直角三角形面积). 倍之为朱实四(即 $2ab$ 等于四个直角三角形的面积). 以勾股之差自相乘为中黄实(即 $(b-a)^2$ 等于中间小正方形面积). 加差实，亦成弦实(弦实是以弦为边的正方形面积，即 c^2). "即 $2ab+(b-a)^2=c^2$，化简便得 $a^2+b^2=c^2$.



弦图

勾股定理的逆定理(inverse theorem of gou gu theorem) 初等几何的著名定理之一. 若三角形一边的平方等于另两边的平方和，则此三角形为直角三角形，且该边所对角为直角.

等积形(equiareal figure) 具有等积关系的两个图形. 面积相等的两个图形称为等积形. 例如，同底等高的两个三角形就是等积形. 三角形三顶点与其重心相连所成各三角形均为等积三角形. 在三角形中只有重心有此性质. 等底等高的平行四边形是等积形. 过平行四边形对角线上一点，引各边的平行线，所得四个平行四边形中，不被对角线分割的两个平行四边形为等积形.

撰 稿 王小林 王为民 艾典册 曲世江 杨林生 员志一 张云仙 张毓新 林大玉 林魁普 秦国毅 高 英 郭卫中 黄荣基 萧成勋 晚成国 葛成贤 蒋泽伶 甄新安
审 阅 王绳俊 艾典册 曲世江 郭卫中 黄荣基

平 面 三 角

平面三角(plane trigonometry)　亦称平面三角学.三角学的一门分科,它是专门研究平面上三角形边和角的关系、三角函数及其性质与应用.

古代埃及人和希腊人在生活和生产实践中,早已认识到三角形诸元素间具有的各种关系,希腊罗德岛的喜帕恰斯(Hipparchus,(R))以发现岁差著称,提出用经纬度表示地理位置的方法.同时,为了天文观测的需要,喜帕恰斯曾作出第一个与目前使用的三角函数表相仿的弦表.喜帕恰斯采用的是在一个固定的圆内,以不同的圆心角所对应的弦长来造表,并采用巴比伦人的60进制,去计算给定度数的圆弧 AB 所相应的弦 AB 的长,就是说,喜帕恰斯所得到一系列弦值并不是现在意义下的弦值,而是全弦值,不过他实际上已揭示了圆弧与圆弦在量值上的对应关系,他的工作对平面三角的发展具有一定的推动作用.后来,托勒密(Ptolemy)继承喜帕恰斯的成就,加以整理发挥,编入自己的《天文集》,该书原名《数学汇集》,共13卷,其中包含有系统的三角理论和从0°到90°每隔(1/2)°的弦表,他将圆周分为360等分,仍以60进制新建立了度、分、秒的量角单位,使表中的计算准确到秒.根据该表,应用内插法可以用同样的准确度求出任意弧的弦长.托勒密还得到过下列诸公式:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$
$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

在中世纪初叶至12世纪,印度人吸收了古希腊的天文学知识,并且,对三角学也进行了研究,与希腊人不同的是,他们不再计算对应圆心角的全弦的长,而开始使用半弦,相当于现在的正弦线.当时曾制作出一个正弦表,其方法是先用勾股定理算出一些特殊角30°,45°,60°,90°的正弦,然后用半角公式计算出较小角度的正弦.在这方面,阿耶波多第一(Āryabhata,Ⅰ)所作的贡献是不可磨灭的,而且他认为圆弧与弦长应用同一单位来度量.换句话说,阿耶波多第一已承认了曲线(圆弧)与直线(弦)可以有相同的度量单位.这里包含着弧度制的思想,与托勒密有显著的不同.必须指出,阿耶波多第一虽然已直接触及正弦,但他并没有给出名称.正弦这个名称是12世纪欧洲人翻译阿拉伯数学著作时开始使用的,它与印度人当初的半弦的名称已有相当差距.

自7世纪至15世纪的数百年间,中亚细亚各民族中涌现出一批数学家,他们不但吸取和保存了希腊与印度的数学精华,而且有所创新.在三角方面有突出贡献的阿尔·巴塔尼(al-Battānī)当属杰出者之一,他采用半弦代替托勒密的正弦,并且给出正切、余切概念,同时他还制造了0°到90°每隔1°的余切表.阿布·瓦法(Abul-Wefa)在三角学方面也做出了突出的贡献.他计算了每隔10′的正弦表和正切表,并首次引入正割及余割的概念.直到15世纪,雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)于1464年完成了他的《论一般三角形》.这在欧洲是一本系统的三角学论著,包括平面三角和球面三角两部分.对于平面三角部分较系统地论述了直角三角形性质、正弦定理、余弦定理等.

在三角函数表制作方面,雷格蒙塔努斯取半径 $r=6\times10^5$ 和 $r=10^7$,制作出了相当精密的正弦表,雷蒂库斯(Rhaeticus,G.J.)取 $r=10^5$,作出每隔10″的正弦、正切及正割表,但这项工作在当时全靠手算,花了12年的时间,直到他死后才由其弟子奥托(Otho,V.)于1596年完成并发表于世.1613年,由皮蒂斯楚斯(Pitiscus,B.)加以修订,并重新出版,此时全部计算均采用 $r=10^{25}$,表中有正弦、正切、正割、余弦、余切、余割.这个三角函数表的制作已标志着三角学正式脱离了天文学而独立地成为数学的一个分支.三角学逐步引起一些著名数学家的重视,使其内容得到充实和完善.例如,对数在三角函数中的应用,就是最好的证明.在研究三角函数表的同时,人们发现函数表的制作相当繁杂,不仅要花费很多时间,而且也非常容易产生错误,纳皮尔(Napier,J.)首先提出对数并用于三角函数计算上,使得三角函数计算得到简化和便利,并且提高了计算的精度.如布里格斯(Briggs,H.)于1633年出版的三角函数表其精度很高,正弦到小数第14位,正切及正割到小数第10位.韦达(Viete,F.)使平面三角进一步系统化,他给出了正切定理与和差化积定理,还给出用 $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ 表示 $\sin n\varphi$ 和 $\cos n\varphi$ 的恒等式.这些内容都极大地丰富了刚独立不久的三角学.瑞士数学家欧拉(Euler,L.)的显著功绩是发现三角函数,并指出,若令圆半径为单位长,那么所有的三角函数就可大为简化.欧拉的这个定义是极其科学的,它使三角学从静态的只是研究三角形解法的狭隘天地中解放出来,有可能去反映现实世界一切可用三角函数反映的运动或变化过程.事实上,经欧拉引进三角函数之后,原来意义下的正弦

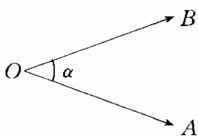
等概念都可以脱离几何图形去进行自由的运算，一切关系式也将很容易地从三角函数的定义出发而导出.欧拉还引入了弧度制，并把直线与圆弧的度量单位统一起来.

中国对三角知识的研究渊源较早，据《史记·夏本记》记载，大禹就利用过直角三角形的边角关系对山川地势进行了测量.《周髀算经》、《海岛算经》记载了有关高度和距离的测量方法，平面三角的完整内容是在明朝(1631)从国外引入.当年由邓玉函(Terrenz，J.)、汤若望(Von Bell，J. A. S.)与徐光启合编出中国第一部三角学《大测》(1631 年正月 28 日).同年，徐光启等又编出《测量全义》(1631 年 8 月初 1 日)，其中包括平面三角和球面三角的论述.到了 1653 年，由薛风祚与穆尼阁(Smogolenski，J. -N.)合编了《三角算法》一书.从此，三角一词在中国便取代大测而成为这一学科的名称了.

平面三角学(plane trigonometry)　即“平面三角”.

一 般 概 念

有向角(directed angle)　三角学的基本概念之一.在平面几何中，角被理解为从一点引出的两条射线所组成的几何图形.如图，角 α 是从 O 点引出的两条射线 OA 与 OB 组成的几何图形.角的概念是不断扩充的，从运动的观点出发，角被看做是一条射线在平面内绕其端点的旋转量.并规定：射线的初始位置称为角的始边；射线的终止位置称为角的终边；射线的端点称为角的顶点.引进上述概念后，就把角的始边绕其顶点扫过角的内部到与终边重合的旋转方向称为角的方向.因此，这种规定了方向的角就称为有向角.由于射线绕其端点的旋转，如拨动时针，所以有两个旋转方向.对于有向角，通常规定：始边按逆时针方向旋转所成的角为正角；始边按顺时针方向旋转所成的角为负角；始边未作旋转即与终边重合的角为零角.



旋转量(rotation quantity)　见“有向角”.

角的方向(angular direction)　见“有向角”.

正角(positive angle)　见“有向角”.

零角(zero angle)　见“有向角”.

负角(negative angle)　见“有向角”.

任意角(arbitrary angle)　亦称一般角.平面三角的基本概念之一.在平面几何中，角 α 的大小一般限制在 0 到 2π(或 0°到 360°)之间，即 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$(或 $0°\leqslant\alpha\leqslant360°$).在平面三角中，引进始边、旋转方向、旋转量等概念后(参见“有向角”)，角的概念得到推广.它可以取任何实数，这种可以取任何实数的角称为任意角或一般角.事实上，当一条射线绕其端点按逆时针方向旋转一周，就形成 0 到 2π(或 0°到 360°)之间的一切正角；若旋转两周，就形成 0 到 4π(或 0°到 720°)之间的一切正角；若继续旋转下去，可形成任意大小的正角.同样，当射线绕其端点按顺时针方向旋转时，可形成任意大小的负角.而当射线未做任何旋转时，就认为它形成零角.于是便得到了任意大小的角，即任意大小的正角、任意大小的负角和零角，这些都是有向角.任意角的一般表达式为

$$2k\pi\pm\alpha\ (k\in\mathbf{Z},\ 0\leqslant\alpha<2\pi).$$

一般角(general angle)　即“任意角”.

终边相同的角(angle with same terminal side)　平面三角的基本概念之一.指顶点、始边与终边重合的角.同时满足下述条件的有向角：

1. 它们的顶点、始边分别重合.
2. 它们的终边亦重合.

与任一角 α 终边相同的角是 $k\cdot360°+\alpha$ 或 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$.大小相等的角必然是终边相同的角，但终边相同的角未必大小相等，它们的差等于 2π 的整数倍.凡终边相同的角，其同名三角函数值均相等.

角的度量(measure of an angle)　亦称角的测量.平面三角的基本概念之一.指测度(或比较)角(旋转量)的大小的过程.它包含两个方面：

1. 测量的方式、方法(包括测量单位、进位制).
2. 测量的结果(量数).

由于历史发展和地区文化、经济的差异等原因，角的度量产生了不同的量角制度.常用的角的度量制度有角度制、弧度制、密位制、百分制等四种.但无论哪一种度量制度，都必须符合度量公理的要求.

角的测量(measure of an angle)　即“角的度量”.

角度制(system of degree measure)　度量角与弧的常用制度之一.这是一种六十进制.即把圆周的 1/360 的弧称为含有 1 度的弧.而 1 度的弧所对的圆心角称为 1 度的角，1 度角记为 1°；1°的 1/60 称为 1 分，记为 1′；1′的 1/60 称为 1 秒，记为 1″.这样，用度为单位来度量弧与角的制度称为角度制.把圆周分为 360 等份的角度制始于古代巴比伦人.诺伊格鲍尔(Neugebauer，O.)根据发掘的粘土书版中刻写的巴比伦楔形文字的考证，著有《数学楔形文字诠译》，他认为，在苏美尔文化初期，曾经使用过一种较大的距离单位——巴比伦里(1 巴比伦里约等于 7 英里).由于巴比伦里用于测量较长的距离，它也成为一种时间单位，即走完 1 巴比伦里所需的时间.由于发现一整天约等于走完 12 个巴比伦里所需的时间，并且一整天等于天空转一周，所以一个完整的圆周被分为 12 等份.又为了使用方便，把巴比伦里分为 30 等份.于是，他们便把一个完全的圆周分为 12

$\times 30=360$ 等份.

六十进制(sexagesimal system) 见"角度制".

弧度(radian) 亦称弪.度量角与弧的常用单位之一.由于以某角的顶点为圆心,任意长为半径作弧,该角所对的弧长与相应半径长的比值,完全由该角的大小确定,而与相应半径的长短无关,规定把等于半径长的圆弧所对的圆心角称为1弧度的角或称1弪的角,而把1弧度角所对的圆弧称为1弧度弧或1弪的弧.如图,以点 O 为圆心,以 r 为半径,$\widehat{AB}=r$.弧 $\widehat{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 等于1弧度角或1弪的角;而圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧 $\widehat{AB}$ 等于1弧度弧或1弪的弧.弧度与度的换算关系式为:

$$1\text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57.295\ 779\ 513$$
$$\approx 57^\circ 17' 44.806'';$$
$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}=0.017\ 453\ 292\ 519\ 943\cdots$$

以弧度为单位表示弧与角时,作为名数的弧度二字一般可省去不写,例如,$\alpha=\pi/2$ 弧度可记为 $\alpha=\pi/2$.弧度这个词是汤姆森(Thomson,J.)首先使用的,他于1873年6月5日在贝尔斯特的女王学院的考试试卷中创用了这个词.表示弧度的符号几经变更,未形成统一通用的符号.1881年,霍尔斯特德(Halsted,G.B.)曾用 ρ 表示弧度,如 $2\pi/3$ 弧度记为 $2\pi\rho/3$.20世纪初期,贝尔(Bell,G.N.)、霍尔(Hall,A.G.)与朗尼(Loney,S.L.)等曾先后用 1^r,1^R,1^C 分别表示1弧度.现在有关书中都将表示弧度 的符号省略去了.

弪(radian) 即"弧度".

弧度制(radian measure) 亦称弪制,又称弧度法.度量弧与角的常用制度之一.指以弧度为单位来度量弧与角的制度(参见"弧度").建立弧度制后,就将度量直线段和圆弧的单位统一起来,有助于简化公式和方便计算.例如,在平面几何学中,弧长公式为 $l=n\pi r/180$(r 为半径,n 为圆心角的度数),用弧度制可将公式化简为 $l=\alpha r$(α 为弧度数);在三角学中,引入弧度制可以便于三角函数的作图;在微积分学中,只有在弧度制下,才有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

从而导出 $(\sin x)'=\cos x$,$(\cos x)'=-\sin x$,简化了正弦函数和余弦函数的求导.如果 x 为角度制量角的度,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180^\circ}$$

是无助于三角函数求导简化的.总之,弧度制促成可用单位圆的弧长来表示该弧所对圆心角的度量.角的这种实数表示使角的三角函数成为实变数的函数,使三角函数在初等数学和高等数学中都得到广泛的运用.弧度制的思想始于阿耶波多第一($\bar{\text{A}}$ryabhata,Ⅰ),他定圆周长为21600分,相应的圆半径为3438份($\pi=3.1412$),使圆半径与周长有同一度量单位,然后用对应的弧长与圆半径之比来度量角度.但尚未明确提出弧度制这个概念.严格的弧度制概念是由欧拉(Euler,L.)于1748年引入的.他先定半径为1个单位,那么半圆的弧长为 π,此时的正弦值为0,记为 $\sin\pi=0$.同理,1/4圆周的弧长为 $\pi/2$,此时的正弦值为1,记为 $\sin(\pi/2)=1$.从而确立了用 π,$\pi/2$ 分别表示半圆及1/4圆弧所对的圆心角,其余的角依此类推.

弪制(radian measure) 即"弧度制".

弧度法(radian measure) 即"弧度制".

密位制(mil measure) 度量角与弧的常用制度之一.周角的1/6000称为1密位.用密位作度量单位来量弧与角的制度称为密位制.在密位制中,采用四个数字来记一个角的密位数,且在百位数字与十位数字之间加一短划,单位名称可以省去,如15密位记为00-15.一个直角=15-00,一个周角=60-00.密位制与角度制的换算关系式为:

$$1\text{密位}=\frac{360^\circ}{6000}=0.06^\circ;$$
$$1^\circ=\frac{6000\text{密位}}{360}\approx 16.7\text{密位}.$$

密位制与弧度制的换算关系式为:

$$1\text{密位}=\frac{2\pi}{6000}\text{弧度}=\frac{\pi}{3000}\text{弧度}$$
$$\approx 0.001047\text{弧度},$$
$$1\text{弧度}=\frac{6000\text{密位}}{2\pi}\approx 954.9\text{密位}\approx 9\text{-}55.$$

弧度制虽在理论上有很大价值,但在应用中却显得单位太大,使用不方便.曾经有人建议以1弧度的1/1000作为单位,并命名为毫弧度.这样1周角=6283.1853毫弧度,在使用中仍感不方便.各国参照此数的近似值制定本国适用的密位制,如苏联确定以周角的1/6000为1密位;英、美确定以周角的1/6400为1密位;也还有确定以周角的1/6300为1密位的国家.密位制主要用于军事测量中,炮兵对大炮方位的测定使用的就是密位制,各国军事学教程中的密位制是大同小异的.

密位(mil) 见"密位制".

百分制(centesimal system) 亦称百分度,也称百分法,又称新度制.它是以直角的1/100作为角的度量单位的量角制.在百分制中,角的度量单位称为百分度,1百分度记为 1^g;1^g 的1/100称为百分分,记为 1^c;1^c 的1/100称为百分秒,记为 1^{cc}.例如,

21.2438百分度，记为 $21^{g}.2438$，或记为 $21^{g}24^{c}38^{cc}$. 百分制与弧度制、角度制之间的换算关系如下：

$$1^{g}=\frac{\pi}{200}\text{弧度}\approx 0.015707963 27;$$

$$1^{g}=\frac{9^{\circ}}{10}=54';$$

$$1\ \text{弧度}=\frac{200^{g}}{\pi}\approx 63^{g}6197724;$$

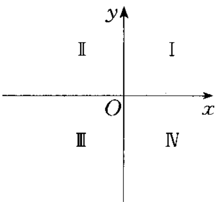
$$1^{\circ}=\frac{10^{g}}{9}\approx 1^{g}11^{c}11^{cc}1111.$$

百分制创始于 19 世纪初法国大革命后.

百分度(grade)　见“百分制”.

新度制(new measure system)　亦称法国制，简称法制. 是法国采用的一种度量角的制度(参见“百分制”).

象限(quadrant)　三角学的基本概念之一. 指平面直角坐标系中被坐标轴分成的四个部分. 在平面直角坐标系中，坐标轴将坐标平面分成四个部分，每个部分平面(不包括坐标轴)称为象限. 并按反时针方向依次称为第一、第二、第三、第四象限. 如图中，角形区域



$$\text{Ⅰ}=\{(x,y)\,|\,0<x<+\infty,0<y<+\infty\},$$
$$\text{Ⅱ}=\{(x,y)\,|\,-\infty<x<0,0<y<+\infty\},$$
$$\text{Ⅲ}=\{(x,y)\,|\,-\infty<x<0,-\infty<y<0\},$$
$$\text{Ⅳ}=\{(x,y)\,|\,0<x<+\infty,-\infty<y<0\}$$

分别表示第一、第二、第三、第四象限.

象限角(quadrant angle)　一种特殊角. 在平面直角坐标系中，若角的顶点位于坐标原点，角的始边重合于横轴的正半轴，角的终边落在象限内，则该角称为象限角. 注意，终边落在坐标轴上的角不称为象限角，而称为轴上角，简称轴角. 当象限角的终边依次落在第一、第二、第三、第四象限时，对应的象限角分别称为第一、第二、第三、第四象限角. 象限角的取值范围与象限有关，第一、第二、第三、第四象限角 α 的取值范围分别是：

$$2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

或　$k\cdot 360^{\circ}<\alpha<k\cdot 360^{\circ}+90^{\circ}$;

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$$

或　$k\cdot 360^{\circ}+90^{\circ}<\alpha<k\cdot 360^{\circ}+180^{\circ}$;

$$2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$$

或　$k\cdot 360^{\circ}+180^{\circ}<\alpha<k\cdot 360^{\circ}+270^{\circ}$;

$$2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi$$

或　$k\cdot 360^{\circ}+270^{\circ}<\alpha<k\cdot 360^{\circ}+360^{\circ}$,

其中 k 是整数. 象限角的三角函数值的符号与象限有关，详见下表：

符号＼象限角 三角函数	一	二	三	四
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−
$\sec\alpha$	+	−	−	+
$\csc\alpha$	+	+	−	−

象限角的三角函数值的符号(sign of trigonometric function values of different quadrant angles)　见“象限角”.

轴角(axis angle)　终边在坐标轴上的一类特殊角. 在平面直角坐标系中，同时满足下述条件的角称为轴角：

1. 角的顶点位于坐标原点，角的始边和横轴的正半轴重合.

2. 角的终边落在坐标轴上.

终边落在横轴上的轴角称为横轴角. 终边落在纵轴上的轴角称为纵轴角. 轴角的一般表达式为 $k\pi/2$ 或 $k\cdot 90^{\circ}(k\in\mathbf{Z})$. 横轴角的一般表达式是 $k\pi$ 或 $k\cdot 180^{\circ}$(k 为偶数时，终边和横轴正半轴重合；k 为奇数时，终边和横轴的负半轴重合)；纵轴角的一般表达式是 $k\pi+\pi/2$ 或 $k\cdot 180^{\circ}+90^{\circ}$($k$ 为偶数时，终边和纵轴正半轴重合；k 为奇数时，终边和纵轴负半轴重合). 轴角不属于任何象限.

横轴角(abscissa axis angle)　见“轴角”.

纵轴角(ordinate axis angle)　见“轴角”.

三 角 函 数

三角函数(trigonometric function)　亦称圆函数. 一类基本初等函数的统称，是三角学研究的主要对象. 它常指 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ 这六个基本三角函数. 也可把由这些基本三角函数经过有限次代数运算与复合而成的函数称为三角函数. 这六个基本三角函数依次命名为正弦函数，余弦函数，正切函数，余切函数，正割函数，余割函数.

在历史上，还命名过正矢函数 $y=\operatorname{vers}x$(即 $1-\cos x$)，余矢函数 $y=\operatorname{covers}x$(即 $1-\sin x$)，外割函数 $y=\operatorname{exsec}x$(即 $\sec x-1$)和半正矢函数 $y=\operatorname{hav}x$(即$(1/2)\operatorname{vers}x$)等. 由于后四个函数可以用

前六个基本三角函数表示，后边四个三角函数已很少有人使用了．关于三角函数的记号，正切、余切、余割这三个函数还有分别记为 tan，cot，cosec 的．在古代研究三角函数，大都在一个半径确定的圆内进行．如托勒密（Ptolemy）定半径为 60；阿耶波多第一（Āryabhata，Ⅰ）定半径为 3 438；雷格蒙塔努斯（Regiomontanus，J.）为了精密地计算三角函数值，曾定半径为 600 000，后来他为制定更精密的正弦表又定半径为 10^7．所以，当时的三角函数实际上是定圆内的一些线段的长，故称圆函数．雷蒂库斯（Rhaeticus，G. J.）重新给出了三角函数的定义，他把三角函数定义为直角三角形边长之比，建立了三角函数与角度的直接联系，脱离了过去那种必须依赖圆弧的作法．直到 1748 年，欧拉（Euler，L.）在《无穷小分析引论》中首次令圆的半径为 1，即置角于单位圆之中，从而使正、余弦函数定义为相应的线段与圆半径之比．至此，三角函数的概念已基本定型．此外，吉拉尔（Girard，A.）、奥特雷德（Oughtred，W.）也曾为现行三角函数符号的创立和通用做出贡献．三角函数的概念，最初是以角的值为自变量的．在三角学范围内大致是如此，但自从欧拉把三角函数确定为单位圆中与角有关的一些线段之比后，数学的发展已使三角函数的自变量脱出原有的角的量值的束缚，而保持其可以是任意实数的本质，从而三角函数也成为只是实数变量的一些特殊的实值函数了，这是三角函数在拓广其应用中必然会发生的一种概念上的变化，也从而使其成为应用极广的一类函数．

圆函数（circular function） 即“三角函数”．因三角函数的研究曾经长期在圆内进行，由此而得名．

余函数（cofunction） 三角函数的基本概念之一．正弦和余弦，正切和余切，正割和余割，正矢和余矢，分别互相称为余函数．

单位圆（unit circle） 亦称三角圆．数学的基本概念之一．指以坐标原点为圆心，以等于单位长的线段为半径所作的圆．现亦泛指半径为 1 的圆．借助单位圆可以用三角函数线定义任意角的三角函数．单位圆在许多数学分支中有广泛的应用．

三角圆（trigonometric circle） 即“单位圆”．三角圆一词，是欧拉（Euler，L.）在 1748 年出版的《无穷小分析引论》中最先提出的．

任意角的三角函数（trigonometric function of arbitrary angles） 三角学的基本概念之一．通常指任意角的六个基本三角函数．在平面三角学中，定义任意角的三角函数常用下面三种方法：

1. 坐标法定义．如图 1—4，设任意角 α 的顶点为平面直角坐标系的原点 O，角 α 的始边与 x 轴的正方向重合，$P(x,y)$ 为角 α 的终边上非原点的任意一点，它与原点的距离 $OP=r=\sqrt{x^2+y^2}\,(r>0)$，则

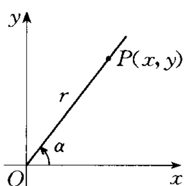


图1

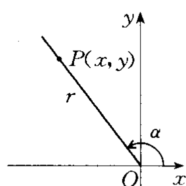


图2

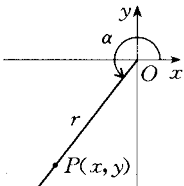


图3

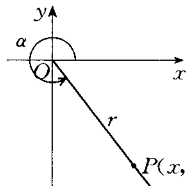


图4

角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\ \cos\alpha=\frac{x}{r};\tan\alpha=\frac{y}{x};$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y};\sec\alpha=\frac{r}{x};\ \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

对于确定的角 α，这六个比值的大小与 P 点在角 α 的终边上的位置无关．当角 α 的终边在 x 轴上时，$\alpha=k\pi$（或 $\alpha=k\cdot180°$），$k\in\mathbf{Z}$，$\cot\alpha=x/y$ 和 $\csc\alpha=r/y$ 无意义（因为 $y=0$）；当角 α 的终边在 y 轴上时，$\alpha=k\pi+\pi/2$（或 $\alpha=k\cdot180°+90°$），$k\in\mathbf{Z}$，$\tan\alpha=y/x$ 和 $\sec\alpha=r/x$ 无意义（因为 $x=0$）．此外对于确定的角 α，上面六个比值都是一个确定的实数．由于在取定角的单位（例如度或弧度）后，角 α 有确定的数值．因此，正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别可看成从一个实数（角的数值）集合到一个实数（比值）集合的映射，所以它们都是以实数（角的数值）为自变量，以实数（比值）为函数值的函数，这些函数统称三角函数，即任意角的三角函数．三角函数具有周期性，是重要的周期函数．由坐标法定义可以直接得出三角函数的定义域和值域，列表如下（表中角用弧度制）：

函 数	定 义 域	值 域
$\sin\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R}\}$	$[-1,1]$
$\cos\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R}\}$	$[-1,1]$
$\tan\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$(-\infty,+\infty)$
$\cot\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$	$(-\infty,+\infty)$
$\sec\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
$\csc\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$	$(-\infty,,-1]\cup[1,+\infty)$

2. 三角函数线定义．在直角坐标系中，以坐标原点 O 为圆心，作单位圆，如图 5．单位圆与 x 轴交于

点 $A'A$ 与 y 轴交于点 $B'B$. 象限角 α 的顶点与坐标原点重合，α 的终边分别和单位圆及单位圆在点 A，B 的切线相交，交点分别为 P,T,S. 点 M,N 分别是过点 P 且垂直于坐标轴 Ox,Oy 的垂线的垂足. 角 α 的三角函数可以用图中的有向线段定义：

$\sin\alpha=MP,\cos\alpha=OM,\tan\alpha=AT,\cot\alpha=BS,$

$\sec\alpha=OT,\csc\alpha=OS,\text{vers}\,\alpha=MA,\text{covers}\,\alpha=NB.$

这八条有向线段分别称为角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线、正矢线、余矢线，并称为三角函数线. 在 19 世纪末到 20 世纪初，中国的三角学常用八线作书名，如《八线拾级》(1904 年)，《八线备旨》(1894 年). 当角 α 为横轴角时，点 P,T,M 和点 A(或 A')重合，这时正弦线、正切线、正矢线成为

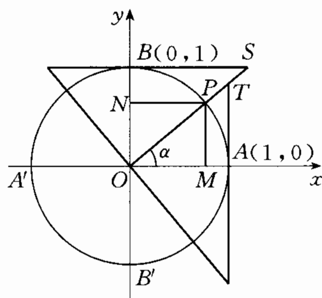


图5

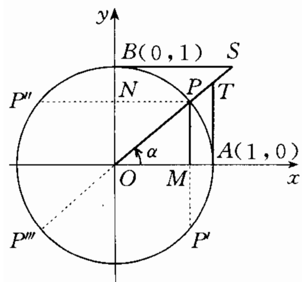


图6

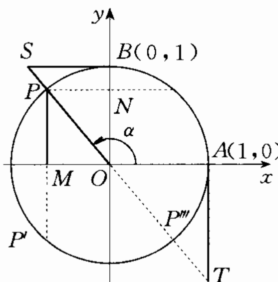


图7

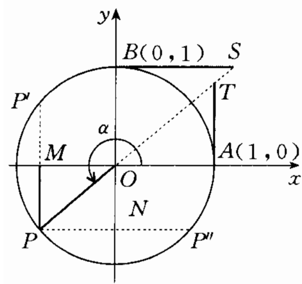


图8

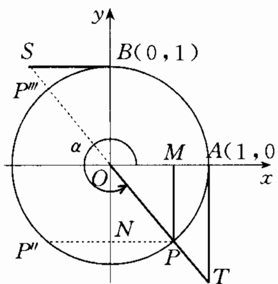


图9

一点，$\sin\alpha=\tan\alpha=\text{vers}\,\alpha=0$，点 S 不存在，即余切线、余割线不存在，亦即 $\cot\alpha$ 和 $\csc\alpha$ 不存在；当角 α 为纵轴角时，点 P,S,N 和点 B(或 B')重合，这时余弦线、余切线、余矢线成为一点，$\cos\alpha=\cot\alpha=\text{covers}\,\alpha=0$，点 T 不存在，即正切线、正割线不存在，亦即 $\tan\alpha,\sec\alpha$ 不存在. 借助三角函数线的直观性，可以发现三角函数命名的依据：正弦线和余弦线都是单位圆中的有向半弦，正切线和余切线都是单位圆上有向切线的一段，正割线和余割线都是单位圆中有向割线的一段，而正矢线和余矢线分别是半弓形 APM,BPN 中形如箭的矢. 因此，这四对函数顺次以弦、切、割、矢命名. 当 α 是锐角时，正弦线、正切线、正割线、正矢线都和角 α 对应，而余弦线、余切线、余割线、余矢线可看做和角 α 的余角($\pi/2-\alpha$)相对应，所以这四对函数中的每一对都有正、余之别. 象限角 α 的终边分别落在第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ象限时，三角函数线的情形如图 6—9 所示.

3. 向量定义. 如图 10，向量$\overrightarrow{AB}$与横轴正向所成的角为 α，$\overrightarrow{AB}$在横轴和纵轴上的射影分别是线段 A_1B_1 和 A_2B_2，$\overrightarrow{AB}$的模为$|\overrightarrow{AB}|$，那么角 α 的三角函数定义分别为：

图10

$$\sin\alpha=\frac{A_2B_2}{|\overrightarrow{AB}|};\ \cos\alpha=\frac{A_1B_1}{|\overrightarrow{AB}|};\ \tan\alpha=\frac{A_2B_2}{A_1B_1};$$

$$\cot\alpha=\frac{A_1B_1}{A_2B_2};\ \sec\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{A_1B_1};\ \csc\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{A_2B_2}.$$

当$\overrightarrow{AB}$垂直于横轴时，角 α 的正切和正割不存在；当$\overrightarrow{AB}$平行于横轴时(包括$\overrightarrow{AB}$在横轴上)，角 α 的余切和余割不存在.

三角函数线(trigonometric function line)　见“任意角的三角函数”.

三角函数间的基本关系(basic relations between trigonometric functions)　同角的三角函数间的几种基本关系. 从三角函数的定义可直接得出各三角函数间的如下基本关系：

1. 倒数关系：

$$\sin\alpha\csc\alpha=1;$$
$$\cos\alpha\sec\alpha=1;$$
$$\tan\alpha\cot\alpha=1.$$

2. 商数关系：

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$
$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

3. 平方关系：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$
$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha;$$
$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

三角函数的非几何定义(non-geometric definition of trigonometric functions)　三角学术语. 指不依赖于几何图形的三角函数定义. 三角学是随几何学的发展而出现的，三角函数最初是作为角的几何性质而定义的，但数学的进展又使三角函数逐步脱离其原来作为角的函数的定义而成为独立的实变量的实值函数，而且三角函数性质的进一步挖掘也可使其脱离最初的几何定义.

1. 可以用在数学分析中获得的三角函数的级数展开式来定义正弦函数和余弦函数(参见本卷《数学分析》中的“正弦和余弦函数的展开式”).

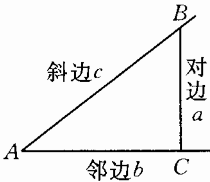
2. 三角函数还可以抽象地用公理(即规定的条件)来定义. 例如,可以这样来定义:正弦函数$s(x)$和余弦函数$c(s)$是实变量的实函数,即从实数集到实数集的映射,并具有下列性质:

1) $s(x,y)=c(x)c(y)+s(x)s(y)$.

2) 对任意 $x\in(0,\pi)$, $s(x)>0$,且 $s(\pi)=0$.

从以上两条性质可以逐步推导出这两个函数的奇偶性、有界性、周期性、增减区间和凹凸性等,最终并能推导出这两个函数分别等于熟知的正弦函数和余弦函数.

锐角三角函数(acute angle trigonometrical function) 一类重要的三角函数. 在基本三角函数中,将自变量限制在锐角时. 历史上锐角三角函数产生于解直角三角形,它曾被定义为直角三角形中每两条边的比,并称该比为三角比. 若在锐角 A $(0<A<\pi/2)$ 的一边上任取一点 B,向另一边作垂线,垂足为 C,得 Rt$\triangle ABC$. 设 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别为 a, b, c(如图),把依赖于角 A 的下述不同的比值所确定的函数分别称为:



$$角\ A\ 的正弦函数=\frac{对边}{斜边};$$

$$角\ A\ 的余弦函数=\frac{邻边}{斜边};$$

$$角\ A\ 的正切函数=\frac{对边}{邻边};$$

$$角\ A\ 的余切函数=\frac{邻边}{对边};$$

$$角\ A\ 的正割函数=\frac{斜边}{邻边};$$

$$角\ A\ 的余割函数=\frac{斜边}{对边}.$$

并记为:

$$\sin A=\frac{a}{c};\cos A=\frac{b}{c};\tan A=\frac{a}{b};$$

$$\cot A=\frac{b}{a};\sec A=\frac{c}{b};\csc A=\frac{c}{a}.$$

当 A 在$(0,\pi/2)$上变化时,$\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cot A$, $\sec A$, $\csc A$ 将随之而变化,它们均为 A 的函数,统称为锐角 A 的三角函数. 由于这种定义联系着直角三角形,因而对解直角三角形比较方便.

特殊角的三角函数(trigonometric function of special angles) 三角学的基本概念之一. 指常用的某些特殊角的三角函数值. 常用的特殊角的三角函数值可列成下表:

α	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\sec\alpha$	
0 (0°)	0	0	1	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\frac{\pi}{12}$ (15°)	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{5\pi}{12}$ (75°)
$\frac{\pi}{10}$ (18°)	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$ (72°)
$\frac{\pi}{8}$ (22.5°)	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{4-2\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{8}$ (67.5°)
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{3}$ (60°)
$\frac{\pi}{5}$ (36°)	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}-1$	$\frac{3\pi}{10}$ (54°)
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$ (45°)
$\frac{3\pi}{10}$ (54°)	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{\pi}{5}$ (36°)
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{6}$ (30°)
$\frac{3\pi}{8}$ (67.5°)	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{8}$ (22.5°)
$\frac{2\pi}{5}$ (72°)	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}+1$	$\frac{\pi}{10}$ (18°)
$\frac{5\pi}{12}$ (75°)	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{12}$ (15°)
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	1	不存在	不存在	0 0°
	$\cos\alpha$	$\cot\alpha$	$\csc\alpha$	α

此表的读法是:对 sin, tan, sec, 角 α 按左边行自上至下读;对 cos, cot, csc, 角 α 按右边行自下往上读.

三角比(trigonometric ratio) 三角学的基本概念之一. 指三角函数定义中的两线段的数量比. 定义锐角三角函数时,是指含此锐角的直角三角形中任意两边的比(参见“锐角三角函数”). 定义任意角三角函数时,是指角的终边上任一点的纵、横坐标和原点到这点的距离三个数量中任意两个的比(参见“任意角的三角函数”). 所以,历史上三角函数曾有三角比之称.

三角函数图象(graph of trigonometric functions) 亦称三角函数曲线. 三角学的基本概念之一. 平面点集:

$$D_1=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y=\sin x\};$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y=\cos x\};$$

$$D_3=\{(x,y)\mid x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\ k\in\mathbf{Z},y=\tan x\};$$

$$D_4=\{(x,y)\mid x\in(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z},y=\cot x\};$$

$$D_5=\{(x,y)\mid x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z},y=\sec x\};$$

$$D_6=\{(x,y)\mid x\in(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z},y=\csc x\}$$

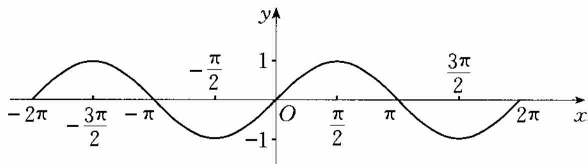
分别称为正弦、余弦、正切、余切、正割、余割函数的图象，统称为三角函数图象.

三角函数曲线(eurve of trigonometric functions)　即“三角函数图象”.

三角函数图象的渐近线(asymptote of graph of trigonometric function)　见“三角函数图象”. 在六个基本三角函数中，正弦函数与余弦函数的图象没有渐近线，其余四个函数图象都存在渐近线，渐近线的分布如下表：

函数	渐近线方程
$y=\tan x$	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in \mathbf{Z})$
$y=\sec x$	
$y=\cot x$	$x=k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$
$y=\csc x$	

正弦曲线(sine curve)　基本三角函数的图象之一. 指正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内的图象，如图所示.



正弦函数及其图象有如下性质：

1. 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，图形在两直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 围成的带形区域(含边界)内向左右两侧周期性地无限延伸.

2. 函数有极值：$y_{\max}=1$，$y_{\min}=-1$.

3. 正弦函数是奇函数，是以 2π 为周期的周期函数.

4. 单调性：$y=\sin x$ 在区间

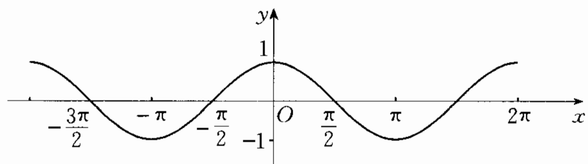
$$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]\ (k\in \mathbf{Z})$$

上为增函数，在区间

$$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]\ (k\in \mathbf{Z})$$

上为减函数.

余弦曲线(cosine curve)　基本三角函数的图象之一. 指余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内的图象，如图所示.



余弦函数及其图象有如下性质：

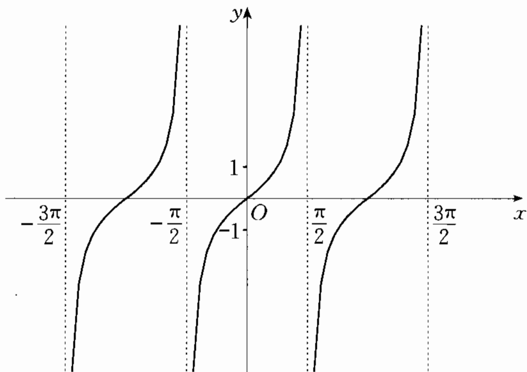
1. 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，图形在两直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 围成的带形区域(含边界)内向左右两侧周期性地无限延伸.

2. 函数有极值：$y_{\max}=1$，$y_{\min}=-1$.

3. 余弦函数是偶函数，是以 2π 为周期的周期函数.

4. 单调性：$y=\cos x$ 在区间$[(2k-1)\pi,2k\pi]$ $(k\in \mathbf{Z})$上为增函数，在区间$[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k\in \mathbf{Z})$上为减函数.

正切曲线(tangent curve)　基本三角函数的图象之一. 指正切函数 $y=\tan x$ 在区间$(k\pi-\pi/2,k\pi+\pi/2)$ $(k\in \mathbf{Z})$内的图象，如图所示.



正切函数及其图象有如下性质：

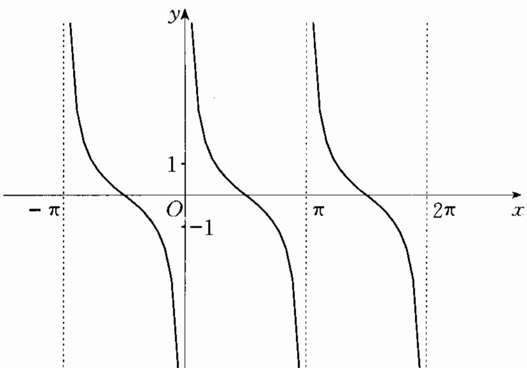
1. 函数的定义域为$(k\pi-\pi/2,k\pi+\pi/2)$ $(k\in \mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,+\infty)$，图形以直线 $x=k\pi-\pi/2$和 $x=k\pi+\pi/2$ $(k\in \mathbf{Z})$为渐近线，曲线成许多相同形状的分支，每一连续区间内的一个分支都在两渐近线之间向上下无限延伸.

2. 正切函数在定义域内无极值.

3. 正切函数是奇函数，是以 π 为周期的周期函数.

4. 单调性：在各个连续区间内均为增函数.

余切曲线(cotangent curve)　基本三角函数的图象之一. 指余切函数 $y=\cot x$ 在区间$[k\pi,(k+1)\pi]$ $(k\in \mathbf{Z})$内的图象，如图所示.



余切函数及其图象有如下性质：

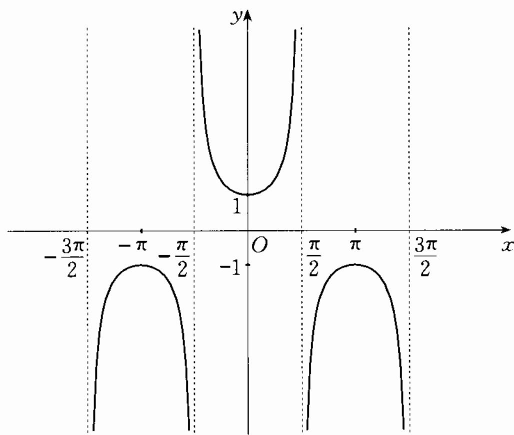
1. 函数的定义域为$(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,+\infty)$，图形以直线$x=k\pi$和$x=(k+1)\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$为渐近线，曲线成许多相同形状的分支，每一连续区间内的一个分支都在两渐近线之间向上下无限延伸.

2. 余切函数在定义域内无极值.

3. 余切函数是奇函数，是以π为周期的周期函数.

4. 单调性：在各个连续区间内均为减函数.

正割曲线(secant curve)　基本三角函数的图象之一. 指正割函数$y=\sec x$在开区间$(k\pi-\pi/2,k\pi+\pi/2)(k\in\mathbf{Z})$内的图象，如图所示.



正割函数及其图象有如下性质：

1. 函数的定义域为$(k\pi-\pi/2,k\pi+\pi/2)(k\in\mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，图形以$x=k\pi+\pi/2(k\in\mathbf{Z})$为渐近线，曲线是形状相同而相邻者开口反向的许多分支，且每一分支都在两渐近线和直线$y=1$或$y=-1$所围成的半开区域内(包含$y=\pm1$的边界点)向上或向下无限延伸.

2. 函数有极值：$y_{\max}=-1,y_{\min}=1$.

3. 正割函数是偶函数，是以2π为周期的周期函数.

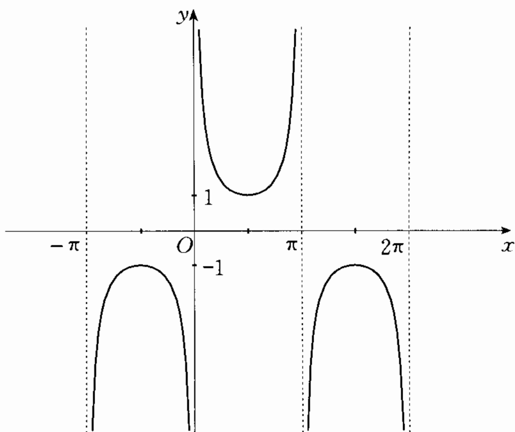
4. 单调性：$y=\sec x$在$[2k\pi,2k\pi+\pi/2)$和$(2k\pi+\pi/2,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$上是增函数，在$[(2k-1)\pi,2k\pi-\pi/2)$和$(2k\pi-\pi/2,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上是减函数.

余割曲线(cosecant curve)　基本三角函数的图象之一. 指余割函数$y=\csc x$在区间$(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$内的图象，如图所示.

余割函数及其图象有如下性质：

1. 函数的定义域为$(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$，值域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，图形以$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$为渐近线，曲线是形状相同而相邻者开口反向的许多分支，且每一分支都在两渐近线和直线$y=1$或$y=-1$所围成的半开区域内(包含$y=\pm1$的边界点)向上或向下无限延伸.

2. 函数有极值：$y_{\max}=-1,y_{\min}=1$.



3. 余割函数是奇函数，是以2π为周期的周期函数.

4. 单调性：$y=\csc x$在$[2k\pi-\pi/2,2k\pi)$和$(2k\pi,2k\pi+\pi/2](k\in\mathbf{Z})$上是减函数，在$[2k\pi+\pi/2,(2k+1)\pi)$和$((2k+1)\pi,2k\pi+3\pi/2](k\in\mathbf{Z})$上是增函数.

三角函数的有界性(boundedness of trigonometric function)　三角函数的重要特征之一. 正弦函数和余弦函数在其定义域内都是有界函数，因为$|\sin x|\leqslant1$和$|\cos x|\leqslant1$恒成立，所以这两函数的上确界(最大值)为1，下确界(最小值)为-1. 正切函数、余切函数、正割函数和余割函数在其定义域内都是无界函数.

三角函数的奇偶性(parity of trigonometric function)　三角函数的重要特征之一. 正弦函数、正切函数、余切函数、余割函数都是奇函数，余弦函数、正割函数都是偶函数. 偶函数的图象是关于y轴对称的，奇函数的图象是关于坐标原点中心对称的. 三角函数的上述特性称为三角函数的奇偶性.

三角函数式的极值(extremum of trigonometric function expression)　三角函数的极大值和极小值的总称. 设$f(x)$为三角函数的有理式，$y=f(x)$定义在区间D上，且$x_0\in D$. 如果存在点x_0的包含于定义域D中的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，对这个邻域中任意的点x都有$f(x)\leqslant f(x_0)$(或$f(x)\geqslant f(x_0)$)，则$f(x_0)$称为三角函数式$y=f(x)$在$x=x_0$处的极大值(或极小值)，该极大值和极小值统称为这个三角函数式的极值. 求三角函数式的极值，不仅与三角恒等变形、三角方程、三角不等式有关，还常与代数中的二次函数、二次方程的判别式、代数不等式的有关知识有着密切的联系. 对于三角函数式的极值问题，通常是运用三角恒等变换，使自变量只含在正弦或余弦记号之下，然后再利用正弦或余弦函数的有界性，即可求得极值. 在六个基本三角函数中，正切函数和余切函数无极值存在，其余四个基本三角函数都有极值存在，其极值的大小和极值点的分布如

下表(表中 $k\in Z$):

函　数	极 大 值	极 小 值
$f(x)=\sin x$	$f\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$	$f\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1$
$f(x)=\cos x$	$f(2k\pi)=1$	$f((2k+1)\pi)=-1$
$f(x)=\sec x$	$f((2k+1)\pi)=-1$	$f(2k\pi)=1$
$f(x)=\csc x$	$f\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-1$	$f\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$

三角函数式的极大值(maximum of trigonometric function expression)　见"三角函数式的极值".

三角函数式的极小值(minimum of trigonometric function expression)　见"三角函数式的极值".

三角函数的单调性(monotonicity of trigonometric function)　三角函数的重要特征之一.六个基本三角函数在整个定义域内都不是单调函数,但它们有单调区间,而且正切函数和余切函数在其各个连续区间内都是单调的.列表如下($k\in Z$):

函 数	单 调 递 增 区 间	单 调 递 减 区 间
$y=\sin x$	$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$
$y=\cos x$	$[(2k-1)\pi,2k\pi]$	$[2k\pi,(2k+1)\pi]$
$y=\tan x$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$	无
$y=\cot x$	无	$(k\pi,k\pi+\pi)$
$y=\sec x$	$\left[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi\right]$	$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right]$ 和 $\left[(2k-1)\pi,2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\csc x$	$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi\right)$ 和 $\left((2k+1)\pi,2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$	$\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[(2k-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)$

三角函数的周期性(periodicity of trigonometric function)　三角函数的重要特征之一.设 $f(x)$ 是定义在某一数集 M 上的函数,若存在一个非零常数 T,并具有下列性质:

1. 对于任何 $x\in M$,有 $x\pm T\in M$.

2. 对于任何 $x\in M$,有 $f(x\pm T)=f(x)$,

则称 $f(x)$ 为数集 M 上的周期函数,并称上述性质为三角函数的周期性,非零常数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

函数的周期往往不止一个,如果在所有的周期中存在一个最小正数 T^*,则 T^* 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期.六个基本三角函数在其定义域内都是周期函数.正弦函数、余弦函数、正割函数、余割函数的最小正周期为 2π;而正切函数、余切函数的最小正周期为 π.三角函数的周期通常是指三角函数的最小正周期.一般地说,正弦函数、余弦函数、正割函数、余割函数的周期为 $2k\pi,k\in Z$;正切函数、余切函数的周期为 $k\pi,k\in Z$.在不致混淆的情况下,习惯上将三角函数的最小正周期简称周期(参见本卷《数学分析》中的"周期函数").若 $f(x)$ 表示基本三角函数,那么由 $y=f(x)$ 的图象求得 $y=f(nx)$ 的图象称为 $y=f(x)$ 到 $y=f(nx)$ $(n>0)$ 的周期变换.

三角函数的最小正周期(least positive period of trigonometricfunction)　见"三角函数的周期性".

三角函数的周期变换(periodic transformation of trigonometric function)　见"三角函数的周期性".

三角函数的周期(periodic of trigonometric function)　见"三角函数的周期性".

三角函数的简化公式(simplified formulas of trigonometric function)　三角函数周期性的一种应用.用于简化任意象限角的三角函数为锐角三角函数的公式.指把角 $-\alpha,90°\pm\alpha,180°\pm\alpha,270°\pm\alpha$,$360°-\alpha$ 和 $k\cdot360°+\alpha(k\in Z)$ 的三角函数用角 α 的三角函数表示的公式.诱导公式主要用于求任意角的三角函数值或解一些有关三角函数式化简的问题以及证明问题.利用诱导公式可以把任意象限角的三角函数化成锐角三角函数.三角函数的诱导公式共 54 个,列表如下:

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$90°-\alpha$ $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$90°+\alpha$ $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$180°-\alpha$ $(\pi-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$\csc\alpha$
$180°+\alpha$ $(\pi+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$270°-\alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$270°+\alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$360°-\alpha$ $(2\pi-\alpha)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$k\cdot360°+\alpha$ $(2k\pi+\alpha)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$

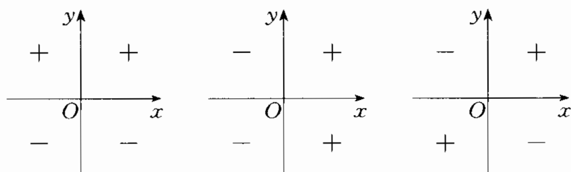
表中公式，可用统一口诀“奇变偶不变，符号看象限”把它们全部记住. 也就是 90°的奇数倍加减 α 的三角函数，变成 α 角的相应余函数；90°的偶数倍加减 α 的三角函数，仍为 α 的同名函数，符号是把 α 看成锐角时，原角所在象限的符号.

三角函数的零点(zero points of trigonometric function)　三角函数的特殊点. 在六个基本三角函数中，正割函数与余割函数不存在零点，其余四个基本三角函数都有零点存在，零点的分布如下表：

函　数	零　点
$y=\sin x$	$k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$
$y=\tan x$	
$y=\cos x$	$k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$
$y=\cot x$	

三角函数值的符号(sign of trigonometric function value)　三角学的基本概念之一. 指不同的象限角及轴角的三角函数值所取的正负符号. 六个基本三角函数值的符号，由角的终边在直角坐标平面里的具体位置确定，可分以下两种情况：

1. 各象限角的三角函数值的正负，由三角函数的定义和各象限内点的坐标的正负可知，正弦值 (y/r) 与余割值 (r/y) 对于第一、二象限的角是正的 $(y>0, r>0)$，而对于第三、四象限的角是负的 $(y<0, r>0)$；余弦值 (x/r) 与正割值 (r/x) 对于第一、四象限的角是正的 $(x>0, r>0)$，而对于第二、三象限的角是负的 $(x<0, r>0)$；正切值 (y/x) 与余切值 (x/y) 对于第一、三象限的角是正的 (x, y 同号)，而对于第二、四象限的角是负的 (x, y 异号). 上述三角函数值在每个象限的符号如下图所示：



2. 轴角的三角函数值如下表所示：

α	$2k\pi$	$2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$(2k+1)\pi$	$2k\pi+\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	1	0	−1
$\cos\alpha$	1	0	−1	0
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在
$\cot\alpha$	不存在	0	不存在	0
$\sec\alpha$	1	不存在	−1	不存在
$\csc\alpha$	不存在	1	不存在	−1

实数的公约数(common divisor of real numbers)　公约数概念的推广. 在研究三角函数的周期性时，常会遇到求某几个实数的公约数问题，因此必须将公约数概念作如下推广：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个不全为零的实数，若存在非零实数 b 和 n 个整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得 $a_i=k_ib\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称 b 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公约数. 这时又称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是可公度的. 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 可公度时，把它们的正公约数中最大的数，称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数，记为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 关于实数的公约数有下列四条性质：

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个不全为零的实数，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 存在公约数的充分必要条件是：对任意 $a_i, a_j\in\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，当 $a_j\neq 0$ 时，a_i/a_j 都是有理数.

2. 若实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是可公度的，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数存在.

3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个不全为零的实数，若 b 为它们的一个正公约数，则

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=b\left(\frac{|a_1|}{b}, \frac{|a_2|}{b}, \cdots, \frac{|a_n|}{b}\right).$$

4. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个不全为零的实数，对 $i=1,2,\cdots,n$，有 $a_i=k_ib\ (k_i\in\mathbf{Z}, b>0)$，若 $|k_1|, |k_2|, \cdots, |k_n|$ 均为 1，则 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)=b$.

实数公约数的性质(property of common divisor of real numbers)　见“实数的公约数”.

实数的公倍数(common multiple of real numbers)　公倍数概念的推广. 在研究三角函数的周期性时，常会遇到求某几个实数的公倍数问题. 因此，必须将公倍数的概念作如下推广：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一组全不为零的实数，若有非零实数 A 及整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得 $A=k_ia_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则称 A 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公倍数，所有正公倍数中最小的数称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数，记为 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$. 关于实数的公倍数有下列四条性质：

1. n 个全不为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 存在最小公倍数的充分必要条件是这 n 个实数可公度.

2. n 个全不为零的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 存在最小公倍数的充分必要条件是：对 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，有 a_i/a_n 为有理数.

3. 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个可公度的全不为零的实数，则

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot\left[\frac{a_1}{(a_1, a_2, \cdots, a_n)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2, \cdots, a_n)}, \cdots, \frac{a_n}{(a_1, a_2, \cdots, a_n)}\right].$$

4. 设 $n_i/m_i\ (i=1,2,\cdots,r)$ 是 r 个正的既约分数，则：

1） $\left(\frac{n_1}{m_1},\frac{n_2}{m_2},\cdots,\frac{n_r}{m_r}\right)=\frac{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}{[m_1,m_2,\cdots,m_r]}$.

2） $\left[\frac{n_1}{m_1},\frac{n_2}{m_2},\cdots,\frac{n_r}{m_r}\right]=\frac{[n_1,n_2,\cdots,n_r]}{(m_1,m_2,\cdots,m_r)}$.

实数公倍数的性质(property of common multiple of real numbers)　见“实数的公倍数”.

两个三角函数的和差积商的最小正周期(least positive period of the sum, difference, product and quotient of two trigonometric functions)　求两个三角函数最小正周期的方法. 两个三角函数的和、差、积、商的最小正周期，简称两个三角函数的最小正周期. 分三种类型概述如下：

1. 两个正弦型函数的和、差、积、商的最小正周期：

1）若函数

$F_1(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$

为非常值的周期函数，则

$$\left[\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{2\pi}{\omega_2}\right]$$

(参见“实数的公倍数”)是函数 $F_1(x)$ 的最小正周期.

2）若函数

$F_2(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)\cdot A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$

为非常值的周期函数，则：

① 当 $|\omega_1|\neq|\omega_2|$ 时，

$$\left[\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2},\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}\right]$$

是 $F_2(x)$ 的最小正周期.

② 当 $|\omega_1|=|\omega_2|$ 时，有 $\omega_1+\omega_2=0$ 或 $\omega_1-\omega_2=0$，无论哪种情况，$\pi/|\omega_1|$ 都是函数 $F_2(x)$ 的最小正周期.

3）若函数

$$F_3(x)=\frac{A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)}{A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)}$$

为非常值的周期函数，则：

① 当 $|\omega_1|\neq|\omega_2|$ 时，

$$\left[\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2},\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}\right]$$

是函数 $F_3(x)$ 的最小正周期.

② 当 $|\omega_1|=|\omega_2|$ 时，$\pi/|\omega_1|$ 是函数 $F_3(x)$ 的最小正周期.

2. 正弦型函数与正切型函数的和、差、积、商的最小正周期：

1）若函数

$G_1(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)+A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)$

为周期函数，则

$$\left[\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{\pi}{\omega_2}\right]$$

是函数 $G_1(x)$ 的最小正周期.

2）若函数

$G_2(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)\cdot A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)$

为周期函数，则

$$\left[\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{\pi}{\omega_2}\right]$$

是函数 $G_2(x)$ 的最小正周期.

3）若函数

$$G_3(x)=\frac{A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)}{A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)}$$

为周期函数，则

$$\left[\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{\pi}{\omega_2}\right]$$

是函数 $G_3(x)$ 的最小正周期.

4）若函数

$$G_4(x)=\frac{A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)}{A_1\tan(\omega_1x+\varphi_1)}$$

为周期函数，则

$$\left[\frac{\pi}{\omega_1},\frac{2\pi}{\omega_2}\right]$$

是函数 $G_4(x)$ 的最小正周期.

3. 两个正切型函数的和、差、积、商的最小正周期：

1）若函数

$H_1(x)=A_1\tan(\omega_1x+\varphi_1)+A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)$

为周期函数，则：

① 当 $\omega_1=\omega_2, A_1=A_2, \varphi_1=\varphi_2+k\pi+\pi/2$（对某个 $k\in\mathbf{Z}$）或者 $\omega_1=-\omega_2, A_1=-A_2, \varphi_1=-\varphi_2+k\pi+\pi/2$（对某个 $k\in\mathbf{Z}$）时，则 $\pi/(2|\omega_1|)$ 是函数 $H_1(x)$ 的最小正周期.

② 当 $|\omega_1|=|\omega_2|$，且 $\omega_1,\omega_2,A_1,A_2,\varphi_1,\varphi_2$ 不满足上述①中的条件时，则 $\pi/|\omega_1|$ 是函数 $H_1(x)$ 的最小正周期. 当 $|\omega_1|\neq|\omega_2|$ 时，则 $[\pi/\omega_1,\pi/\omega_2]$ 是函数 $H_1(x)$ 的最小正周期.

2）若函数

$H_2(x)=A_1\tan(\omega_1x+\varphi_1)\cdot A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)$

为周期函数，则 $\pi/|\omega_1|$ 为函数 $H_2(x)$ 的最小正周期.

3）若函数

$$H_3(x)=\frac{A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)}{A_1\tan(\omega_1x+\varphi_1)}$$

为周期函数，则

$$\left[\frac{\pi}{\omega_1},\frac{\pi}{\omega_2}\right]$$

为函数 $H_3(x)$ 的最小正周期.

两个三角函数和差积商的周期性(periodicity of the sum, difference, product and quotient of two trigonometric functions)　三角函数周期性概念的推广. 仅需就正弦型函数、余弦型函数、正切型函数和余切型函数两两之间的和、差、积、商的周期性进

行分类概述：

1. 两个正弦型函数和、差、积、商的周期性. 设

$$F_1(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$F_2(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$
$$F_3(x)=\frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

若在函数

$f_1(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)$与$f_2(x)=A_2\sin(\omega_2x+\varphi_2)$中，$\omega_2/\omega_1$为有理数，则函数$F_i(x)\ (i=1,2,3)$都是周期函数，且$[2\pi/\omega_1,2\pi/\omega_2]$（参见"实数的公倍数"）是它们的周期. 反之，若函数$F_i(x)\ (i=1,2,3)$为周期函数，则ω_2/ω_1为有理数.

2. 正弦型函数与正切型函数和、差、积、商的周期性. 设

$$G_1(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$G_2(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$
$$G_3(x)=\frac{f_2(x)}{f_1(x)},G_4(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

若在函数

$f_1(x)=A_1\sin(\omega_1x+\varphi_1)$与$f_2(x)=A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)$中，$\omega_2/\omega_1$为有理数，则函数$G_i(x)\ (i=1,2,3,4)$都是周期函数，且$[2\pi/\omega_1,\pi/\omega_2]$是它们的周期. 反之，若函数$G_i(x)\ (i=1,2,3,4)$为周期函数，则$\omega_2/\omega_1$为有理数.

3. 两个正切型函数的和、差、积、商的周期性. 设

$$H_1(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$H_2(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$
$$H_3(x)=\frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

若在函数

$f_1(x)=A_1\tan(\omega_1x+\varphi_1)$与$f_2(x)=A_2\tan(\omega_2x+\varphi_2)$中，$\omega_2/\omega_1$为有理数，则函数$H_i(x)\ (i=1,2,3)$都是周期函数，且$[\pi/\omega_1,\pi/\omega_2]$是它们的周期. 反之，若函数$H_i(x)(i=1,2,3)$为周期函数，则$\omega_2/\omega_1$为有理数.

有限个正弦型函数和的周期性(periodicity of finite sum of sine-type functions)　三角函数周期性概念的推广. 对有限个正弦型函数和的周期性有以下结论：设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\sin(\omega_ix+\varphi_i),$$

式中A_i,ω_i,φ_i都是实数，$A_i,\omega_i\neq0$，且$i\neq j$时，$|\omega_i|\neq|\omega_j|(i,j=1,2,\cdots,n)$，则$f(x)$是周期函数的充分必要条件是对任意的$i=1,2,\cdots,n$，有$\omega_i/\omega_1$为有理数，且当$f(x)$为周期函数时，其最小正周期是

$$T=\left[\frac{2\pi}{\omega_1},\frac{2\pi}{\omega_2},\cdots,\frac{2\pi}{\omega_n}\right].$$

有限个正弦型函数积的周期性(periodicity of finite product of sine-type functions)　三角函数周期性概念的推广. 对有限个正弦型函数积的周期性有以下结论：设

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n}A_i\sin(\omega_ix+\varphi_i),$$

式中$A_i,\omega_i,\varphi_i\in\mathrm{R},A_i,\omega_i\neq0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则函数$g(x)$为周期函数的充分必要条件是对$i=1,2,\cdots,n$，$\omega_i/\omega_1$为有理数. 上面若不要求$i\neq j$时，$|\omega_i|\neq|\omega_j|\ (i,j=1,2,\cdots,n)$则又有下面的结论：设

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n}[A_i\sin(\omega_ix+\varphi_i)\cdot B_i(\cos\omega_ix+\eta_i)],$$

其中$A_i,B_i,\omega_i,\varphi_i,\eta_i\in\mathrm{R},A_i,B_i,\omega_i\neq0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则函数$g(x)$为周期函数的充分必要条件是对$i=1,2,\cdots,n$，有$\omega_i/\omega_1$为有理数.

有限个正弦型函数乘积的商的周期性(periodicity of quotient of finite product of sine-type functions)　三角函数周期性概念的推广. 对有限个正弦型函数乘积的商的周期性有以下结论：设

$$h(x)=\frac{\prod_{i=n+1}^{m}A_i\sin(\omega_ix+\varphi_i)}{\prod_{i=1}^{n}A_i\sin(\omega_ix+\varphi_i)},$$

其中$A_i,\omega_i,\varphi_i\in\mathrm{R},A_i,\omega_i\neq0\ (i=1,2,\cdots,m)$，则函数$h(x)$为周期函数的充分必要条件是$\omega_i/\omega_1$为有理数$(i=1,2,\cdots,m)$.

有限个正切型函数和差积商的周期性(periodicity of the sum, difference, product and quotient of tangent form functions)　三角函数周期性概念的推广. 对有限个正切型函数和差积商的周期性有以下结论：

1. 设 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\tan(\omega_ix+\varphi_i)$,

其中$A_i,\omega_i,\varphi_i\in\mathrm{R},A_i,\omega_i\neq0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则$f(x)$为周期函数的充分必要条件是$\omega_i/\omega_1\ (i=1,2,\cdots,n)$为有理数.

2. 设 $g(x)=\prod_{i=1}^{n}A_i\tan(\omega_ix+\varphi_i)$,

其中$A_i,\omega_i,\varphi_i\in\mathrm{R},A_i,\omega_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$，则$g(x)$为周期函数的充分必要条件是$\omega_i/\omega_1(i=1,2,\cdots,n)$为有理数.

3. 设 $h(x)=\dfrac{\prod_{i=n+1}^{m}A_i\tan(\omega_ix+\varphi_i)}{\prod_{i=1}^{n}A_i\tan(\omega_ix+\varphi_i)}$,

其中$A_i,\omega_i,\varphi_i\in\mathrm{R},A_i,\omega_i\neq0\ (i=1,2,\cdots,m)$，则$h(x)$为周期函数的充分必要条件是$\omega_i/\omega_1(i=1,2,\cdots,m)$为有理数.

三角函数的作图法（construction method of

trigonometric function) 作三角函数图象的一般方法.在平面直角坐标系中,常见的有以下几种作三角函数 $y=f(x)$图象的方法:

1.描点法.亦称坐标法.在给定的基本三角函数的一个周期区间内,自小到大取自变量 x 的一些值(一般包括零点、极值点等特殊点的横坐标),计算出对应的函数值.把这些数对(x,y)所确定的点用一条平滑的曲线顺次连结起来,就得到三角函数在这个周期内的图象.再把这个图象周期地延拓,即沿 x 轴平移到整个定义域上去,就得到该三角函数的全部图象.在正弦或余弦函数的情形中,这种作图法有一个特例称为五点作图法.为了简便快速地画出这种函数一个周期区间的草图,可把从 $x=0$ 开始的周期四等份,取五个分点$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,5)$(即三个零点和两个极值点)描图.

2.几何作图法.亦称单位圆法.在平面直角坐标系中,把单位圆里一个周期内取的各角的三角函数线逐一平移(或旋转与平移),使其与横轴垂直,且始端点与横轴上相应弧度数的点重合.然后用平滑曲线顺次连结这些三角函数线的终端,就得到基本三角函数一个周期的图象.同样能得到该三角函数的全部图象.

3.图形变换法.有些三角函数的图象可以由基本三角函数图象通过平移和伸缩变换而得到.如正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\varphi>0)$的图象可以通过对 $y=\sin x$ 的图象进行平移、伸缩等变换而得到.

五点作图法(construction method by five-points) 见“三角函数的作图法”.

正弦曲线的作图(construction of sine curve) 正弦曲线的画法.指在直角坐标系中作正弦曲线,即画正弦函数 $y=\sin x$ 的图象.通常有以下两种画法:

1.描点法.亦称坐标法.作图时角的值 x 用弧度制,并将 x 和函数值 y 看做点的坐标.x 轴和 y 轴采用同一长度单位,x 轴的一个单位表示 1 弧度,y 轴的一个单位表示 1.在正弦函数的一个周期区间$[0,2\pi]$,取定 x 的一些值,计算出对应的 y 值,列表如下:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y=\sin x$	0	0.50	0.87	1.00	0.87	0.50

π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
0	−0.50	−0.87	−1.00	−0.87	−0.50	0

然后描出对应的各点,用平滑的曲线顺次连结起来,就得到正弦曲线从 $x=0$ 到 2π 的一段,如图 1 所示.根据正弦函数的周期性,在 x 等于 2π 到 4π,4π 到 6π,…,或 0 到 -2π,-2π 到 -4π,…的各段内,重复描绘从 0 到 2π 的一段,就得到任何范围内的正弦曲线,如图 2 所示.

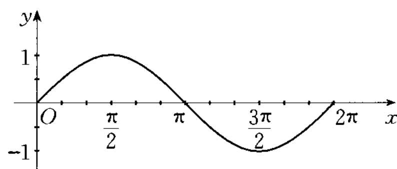


图1

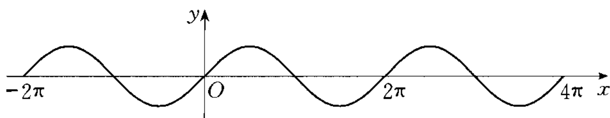


图2

描点法的一个特例是五点作图法.用于简便快速地画出正弦曲线从 $x=0$ 到 2π 的草图.把这个区间四等份,容易求得五个分点的 x 和 y 值,由此得出正弦曲线上的五个点$(0,0)$,$(\pi/2,1)$,$(\pi,0)$,$(3\pi/2,-1)$,$(2\pi,0)$.其中 $y=1$ 和 $y=-1$ 是极值点,另外三个 $y=0$ 是图象与 x 轴相交的零点.用平滑的曲线顺次把这五个点连结起来,就得出正弦曲线在区间$[0,2\pi]$上近似的一段,如图 3 所示.

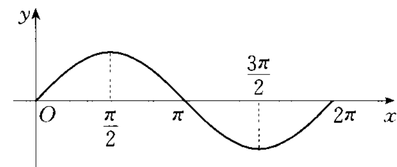


图3

2.几何作图法.亦称单位圆法.在负半 x 轴上适当位置取一点 O_1,以 O_1 为圆心作单位圆与 x 轴相交于两点 A_0 和 A_6,以 A_0 为始点,任意等分单位圆周(图 4 中是 12 等份),设分点为 $A_i(i=0,1,2,\cdots,12$,其中,A_0 与 A_{12}重合),又在正半 x 轴上取点 B,使$|OB|=2\pi$,并按与单位圆相同的等份数将 OB 等份.过各分点作 x 轴的垂线,设各垂线与过单位圆上同号分点 A_i 且平行于 x 轴的直线相交于点 a_i $(i=0,1,2,\cdots,12,a_{12}$与 B 重合).用平滑的曲线顺次将 a_i 连结起来,就得到正弦曲线从 $x=0$ 到 2π 的一段.如图 4 所示.

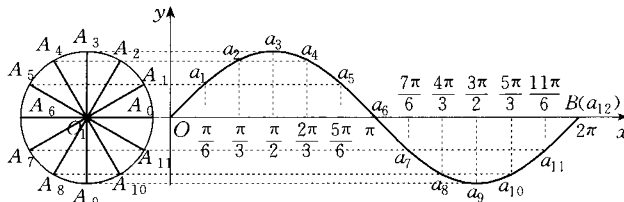


图4

余弦曲线的作图(construction of cosine curve) 余弦曲线的画法.指在直角坐标系中作余弦曲线,即画余弦函数 $y=\cos x$ 的图象.通常有以下两种画法:

1. 描点法. 亦称坐标法. 作图时角的值 x 用弧度制，并将 x 和函数值 y 看做点的坐标. x 轴和 y 轴采用同一长度单位，x 轴上一个单位表示 1 弧度，y 轴上一个单位表示 1. 在余弦函数的一个周期区间 $[0,2\pi]$，取定 x 的一些值，计算出对应的 y 值，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y=\cos x$	1	0.87	0.50	0	−0.50	−0.87

π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
−1	−0.87	−0.50	0	0.50	0.87	1

然后描出对应的各点，用平滑的曲线顺次连结起来，就得到正弦曲线从 $x=0$ 到 2π 的一段，如图 1 所示.

图1

根据余弦函数的周期性，在 x 等于 2π 到 4π，4π 到 6π，…，或者 0 到 -2π，-2π 到 -4π，…的各段内，重复描绘从 0 到 2π 的一段，就得到任何范围内的余弦曲线，如图 2 所示.

图2

2. 几何作图法. 亦称单位圆法. 在负半 x 轴上适当位置取一点 O_1，以 O_1 为圆心作单位圆与 x 轴过 O_1 的垂线相交于两点 A_0 和 A_6，以 A_0 点为始点，任意等分单位圆周(图 3 中是 12 等份)，

图3

设分点为 $A_i(i=0,1,2,\cdots,12$，其中 A_0 与 A_{12} 重合). 又在正半 x 轴上取点 C，使 $|OC|=2\pi$，并按与单位圆相同的等份数将 OC 等分. 过各分点作 x 轴的垂线，设各垂线与过单位圆上同号分点 A_i 且平行于 x 轴的直线相交于点 $a_i(i=0,1,2,\cdots,12)$. 用平滑的曲线顺次将 a_i 连结起来，就得到余弦曲线从 $x=0$ 到 2π 的一段. 如图 3 所示.

正切曲线的作图(construction of tangent curve)　正切曲线的画法. 指在直角坐标系中作正切曲线，即画正切函数 $y=\tan x$ 的图象. 通常有以下两种画法：

1. 描点法. 亦称坐标法. 作图时角的值 x 用弧度制，并将 x 和函数值 y 看做点的坐标. x 轴和 y 轴采用同一长度单位，x 轴的一个单位表示 1 弧度，y 轴的一个单位表示 1. 在正切函数的一个周期区间 $(-\pi/2,\pi/2)$，取定 x 的一些值，计算对应的 y 值，列表如下：

x	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$
$y=\tan x$	−3.73	−1.73	−1	−0.58	−0.27

0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
0	0.27	0.58	1	1.73	3.73

然后描出对应的各点，用平滑的曲线顺次连结起来，就得到正切曲线从 $x=-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 的一段，如图 1 所示. 正切函数是周期函数，其最小正周期是 π. 画出的这段曲线在 x 值每隔 π 时重复出现，但是当 $x=k\pi+\pi/2(k\in\mathbf{Z})$时，正切函数不存在. 因此，正切曲线是被诸平行线 $x=k\pi+\pi/2(k\in\mathbf{Z})$隔开的. 这些平行线是正切曲线的渐近线，通常把这些渐近线画成虚线，如图 2 所示.

图1

2. 几何作图法. 亦称单位圆法. 在负半 x 轴上适当位置取一点 O_1. 以 O_1 为圆心作单位圆，在点 O_1 之右与 x 轴交于点 A. 将单位圆的右半圆周任意偶数等分(图 3 中是 12 等份). 过各个分点作圆的半径，得到以 O_1A 为公共始边的从 0 到 $\pi/2$ 和从 0 到 $-\pi/2$ 的各个角. 设各角的终边的延长线与圆 O_1 在点 A 处的切线相交于点 $T_1,T_2,\cdots$和 $T_1',T_2',\cdots$，就得到各角的正切线 $AT_1,AT_2,\cdots$和 $AT_1',AT_2',\cdots$再按与右半单位圆相同的等份数将 x 轴上的区间 $[-\pi/2,\pi/2]$等分. 把诸正切线 AT_i 和 AT_i'(图 3 中

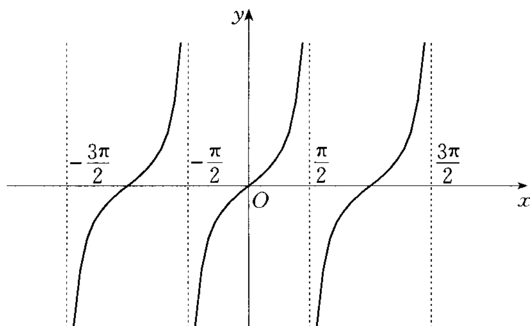
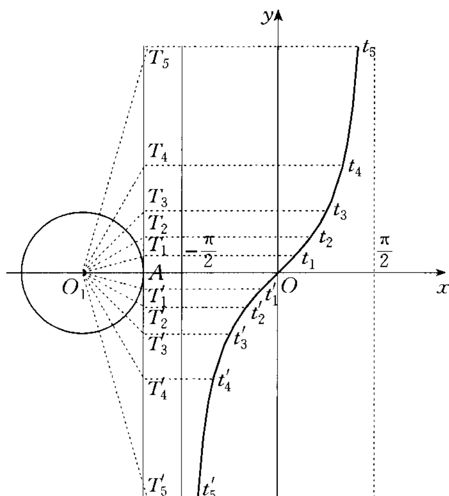


图2

$i=1,2,\cdots,5$)依次平移,使点 A 与 x 轴上的各分点重合. 设这时点 T_i 和 T'_i 的位置是点 t_i 和 t'_i. 用平滑的曲线顺次将 t_i 和 t'_i 连结起来,就得到正切曲线在 $x=-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 之间的一段. 如图 3 所示.


图3

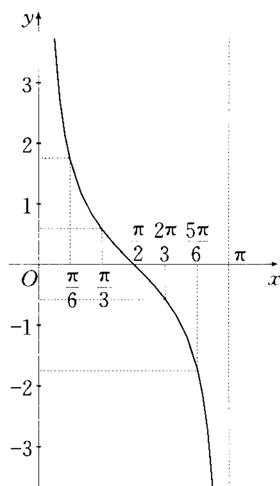
余切曲线的作图(construction of cotangent curve) 余切曲线的画法. 指在直角坐标系中作余切曲线,即画余切函数 $y=\cot x$ 的图象. 通常有以下两种画法:

1. 描点法. 亦称坐标法. 作图时角的值 x 用弧度制,并将 x 和函数值 y 看做点的坐标. x 轴和 y 轴采用同一长度单位,x 轴的一个单位表示 1 弧度,y 轴的一个单位表示 1. 在余切函数的一个周期区间$(0,\pi)$,取定 x 的一些值,计算对应的 y 值,列表如下:

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
$y=\cot x$	3.73	1.73	1	0.58	0.27

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
0	−0.27	−0.58	−1	−1.73	−3.73

然后描出对应的各点,用平滑的曲线顺次连结起来,就得到余切曲线从 $x=0$ 到 π 的一段,如图 1 所示.


图1

余切函数是周期函数,其最小正周期是 π. 画出的这段曲线在 x 值每隔 π 时重复出现,但是当 $x=k\pi(k\in \mathbf{Z})$时,余切函数不存在. 因此,余切曲线是被诸平行线 $x=k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$隔开的. 这些平行线是余切曲线的渐近线,通常把这些渐近线画成虚线,如图 2 所示.

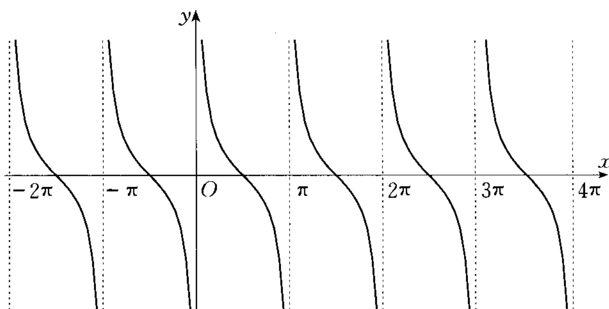
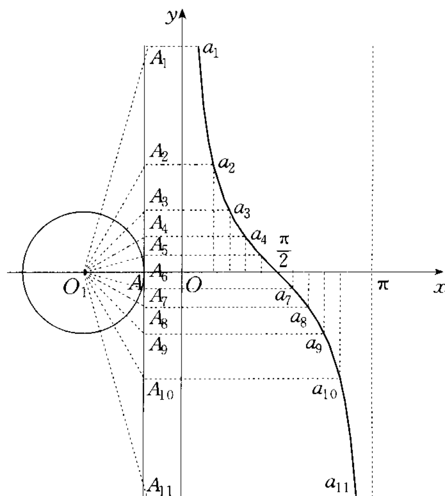


图2

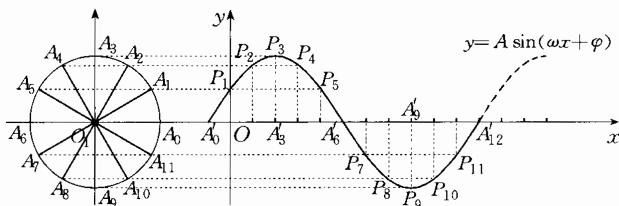
2. 几何作图法. 亦称单位圆法. 在负半 x 轴上适当位置取一点 O_1. 以 O_1 为圆心作单位圆,在点 O_1 之右与 x 轴交于点 A. 将单位圆的右半圆周任意偶数等分(图 3 中是 12 等份).


图3

过各个分点作圆的半径(或半径的延长线)与圆在点 A 处的切线交于点 A_i $(i=1,2,\cdots,11)$,再按与右半单位圆相同的等份数将 x 轴的区间$[0,\pi]$等分. x 轴在各分点处的垂线与过 $A_i(i=1,2,\cdots,11)$平行于 x 轴的直线依次相交于点 $a_i(i=1,2,\cdots,11)$. 用平滑

的曲线顺次将 a_i 连结起来，就得到余切曲线在 $x=0$ 到 π 之间的一段．如图3所示．

正弦型函数（sine-type function）　实践中广泛应用的一类重要函数．指函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 A,ω,φ 均为常数，且 $A>0,\omega>0$）．这里 A 称为振幅，ω 称为圆频率或角频率，φ 称为初相位或初相角．正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 是周期函数，其周期为 $2\pi/\omega$．正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的几何画法是：在横轴 Ox 上任取一点 C 为圆心，A 为半径作圆，与 x 轴相交于两点 A_0 和 A_6．以 A_0 为始点，任意等分此圆（图中是12等份），设分点为 $A_i(i=0,1,2,\cdots,12)$，其中 A_0 与 A_{12} 重合．在 x 轴上取 $OA'_0=-\varphi/\omega$，然后从 A'_0 起作 $A'_i(i=0,1,2,\cdots,12)$，使 $A'_iA'_{i+1}=\pi/6\omega$，即周期 $2\pi/\omega$ 的 1/12．过 A_i 与 A'_i 分别与 x 轴和 y 轴平行的直线交于点 P_i，连结 P_i 各点成光滑曲线，即得 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在一个周期内的近似图象．正弦型函数的图象也称为正弦型曲线或称正弦波．如图所示．



正弦型曲线还可由正弦曲线 $y=\sin x$ 的图象经过适当的横向和纵向的伸缩变换及横向平移变换而得到，许多物理现象的规律可以用正弦型函数表示，如质点作简谐振动时，该质点相对于平衡位置的位移 y 与时间 t 的关系可用正弦型函数表示．罗贝瓦尔（Roberval，G. P. de）于1634年在研究旋轮线时，把正弦型曲线 $y=a\sin(x/a)$（其中 a 是母圆的半径）当做旋轮线的伴侣而引入数学的．

正弦型曲线（sine-type curve）　见“正弦型函数”．

正弦波（sine wave）　见“正弦型曲线”．

三角函数表（table of trigonometric function）　一种常用的数据表．指具有定间隔（角度）、定精确度（函数值）的某一组锐角三角函数值表的统称．它包括正弦、余弦、正切、余切的函数表．一般常用的有五位三角函数表（间隔 $1'$；五位有效数字）和四位三角函数表（四位有效数字；正表间隔 $6'$，结合所附的线性内插表可达间隔 $1'$）．为满足某些特殊的需要，还有六位、七位、八位等三角函数表．三角函数表的用途是，利用它并结合运用诱导公式可以求出任意角的一定精确度的三角函数值．

三角函数表的发展史凝聚着众多数学家的心血．托勒密（Ptolemy）在《天文集》中给出了从 $0°$ 到 $90°$ 间隔 $(1/4)°$ 的正弦表（相当于间隔 $15'$ 的正弦表）．阿布・瓦法（Abul-Wefa）在翻译丢番图（Diophantus）著作时已把正切函数引进三角学，他以间隔为 $15'$ 的正弦表和正切表的计算而闻名．15世纪的乌鲁伯格（Ulūgh Beg）编制了著名的间隔为 $1'$ 的，精确到8位小数的正弦表和正切表．欧洲文艺复兴时期，皮蒂斯楚斯（Pitiscus，B.）于1596年后着手校正、完善雷蒂库斯（Rhaeticus，G. J.）的三角函数表．经过长期不懈的努力，于1613年最后完成重新出版．此表间隔已达 $10''$，精确到 10^{-9}．纳皮尔（Napier，J.）在《奇妙的对数规则的说明》中给出了间隔 $1'$ 的正弦对数表，不久他又在《奇妙对数规则的结构》中详细阐述了对数计算和造对数表的方法．1620年，冈特（Gunter，E.）在所著《三角法则》一书中首先给出以10为底的间隔 $1'$ 的7位数正弦、余弦对数表，从而使三角学中的数学计算大为简化．随着电子计算机的出现和使用，利用正弦级数和余弦级数，现已可以制作出角度间隔极小、精确度极高的三角函数表，同时三角函数表的用途已被电子计算器所取代．

编制三角函数表的辛普森公式（Simpson formula for tabulation of trigonometric functions）　编制三角函数表的一种近似公式．该公式表示如下：

1. $\sin(m+1)10''-\sin(m\cdot10'')=\sin(m\cdot10'')-\sin(m-1)10''-k\sin(m\cdot10'')$．

2. $\cos(m+1)10''-\cos(m\cdot10'')=\cos(m\cdot10'')-\cos(m-1)10''-k\cos(m\cdot10'')$．

式中 m 为自然数，

$$k=0.000\,000\,002\,350\,443\,053（弱）.$$

利用此公式，可以逐个求出 $10''$ 的锐角正弦、余弦函数的近似值．用此公式计算正弦、余弦值较为麻烦，现已不用了，而是用正弦级数和余弦级数可以计算出任意角度的正弦、余弦函数值．辛普森（Simpson，T.）在担任教师期间所著教科书《三角》中给出此公式，从此而得名．

三角函数对数表（logarithmic table of trigonometric function）　一种常用的数据表．指具有一定间隔的锐角三角函数值的常用对数值表．如正弦对数表、余弦对数表、正切对数表、余切对数表，常见有4位、5位（中学生用）和6—10位（工程和科研用）的三角函数对数表．由于正弦函数与余弦函数，正切函数与余切函数在[0°，90°]内互余，所以造表时常把正弦对数和余弦对数造入同一表中，把正切对数和余切对数造入同一表中．因此，查正弦函数和正切函数的对数时，从表的左边自上往下查寻；查余弦函数和余切函数的对数时，从表的右边自下往上查寻．冈特（Gunter，E.）曾在1620年发表的《三角法则》中给出第一张相隔 $1'$ 的七位数正弦对数和正切对数

表，并引入余弦和余切概念.

三角函数的表对数(apparent logarithm of trigonometric function)　三角学术语. 表示三角函数对数的一种简便法则. 即三角函数的对数与 10 的和. 规定三角函数的表对数是为了避开三角函数的对数首数多为负值之不便. 用 L 表示三角函数的表对数，以区别于三角函数的对数，例如

$$L\sin 18°35' = \lg\sin 18°35' + 10 = 9.50298.$$

三角式的变形

三角函数的加法公式(addition formula of trigonometric function)　亦称加法定理，又称两角和差的三角函数公式. 常简称和角公式. 它是求两角和差的三角函数的一类重要公式. 其公式如下：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \quad (1)$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta, \quad (2)$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}, \quad (3)$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}. \quad (4)$$

公式(3)，(4)中，角 α,β 及 $\alpha\pm\beta$ 的取值必须使等式两边同时有意义，即只能在使等式两边都有意义的正切、余切的定义域的交集内取值. 和角公式是重要的基本三角恒等式，通常用于：

1. 求某些特殊角的三角函数值.
2. 化简某些三角函数式.
3. 证明某些三角恒等式.
4. 已知某两角的三角函数值，求此二角的和或差的三角函数值.

和角公式是三角学中古老的定理，古希腊罗德岛的喜帕恰斯(Hipparchus，(R))就已经知道了和差角公式，后由托勒密(Ptolemy)明确给出. 公元 980 年和 1150 年左右，阿布・瓦法(Abul-Wefa)和婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)也都分别独立地提出过类似的公式. 约翰第一・伯努利(Bernoulli，Jahann Ⅰ)给出了两角和差的全体三角函数公式.

加法定理(addition theorem)　即“三角函数的加法公式”.

和角公式(trigonometric formula of sum of angles)　三角函数的加法公式的简称.

三角函数的降幂公式(descending power formula of trigonometric function)　三角函数的一类重要公式. 即把一类三角函数的幂式，表示成比它们的次数较低的三角函数式的公式，统称为三角函数的降幂公式. 此公式通常是用于对三角函数式的化简、求值和证明等问题中. 降幂公式实际上就是由正、余弦函数的二倍角、三倍角等倍角公式变形而来，常用的三角函数的降幂公式如下：

1. $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

2. $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$.

3. $\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)$.

4. $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)$.

5. $\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3)$.

6. $\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3)$.

7. $\sin^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n-1}}\cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i}C_{2n}^{i}\cos(2n-2i)\alpha+\frac{C_{2n}^{n}}{2}\right]$.

8. $\cos^{2n}\alpha=\frac{1}{2^{2n-1}}\left[\sum_{i=0}^{n-1}C_{2n}^{i}\cos(2n-2i)\alpha+\frac{C_{2n}^{n}}{2}\right]$.

9. $\sin^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}C_{2n+1}^{i}\sin(2n-2i+1)\alpha$.

10. $\cos^{2n+1}\alpha=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{i}\cos(2n-2i+1)\alpha$.

三角函数的升幂公式(ascending power formula of trigonometric function)　三角函数的一类重要公式. 即把一类三角函数式表示成比它们的次数高的三角函数式的公式的统称. 例如，三角函数的倍角公式都是升幂公式.

三角函数的乘幂公式(power formula of trigonometric function)　三角函数的降幂公式与三角函数的升幂公式的统称.

三角函数的倍角公式(formula for trigonometric function of multiple of a angle)　三角函数的一类重要公式. 指以角 α 的三角函数表示 n(正整数)倍角 $n\alpha$ 的三角函数的公式. 常用的公式是：

二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

三倍角公式[①]

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$

① 以下 4 式是被谢克昌教授(山西大学师范学院)发现并刊于《数学通报》1993 年第 8 期上的一组三倍角的三角函数公式，有利于三角函数的求值、证明和化简等运算.

$$\begin{cases}\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)\\ \cos 3\alpha=4\cos\alpha\cos(60°-\alpha)\cos(60°+\alpha)\\ \tan 3\alpha=\tan\alpha\tan(60°-\alpha)\tan(60°+\alpha)\\ \cot 3\alpha=\cot\alpha\cot(60°-\alpha)\cot(60°+\alpha)\end{cases}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.$$

n 倍角公式

$$\sin n\alpha=\begin{cases}C_n^1\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha-C_n^3\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha+\cdots+\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\alpha \quad (n\text{ 是奇数}),\\C_n^1\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha-C_n^3\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha+\cdots+\\(-1)^{\frac{n-2}{2}}\cdot n\sin^{n-1}\alpha\cos\alpha \quad (n\text{ 是偶数}).\end{cases}$$

$$\cos n\alpha=\begin{cases}\cos^n\alpha-C_n^2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha+\cdots+\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n\sin^{n-1}\alpha\cos\alpha \quad (n\text{ 是奇数}),\\\cos^n\alpha-C_n^2\sin^2\alpha\cos^{n-2}\alpha+\cdots+\\(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\sin^n\alpha \quad (n\text{ 是偶数}).\end{cases}$$

三角函数的半角公式(formula for trigonometric function of half of a angle) 三角函数的一类重要公式.指以角 α 的三角函数表示其半角 $\alpha/2$ 的三角函数的公式:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

根号前的正负号依 $\alpha/2$ 所在的象限而定.

三角函数的和差化积(change sum or difference into product of trigonometric function) 三角函数的一类重要公式.指一些三角函数的和或差可以依式化成三角函数的乘积:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

三角函数的积化和差(change product into sum or difference of trigonometric function) 三角函数的一类重要公式.指一些三角函数的乘积可以依式化成三角函数的和或差:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

三角函数的万能代换式(universal substitution formula of trigonometric function) 亦称三角函数的万能置换式,简称万能公式.三角函数的一类重要公式.指将角 α 的六种基本三角函数转化为 $\tan\alpha/2$ 的有理分式的六个代换式:

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cot\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sec\alpha=\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}};\quad \csc\alpha=\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

在公式的应用中常令 $t=\tan(\alpha/2)$,把三角函数式化简成以 t 为变元的代数式,使运算更易进行.以上公式在有关三角函数式的化简、证明、求值、解三角不等式、解三角方程、确定值域和微积分中都有广泛的应用.对三角函数的有理式积分进行计算时,总可以通过此类公式转化为有理式积分,故三角函数的万能代换式,常简称万能公式.

万能公式(universal formula) 三角函数的万能代换式的简称.

三角恒等式(trigonometric identity) 一种特殊恒等式.即只含有三角函数的恒等式.常见的同角三角函数的基本关系式、诱导公式、和差角公式、倍角公式、半角公式、降幂及升幂公式,三角函数的和差化积与积化和差公式以及万能代换公式等,都是三角恒等式.

三角恒等式的证明(proof of trigonometric identity) 证明三角恒等式的一般方法.对三角恒等式的左右端,通过一系列的恒等变形,推导出两端明显相等,称为三角恒等式的证明.常用的证法如下:

1. 综合法.恒等式的一端较繁,而另一端较简,由较繁的一端,通过某些恒等变形直接推导出另一端,称为综合法.

2. 分析法.假设给出的三角恒等式是成立的,寻求能成立的必要条件,逐步逆推,直推至与已知条件符合(或推至与某些最简三角恒等式相符).这种执果索因的探求证明过程的方法称为分析法.

3. 分析、综合法.对命题的证明推导过程用分析法进行思考,即从结论出发反推至已知条件,称为执果索因;然后用综合法叙述推理过程,称为由因寻果.这样兼用二者之长,完成三角恒等式的证明,称为分析、综合法.

4. 同一法.恒等式的两端都较繁时,常将两端都分别作恒等变形,使之同时等于第三式,从而证得命题成立,称为三角恒等式证明的同一法.

5. 比较法(或称求差法).欲证给定式的左右两

端相等，只需证明它们的差为零.

6. 数学归纳法. 凡与正整数 n 有关的三角恒等式，常用此法证明(参见本卷《初等代数》中的“数学归纳法”).

7. 复数法. 利用复数的性质也可以证明某些三角恒等式.

8. 数形结合法. 根据命题结构的特征，若命题有着明显的几何意义，则可借助于图形，用数形结合的方法证明三角恒等式.

三角式的恒等变形(identical transformation of trigonometrical expression) 三角恒等变形的一般方法. 将原三角函数式变为与之恒等的其他三角函数式的代换过程称为三角式的恒等变形. 一般使用各种三角公式，包括三角函数间的关系式，三角函数的和、差、倍、分公式，和差与积的互化公式等. 此外还要用到代数的、几何的变换技能和技巧. 由于使用的公式较多，方法灵活多变，常需几种方法结合使用. 常用的方法有：

1. 运用三角函数的定义.
2. 减少函数种类.
3. 异角三角函数与同角三角函数互化.
4. 异名三角函数与同名三角函数互化.
5. 将三角函数升次或降次.
6. 灵活运用各种三角公式及其变形.
7. 变元替换.
8. 构造函数式或方程.
9. 运用函数或角的等值代换.
10. 引入适当的辅助函数.
11. 利用万能公式(参见“万能公式”).

反三角函数

反三角函数(inverse trigonometric function) 一类初等函数. 指三角函数的反函数. 由于基本三角函数具有周期性，所以反三角函数是多值函数. 这种多值的反三角函数包括：反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数、反正割函数、反余割函数，分别记为

$$\mathrm{Arcsin}\ x, \mathrm{Arccos}\ x, \mathrm{Arctan}\ x,$$
$$\mathrm{Arccot}\ x, \mathrm{Arcsec}\ x, \mathrm{Arccsc}\ x.$$

但是，在实函数中一般只研究单值函数，只把定义在包含锐角的单调区间上的基本三角函数的反函数，称为反三角函数，这时亦称反圆函数. 为了得到单值对应的反三角函数，人们把全体实数分成许多区间，使每个区间内的每个有定义的 y 值都只能有惟一确定的 x 值与之对应. 为了使单值的反三角函数所确定的区间具有代表性，常遵循如下条件：

1. 为了保证函数与自变量之间的单值对应，所确定的区间必须具有单调性.

2. 函数在这个区间最好是连续的(这里之所以说最好，是因为反正割和反余割函数是间断的).

3. 为了使研究方便，常要求所选择的区间包含 0 到 $\pi/2$ 的角.

4. 所确定的区间上的函数值域应与正函数的定义域相同. 这样确定的反三角函数就是单值的，为了与上面多值的反三角函数相区别，在记法上常将 Arc 中的 A 改记为 a，例如单值的反正弦函数记为 $\arcsin x$. 现将反三角函数的定义域和值域列表如下：

函数名称	定 义 域	值 域
$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$	$y\in[0,\pi]$
$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\mathrm{arccot}\, x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(0,\pi)$
$y=\mathrm{arcsec}\, x$	$x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
$y=\mathrm{arccsc}\, x$	$x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

表中所列单值的各反三角函数被限制的区间称为各反三角函数的主值区间，各反三角函数在主值区间内的值称为各反三角函数的主值. 在单值对应意义下的反三角函数，被看成多值的反三角函数的主值. 多值的反三角函数可用其主值表示如下：

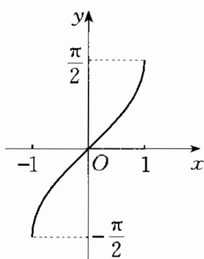
$$\mathrm{Arcsin}\, x=k\pi+(-1)^k\arcsin x, k\in\mathbf{Z},$$
$$\mathrm{Arccos}\, x=2k\pi\pm\arccos x, k\in\mathbf{Z},$$
$$\mathrm{Arctan}\, x=k\pi+\arctan x, k\in\mathbf{Z},$$
$$\mathrm{Arccot}\, x=k\pi+\mathrm{arccot}\, x, k\in\mathbf{Z},$$
$$\mathrm{Arcsec}\, x=2k\pi\pm\mathrm{arcsec}\, x, k\in\mathbf{Z},$$
$$\mathrm{Arccsc}\, x=k\pi+(-1)^k\mathrm{arccsc}\, x, k\in\mathbf{Z}.$$

反三角函数符号 $\arcsin x,\cdots,\mathrm{arccsc}\, x$，是丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli, Daniel Ⅰ)于 1729 年首创，后被拉格朗日(Lagrange, J.-L.)所采纳，并完善和广泛使用，这种符号通行于欧洲大陆(包括苏联). 但英、美却用另一种记法，分别以 $\sin^{-1}x,\cdots,\csc^{-1}x$ 表反正弦……反余割，这是赫谢尔(Herschel, J. F. W.)在 1813 年开始创用的. 1950 年以前中国亦用此记法，1950 年以后改用前者.

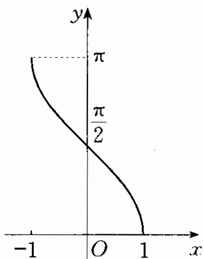
反圆函数(inverse circular function) 即“反三角函数”.

反正弦函数(inverse sine function) 反三角函数之一. 指正弦函数 $y=\sin x$ 在闭区间$[-\pi/2,$

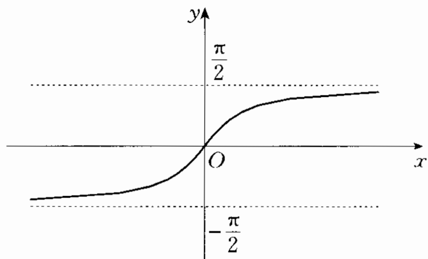
$\pi/2]$上的反函数. 记为 $y=\arcsin x$,亦记为 $y=\sin^{-1}x$. 它表示$[-\pi/2,\pi/2]$上正弦值等于 x 的那个惟一确定的角,即 $\sin(\arcsin x)=x$,其定义域是$[-1,1]$,值域是$[-\pi/2,\pi/2]$. 由于正弦函数在闭区间$[-\pi/2,\pi/2]$上是单调连续的,因此,反正弦函数是存在且惟一确定的. 引进多值函数概念后,就可以在正弦函数的整个定义域$(-\infty,+\infty)$上来考虑它的反函数,这时的反正弦函数是多值的,记为 $y=\mathrm{Arcsin}\,x$,定义域是$[-1,1]$,值域是$(-\infty,+\infty)$. 于是,把 $y=\arcsin x\,(x\in[-1,1],y\in[-\pi/2,\pi/2])$称为反正弦函数的主值,而把 $y=\mathrm{Arcsin}\,x=k\pi+(-1)^k\arcsin x\,(x\in[-1,1],y\in(-\infty,+\infty),k\in\mathrm{Z})$称为反正弦函数的通值. 反正弦函数在$[-1,1]$上的图象可由区间$[-\pi/2,\pi/2]$上的正弦曲线作关于直线 $y=x$ 的对称变换而得到. 如图所示.



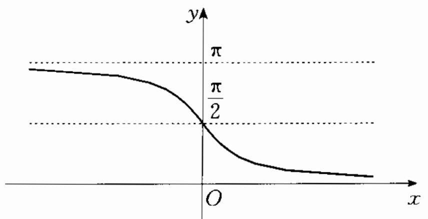
反余弦函数(inverse cosine function) 反三角函数之一. 指余弦函数 $y=\cos x$在闭区间$[0,\pi]$上的反函数. 记为 $y=\arccos x$,亦记为 $y=\cos^{-1}x$. 它表示$[0,\pi]$上余弦值等于 x 的那个惟一确定的角,即 $\cos(\arccos x)=x$,其定义域是$[-1,1]$,值域是$[0,\pi]$. 由于余弦函数在闭区间$[0,\pi]$上是单调连续的,因此,反余弦函数是存在且惟一确定的. 引进多值函数概念后,就可以在余弦函数的整个定义域$(-\infty,+\infty)$上来考虑它的反函数,这时的反余弦函数是多值的,记为 $y=\mathrm{Arccos}\,x$,定义域是$[-1,1]$,值域是$(-\infty,+\infty)$. 于是把 $y=\arccos x\,(x\in[-1,1],y\in[0,\pi])$称为反余弦函数的主值,而把 $y=\mathrm{Arccos}\,x=2k\pi\pm\arccos x\,(x\in[-1,1],y\in(-\infty,+\infty),k\in\mathrm{Z})$称为反余弦函数的通值. 反余弦函数 $y=\arccos x$在$[-1,1]$上的图象可由区间$[0,\pi]$上的余弦曲线作关于直线 $y=x$ 的对称变换而得到. 如图所示.



反正切函数(inverse tangent) 反三角函数之一. 指正切函数 $y=\tan x$在开区间$(-\pi/2,\pi/2)$中的反函数. 记为 $y=\arctan x$或 $y=\tan^{-1}x$. 它表示$(-\pi/2,\pi/2)$上正切值等于 x 的那个惟一确定的角,即 $\tan(\arctan x)=x$,反正切函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(-\pi/2,\pi/2)$. 由于正切函数在开区间$(-\pi/2,\pi/2)$中是单调连续的,因此,反正切函数是存在且惟一确定的. 引进多值函数概念后,就可以在正切函数的整个定义域($x\in\mathrm{R}$,且 $x\neq k\pi+\pi/2,k\in\mathrm{Z}$)上来考虑它的反函数,这时的反正切函数是多值的,记为 $y=\mathrm{Arctan}\,x$,定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是 $y\in\mathrm{R},y\neq k\pi+\pi/2,k\in\mathrm{Z}$. 于是,把 $y=\arctan x\,(x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\pi/2,\pi/2))$称为反正切函数的主值,而把 $y=\mathrm{Arctan}\,x=k\pi+\arctan x\,(x\in\mathrm{R},y\in\mathrm{R},\ y\neq k\pi+\pi/2,k\in\mathrm{Z})$称为反正切函数的通值. 反正切函数在$(-\infty,+\infty)$上的图象可由区间$(-\pi/2,\pi/2)$上的正切曲线作关于直线 $y=x$ 的对称变换而得到. 如图所示.

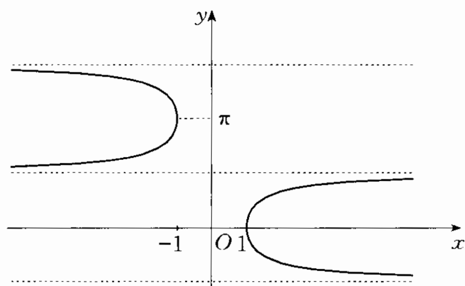


反余切函数(inverse cotangent function) 反三角函数之一. 指余切函数 $y=\cot x$ 在开区间$(0,\pi)$中的反函数. 记为 $y=\mathrm{arccot}\,x$ 或 $y=\cot^{-1}x$. 它表示$(0,\pi)$内余切值等于 x 的那个惟一确定的角,即 $\cot(\mathrm{arccot}\,x)=x$,反余切函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,\pi)$. 由于余切函数在开区间$(0,\pi)$中是单调连续的,因此,反余切函数是存在且惟一确定的. 引进多值函数概念后,就可以在余切函数的整个定义域($x\in\mathrm{R}$,且 $x\neq k\pi,k\in\mathrm{Z}$)上来考虑它的反函数,这时的反余切函数是多值的,记为 $y=\mathrm{Arccot}\,x$,定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是 $y\in\mathrm{R},y\neq k\pi,k\in\mathrm{Z}$. 于是,把 $y=\mathrm{arccot}\,x\,(x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi))$称为反余切函数的主值,而把 $y=\mathrm{Arccot}\,x=k\pi+\mathrm{arccot}\,x\,(x\in\mathrm{R},\ y\in\mathrm{R},\ y\neq k\pi,k\in\mathrm{Z})$称为反余切函数的通值. 反余切函数在$(-\infty,+\infty)$上的图象可由区间$(0,\pi)$内的余切曲线作关于直线 $y=x$ 的对称变换而得到. 如图所示.

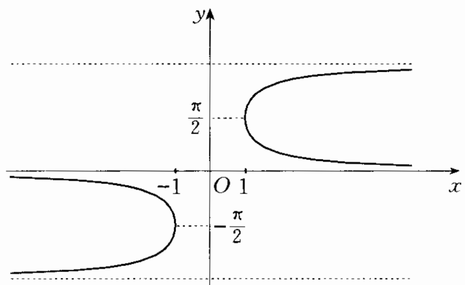


反正割函数(inverse secant function) 反三角函数之一. 指正割函数 $y=\sec x$ 在区间$[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$上的反函数. 记为 $y=\mathrm{arcsec}\,x$ 或 $y=\sec^{-1}x$. 它表示$[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$上正割值等于 x 的那个惟一确定的角,即 $\sec(\mathrm{arcsec}\,x)=x$,反正割函数的定义域是$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,值域是$[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$. 由于正割函数在区间$[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$上是单调连续的,因此,反正割函数是存在

且惟一确定的.引进多值函数概念后,就可以在正割函数的整个定义域($x\in\mathrm{R}$,且 $x\neq k\pi+\pi/2,k\in\mathrm{Z}$)上来考虑它的反函数,这时的反正割函数是多值的,记为 $y=\mathrm{Arcsec}\,x$,定义域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,值域是 $y\in\mathrm{R},y\neq k\pi+\pi/2,k\in\mathrm{Z}$.
于是,把 $y=\mathrm{arcsec}\,x$ ($x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,$y\in[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$)称为反正割函数的主值,而把 $y=\mathrm{Arcsec}\,x=2k\pi\pm\mathrm{arcsec}\,x$ ($x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,$y\in\mathrm{R},y\neq k\pi+\pi/2,k\in\mathrm{Z}$)称为反正割函数的通值.反正割函数在区间 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上的图象可由区间 $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ 上的正割曲线作关于直线 $y=x$ 的对称变换而得到.如图所示.



反余割函数(inverse cosecant function) 反三角函数之一.指余割函数 $y=\csc x$ 在区间 $[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$ 上的反函数.记为 $y=\mathrm{arccsc}\,x$ 或 $y=\csc^{-1}x$.它表示 $[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$ 上余割值等于 x 的那个惟一确定的角,即 $\csc(\mathrm{arccsc}\,x)=x$,反余割函数的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,值域是 $[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$.由于余割函数在区间 $[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$ 上是单调连续的,因此,反余割函数是存在且惟一确定的.引进多值函数概念后,就可以在余割函数的整个定义域($x\in\mathrm{R}$,且 $x\neq k\pi,k\in\mathrm{Z}$)上来考虑它的反函数,这时的反余割函数是多值的,记为 $y=\mathrm{Arccsc}\,x$,定义域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,值域是 $y\in\mathrm{R},y\neq k\pi,k\in\mathrm{Z}$.



于是,把 $y=\mathrm{arccsc}\,x$ ($x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,$y\in[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$)称为反余割函数的主值,而把 $y=\mathrm{Arccsc}\,x=k\pi+(-1)^k\mathrm{arccsc}\,x$ ($x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,$y\in\mathrm{R},y\neq k\pi,k\in\mathrm{Z}$)称为反余割函数的通值.反余割函数在区间 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上的图象可由区间 $[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$ 上的余割曲线作关于直线 $y=x$ 的对称变换而得到.如图所示.

反三角函数图象(graph of inverse trigonometric function) 亦称反三角函数曲线.反映反三角函数变化规律的一种图形,并分别称为反正弦、反余弦、反正切、反余切、反正割、反余割函数的图象或曲线.对单值定义的反三角函数而言,在六种反三角函数中,反正弦函数与反余弦函数的图象不存在渐近线,其余四种反三角函数图象都有渐近线,渐近线方程列表如下:

函　数	渐近线方程
$y=\arctan x$	$y=\pm\frac{\pi}{2}$
$y=\mathrm{arccot}\,x$	$y=0,y=\pi$
$y=\mathrm{arcsec}\,x$	$y=\frac{\pi}{2}$
$y=\mathrm{arccsc}\,x$	$y=0$

反三角函数曲线(curve of inverse trigonometric function) 即"反三角函数图象".

反三角函数图象的渐近线(asymptote of graph of inverse trigonometric function) 见"反三角函数图象".

反三角函数的单调性(monotonicity of inverse trigonometric function) 反三角函数的重要特征之一.系指单值定义的反三角函数的单调性.六种反三角函数的主值是单调的.具体地说,反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数;反余弦函数 $y=\arccos x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是减函数;反正切函数 $y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数;反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数;反正割函数 $y=\mathrm{arcsec}\,x$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 或 $[1,+\infty)$ 上是增函数;反余割函数 $y=\mathrm{arccsc}\,x$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 或 $[1,+\infty)$ 上是减函数.

反三角函数的奇偶性(parity of inverse trigonometric function) 反三角函数的重要特征之一.系指单值定义的反三角函数的奇偶性.六种反三角函数的奇偶性如下:反正弦函数、反正切函数、反余割函数都是奇函数,反余弦函数、反余切函数、反正割函数是非奇非偶函数.

反三角函数的有界性(boundedness of inverse trigonometric function) 反三角函数的重要特征之一.单值定义的六种反三角函数的上确界和下确界.对单值定义的反三角函数而言,六种反三角函数在各自的定义域上都是有界函数.反余弦函数、反余切函数和反正割函数的上确界是 π,下确界是 0;反

正弦函数、反正切函数和反余割函数的上确界是 $\pi/2$，下确界是 $-\pi/2$.

反三角函数的拐点(inflection point of inverse trigonometric function)　反三角函数的重要特征之一. 对单值定义的反三角函数而言，在六种反三角函数中，反正割函数与反余割函数都不存在拐点，其余四种反三角函数都存在拐点，拐点的分布如下表：

函　数	拐　点
$y=\arcsin x$	$(0,0)$
$y=\arccos x$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\arctan x$	$(0,0)$
$y=\text{arccot}\, x$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

反三角函数的通值(general value of inverse trigonometric function)　三角学的基本概念之一. 对于三角函数 $x=f(y)$，在允许值集合里任意给定一个 x 值，在 R 上都有无穷多个 y 值与之对应. 这里 y 值的集合称为反三角函数的通值. 反正弦、反余弦、反正切、反余切、反正割、反余割函数的通值分别用 $\text{Arcsin}\, x$，$\text{Arccos}\, x$，$\text{Arctan}\, x$，$\text{Arccot}\, x$，$\text{Arcsec}\, x$，$\text{Arccsc}\, x$ 表示. 相对于反三角函数的通值，则把 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\text{arccot}\, x$，$\text{arcsec}\, x$，$\text{arccsc}\, x$ 称为反三角函数的主值，主值所在的区间称为反三角函数的主值区间(参见“反三角函数”).

反三角函数的主值(principal value of inverse trigonometric function)　见“反三角函数的通值”.

反三角函数的主值区间(principal value interval of inverse trigonometric function)　见“反三角函数的通值”.

三角函数的反三角运算(inverse trigonometric operation of trigonometric function)　一种复合运算. 指求三角函数的反三角函数. 当 x 是反三角函数主值区间内的角时，根据互反的两个函数复合结果等于自变量的值，可直接得出下列三角函数的反三角运算的基本公式：

1. $\arcsin(\sin x)=x\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $\arccos(\cos x)=x\ \ (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

3. $\arctan(\tan x)=x\ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

4. $\text{arccot}(\cot x)=x\ \ (0<x<\pi)$.

当 x 不受反三角函数主值区间的限制时，有下列三角函数的反三角运算公式.

5. $\text{Arcsin}(\sin x)=k\pi+(-1)^k\arcsin(\sin x)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

6. $\text{Arccos}(\cos x)=2k\pi\pm\arccos(\cos x)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

7. $\text{Arctan}(\tan x)=k\pi+\arctan(\tan x)$ $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

8. $\text{Arccot}(\cot x)=k\pi+\text{arccot}(\cot x)$ $(x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z})$.

反三角函数的三角运算(trigonometric operation of inverse trigonometric function)　一种复合运算. 指求反三角函数的三角函数. 根据反三角函数的定义，及同角三角函数间的基本关系，列出反三角函数的三角运算公式如下表：

$\sin(\arcsin x)=x\ \ (-1\leqslant x\leqslant 1)$
$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$
$\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$
$\sin(\text{arccot}\, x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$
$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$
$\cos(\arccos x)=x\ \ (-1\leqslant x\leqslant 1)$
$\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$
$\cos(\text{arccot}\, x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$
$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$
$\tan(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ (-1\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1)$
$\tan(\arctan x)=x\ \ (-\infty<x<+\infty)$
$\tan(\text{arccot}\, x)=\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$
$\cot(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ (-1\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1)$
$\cot(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$
$\cot(\arctan x)=\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$
$\cot(\text{arccot}\, x)=x\ \ (-\infty<x<+\infty)$

在应用上表中的公式时，应特别注意公式成立的条件(即对 x 取值范围的限制).

反三角函数的互余关系(complementary relation of inverse trigonometric functions)　亦称反三角函数的第一类关系. 反三角函数值间的依存关系.

指同一自变量的反正弦函数与反余弦函数之和，反正切函数与反余切函数之和保持定值的关系，称为反三角函数的互余关系，即：

1. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (x\in[-1,1])$.

2. $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}\ (x\in\mathrm{R})$.

反三角函数的第一类关系(first class relation of inverse trigonometric functions) 即"反三角函数的互余关系".

反三角函数的互表关系(mutual representative relation of inverse trigonometric function) 亦称反三角函数的第二类关系. 反三角函数值间的依存关系. 指由同一自变量的三角函数值之间的关系导出的反三角函数之间的关系. 此关系可以把一个反三角函数化为另一个(不同自变量的)反三角函数. 其关系如下：

1. $\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$.

2. $\arcsin x=\begin{cases}\arccos\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1),\\-\arccos\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 0).\end{cases}$

3. $\arcsin x=\begin{cases}\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ (0<x\leqslant 1),\\\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi\ (-1\leqslant x<0).\end{cases}$

4. $\arccos x=\operatorname{arccot}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1)$.

5. $\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1),\\\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 0).\end{cases}$

6. $\arccos x=\begin{cases}\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ (0<x\leqslant 1),\\\pi+\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ (-1\leqslant x<0).\end{cases}$

7. $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$.

8. $\arctan x=\begin{cases}\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (x\geqslant 0),\\-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (x\leqslant 0).\end{cases}$

9. $\arctan x=\begin{cases}\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\ (x>0),\\\operatorname{arccot}\frac{1}{x}-\pi\ (x<0).\end{cases}$

10. $\operatorname{arccot} x=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ (-\infty<x<+\infty)$.

11. $\operatorname{arccot} x=\begin{cases}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (x>0),\\\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (x<0).\end{cases}$

12. $\operatorname{arccot} x=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x}\ (x>0),\\\pi+\arctan\frac{1}{x}\ (x<0).\end{cases}$

反三角函数的第二类关系(second class relation of inverse trigonometric functions) 即"反三角函数的互表关系".

反三角方程(inverse trigonometric equation) 一类特殊方程. 指在反三角函数记号后含有未知数的方程(一般只讨论单值反三角函数方程). 反三角方程多数不能用初等方法求解，能用初等方法求解的仅限于一些简单的反三角方程. 其解法通常是将方程两边同取某一三角函数，使之化成代数方程来求解. 由于反三角函数有值域的限制，所以，反三角方程两边的角应属同一区间，否则这样的反三角方程无解. 解反三角方程时，在方程变形的过程中，若使用了非同解变形的方法，就有可能增根或失根，所以都要验根.

反三角方程的解法(solving process of inverse trigonometric equation) 解反三角方程的一般方法. 任何一个反三角函数式施行三角运算的结果都是一个代数式，所以解反三角方程的一般方法是将方程两边施行某种三角运算，将原反三角方程化为代数方程来求解. 但这样的方程变形不一定是同解变形，常有增根的可能，因而，解反三角方程都要验根. 对一些特殊形式的反三角方程，亦可根据其特点采用简便可行的特殊解法来求解. 但反三角方程不一定都能用初等方法求解. 现将能用初等方法求解的反三角方程的解法归纳于下：

1. 判断方程有无解. 因为反三角函数有值域的限制，解方程时要考查方程两边的角是否属于同一区间，若属于同一区间，则方程可解；若不属于同一区间，又要看这两个不同的区间是否有公共部分，若有，则应在公共部分内求解，若无，则可判定原反三角方程无解.

2. 将方程两端施行三角运算，化反三角方程为代数方程来求解.

3. 可以直接化成最简反三角方程者，按最简反三角方程直接写出其解.

4. 形如 $f[\varphi(x)]=a$(f 为代数运算或三角运算，$\varphi(x)$为反三角函数)的反三角方程，一般设 $\varphi(x)=y$，使原方程化为代数方程来求解.

5. 形如 $f[g(x),\varphi(x)]=0$(f 为代数运算，$g(x)$ 与 $\varphi(x)$ 为互余的反三角函数)的反三角方程，由 $g(x)=\pi/2-\varphi(x)$，将原方程化为 $f[\pi/2-\varphi(x),\varphi(x)]=0$，即 $F[\varphi(x)]=0$ 的形式，实为第 4 法中 $a=0$ 的特例，于是可按第 4 法求解.

最简反三角方程(simplest inverse trigono-

metric equation) 含有未知角的主值的反三角方程. 若 $f(x)$是一个主值反三角函数,则 $f(x)=m(m\in\mathrm{R})$称为最简反三角方程. 如 $\arcsin x=a$, $\arccos x=a$, $\arctan x=a$, $\operatorname{arccot} x=a$, $\operatorname{arcsec} x=a$, $\operatorname{arccsc} x=a$ 都是最简反三角方程. 最简反三角方程的解列表如下:

反三角方程	相应反三角函数的主值区间	a 的取值域	反三角方程的解集
$\arcsin x=a$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\lvert a\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$	$x=\sin a$
		$\lvert a\rvert>\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$
$\arccos x=a$	$[0,\pi]$	$0\leqslant a\leqslant\pi$	$x=\cos a$
		$a<0$ 与 $a>\pi$	$\varnothing$
$\arctan x=a$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\lvert a\rvert<\frac{\pi}{2}$	$x=\tan a$
		$\lvert a\rvert\geqslant\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$
$\operatorname{arccot} x=a$	$(0,\pi)$	$0<a<\pi$	$x=\cot a$
		$a\leqslant0$ 与 $a\geqslant\pi$	$\varnothing$
$\operatorname{arcsec} x=a$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$	$0\leqslant a<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<a\leqslant\pi$	$x=\sec a$
		$a<0, a=\frac{\pi}{2}, a>\pi$	$\varnothing$
$\operatorname{arccsc} x=a$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 与 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$	$0<a\leqslant\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}\leqslant a<0$	$x=\csc a$
		$a<-\frac{\pi}{2}, a=0, a>\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$

反三角方程组(system of inverse trigonometric equations) 一种特殊方程组. 指含有反三角方程的方程组. 同时满足反三角方程组中每个方程的公共解,称为反三角方程组的解. 求解反三角方程组的过程,称为解反三角方程组.

反三角方程组的解(solution of inverse trigonometric equations) 见"反三角方程组".

解反三角方程组(solving the inverse trigonometric equations) 见"反三角方程组".

反三角方程组的解法(solving process of inverse trigonometric equations) 解反三角方程组的一般方法. 对于能用初等方法求解的反三角方程组,其解法常是将方程中的反三角函数设为中间变元,把原方程组化为代数方程组来求解.

三角方程与三角不等式

三角方程(trigonometric equation) 一类特殊方程,指含有未知角的三角函数的等式.

最简三角方程(simplest trigonometric equation) 亦称基本三角方程. 含有未知角的基本三角方程. 若 $f(x)$是基本三角函数,则 $f(x)=m(m\in\mathrm{R})$称为最简三角方程. 凡能用初等方法求解的三角方程,一般都可以通过恒等变换或代数方法归结为解一个或几个这样的最简三角方程,它们的解集的交或并就是原方程的解. 现将这些最简三角方程的解集列表如下:

方程分类		方程的解集
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$
	$\lvert a\rvert\leqslant1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a, k\in\mathrm{Z}\}$
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$
	$\lvert a\rvert\leqslant1$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\arccos a, k\in\mathrm{Z}\}$
$\tan x=a$	$a\in\mathrm{R}$	$\{x\mid x=k\pi+\arctan a, k\in\mathrm{Z}\}$
$\cot x=a$	$a\in\mathrm{R}$	$\{x\mid x=k\pi+\operatorname{arccot} a, k\in\mathrm{Z}\}$
$\sec x=a$	$\lvert a\rvert\geqslant1$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\operatorname{arcsec} a, k\in\mathrm{Z}\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\varnothing$
$\csc x=a$	$\lvert a\rvert\geqslant1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\operatorname{arccsc} a, k\in\mathrm{Z}\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\varnothing$

基本三角方程(basic trigonometric equation) 即"最简三角方程".

纯三角方程(pure trigonometric equation) 一种三角方程. 指未知数只含在三角函数记号下的三角方程. 如果未知数只出现在同名的三角函数记号下,这样的纯三角方程又称为基本纯三角方程.

基本纯三角方程(basic pure trigonometric equation) 见"纯三角方程".

混合三角方程(mixed trigonometric equation) 一种三角方程. 指未知数不全含在三角函数记号下的方程.

三角方程的解(solution of trigonometric equation) 三角方程的基本概念之一. 在求解范围内适合于三角方程的未知数值的集合(称为三角方程的解集)的简称. 这些解的一般表达式称为三角方程的通解,或称为三角方程的一般解. 解集中的每一个解都称为三角方程的特解.

三角方程的解集(solution set of trigonometric equation) 见"三角方程的解".

三角方程的通解(general solution of trigono-

metric equation） 亦称三角方程的一般解，见“三角方程的解”.

三角方程的特解（particular solution of trigonometric equation） 见“三角方程的解”.

三角方程的解法（solving process of trigonometric equation） 解三角方程的一般方法.除能用初等方法求解的三角方程外，一般无固定解法.通常对三角方程作恒等变形或采用代数方法将方程化为最简三角方程来解.常用的有如下几种：

1.对只含同角同名三角函数的三角方程，可先用代数方法求得方程中三角函数的值再解.对可化成此种方程的三角方程，可循此进行.

2.转换成一边为零，另一边可以分解因式的三角方程.

3.对形如

$$a\sin x + b\cos x = c(a \neq 0, b \neq 0)$$

的方程引入辅助角 φ，令

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

用 $\sqrt{a^2+b^2}$ 去除方程两端，将其化为

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

即
$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4.$\sin x$ 和 $\cos x$ 的 n 次齐次方程，在 $\cos x \neq 0$ 时，用 $\cos^n x$ 去除各项而化为 $\tan x$ 的方程来解，否则用 $\sin^n x$ 去除各项化为 $\cot x$ 的方程来解.

5.用万能公式置换方程中不同的三角函数，化为只含 $\tan(x/2)$ 的三角方程来解.

在解三角方程的过程中，由于其变形，某些三角函数表达式的定义域可能发生变化，同时又有些三角函数可能只适用于特定的范围，因此，非同解变形有可能产生增根或失根，必须经验根后才能确定该三角方程的解.特别是可能失根的变形，一般应尽力避免采用.无法避免时，应把未知数允许值集合中漏掉的数值，代入原方程检验，防止失根.

三角方程的图象解法（solving process of trigonometric equations by graph） 三角方程的解法之一.利用三角函数的图象解三角方程的方法.即把三角方程变成 $f(x)=g(x)$ 的形式，在同一坐标系中做出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象，这两个图象的交点的横坐标就是所求方程的解（通常为解的近似值）.图象解法常用于解混合三角方程.虽然所求的解常是精确度不够高的近似值，但在实际应用中，对于难于用初等方法求解的三角方程，这种图象解法仍是很有用的.

三角方程的增失根（extraneous root or loss root in solving trigonometric equation） 三角方程的基本概念之一.指解三角方程过程中出现的增根或失根现象及造成的原因.由于非同解变形的原因，在解方程的过程中，可能出现两种现象：

1.适合于原方程的某些解被遗失，称这种现象为原方程失根，失去的解称为原方程的失根.

2.出现只适合于导出方程（变形后的方程）而不适合于原方程的某些解，称这种现象为原方程增根，增添的解称为原方程的增根.

增根和失根现象，统称为增失根.解各种方程都可能出现增失根现象，然而解三角方程较解其他方程增失根更为普遍.增失根常有以下原因：

1.在解三角方程中，对方程两边实施偶次乘方（开偶次方）运算，原方程可能出现增（失）根.

2.在解三角方程中，用含未知数的三角函数式 $f(x)$ 除（乘）方程两边时，原方程可能出现失（增）根，而失去（增添）的正是三角函数式 $f(x)=0$ 的全部或一部分解.

3.在解三角方程中，对方程中的三角函数式作恒等变形时，有时会改变方程中的未知数可取值集合，若可取值集合缩小（扩大），则原方程可能失根（增根），而失去（增添）的解正是被缩小（扩大）的那个范围内的某些未知数值.

4.在解三角方程的代换过程中，当其用以代换的三角函数或三角函数式在某象限内函数值的符号与原方程中相应的三角函数或三角函数式的符号不一致，致使产生增失根.因此在解三角方程中，为避免增失根，力求做到对方程实行同解变形.且对方程作变形中，要事先分析未知数可取值集合的变化，从而把握增失根的可能性.一旦增失根，随即处理，使增根剔除，失根复得.

三角方程组（system of trigonometric equations） 一种特殊方程组.指含有三角方程的方程组.例如

$$\begin{cases}\cos x + \cos y = a,\\ \sin x + \sin y = b\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}x + y = \pi/4,\\ \tan x + \tan y = 1.\end{cases}$$

三角方程组的解（solution of trigonometric equations） 亦称三角方程组的解集.三角方程的基本概念之一.指同时满足三角方程组中每个方程的公共解，即每个方程的解集的交集，就称为该三角方程组的解集.简称三角方程组的解.求三角方程组的解（集）的过程称为解三角方程组.

三角方程组的解集（solution set of trigonometric equations） 即“三角方程组的解”.

三角方程组的解法(solving process of trigonometric equations) 解三角方程组的一般方法与步骤.解三角方程组的方法与解代数方程组的方法类似,其基本思路是:消元降次和把初等超越方程转换为代数方程组求解,具体步骤大致如下:

1.通过代数变换或三角变换,进行方程组的变形,化为只含一个未知数的最简三角方程.

2.解最简三角方程,并将其解代入三角方程组的其他各方程,求出能满足三角方程组中每个三角方程的公共解.

3.对三角方程组的解进行检验,弃去增根找回失根,若所给三角方程组中含有字母系数,在求出解后,还需进行讨论后才能确定该三角方程组的解.

三角方程的异形通解的等效性(equivalence of different form general solutions of trigonometric equations) 三角方程通解的特性.对同一个三角方程,因采用的解法不同,或因表示通解的方式不同,可能得到各式各样的异形通解.但只要解法正确,对增失根又已给出妥善处理,那么这些异形通解是相等的解集,并称它们是等效的,而且是可以统一的.

三角不等式(trigonometric inequality) 一类特殊不等式.指含有变元的三角函数不等式.例如:

1. $\cos x>\pi$.
2. $\sin x^2+2\sin x+1\geqslant 0$.
3. $\sin x>\tan x-\dfrac{\tan^3 x}{2}$

等都是三角不等式,其中第一个是矛盾不等式;第二个是绝对不等式;第三个是条件不等式.满足不等式的角的取值范围称为三角不等式的解,求出三角不等式的全部解的过程称为解三角不等式.

三角不等式的解(solution of a trigonometric inequality) 见“三角不等式”.

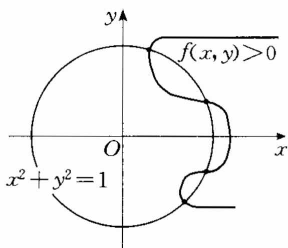
解三角不等式(solving the trigonometric inequality) 见“三角不等式”.

三角不等式的解法(solving process of a trigonometric inequality) 解三角不等式的一般方法.化为若干最简三角不等式后,用代换法或因式分解法求解.解三角不等式时,常把它们化为若干个最简三角不等式来求解.能用初等方法求解的限于一些特殊类型的三角不等式,其解法概述如下:

1.代换法.如果所给的是关于某个三角函数 $f(x)$ 的有理不等式 $\varphi[f(x)]>0$,则可用代换 $f(x)=t$,把原三角不等式化为关于 t 的代数不等式 $\varphi(t)>0$,由此解得 t,然后再解所得的最简三角不等式,即可求得原三角不等式的解.

2.因式分解法.根据函数的连续性知,连续函数 $\varphi(x)$ 有实数根 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,则 $\varphi(x)$ 在由任意两个相邻根 x_i 与 $x_{i+1}(i=1,2,\cdots,k-1)$ 所构成的开区间 (x_i,x_{i+1}) 内符号不变.这样的开区间 (x_i,x_{i+1}) 称为不变号开区间.设所给的三角不等式为 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$),式中三角函数式 $f(x)$ 若可分解成 k 个因式,即 $f(x)=f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_k(x)$,则可以通过讨论各个因子 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,k)$ 在三角函数式 $f(x)$ 最小正周期的区间上所建立的不变号开区间的正负情况及个数确定三角不等式 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)的解.

三角不等式的图象解法(solving process of a trigonometric inequality by graph) 三角不等式的解法之一.在实际问题中,常会遇到用初等方法难于求解的三角不等式.有时可用代换法把不等式化为关于两变量的与原不等式等价的混合代数组,通过混合代数组的图象来求三角不等式的解.这种方法称为三角不等式的图象解法.如果所给的三角不等式为 $f(\sin\theta,\cos\theta)>0$,则可用代换法,使 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$,把不等式化为关于两变量 x,y 的与原不等式等价的混合代数组



$$\begin{cases}f(x,y)>0,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

混合代数组的解,在图象中表示为含在区域 $f(x,y)>0$ 内的单位圆上的圆弧部分,如图所示.因此,在解代数不等式时,只要先通过上述图象确定与它等价的混合组的解的大致范围,然后再求出曲线 $f(x,y)=0$ 和圆周 $x^2+y^2=1$ 的交点的坐标,就可得到 $f(\sin\theta,\cos\theta)>0$ 的解.

三角不等式的证明(proof of a trigonometric inequality) 证明三角不等式的一般方法.根据三角函数的单调性、在一定区间内符号的不变性、有界性以及不等式的性质等,通过三角和代数的恒等变换,证得三角不等式的成立,称为三角不等式的证明.三角不等式的证明方法是多种多样的.一般说来,没有固定的证明方法,应根据每个已给不等式的内容而确定证明的途径和方法.常见的证法有:

1.利用基本不等式.
2.利用三角函数的性质.
3.用比较法.
4.利用数学归纳法.

最简三角不等式(simplest trigonometric inequality) 亦称基本三角不等式.含有变元的基本三角不等式.若 $f(x)$ 是基本三角函数,则 $f(x)>m$ 或 $f(x)<m(m\in\mathbf{R})$ 称为最简三角不等式.

最简三角不等式的解集列表如下(表中 $k\in\mathbf{Z}$):

不等式	a 的取值域	不等式的解集
$\sin x>a$	$a<-1$	R
	$-1\leqslant a<1$	$2k\pi+\arcsin a<x<(2k+1)\pi-\arcsin a$
	$a\geqslant 1$	$\varnothing$
$\sin x<a$	$a\leqslant -1$	$\varnothing$
	$-1<a\leqslant 1$	$(2k-1)\pi-\arcsin a<x<2k\pi+\arcsin a$
	$a>1$	R
$\cos x>a$	$a<-1$	R
	$-1\leqslant a<1$	$2k\pi-\arccos a<x<2k\pi+\arccos a$
	$a\geqslant 1$	$\varnothing$
$\cos x<a$	$a\leqslant -1$	$\varnothing$
	$-1<a\leqslant 1$	$2k\pi+\arccos a<x<(2k+1)\pi-\arccos a$
	$a>1$	R
$\tan x>a$	R	$k\pi+\arctan a<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$
$\tan x<a$	R	$k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\arctan a$
$\cot x>a$	R	$k\pi+\operatorname{arccot} a<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$
$\cot x<a$	R	$k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\operatorname{arccot} a$

反三角不等式(inverse trigonometric inequality) 一类特殊不等式. 指含有变元的反三角函数不等式. 满足不等式变元的全部值称为反三角不等式的解,求出反三角不等式的全部解的过程称为解反三角不等式. 反三角不等式中的反三角函数应限制为反三角函数的主值.

反三角不等式的解(solution of a inverse trigonometric inequality) 见“反三角不等式”.

解反三角不等式(solving the inverse trigonometric inequality) 见“反三角不等式”.

最简反三角不等式(simplest inverse trigonometric inequality) 含有未知角的主值的反三角函数不等式. 若$f(x)$是主值反三角函数,则 $f(x)>m$ 或$f(x)<m(m\in\mathrm{R})$称为最简反三角不等式.

最简反三角不等式的解集(solution set of the simplest inverse trigonometric inequality) 一种实数集. 指最简反三角不等式的全体解组成的集合. 可分两种情况:

1. 递增反三角函数不等式的解集如下表所示:

$\arcsin x>m$		$\arcsin x<m$	
条件	解集	条件	解集
$m>\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$	$m<-\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$
$\lvert m\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$	$(\sin m,1]$	$\lvert m\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$	$[-1,\sin m)$
$m<-\frac{\pi}{2}$	$[-1,1]$	$m>\frac{\pi}{2}$	$[-1,1]$

$\arctan x>m$		$\arctan x<m$	
条件	解集	条件	解集
$m\geqslant\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$	$m\leqslant-\frac{\pi}{2}$	$\varnothing$
$\lvert m\rvert<\frac{\pi}{2}$	$(\tan m,+\infty)$	$\lvert m\rvert<\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,\tan m)$
$m\leqslant-\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	$m\geqslant\frac{\pi}{2}$	$(-\infty,+\infty)$

2. 递减反三角函数不等式的解集如下表所示:

$\arccos x>m$		$\arccos x<m$	
条件	解集	条件	解集
$m>\pi$	$\varnothing$	$m<0$	$\varnothing$
$0\leqslant m\leqslant\pi$	$[-1,\cos m)$	$0\leqslant m\leqslant\pi$	$(\cos m,1]$
$m<0$	$[-1,1]$	$m>\pi$	$[-1,1]$

$\operatorname{arccot} x>m$		$\operatorname{arccot} x<m$	
条件	解集	条件	解集
$m\geqslant\pi$	$\varnothing$	$m\leqslant 0$	$\varnothing$
$0<m<\pi$	$(-\infty,\cot m)$	$0<m<\pi$	$(\cot m,+\infty)$
$m\leqslant 0$	$(-\infty,+\infty)$	$m\geqslant\pi$	$(-\infty,+\infty)$

反三角不等式的解法(solving process of inverse trigonometric inequality) 解反三角不等式的一般方法. 通过换元法求解与其同解的不等式组,即得原来反三角不等式的解. 解反三角不等式,必须注意反三角函数的定义域和值域,常用换元法求解. 即令不等式中某一反三角函数 $f(x)=y$,将原反三角不等式化为代数有理不等式 $\varphi[f(x)]>0$,并和$f(x)$的值域 $\theta_1<y<\theta_2$(这里(θ_1,θ_2)为 $f(x)$的值域区间)组成与原不等式同解的不等式组

$$\begin{cases}\varphi[f(x)]>0,\\ \theta_1<y<\theta_2.\end{cases}$$

解此不等式组即可求得原不等式的解.

解 三 角 形

三角形元素(elements of triangle) 三角学的

基本概念之一.三角形的三边(或它们的长度)和三内角(或它们的大小)以及由它们所确定的几何图形(或相应的几何量)统称三角形的元素.其中,三角形的三边 a,b,c 及三内角 A,B,C 称为三角形的基本元素.除此之外的三角形的元素称为三角形的非基本元素.例如,三角形的外角、周长、高、中线、角平分线及外接圆半径、内切圆半径、旁切圆半径、三角形的面积等都是三角形的非基本元素(参见本卷《平面几何》中的"三角形").

三角形基本元素(basic elements of a triangle) 见"三角形的元素".

三角形非基本元素(nonbasic elements of a triangle) 见"三角形的元素".

三角形线性元素(linear elements of a triangle) 三角学的基本概念之一.指与三角形有关的线段,如三角形的周长、高、中线、角平分线、外接圆半径、内切圆半径及旁切圆半径等.

三角形二次元素(elements of degree 2 of a triangle) 三角学的基本概念之一.指与三角形有关的图形面积,如三角形的面积、外接圆的面积及内切圆的面积等.

三角形线性元素的计算公式(computational formula of linear elements of a triangle) 三角形有关线段的计算公式.计算三角形的周长、高线、中线、角平分线、外角平分线、内切圆半径、外接圆半径、旁切圆半径的公式统称为三角形线性元素的计算公式.用 a,b,c 分别表示$\triangle ABC$ 中角 A,B,C 的对边,r 表示三角形内切圆的半径,R 表示三角形外接圆的半径,s 表示三角形周长之半($s=(a+b+c)/2$),$S_{\triangle ABC}$表示$\triangle ABC$ 的面积.其计算公式如下:

1.周长.若三角形的周长用 l 表示,则

$$l=2s=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

2.高线长.若三角形的三边 a,b,c 边上的高线长分别用 h_a,h_b,h_c 表示,则:

$$h_a=b\sin C=c\sin B=2R\sin B\sin C$$
$$=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$
$$h_b=c\sin A=a\sin C=2R\sin A\sin C$$
$$=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$
$$h_c=a\sin B=b\sin A=2R\sin B\sin A$$
$$=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

3.中线长.若三角形的三边 a,b,c 边上的中线长分别用 m_a,m_b,m_c 表示,则:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A};$$
$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos B};$$
$$m_C=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}.$$

4.内角平分线长.若三角形的三内角 A,B,C 的角平分线长分别用 t_a,t_b,t_c 表示,则:

$$t_a=\frac{c\sin B}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}}{b+c};$$
$$t_b=\frac{a\sin C}{\cos\frac{C-A}{2}}=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{ac[(a+c)^2-b^2]}}{a+c};$$
$$t_c=\frac{b\sin A}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{ab[(a+b)^2-c^2]}}{a+b}.$$

5.外角平分线长.三角外角平分线长是指内角对边的延长线和该内角邻接的外角平分线的交点到该内角顶点线段的长.当无交点时外角平分线长不存在.若三角形的角 A,B,C 的外角平分线长分别用 t'_a,t'_b,t'_c 表示,则:

$$t'_a=\frac{c\sin B}{\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{2bc}{b-c}\cos\frac{A}{2}\quad(B>C);$$
$$t'_a=\frac{c\sin B}{\sin\frac{C-B}{2}}=\frac{2bc}{c-b}\cos\frac{A}{2}\quad(B<C);$$
$$t'_b=\frac{a\sin C}{\sin\frac{C-A}{2}}=\frac{2ac}{c-a}\cos\frac{B}{2}\quad(C>A);$$
$$t'_b=\frac{a\sin C}{\sin\frac{A-C}{2}}=\frac{2ac}{a-c}\cos\frac{B}{2}\quad(C<A);$$
$$t'_c=\frac{b\sin A}{\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{2ab}{a-b}\cos\frac{C}{2}\quad(A>B);$$
$$t'_c=\frac{b\sin A}{\sin\frac{B-A}{2}}=\frac{2ab}{b-a}\cos\frac{C}{2}\quad(A<B).$$

6.内切圆半径.若三角形的内切圆半径用 r 表示,则

$$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABC}}{s}=s\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

7. 外接圆半径. 若三角形的外接圆半径用 R 表示，则

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{2\sin A\sin B\sin C}}=\frac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

8. 旁切圆半径. 若三角形的三边 a,b,c 边上的旁切圆半径分别用 r_a,r_b,r_c 表示，则：

$$r_a=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{s-a}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=s\tan\frac{A}{2};$$

$$r_b=\frac{b\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{s-b}$$

$$=4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}=s\tan\frac{B}{2};$$

$$r_c=\frac{c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{s-c}$$

$$=4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=s\tan\frac{C}{2}.$$

正弦定理(sine theorem)　关于三角形边角关系的重要定理之一. 该定理断言：在一个三角形内，各边和它的对角的正弦的比相等，且都等于这个三角形外接圆的直径，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=\frac{abc}{2S}.$$

式中 a,b,c 分别是$\triangle ABC$ 各角 A,B,C 的对边，R 是$\triangle ABC$ 外接圆半径，S 是$\triangle ABC$ 的面积，这个结论称为正弦定理.

正弦定理早在公元 150 年左右，已被托勒密(Ptolemy)所知晓. 10 世纪，阿布·瓦法(Abul-Wefa)重新发现并证明该定理，随后，纳西尔丁·图西(Nasīr al-Din, al-Tūsī)于 1250 年，雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)于 1464 年左右，分别以不同形式予以阐述. 阿尔·比鲁尼(al-Birūni)也曾给出正弦定理的一个证明.

三角形的射影定理(projection theorem of a triangle)　简称射影定理，亦称第一余弦定理，是关于三角形边角关系的重要定理之一. 指三角形的任一边长等于另两边在该边上射影的和. 若 a,b,c 分别表示$\triangle ABC$ 中角 A,B,C 的对边，则三角形的射影定理可表述为：

$$a=b\cos C+c\cos B;$$
$$b=c\cos A+a\cos C;$$
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

由于上面三式都联系着三角形内角的余弦，所以称第一余弦定理，而把通常的余弦定理称为第二余弦定理.

第一余弦定理(first cosine theorem)　即"三角形的射影定理".

余弦定理(cosine theorem)　亦称第二余弦定理. 关于三角形边角关系的重要定理之一. 该定理断言：三角形任一边的平方等于其他两边平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍. 若 a,b,c 分别表示$\triangle ABC$ 中 A,B,C 的对边，则余弦定理可表述为：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

余弦定理还可以用以下形式表达：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca};$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

余弦定理原为勾股定理的推广，是把直角三角形中各边平方的关系推广到任意三角形中而得到，参见本卷《原本》的第二卷. 阿耶波多第一(Āryabhata,I)的书中已载有此定理；15 世纪初，阿尔·卡西(al-Kāshī)曾给出余弦定理的另一形式：

$$a^2=(b-c\cos A)^2+c\sin^2 A;$$
$$b^2=(c-a\cos B)^2+a\sin^2 B;$$
$$c^2=(a-b\cos C)^2+b\sin^2 C.$$

韦达(Viete,F.)在他的《标准数学》一书中收有现在形式的余弦定理.

第二余弦定理(second cosine theorem)　即"余弦定理".

正切定理(tangent theorem)　关于三角形边角关系的重要定理之一. 该定理断言：三角形任意两边的差与和之比，等于它们所对的角的差之半的正切与和之半的正切的比. 即：

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\Big/\tan\frac{A+B}{2};$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\tan\frac{B-C}{2}\Big/\tan\frac{B+C}{2};$$
$$\frac{c-a}{c+a}=\tan\frac{C-A}{2}\Big/\tan\frac{C+A}{2}.$$

式中 a,b,c 是$\triangle ABC$ 中角 A,B,C 的对边. 这个定理可用正弦定理与和差化积公式推出. 13 世纪，纳西尔丁·图西(Nasīr al-Dīn al-Tūsī)在他著的《锐角扇形之书》中证明了正切定理. 雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)的《论一般三角形》也涉及该定理. 16 世纪，韦达(Viete,F.)在他的《标准数学》一书中，收集有解三角形的公式，其中有正切定理.

余切定理(cotangent theorem)　关于三角形边角关系的重要定理之一. 该定理断言：三角形中任一角的余切，等于该角邻边减去对边在该邻边上的射影之差，与这邻边上的高之比. 即：

$$\cot A=\frac{c-a\cos B}{a\sin B};$$
$$\cot B=\frac{a-b\cos C}{b\sin C};$$
$$\cot C=\frac{b-c\cos A}{c\sin A}.$$

式中 a,b,c 是$\triangle ABC$ 中角 A,B,C 的对边.

三角形的半角定理(half angle theorem of a triangle)　亦称三角形的半角公式. 关于三角形边角关系的重要定理之一. 在$\triangle ABC$ 中，以 a,b,c 分别表示角 A,B,C 的对边，$s=(a+b+c)/2$，r 为$\triangle ABC$ 的内切圆半径. 三角形的半角公式如下：

1. 半角正弦：

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};$$
$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}};$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

2. 半角余弦：

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$
$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}};$$
$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

3. 半角正切：

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a};$$
$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b};$$
$$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$$

式中

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

运用半角公式和余弦定理容易推出正、余弦的半角定理.

三角形的半角公式(half angle formula of a triangle)　即“三角形的半角定理”.

莫尔韦德公式(Mollweide's formula)　关于三角形边角关系的一组公式. 在$\triangle ABC$ 中，用 a,b,c 分别表示角 A,B,C 的对边，则下列公式：

$$\frac{b-c}{a}=\sin\frac{B-C}{2}\Big/\cos\frac{A}{2};$$
$$\frac{c-a}{b}=\sin\frac{C-A}{2}\Big/\cos\frac{B}{2};$$
$$\frac{a-b}{c}=\sin\frac{A-B}{2}\Big/\cos\frac{C}{2}$$

称为莫尔韦德公式. 此公式每个都含有三角形的六个基本元素，常用它们作解三角形的验算. 该公式由莫尔韦德(Mollweide,K.B.)于 1808 年发表在他的著作中，故以此得名. 其实，牛顿(Newton,I.)早在 1707 年发表的《通用算术》中，已给出其中的一个公式. 随后，冯·奥佩尔(Von Oppel)的《解析三角学》与辛普森(Simpson,T.)的《三角》中都早有此公式.

有限三角数列的和(sum of finite trigonometric progression)　通项为三角函数的特殊数列的和. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

且该数列的通项 a_k 是三角函数，则称

$$\sum_{k=1}^{n}a_k$$

为 n 项有限三角数列的和. 要求数列$\{a_n\}$的和，若能找到一个函数 $F(k)$，使得 $a_k=F(k+1)-F(k)(k\in \mathbf{Z})$，则所要求的和为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}[F(k+1)-F(k)]\\&=[F(2)-F(1)]+[F(3)-F(2)]+\cdots\\&\quad+[F(n+1)-F(n)]\\&=F(n+1)-F(1).\end{aligned}$$

上述关于求有限项数列的和的方法，称为差分求和法，亦称分裂通项求和法，或折项(消项)法. 并把上面通项公式称为差分，常记为

$$\Delta F(k)=F(k+1)-F(k).$$

差分求和法(summation method of difference)　见“有限三角数列的和”.

分裂通项求和法(summation by splitting general terms)　见“有限三角数列的和”.

有限三角式连乘积(continued product of finite

trigonometric expressions) 三角函数式的有限个因式之积. 若 p_i 为三角函数式,则 n 个因式 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_n$ 的积

$$p=\prod_{k=1}^{n}p_k$$

称为有限三角式连乘积. 在求

$$\prod_{k=1}^{n}p_k$$

时,若能先对因式 $p_k(k=1,2,\cdots,n)$ 进行变换,把它化为 $p_k=q_{k+1}/q_k$,则

$$\prod_{k=1}^{n}p_k=\frac{q_2}{q_1}\cdot\frac{q_3}{q_2}\cdot\frac{q_4}{q_3}\cdot\cdots\cdot\frac{q_{n+1}}{q_n}=\frac{q_{n+1}}{q_1}.$$

上述求有限三角式连乘积的方法,称为约分求有限连乘积法.

解三角形(solving a triangle) 三角学的基本概念之一. 由已知三角形的某些元素出发确定这个三角形的过程. 任何三角形中都有三条边和三个角,称它们为三角形的六个基本元素. 通常知道了其中的三个元素(其中至少有一个是边),就可以求出其他三个未知的元素. 在更广的情形下,只要已知的元素中有一个是线性元素(指三角形的边或中线、高等线段),也可以确定这个三角形. 解三角形时,通常还包括求出该三角形的面积. 很多较复杂的几何图形的计算问题,常常通过变化后可归结为一些三角形元素的计算. 此外,在测量、物理、水利、建筑、军事等工程中也常涉及三角形的解法. 所以,解三角形是三角学科中的重要内容之一.

直角三角形的解法(solution of a rightangled triangle) 解直角三角形的一般方法. 已知直角三角形的一边和另一个基本元素,求得其他各元素的方法. 因为直角三角形有一个角是直角,所以只要再知道它的两个基本元素(其中至少有一个是边),就可以求出其他的元素. 因此,直角三角形的解法的基本情形只有四种情况:

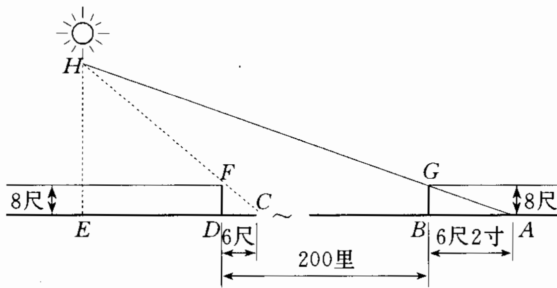
1. 已知斜边和一个锐角,求其他的边、角和面积.

2. 已知一直角边和一个锐角,求其他的边角和面积.

3. 已知斜边和一直角边,求其他的边、角和面积.

4. 已知两条直角边,求其他的边、角和面积.

解直角三角形是个古老的课题,在公元前 1850 年的莫斯科草纸书中,就记载着古埃及人解直角三角形的问题:某直角三角形的一个直角边是另一个直角边的 2.5 倍,其面积为 20,求两直角边的长. 中国古代对解直角三角形的研究和应用也较早,《周髀算经》里就记载着公元前 7—8 世纪人们计算地面某一点到太阳距离的方法(如图),在周城立竿高 8 尺



(DF),正午测得竿影长 6 尺(DC),又在其北 2000 里地(B 点)立同样高的竿(BG),同时测得影长 6 尺 2 寸(BA). 用解直角三角形的方法算出周城到日下的距离是

$$DE=\frac{2000\times60}{62-60}=60000(\text{里}),$$

太阳离地面的高

$$EH=\frac{2000\times80}{62-60}=80000(\text{里}),$$

然后,根据勾股定理算出测量者到太阳的距离 $CH=100000$(里). 当时的算法虽然已用到三角形线段的比,但还没有三角函数的概念. 另外,把地球表面视为平面也是使计算结果误差太大的原因.

斜三角形(oblique triangle) 见本卷《平面几何》同名条.

斜三角形的解法(solution of a oblique triangle) 解斜三角形的一般方法. 已知斜三角形的一边和另外两个元素,即可求得其他各元素的方法. 在斜三角形的三条边和三个角这六个元素中,若已知三个(至少有一个是边),即可求出其余三个和面积. 因此,斜三角形解法的基本情形只有四种情况:

1. 已知一边和两角,求其他的边、角和面积.

2. 已知两边和夹角,求其他边、角和面积.

3. 已知三边,求三个角和面积.

4. 已知两边和其中一边的对角,求其他边、角和面积.

对于解斜三角形的非基本情形,一般应根据具体情况选择正弦定理、余弦定理等灵活处理. 纳西尔丁·图西(Nasīr al-Din,al-Tūsī)在他的《论四边形》中,根据实际测量的经验系统地整理了前人解斜三角形的知识.

撰 稿 于学勤 于俊巧 马 明 宁国华 杨志青 杨林生 杨振鹤 杨家敏 周光壁 宣立新 蒋泽伶 谢远应 谢克昌

审 阅 马 明 杨志青 陈哲卿 周光壁 常心怡

立 体 几 何

立体几何(solid geometry)　亦称立体几何学，又称空间几何学.即初等几何的空间部分.立体几何是建立在欧几里得公理体系基础上的三维空间几何学，故又称为三维欧几里得几何学，简称三维欧氏几何.立体几何是研究空间图形的大小、形状和相互位置关系等几何性质的科学.

历史上较为系统地阐述空间图形的几何性质的著作，要追溯到公元前三百多年，欧几里得(Euclid)的《几何原本》.《几何原本》从第 11 卷开始阐述立体几何知识，它定义了立体的长、宽、高，直线与平面的垂直，平面与平面的垂直等概念，并研究了平面元素形成立体图形的方式和立体图形的性质，列举了 39 条定理.《几何原本》的第 12 卷中，证明了关于面积和体积的 18 个定理，用穷竭法求出了一些特殊曲线围成图形的面积与曲面围成立体的体积.《几何原本》第 13 卷中叙述了球的五种内接正多面体的作图法.欧几里得把几何奠定在若干基本概念和公理、公设的基础上，经过逻辑推理，导出一系列定理.这种研究方法，常称古典公理法或综合法.因此，经典的立体几何属于综合几何的范畴.对欧几里得第五公设是否独立的研究导致非欧几何的发现.

非欧几何的创立大大提高了公理方法的信誉，接着便有许多数学家致力于公理方法的研究.例如，在 1871—1872 年间，康托尔(Cantor,G.(F.P.))与戴德金(Dedekind,(J.W.)R.)不约而同地拟成了连续公理.帕施(Pasch,M.)于 1882 年拟成了顺序公理，在此基础上，希尔伯特(Hilbert,D.)于 1899 年发表了《几何基础》，完善了几何学的公理化方法，成为近代公理化思想的经典著作.在《几何基础》中，希尔伯特阐明了近代公理法的基本思想，提出了欧氏几何学的一套完整的公理系统，并且讨论了与公理系统有关的许多问题.这样，《几何原本》中存在的问题得到了解决.

近代公理法的基本思想是：先提出几个不予定义的基本概念和若干不加证明的公理，而这些基本概念的内涵则由这些公理来描述和约束.然后从这些基本概念和公理出发，通过逻辑推理，导出一系列结论，同时又可以定义新的概念，并得到新的结论，这些就构成一个学科的全部内容.在《几何基础》一书中，希尔伯特公理系统包括六个基本概念(点、直线、平面为基本元素，属于、介于、合同于为基本关系)和五组 20 条公理，与该书差不多同时，皮耶里(Pieri,M.)则采用了点与运动等作为基本概念.1904 年，维布伦(Veblen,O.)把点和序作为不定义概念，建立起另一公理系统.他证明了他的每一条公理都是独立于其他公理的，而且还建立了另外一条性质——范畴性，把几何公理的完备性研究推进了一大步.

现在所说的立体几何，就是指的以希尔伯特公理系统为基础，研究空间图形的形状、大小、位置关系等性质的数学演绎体系.这个理论体系中的主要内容是：点、直线、平面的位置关系；各种空间角(异面直线所成的角、直线与平面的夹角、二面角、多面角等)的性质；各种简单几何体(多面体、旋转体、曲面体等)的性质；空间图形的几何变换(合同、相似、反演等)；几何体的体积和表面积；以及空间的作图和轨迹问题等.

立体几何学(solid geometry)　即“立体几何”.

空间几何学(space geometry)　即“立体几何”.

立体几何的基础知识

空间几何的基本概念(basic concept of space geometry)　空间几何公理系统中不加定义的概念.在不同的几何公理系统中，选用的基本概念可能是不同的.例如，在希尔伯特(Hibert,D.)的公理系统中选用的点、直线、平面、属于、介于、合同于等作为基本概念；在伯克霍夫(Birkhoff,G.D.)的公理系统中选用点、直线、两点间的距离、三个有序点形成的角等作为基本概念；而布卢门塔尔(Blumenthal,L.O.)在 1961 年出版的《现代观点几何学》中给出的欧几里得几何公理系统仅包括六条公理和集合、元素、属于、点、距离这几个基本概念.上述几种概念均受相关的几何公理制约，通常把这些概念称为立体几何的基本概念或原始概念(参见《高等几何》中的“希尔伯特公理系统”).

平面(plane)　几何学中不予定义的原始概念之一.可通过平静的水面、光亮的镜面、桌面等形象，加以科学地抽象而得到平面的概念.在几何中，把平面理解为可以无限延展的面.通常用带一个大写字母或一个小写希腊字母的平行四边形表示平面.读作平面 M，平面 π，平面 α 等.平面有下列基本性质：

1.如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这直线上所有的点都在这个平面内.

2.如果两个平面有一个公共点，那么它们相交

于经过这点的一条直线.

3. 不在一条直线上的三点确定一个平面.

半平面(half plane)　立体几何的基本概念之一. 一条直线将平面分为两部分,其中的每一部分均称为半平面. 例如,若 a 是平面 α 上的一条直线,则将 α 上不属于 a 的点按以下性质分为两个集合:连结同一个集合的两点的线段不与 a 相交,连结不同集合的两点的线段必与 a 相交. 这两个集合都称为半平面. 直线 a 称为这两个半平面的边界或边缘. 包含边界的半平面称为闭半平面,不包含边界的半平面称为开半平面.

半平面的边界(boundary of half plane)　见"半平面".

半平面的边缘(boundary of half plane)　即"半平面的边界".

闭半平面(close half plane)　见"半平面".

开半平面(open half plane)　见"半平面".

几何体(geometric solid)　亦称立体. 立体几何的基本概念之一. 几何体概念产生于人们对客观世界中各种物体的数学抽象. 当人们只考虑物体的形状、大小、位置关系等数学性质,而不考虑它的物理的、化学的、生物的、社会的等属性时,就获得几何体的概念. 在几何学中,人们把若干几何面(平面或曲面)所围成的有限形体称为几何体,围成几何体的面称为几何体的界面或表面,不同界面的交线称为几何体的棱线,不同棱线的交点称为几何体的顶点. 几何体也可看成空间中若干几何面分割出来的有限空间区域. 立体几何首先研究的是一些较简单的几何体的几何性质,如多面体、旋转体以及它们的组合体等.

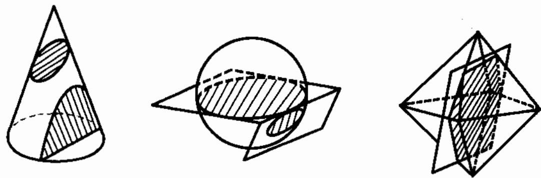
立体(solid)　即"几何体".

几何体的界面(interface of geometric solid)　见"几何体".

几何体的棱线(edge line of geometric solid)　见"几何体".

几何体的顶点(vertex of geometric solid)　见"几何体".

几何体的截面(section of a solid)　与几何体有关的一种平面图形,即一个平面与一几何体相交所得的平面图形.



中截面(midsection)　一种特殊的截面,指在有两平行底面(其中一面或两面可以退化为点或线段)而其余面夹在两平行底面之间的有限几何体中,平行于底面且与两底面等距的截面. 图 1、图 2 给出两例几何体的中截面的图形.

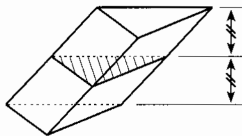


图1　三棱柱的中截面

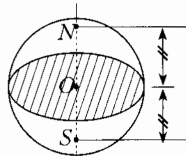


图2　球的中截面

平面体(solid bounded by planes)　几何体的一种. 常称为多面体. 如果一个空间几何体纯系若干平面块围成,则称为平面体. 棱柱、棱锥、棱台、拟柱体等都是平面体.

曲面体(surface solid)　几何体的一种. 如果一个空间几何体的表面至少有一部分不是平面,而是曲面,则称它为曲面体. 圆柱、圆锥、圆台、球、球缺等都是曲面体.

几何空间(geometric space)　简称空间. 立体几何的基本概念之一. 指物质存在的广延性. 几何空间的概念原是人类对自己的生存范围的认识在大脑中的反映. 几何学在研究客观事物的形状、大小、相互位置关系时,紧密地联系着对空间的本质的认识,逐渐形成了空间的概念. 通常意义下的几何空间是指欧几里得三维空间,也就是人们的直觉所感受到的立体空间. 希尔伯特公理系统奠定了欧几里得几何空间的逻辑基础,使之成为严格的数学研究的对象(参见本卷《高等几何》中的"希尔伯特公理系统"). 随着人类认识的发展,空间这一概念的含义也在不断变化. 两千多年来,对欧几里得第五公设独立性的研究导致了非欧几何的发现,而在爱因斯坦相对论的理论创建中非欧几何所发挥的巨大作用又反过来深化了对空间的认识. 现代数学中研究着各种各样的空间,如仿射空间、射影空间、度量空间、拓扑空间等,它们分别是具有某种数学结构的集合.

半空间(semi-space)　亦称半宇. 立体几何的基本概念之一. 指一个平面把空间中不在该平面上的点分成两部分,每一部分都称为半空间. 该平面称为半空间的界面.

半宇(semi-space)　即"半空间".

半空间的界面(interface of half space)　见"半空间".

空间图形(space figure)　亦称立体图形. 一种几何图形. 指空间中点的非空集合图形. 空间图形可分为平面的和非平面的两类. 如果图形的所有点在同一个平面内,它是空间的平面图形;如果所有的点不共面,它是非平面图形.

立体图形(solid figure)　即空间图形. 一种几何图形. 但人们常在狭义下使用立体图形的概念,即

认为构成立体图形的点不同在一个平面内(参见“空间图形”).

空间点的轨迹(locus of points in space) 立体几何的基本概念之一.空间中适合一定条件的点的集合,称为适合该条件的点的轨迹.

空间点的基本轨迹(fundamental locus of points in space) 立体几何的基本概念之一.在研究空间点的轨迹时,经常用到的一些轨迹,它们是研究其他轨迹的基础,一般称为空间点的基本轨迹.空间点的基本轨迹常指如下几种:

1.与一定点有定距离的动点轨迹是以定点为球心,定距离为半径的球面.

2.与一定直线有定距离的动点轨迹是以定直线为轴,定距离为准线圆半径的圆柱面.

3.与一定平面有定距离的动点轨迹是位于定平面两侧,且与定平面有已知距离的两个平行平面.

4.距离两个定点等远的动点轨迹,是连结两定点的线段的垂直平分面(亦称中垂面).

5.距两条平行直线等远的动点轨迹,是这两直线公垂线段的中垂面.

6.距两条相交直线等远的动点轨迹是过交点且与相交直线所在平面垂直的两个互相垂直的平面,而且平分两已知直线间的角.

7.距两平行平面等远的动点轨迹,是与它们平行且与之等距的一个平面.

8.距两个相交平面等远的动点轨迹,是两个互相垂直的平面.它们是两个相交平面构成的二面角的角平分面.

除空间点的基本轨迹外,常见的空间点的轨迹还有:

1.与一定线段的两端点张直角的点的轨迹是以这定线段为直径的球面.

2.到两定点的距离之比为定值(不等于1)的点的轨迹是一个球面.若两定点为 A 与 B,动点到 A,B 的距离之比为定比 $K(K>0,K\neq1)$,则轨迹球面的中心在直线 AB 上.分$\overline{AB}$为定比 K 的内分点与分$\overline{AB}$为定比$-K$ 的外分点是球面一直径的两端点.

3.到两定点距离的平方差为定值的点的轨迹,是一个垂直于两定点连线的平面.

4.到两定点距离的平方和为定值的点的轨迹,如果存在而且不退缩为一点的话,是以两定点间线段的中点为中心的球面.

5.距已知三角形各顶点等远的点的轨迹,是垂直于已知三角形所在平面且通过它的外接圆圆心的直线.

6.到已知三角形各顶点的距离与三已知线段成比例的点的轨迹,如果存在且不退缩为一点的话,是一个圆或一直线.

7.距三个交于一点的平面等远的点的轨迹是通过这一点的四条直线.

8.距共点而不共面的三已知直线等远的点的轨迹是四条直线.

9.关于两不同心的球的幂相等的点的轨迹,是垂直于两球的连心线的一个平面(称为两球的等幂面或根面).

10.关于球心不共线的三球等幂的点的轨迹,是一条直线,它是每两已知球的等幂面的交线.

空间直线的轨迹(locus of lines in space) 立体几何的基本概念之一.空间中适合一定条件的直线的集合,称为适合该条件的直线的轨迹.

空间直线的基本轨迹(fundamental locus of lines in space) 立体几何的基本概念之一.在研究各空间直线的轨迹时,经常用到一些轨迹.它们是研究其他轨迹的基础,一般称为空间直线的基本轨迹.空间直线的基本轨迹常指下面几种:

1.过定直线外定点且与定直线共面的动直线的轨迹,是定直线与定点所确定的平面.

2.与两条异面直线中的一条相交且与另一条平行的空间动直线的轨迹,是过前直线且与后直线平行的平面.

3.过定平面外定点且与定平面平行的空间动直线的轨迹,是过定点且与定平面平行的平面.

除空间直线的基本轨迹外,常见的空间直线轨迹还有:

1.通过一定点且垂直于定直线的直线的轨迹是一个平面.

2.与一定直线相交且垂直于定平面的直线的轨迹是一个平面.

3.切球于同一点的所有切线的轨迹,是在该点与球相切的平面.

4.通过两相交直线的交点,且与这两直线构成等角的直线的轨迹,由两个互相垂直的平面组成,这两个平面垂直平分两相交直线的夹角.

5.通过定直线 l 上一定点 O,且与这直线构成定角($<\pi/2$)的直线的轨迹,是以 O 为顶点、l 为轴、2倍定角为锥顶角的圆锥面.

6.平行于给定直线 l,并且到 l 的距离等于定值 r 的直线的轨迹,是以 l 为轴、r 为准圆半径的圆柱面.

7.切圆锥面于定点(非顶点)的所有切线的轨迹,是圆锥面在这点的切平面.

8.切圆柱面于定点的所有切线的轨迹,是圆柱面在这点的切平面.

9.过球外一点引球的切线的轨迹是一个圆锥面,它以已知点为顶点,已知点与球心连线为轴,各切点所组成的圆为准线.

10. 平行于定直线的球切线的轨迹是一个圆柱面，它以过球心且平行于定直线的直线为轴，各切点组成的球面大圆为准线.

空间几何作图公法(postulate of construction of space geometry)　完成空间几何作图的基本法则. 即几种常用的简单性作图的总称. 完成一个空间几何作图，是指能把问题归结为有限次作如下几个认可的简单作图：

1. 任意取一点、一直线、一平面.
2. 过不共线的三点作平面.
3. 在已知平面内的尺规作图.
4. 作两相交平面的交线.

上述四条称为空间几何作图公法. 如果一个作图题不能归结为有限次地运用作图公法来完成作图，则称该作图题为作图不能问题. 这与符合条件的图形不存在是两回事.

空间中点与点间的位置关系(positional relation between two points in space)　立体几何的重要概念之一. 描述空间两点位置关系的特征量是两点间的距离. 两点重合时，距离为零；两点不重合时，距离为正实数. 空间中任意三点都共面. 空间中存在不共面的四点. 给定平面上四点 A,B,C,D，总有四个不全为零的数 a,b,c,d，对该平面上任意点 M，当 $a+b+c+d=0$ 时，$a\cdot MA^2+b\cdot MB^2+c\cdot MC^2+d\cdot MD^2$ 为常数.

给定空间中的五点 A,B,C,D,E，总有不全为零的数 a,b,c,d,e，对空间中任意点 M，当 $a+b+c+d+e=0$ 时，$a\cdot MA^2+b\cdot MB^2+c\cdot MC^2+d\cdot MD^2+e\cdot ME^2$ 为常数.

若 A,B,C 三点不共线，它们之间的距离分别为 $BC=a,CA=b,AB=c,OA=x,OB=y,OC=z$，则点 O 在平面 ABC 上的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & x^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & y^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & z^2 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

若空间中的五点 A,B,C,D,O 间的距离分别为 $BC=a,CA=b,AB=c,DA=\alpha,DB=\beta,DC=\gamma,OA=x,OB=y,OC=z,OD=u$ 时，则必有关系

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & \alpha^2 & x^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & \beta^2 & y^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & \gamma^2 & z^2 & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & 0 & u^2 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

空间点与直线的位置关系(positional relation between points and lines in space)　立体几何的重要概念之一. 指空间的一点与一条直线间有且仅有下列两种位置关系之一：

1. 点在直线上或说直线通过点.
2. 点不在直线上或说直线不通过点.

描述点与直线位置关系的特征量是点到直线的距离. 当点在直线上时，点到直线的距离为零；当点不在直线上时，点到直线的距离为正实数.

点到直线的距离(distance between a point and a line)　见“空间点与直线的位置关系”及本卷《空间解析几何》同名条.

空间点与平面的位置关系(positional relation between points and planes in space)　立体几何的重要概念之一. 指空间中的一点与一平面间有且仅有下列两种位置关系之一：

1. 点在平面上或说平面通过点.
2. 点不在平面上或说平面不通过点.

描述点与平面的位置关系的特征量是点到平面的距离. 当点在平面上时，点到平面的距离为零；当点不在平面上时，点到平面的距离为正实数.

点到平面的距离(distance from a point to a plane)　刻画点和平面间的度量关系的一个量. 从平面外一点作这个平面的垂线，这个点和垂足间的线段称为这点到平面的垂线段，它的长度称为点到平面的距离，亦称为点到平面的垂线长. 点到平面的距离是该点与平面内的点连线长度的最小值. 平面内的点到此平面的距离为零(参见本卷《空间解析几何》同名条).

点到平面的垂线段(perpendicular segment from a point to a plane)　见“点到平面的距离”.

点到平面的垂线长(perpendicular length from a point to a plane)　即“点到平面的距离”.

点到平面的比例距离中心(center of proportional distance between a point and a plane)　定比分点概念的推广. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不全为零的实数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n\neq 0$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是空间中的 n 个点，它们到定平面 α 的距离分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$，M_1 分 A_1A_2 为定比

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{A_1M_1}{M_1A_2},$$

M_2 分 M_1A_3 为定比

$$\frac{a_3}{a_1+a_2}=\frac{M_1M_2}{M_2A_3},\cdots,$$

M_{n-1}分 $M_{n-2}A_n$ 为定比

$$\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}=\frac{M_{n-2}M_{n-1}}{M_{n-1}A_n},$$

则称 M_{n-1}为诸点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 在系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 影响下的比例距离中心. M_{n-1}到平面 α 的距离为

$$d=\frac{a_1d_1+a_2d_2+\cdots+a_nd_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

若在点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 处分别赋予平行力 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，当诸平行力的合力不为零时，比例距离中心就是该组平行力的合力中心.

空间两直线的位置关系(positional relation of two straight lines in space)　立体几何的重要概念之一. 指空间两直线的相关位置. 空间不重合的两直线，可能相交、平行或异面. 两相交直线或两平行直线都是共面直线. 两异面直线不共面. 平行直线可讨论它们之间的距离，相交直线可讨论它们的交角，异面直线可讨论它们所成的角和异面直线间的距离(参见本卷《空间解析几何》同名条).

相交(intersection)　几何学的基本概念之一. 在平面几何和立体几何中，线和线、线和面、面和面的一种相互位置关系. 当线和线有一个公共点，线和面有一个公共点，面和面有一条公共线时，就称这些线和线、线和面、面和面相交于其公共点(线). 它们的公共点称为交点，公共线称为交线. 平面几何中最常用到直线和直线相交于一点，直线和圆、圆和圆相交于两点. 立体几何中除以上者外，还常用到直线和平面相交于一点，直线和球面相交于两点，平面和平面相交于一直线，平面和球面、球面和球面相交于一个圆. 必须注意相交与相切的区别.

交点(intersecting point)　见“相交”.

交线(intersecting line)　见“相交”.

共点(concurrent)　见本卷《平面几何》同名条.

共线(collinear)　立体几何的基本概念之一. 平面上或空间中若干几何元素共有的与直线的结合关系. 若干点共线是说它们同属于一条直线，若干平面共线是说它们同时通过一条直线，若干点与若干平面共线是说它们中的平面共线且所指点都在这条直线上.

共面(coplanar)　立体几何的基本概念之一. 空间的若干个几何图形，如果它们的点都在同一平面上，则称它们共面. 空间中任何三点都共面，它们所在的面就是它们所确定的平面. 两直线只有在相交或平行时才共面. 空间中一点与一条直线一定共面，当点不在直线上时，它们所在的面是该点与直线上的不同两点所确定的平面. 共面的几何图形一定都是平面图形.

点在平面上的正射影(orthogonal projection from a point to a plane)　满足特定条件的一个点. 过平面外一点向平面引垂线，垂足称为这点在这个平面上的正射影，常简称射影. 平面内的点在此平面上的正射影就是它本身. 平面称为射影面，垂线称为投射线.

点在平面上的平行射影(parallel projection from a point to a plane)　亦称点在平面上的平行投影. 在给定射影方向的条件下，与点和平面有关的满足特定条件的一个点. 给定平面 α 及与 α 相交的直线 l，过点 A 作平行于 l 的直线，交平面 α 于点 A'，则点 A' 称为点 A 沿方向 l 在平面 α 上的平行射影. 直线 l 的方向称为投影方向，直线 AA' 称为点 A 的投影线，平面 α 称为射影面. 点在平面上的正射影是点在平面上的平行射影当 $l\perp\alpha$ 时的特殊情况.

点在平面上的平行投影(parallel projection from a point to a plane)　即“点在平面上的平行射影”.

投射方向(projecting direction)　见“点在平面上的平行射影”及本卷《平面几何》同名条.

投射线(projecting line)　见“点在平面上的正射影”及“点在平面上的平行射影”.

射影面(plane of projection)　见“点在平面上的正射影”及“点在平面上的平行射影”.

异面直线(logic difference surface lines)　亦称交错直线、相左直线、偏斜直线. 满足特定条件的两条直线. 不同在任何一个平面内的两条直线称为异面直线. 画异面直线时，为了显示出它们不共面的特征，可用辅助平面来衬托(如图1、图2).

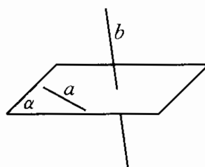


图1

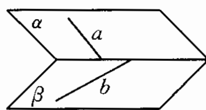


图2

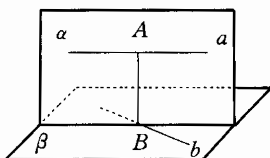
交错直线(alternating lines)　即“异面直线”.

相左直线(different lines)　即“异面直线”.

偏斜直线(skew lines)　即“异面直线”.

异面直线所成的角(angle between skew lines)　亦称异面直线交叉角. 刻画异面直线相关位置的一个数. 分别平行于两条异面直线的两相交直线所成的角称为异面直线所成的角. 如果两条异面直线所成的角是直角，则称这两条异面直线互相垂直(参见本卷《空间解析几何》中的“空间两直线的夹角”).

异面直线的公垂线(common perpendicular of skew lines)　刻画异面直线相关位置的一条直线. 和两条异面直线都垂直相交的直线称为两条异面直线的公垂线. 两条异面直线有一条且只有一条公垂线. 两异面直线的公垂线上，两垂足之间的部分，称为两条异面直线的公垂线段. 公垂线段的长度是分别在两条异面直线上的两点间距离中的最小者，因此将它称为两条异面直线间



的距离(见图).

异面直线间的距离(distance between skew lines)　见"异面直线的公垂线"及本卷《空间解析几何》同名条.

异面直线的方向平面(directional plane of skew lines)　刻画异面直线相关位置的平面.同时平行于两条异面直线的平面称为异面直线的方向平面.

射线丛(ray bundle)　一种空间图形.空间中,从同一点出发的全体射线的集合称为射线丛.这点称为丛心.以 O 点为丛心的射线丛称为射线丛 O.若认为射线包括端点,那么射线丛 O 即是以 O 为中心的中心直线丛.若认为射线不包括端点,那么射线丛 O 连同点 O 就是以 O 为中心的中心直线丛.

丛心(center of bundle)　见"射线丛".

直线丛(bundle of straight lines)　亦称直线把.一种空间图形.空间中通过同一个点或平行于同一条直线的全体直线的集合称为直线丛.丛中直线共点时,此丛称为中心直线丛,此点称为中心直线丛的中心.丛中直线平行时,此丛称为平行直线丛.平行直线丛无中心或说中心在无穷远处(参见本卷《空间解析几何》中的"直线把").

中心直线丛(central bundle of straight lines)　见"直线丛".

直线丛的中心(center of straight lines bundle)　见"直线丛".

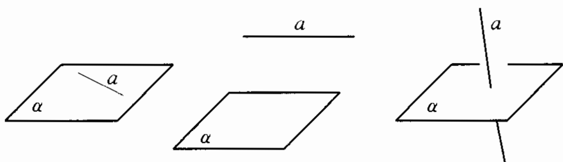
平行直线丛(parallel lines bundle)　见"直线丛".

丛内图形(figure in the bundle)　一种空间图形.对于中心直线丛 O,如果在空间图形 F 上,任取异于丛心 O 的点 A,若射线 OA 上的所有点都在 F 上,则图形 F 称为丛 O 内图形.中心直线丛的丛内图形如:过丛心 O 的直线、平面;棱过丛心 O 的二面角;顶点在丛心 O 的多面角、圆锥等.属于丛 O 的丛内图形的集合与以 O 为球心的球面图形的集合,可建立一一对应,即一个丛内图形对应于它与球面相截、截出的球面图形.例如,与上列丛内图形相对应的球面图形是:直径两端点、大圆、球面二角形、球面多边形、小圆等.对于平行直线丛,具备下述性质的空间图形 F 称为丛内图形:在 F 上任取一点 A,直线 AB 若平行于丛内直线,则 AB 上所有点都在 F 内.平行直线丛的丛内图形如:平行于丛内直线的直线或平面,棱平行于丛内直线的二面角,母线平行于丛内直线的圆柱面等.

空间三线平行定理(theorem of three parallel lines in space)　立体几何的基本定理之一.如果两条直线分别与第三条直线平行,则这两条直线也互相平行.这一定理反映空间中彼此不同的直线平行关系的传递性.

空间平行角定理(theorem of parallel angles in space)　立体几何的基本定理之一.对于空间两个不相同的角,如果它们的两组对应边分别平行,则这两个角相等或互补.当角的两组对应边同时同向或同时反向时,两角相等.当两组对应边一组同向一组反向时,两角互补.

直线与平面的位置关系(positional relation between a line and a plane)　立体几何的重要概念之一.空间中的一条直线与一个平面有且仅有下列三种位置关系之一:



1. 直线在平面内或说平面通过直线.
2. 直线与平面平行或说平面与直线平行.
3. 直线与平面相交或说平面与直线相交.

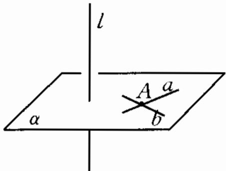
确定直线与平面是平行、相交或直线在平面内的方法,是看直线与平面是否没有、仅有一个或有两个公共点.描述直线与平面的位置关系的特征量是直线与平面的距离与交角.当直线与平面平行时,用直线与平面的距离描述,而交角为零.当直线与平面相交时,用直线与平面的交角描述,而距离为零.当直线在平面内时,直线到平面的距离与直线和平面的交角都是零(参见本卷《空间解析几何》同名条).

直线在平面内(straight line in a plane)　见"直线与平面的位置关系".

直线和平面平行(parallelism between a line and a plane)　见"直线与平面的位置关系".

直线和平面相交(intersection between a line and a plane)　见"直线与平面的位置关系".

直线和平面垂直(perpendicular between a line and a plane)　空间直线和平面的一种位置关系.如果一条直线垂直于一个平面内的任何一条直线,则称这条直线和这个平面互相垂直.直线称为平面的垂线,平面称为直线的垂面.直线和平面的交点称为垂足.直线 l 垂直于平面 α,记为 $l\perp\alpha$,读作直线 l 垂直于平面 α.



平面的垂线(perpendicular line of a plane)　见"直线和平面垂直".

直线的垂面(perpendicular plane of a straight line)　见"直线和平面垂直".

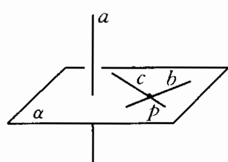
垂足(foot of a perpendicular line)　见"直线和平面垂直".

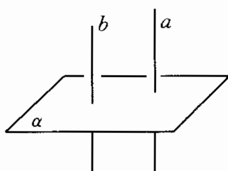
直线和平面垂直的判定(decision of perpendic-

ular between a line and a plane) 判定直线与平面垂直的几个充分条件.下列条件每一个都可判定直线和平面垂直:

1. 直线垂直于平面上的两条相交直线.

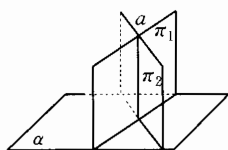
2. 直线与一条垂直于平面的直线平行.

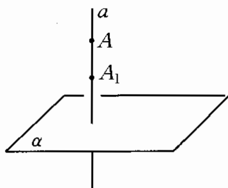




3. 直线是同垂直于第三个平面的两个平面的交线.

4. 直线上两点在平面上的正射影重合.





5. 直线垂直于与这个平面平行的另一个平面.

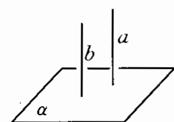
6. 直线在垂直于这个平面的平面上,而且垂直于这两个平面的交线.

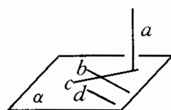
直线和平面垂直的性质(property of perpendicular between a line and a plane) 直线与平面垂直的几个必要条件.直线和平面垂直的主要性质有:

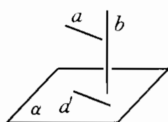
1. 垂直于同一个平面的两条直线平行.

2. 垂直于一个平面的直线垂直于这个平面内的任何直线.

3. 垂直于一条直线的平面包含垂直于该直线的直线或与它平行.







4. 过一点只能作已知平面的一条垂线.

5. 过一点只能作已知直线的一个垂面.

直线与平面斜交(oblique intersection between a line and a plane) 空间直线和平面的一种位置关系.一条直线和一个平面相交,但不和这个平面垂直,则这条直线称为这个平面的斜线.斜线和平面的交点称为斜线足,简称斜足.

平面的斜线(oblique lines of a plane) 见"直线与平面斜交".

斜线足(foot of an oblique line) 见"直线与平面斜交".

斜足(foot of an oblique line) 斜线足的简称.

直线和平面平行的判定(decision of parallelism between a line and a plane) 判定直线与平面平行的几个充分条件.下列条件每一个都可判定直线和平面平行:

1. 直线平行于平面上的一条直线.

2. 过直线上两点做到平面上的平行斜线的斜线段长度相等.

3. 直线上两点到平面的距离相等且不为零.

4. 过直线的平面与已知平面相交的交线与这直线平行.

5. 过直线能作与已知平面平行的平面.

直线和平面平行的性质(property of parallelism between a line and a plane) 直线与平面平行的几个必要条件.直线和平面平行的主要性质有:

1. 直线上的点到平面的距离相等.

2. 直线上的点到平面上的平行斜线段长度相等.

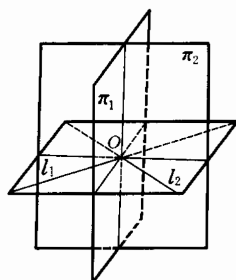
3. 过直线能作与已知平面平行的平面.

4. 过平面上的点作直线的平行线必在此平面上.

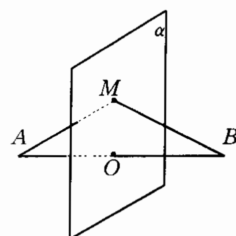
5. 直线上的线段在平面上的正投影和斜投影的长度都等于原线段的长度.

6. 过直线的平面与已知平面相交的交线与这直线平行.

相交直线夹角的平分面(bisection plane of an angle between two intersecting lines) 满足特定条件的平面.即经过两相交直线夹角的平分线,且与这两直线所在平面垂直的平面(如图).相交直线夹角平分面上的点,到两直线等距离.反之,在空间中与两相交直线等距离的点的轨迹是这两直线夹角的两个平分面.



线段的垂直平分面(perpendicular bisection plane of a line segment) 简称线段的中垂面.满足特定条件的平面.即过一条线段的中点,并且和这条线段垂直的平面.线段的垂直平分面是空间到线段的两个端点距离相等的点的轨迹.



线段的中垂面(perpendicular bisection plane of a line segment) 线段的垂直平分面的简称.

直线到平面的距离(distance between a line and a plane) 立体几何的重要概念之一.指直线上的点与平面上的点之间的距离的最小者.根据空间直线和平面的位置关系,分两种情形:

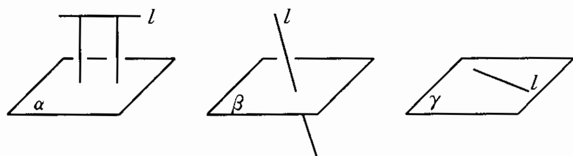
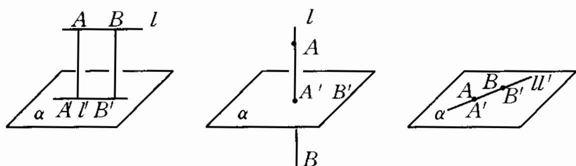


图1　　图2

1. 如果一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，都是这条直线到平面的距离(如图 1).

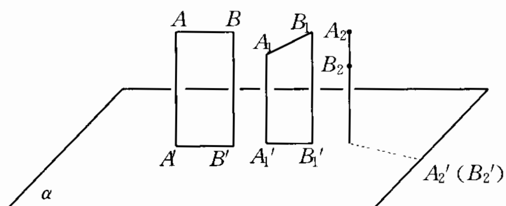
2. 如果直线和平面相交或者直线在平面内，直线到平面的距离为零(如图 2).

直线在平面上的正射影(orthogonal projection from a line to a plane)　相对于一条直线和一个平面的一条特殊直线或一个点. 即直线上不同的两点



在平面上的正射影所确定的直线. 正射影常简称射影. 当直线垂直于平面时，直线在平面上的射影退缩为一个点. 当直线在平面上时，射影就是它自身.

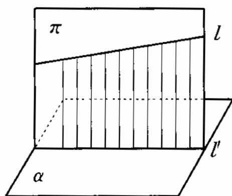
线段在平面上的正射影(orthogonal projection from a line segment to a plane)　相对于一个线段和一个平面一条特殊的线段或一个点. 线段的两端点在平面上的正射影所连结成的线段称为线段在平



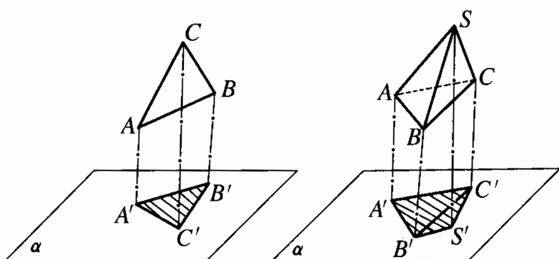
面上的正射影. 如果线段 AB 与平面 α 平行，$A'B'$ 是 AB 在平面 α 上的正射影，则 $A'B'=AB$. 如果线段 AB 或它的延长线与平面 α 斜交，则 $A'_1B_1'<A_1B_1$. 如果线段 A_2B_2 垂直于平面 α，则线段 A_2B_2 在平面 α 上的射影为一点. 如果线段 AB 和平面的交角为 φ，且线段 AB 在平面内的正射影为 $A'B'$，则有

$$A'B' = AB\cos\varphi.$$

直线的投射面(projecting plane of a straight line)　相对于一条直线或投影面的一个特殊平面. 当直线不与平面垂直时，从直线上各点向平面(投影面)所作的垂线(投射线)在同一平面内，该平面称为已知直线向已知平面的投射面.

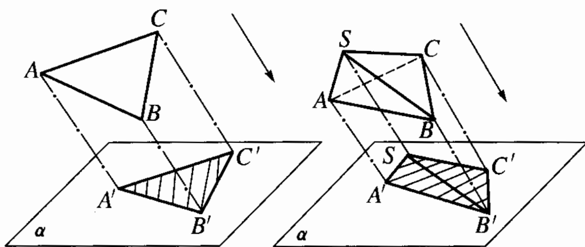


图形在平面上的正射影(orthogonal projection from a figure to a plane)　相对于一个图形的一个



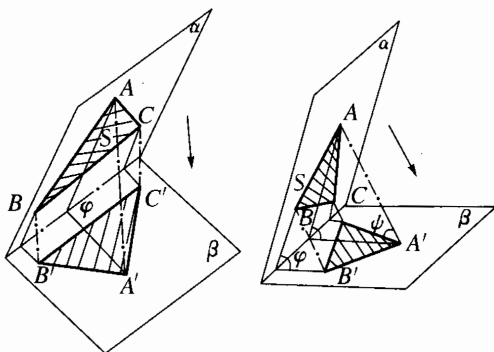
特定的平面图形. 即一个图形上的各点在平面 α 上的正射影所组成的图形. 平面图形在一个平面上的正射影是一个平面图形. 空间图形在平面上的正射影也是平面图形.

图形在平面上的平行射影(parallel projection from a figure to a plane)　相对于一个图形的一个



特定的平面图形. 即一个图形上各点向同一平面的同向平行射影所组成的图形. 平面图形在平面上的平行射影是一个平面图形. 空间图形在平面上的平行射影也是平面图形.

面积射影定理(projection theorem of an area)　立体几何的重要定理之一. 指计算投影图形面积的定理. 对于面积为 S 的平面图形，如果它所在平面 α 与平面 β 的夹角为 φ，则



1. 它在 β 内的正投影图形的面积为 $S\cos\varphi$.

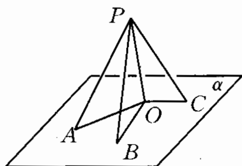
2. 当投射线与 $\alpha\cap\beta$ 垂直，且与 β 的夹角为 ψ 时，它在 β 内的倾斜投影图形的面积为

$$\frac{S\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi}.$$

直角射影定理(projection theorem of a right angle to a plane)　立体几何的重要定理之一. 一直角在平面上的(正)射影为直角的充分必要条件是：原直角至少有一边平行于该平面或在该平面内且另

一边不与平面垂直.

斜线长定理(theorem of the length of an oblique line) 立体几何的重要定理之一. 从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中:

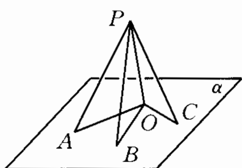


1. 射影相等的两条斜线段相等.

2. 射影不等的两条斜线段中,射影较长的斜线段较长.

3. 垂线段比任何一条斜线段都短.

射影长定理(theorem of length of segment projection) 立体几何的重要定理之一. 从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中:



1. 相等的斜线段的射影相等.

2. 不相等的两条斜线段中,斜线段长的射影较长.

例如,过平面 α 外一点 P 引平面的垂线段 PO 与斜线段 PA,PB,PC. 如 $PB=PC$,则 $OB=OC$;如 $PA>PB$,则 $OA>OB$.

直线与平面的交角(angle between a straight line and a plane) 立体几何的基本概念之一. 指与平面斜交的直线和它在平面上的正射影所夹的锐角. 与平面垂直的直线和平面的交角是直角;与平面平行或在平面内的直线与平面的交角是 $0°$的角. 直线和平面的交角 θ 的范围是 $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$(参见“最小角定理”).

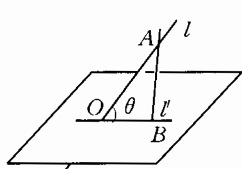


图1

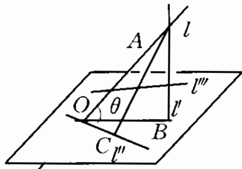
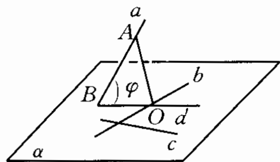
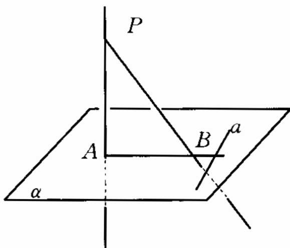


图2

最小角定理(theorem of the minimal angle) 立体几何的重要定理之一. 与平面斜交的直线与它在该平面内的射影的夹角不大于直线与平面内其他直线的夹角. 图中直线 a 在平面 α 上的射影是 OB,a 与 OB 的夹角是 φ,b 是平面 α 上的任何一条直线,则 a 与 b 的夹角不小于 φ,所以 φ 是 a 与平面 α 上任一直线的最小角.

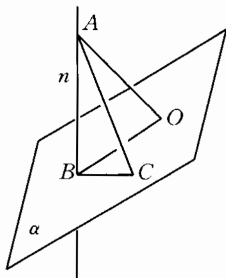


三垂线定理(theorem of three perpendiculars) 立体几何的重要定理之一. 平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直. 三垂线定理通过平面斜线的射影与平面内一直线的垂直关系来判定斜线与平面内一条直线垂直,由于定理中涉及三条与平面内已知直线有垂直关系的直线(如图,$PA\perp a$,$PB\perp a$,$AB\perp a$),故称为三垂线定理.

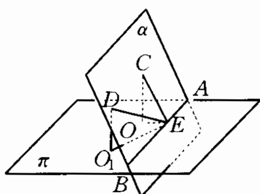


三垂线定理的逆定理(converse of the theorem of three perpendiculars) 立体几何的重要定理之一. 平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直.

平面的最小倾斜线(minimal oblique line of the plane) 相对于铅垂线的一条有特定位置的直线. 如平面 α 与铅垂线相交,铅垂线在 α 上的射影直线与铅垂线的夹角,比 α 上其他直线与铅垂线的夹角都小,这条射影直线称为 α 上的最小倾斜线. 这里的倾斜是相对于铅垂线而言的. 图中 AB 为铅垂线,与平面 α 交于 B,AB 在 α 上的射影为 BO,$BC\subset\alpha$,则$\angle ABO\leqslant\angle ABC$,$BO$ 是平面 α 上的最小倾斜线.



平面的最大倾斜线(maximal oblique line of the plane) 相对于水平面有特定位置的直线. 平面 α 与水平面相交,α 上垂直于交线的直线与水平面夹角大于 α 上其他直线与水平面的夹角,它称为平面 α 上的最大倾斜线. 这里的倾斜是相对于水平面而言的.



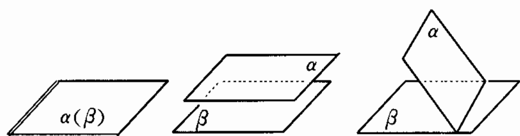
两平面的位置关系(positional relation between two planes) 立体几何的重要概念之一. 两个平面具有下列三种位置关系:

1. 两平面重合,它们在空间占有完全相同的位置.

2. 两平面相交.

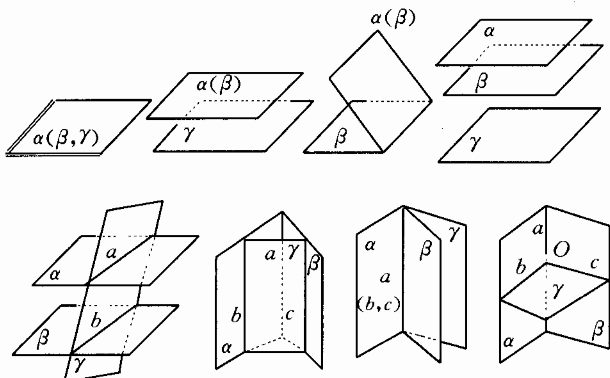
3. 两平面平行.

两平面平行时,它们无公共点. 两平面相交时,它们有惟一的一条公共直线. 两平面重合时,它们有不在同一直线上的三个公共点. 两平面位置关系与两平面的交角的关系是:当两平面平行或重合时,交



角 $\alpha=0$;当两平面相交时,交角 $0<\alpha<\pi$(参见本卷《空间解析几何》同名条).

三平面的位置关系(positional relation of three planes)　立体几何的重要概念之一.空间中的三个平面有下列八种位置关系:



1. 三个平面重合.

2. 两个平面重合,第三个平面与它们平行.

3. 两个平面重合,第三个平面与它们相交于同一直线.

4. 三个平面彼此平行.

5. 两个平面平行,第三个平面与它们相交.

6. 三平面两两相交,三条交线平行.

7. 三平面两两相交,三条交线重合.

8. 三平面两两相交,三条交线共点.

三平面两两相交时,三条交线平行、重合或共点可由其中任两条交线平行、重合或相交惟一决定.

两两相交的三个平面的交线性质(property of intersection lines of three pairwisely intersecting planes)　见"三平面的位置关系".

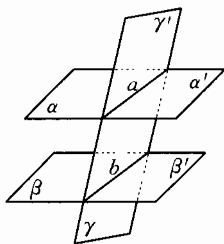
平面对空间的分割(cutting space by plane)　关于平面划分空间的一个结论.若干平面把空间分割为任意两部分都无公共点的若干部分,称为这些平面对空间的分割.设 n 个平面将三维空间至多可分割为 $D(n)$ 个部分,$D(1)=2$,$D(2)=4$,$D(3)=8$ 可以直接得出,可以推导出的一般结论是

$$D(n)=(n+1)+\frac{n(n^2-1)}{6}$$
$$=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3\ (n\geqslant 3).$$

平行平面定理(theorem of parallel planes)　立体几何的重要定理之一.如果一个平面与两个平行平面同时相交,则在形成的三面八角几何图形中:

1. 同位二面角相等,如图中的 γ'-a-$\alpha'=\gamma'$-b-β'.

2. 内错二面角相等,如图中的 α'-a-$\gamma=\beta$-b-γ'.

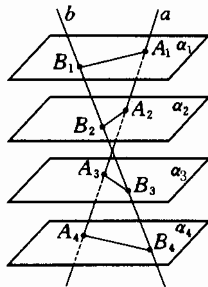


3. 外错二面角相等,如图中的 α'-a-$\gamma'=\beta$-b-γ.

4. 同旁内二面角互补,如图中的 α'-a-γ 和 β-b-γ' 互补.

5. 同旁外二面角互补,如图中的 α-a-γ' 和 β-b-γ 互补.

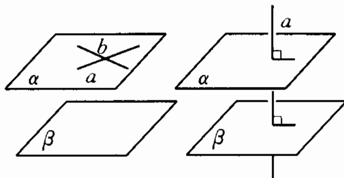
平行平面截直线定理(theorem of cutting the line by parallel planes)　立体几何的重要定理之一.如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组平行平面,直线 a,b 都与它们相交,其交点分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 与 $B_1,B_2,\cdots,B_n$(如图),则对任何 $i,j,k,l\in\{1,2,\cdots,n\}$,$i\neq j$,$k\neq l$,有



$$\frac{A_iA_j}{B_iB_j}=\frac{A_kA_l}{B_kB_l}.$$

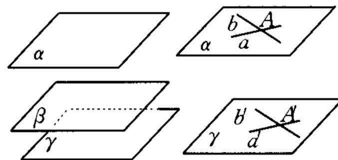
两平面平行(parallelism between two planes)　两平面间的一种位置关系.如果两个平面没有公共点,则称这两个平面有平行位置关系,简称两平面相互平行,一个平面称为另一个平面的平行平面.

两平面平行的判定(decision of parallelism between two planes)　判定两平面平行的几个充分条件.下列条件每一个都可判定两平面平行:



1. 一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面.

2. 都垂直于同一条直线.



3. 都平行于第三个平面.

4. 一个平面内的两条相交直线分别与另一个平面内的两条相交直线平行.

两平行平面的性质(property of two parallel planes)　平面平行的几个必要条件.两平行平面的主要性质有:

1. 它们和第三个平面的交线平行.

2. 垂直于一个平面的直线也垂直于另一个平面.

3. 和其中一个平面相交的直线必和另一个平面相交.

4. 第三个平面和其中一个平面相交(或平行),必和另一平面也相交(或平行).

5. 其中一个平面上的任何一条直线都平行于另

一个平面.

6. 夹在它们间且与它们相交的平行线段相等；公垂线段的长相等.

两平行平面的公垂线(common perpendicular of two parallel planes) 刻画两平行平面相关位置的直线. 和两个平行平面垂直的直线称为这两个平行平面的公垂线. 过空间任何一点，都可作两平行平面的一条公垂线.

两平行平面的公垂线段(common perpendicular segment of two parallel planes) 刻画两平行平面相关位置的线段. 指两平行平面的公垂线夹在这两平行平面间的线段.

两平行平面间的距离(distance between two parallel planes) 刻画两平行平面相关位置的一个数量. 两平行平面的公垂线段的长度称为这两平行平面间的距离. 它是分别在两平行平面上的两点间的距离的最小者.

两平面相交(intersection between two planes) 两平面间的一种位置关系. 如果两个平面只有一条公共直线，就说这两个平面有相交位置关系，简称两平面相交. 这两个平面称为相交平面，而这条公共直线称为这两个平面的交线.

相交平面(intersecting planes) 见"两平面相交".

平面的交线(intersection line of planes) 见"两平面相交".

两平面垂直(perpendicular between two planes) 两平面间的一种位置关系. 两个平面相交，若所成的二面角是直二面角，则称这两个平面互相垂直. 其中任一个平面称为另一个平面的垂直平面.

垂直平面(perpendicular plane) 见"两平面垂直".

两平面垂直的判定(decision of perpendicular between two planes) 判定两平面垂直的几个充分条件. 下列条件每一个都可判定两个平面互相垂直：

1. 一个平面经过另一个平面的一条垂线.

2. 与一个平面平行的平面或直线与另一个平面垂直.

3. 与一个平面垂直的平面或直线与另一个平面平行.

4. 一个平面上不共线的三点，在另一个平面上的正射影共线.

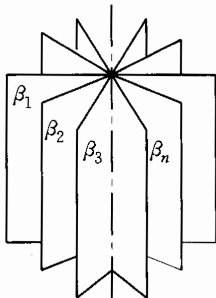
两垂直平面的性质(property of two perpendicular planes) 两平面垂直的几个必要条件. 两垂直平面的主要性质有：

1. 一个平面上垂直于交线的直线也垂直于另一个平面.

2. 从一个平面上任一点到另一个平面的垂线必在前一个平面上.

3. 垂直于一个平面的平面与另一个平面的交线也垂直于前一个平面.

平面束(pencil of planes) 一种空间图形. 满足某一条件的平面的集合称为平面束. 指如下两种平面集合：



1. 由所有彼此平行的平面组成的集合称为平行平面束.

2. 由相交于同一条直线的所有平面组成的集合称为共线平面束或相交平面束，这条直线称为共线平面束的轴(如图)(参见本卷《空间解析几何》同名条).

平行平面束(pencil of parallel planes) 见"平面束".

共线平面束(pencil of collinear planes) 见"平面束".

平面束的轴(axis of a pencil of collineation planes) 见"平面束".

相交平面束(pencil of intersecting planes) 即"共线平面束".

平面把(bundle of planes) 亦称平面丛. 一种空间图形. 过空间一定点的所有平面组成的集合称为平面把. 这个定点称为平面把的中心. 另一种平面把是平行于同一条直线(或说此直线的方向)的全体平面的集合. 在把方向看做它所指的无穷远点后，不妨认为这种平面把是通过同一个无穷点的全体平面的集合(参见本卷《空间解析几何》同名条).

平面丛(planes bundle) 即"平面把".

平面把的中心(center of bundle of planes) 见"平面把".

空间折线(space broken line) 一种空间图形. 依次首尾相接的若干线段组成的空间图形称为空间折线. 组成空间折线的各线段，可以不共面(参见本卷《平面几何》中的"折线").

封闭空间折线(closed broken line in space) 一种特殊的空间折线、指首尾端点重合的空间折线(参见本卷《平面几何》中的"封闭折线").

空间折线的锁线(lock line of space broken line) 与空间折线有关的一种线段(参见本卷《平面几何》中的"锁线").

空间多边形(space polygon) 亦称捩多边形. 一种空间图形. 常指各边不共面的多边形(参见本卷《平面几何》中的"多边形").

捩多边形(twist polygon) 即"空间多边形".

空间四边形(space quadrilateral) 亦称偏斜四

边形.空间多边形的一种.即各边不在同一平面内的四边形.若封闭折线 $ABCD$ 为空间四边形,则点 A,B,C,D 不在同一平面内,称为空间四边形的顶点.AB,BC,CD,DA 称为它的边:其中 AB,BC;BC,CD;CD,DA;DA,AB 是它的四对邻边;AB,CD;BC,DA,是它的两对对边(如图 1).AC 与 BD 称为它的对角线.连结对边中点的线段称为它的双中位线.设 P,Q,R,S 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点,则 PR,QS 是空间四边形的两条双中位线(如图 2).

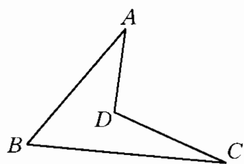


图1

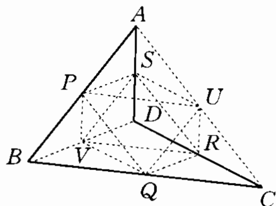


图2

空间四边形有下列性质:

1. 连结两对两邻边中点的线段互相平行且相等,且都等于与之平行的对角线的一半.如图 2,即

$$PQ \overset{/\!/}{=} SR \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}AC,\ QR \overset{/\!/}{=} PS \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}BD,$$

因此,四边中点组成一个平行四边形.从而知空间四边形的两条双中位线(PR 与 QS)相交且互相平分.

2. 由于每三条依次相邻的边的中点都不在同一直线上.是三角形的顶点,可知一条双中位线的长小于两对角线的和的一半,即

$$PR < PQ + QR = \frac{1}{2}(AC + BD),$$

$$QS < QR + RS = \frac{1}{2}(AC + BD).$$

3. 若两对角线互相垂直,则四边形中点连线所成的平行四边形为矩形.

4. 取四边形的 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 的中心 P,Q,R,S 与对角线 AC,BD 的中点 U,V,得到它的两个平面 $PVRU$ 与 $QUSV$,第一个面是与对边 BC,DA 平行的,第二个面是与对边 AB,CD 平行的.人们把平行于空间四边形一对对边的平面称为空间四边形的方向平面.任一空间四边形有两组方向平面,每组中的平面相互平行.

5. 若空间四边形中,对边中点的连线垂直且平分对边时(如图 2 中的 PR 或 QS),则称其为等腰偏斜梯形,且这对对边中点的连线称为等腰偏斜梯形的对称轴.

偏斜四边形(skew quadrilateral) 即"空间四边形".

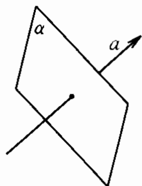
空间四边形的方向平面(directional plane of a space quadrilateral) 与空间四边形相交的一组平面.平行于空间四边形的一组对边的平面称为空间四边形的方向平面.空间四边形有两组方向平面,每组中的平面相互平行(参见"空间四边形").

空间四边形的双中位线(bimedian of a space quadrilateral) 与空间边形相关的一种线段.连结空间四边形对边中点的线段.两条双中位线相交并且互相平分,每条双中位线的长小于两对角线和之半(参见"空间四边形").

等腰偏斜梯形(isosceles skew trapezoid) 空间四边形的一种.一个空间四边形,如果存在一条直线同时垂直平分其一组对边,则称其为等腰偏斜梯形.而这条直线是它的对称轴.从形状上看,等腰偏斜梯形像是一个被扭曲了的等腰梯形(参见"空间四边形").

等腰偏斜梯形的轴线(the axis of an isosceles skew trapezoid) 见"空间四边形"和"等腰偏斜梯形".

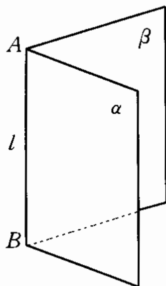
有向平面(directed plane) 一种规定了方向的平面.给平面的垂线规定一个正向,且平面的所有垂线的正向都指向平面的同侧,这种规定了垂线正向的平面称为有向平面(如图).一个有向平面有两个方向.如指定平面连同它的垂线方向为平面的正向,那么平面连同它的垂线的负向为平面的负向.两个平面平行或重合时,它们有共同的垂线,这时称这两个平面共向.两个平面相交时有不同的方向,不共向.



有向角(directed angle) 见本卷《平面三角》同名条.

空 间 角

二面角(dihedral angle) 亦称二面形.立体几何研究的基本图形.即有公共边缘的两个半平面所组成的图形(如图).这公共边缘称为二面角的棱,每个半平面称为二面角的面.以半平面 α 和 β 为面,以直线 l 或 AB 为棱的二面角记为二面角 α-l-β 或二面角 α-AB-β.如果二面角的两个面在同一平面内,且分居棱的两侧(或同侧),则称它为平二面角(或零二面角).通常二面角不包括这两种特殊情况.在二面角的两个面上分别任取一点,以它们为端点的线段的内点称为二面角的内点,内点的集合称为二面角的内部.二面角将空间划分成两部分,二面角的内部是凸域,二面角的外部是凹域.



二面形(dihedral angle)　即"二面角".

平二面角(flat dihedral angle)　见"二面角".

零二面角(zero dihedral angle)　见"二面角".

二面角的内点(interior points of dihedral angle)　见"二面角".

二面角的内部(interior of dihedral angle)　见"二面角".

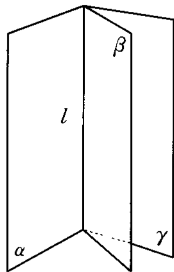
对棱二面角(vertically opposite dihedral angle)　亦称对顶二面角.两个位置相关的二面角.一个二面角和反面伸展这个二面角的两个面所成的二面角,称为对棱二面角.

对顶二面角(vertically opposite dihedral angle)　即"对棱二面角".

邻接二面角(adjacent dihedral angle)　亦称邻二面角.两个位置相关的二面角.指两个二面角有公共的棱和一个公共面,且两二面角的内部分别处于公共面的两侧.两个二面角邻接,当且仅当它们有成邻角的平面角.

邻二面角(adjacent dihedral angle)　即"邻接二面角".

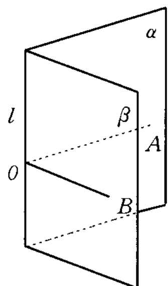
二面角的和(sum of dihedral angles)　与二已知二面角大小有关的二面角.如果二面角 α-l-β 和 β-l-γ 是邻接二面角,则二面角 α-l-γ 称为二面角 α-l-β 与 β-l-γ 的和(如图).如果二面角 α-l-β 与 β-l-γ 的和为 α-l-γ,则称二面角 α-l-β 是二面角 α-l-γ 与 β-l-γ 的差,也称二面角 β-l-γ 是二面角 α-l-γ 与 α-l-β 的差.



二面角的差(difference of dihedral angles)　见"二面角的和".

二面角的相等(equality of dihedral angles)　见本卷《平面几何》中的"图形的全等".

二面角的平面角(plane angle of a dihedral angle)　亦称二面角的示度角.与一个二面角有特殊位置关系的平面角.指过二面角棱上任意一点,在两个面内垂直于棱的两条射线所成的角.二面角的平面角的大小与它的顶点在棱上的位置无关.两个二面角相等的充分必要条件是它们的平面角相等.所以二面角的大小可用它的平面角的大小来度量.平面角是锐角、直角、钝角的二面角分别称为锐二面角、直二面角、钝二面角.



二面角的示度角(plane angle of a dihedral angle)　即"二面角的平面角".

锐二面角(acute dihedral angle)　见"二面角的平面角".

钝二面角(obtuse dihedral angle)　见"二面角的平面角".

直二面角(right dihedral angle)　见"二面角的平面角".

斜二面角(oblique dihedral angle)　一类二面角的统称.即锐二面角与钝二面角的统称.

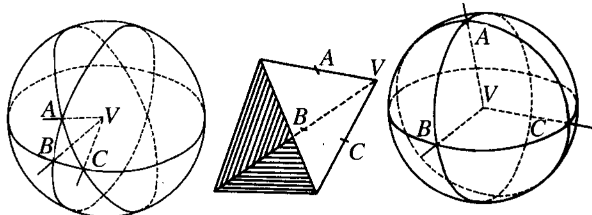
余二面角(complementary dihedral angle)　两个数量相关的二面角.平面角互余的两个二面角.其中任一个二面角称为另一个二面角的余二面角.

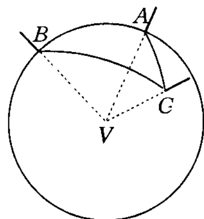
补二面角(supplementary dihedral angle)　两个数量相关的二面角.指平面角互补的两个二面角.其中任一个二面角都称为另一个二面角的补二面角.

邻补二面角(supplementary adjacent dihedral angle)　两个位置相关的二面角.指既相邻又互补的两个二面角.

二面角的平分面(bisecting plane of dihedral angle)　满足特定条件的平面.即过二面角的棱和它的平面角的平分线的半平面.它将这个二面角分为两个相等的二面角,平分面上的点到二面角的两个面的距离相等.

三面角(trihedral angle)　亦称三面形.立体几何研究的基本图形.它是由具有公共端点的不共面的三条射线,以及任两条射线所成的角的内部构成的空间图形.公共端点称为三面角的顶点,射线称为三面角的棱,两棱所夹的平面部分(角)称为三面角的面(角).过每一条棱的两个面所成的二面角称为三面角的二面角.三条棱 VA,VB,VC 所成的三面角记为 V-ABC.三面角的任一面角小于其他两个面角之和.三面角的三个二面角的和必大于两个直角而小于六个直角.若以顶点 V 为球心作单位球面,它与三面角相交得一球面三角形 ABC(如图).该球面三角形的边(大圆劣弧)长与相应面角的弧度大小相等,球面三角形的内角与相应二面角的大小也相等.因此,三面角中,有关面角、二面角的关系与球





面三角形的边角关系可以相互转化.例如,球面三角形的任一边小于其他两边之和.球面三角形的三个内角之和大于 π 而小于 2π.三面角的显著线(如垂心线、形心线、等倾线、轴线、旁轴等)分别对应于球面三角形的巧合点(如垂心、重心、外心、内心、旁心等).一般地,多面角与球面多边形有着极密切的关系.

三面角的主要性质有:

1.三面角的任何一个面角小于另外两个面角的和,而大于另外两个面角的差.

2.三面角的三个面角之和小于 360°.

3.三面角的三个二面角之和大于 180°而小于 3×180°.

4.三面角中,如果有两个二面角相等,则它们所对的面角也相等.反之亦然.

5.三面角中,不相等的二面角所对的面角不相等,且较大的二面角所对的面角较大.反之亦然.

6.三面角必有一组显著线(参见"三面角的显著线").

三面形(trihedral angle) 即"三面角".

三面角的顶点(vertex of trihedral angles) 见"三面角".

三面角的棱(edge of trihedral angles) 见"三面角".

三面角的面(角)(face (angle) of trihedral angles) 见"三面角".

三面角的二面角(dihedral angles of trihedral angles) 见"三面角".

三面角的性质(property of trihedral angles) 见"三面角".

三面角的余弦定理(cosine theorem of a trihedral angle) 三面角的著名定理.三面角的一个面角的余弦,等于其余两个面角的余弦之积加上这两个面角的正弦与这两个面角所夹的二面角的余弦的连乘积.设三个面角的度量分别为 α,β,γ,后两个面角所夹的二面角的度量为 A,则

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A.$$

此定理实即球面三角形的余弦定理(参见"三面角"和本卷《球面几何》中的"球面三角形的余弦定理").

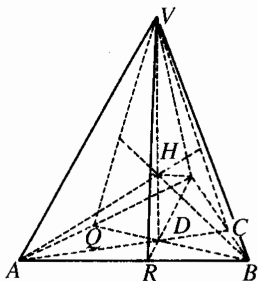
三面角的正弦定理(sine theorem of a trihedral angle) 三面角的著名定理.三面角的三个面角的正弦与它们所对的三个二面角的正弦成比例.设三面角 $V\text{-}ABC$ 的三个面角分别为 α,β,γ,它们所对的二面角分别为 A,B,C,则

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

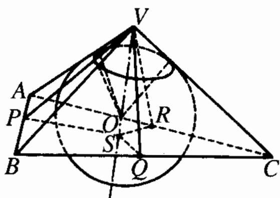
此定理实即球面三角形的正弦定理(参见"三面角"和本卷《球面几何》中的"球面三角形的正弦定理").

三面角的显著线(remarkable line of a trihedral angle) 与三面角有特定位置的几种直线.三面角的轴线、形心线、垂心线、等倾线统称为三面角的显著线.

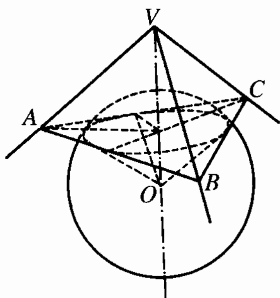
三面角的垂心线(orthocentric line of a trihedral angle) 三面角的显著线之一.过三面角的每条棱分别作与对面垂直的平面,这样作出的三个平面一定交于同一直线,这条直线称为三面角的垂心线(如图).



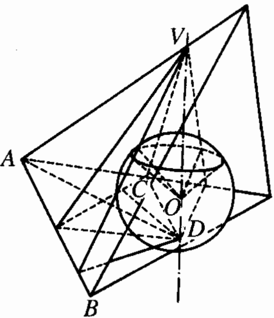
三面角的形心线(centroid line of a trihedral angle) 三面角的显著线之一.三面角的每条棱与所对面角的角平分线确定一个平面,这样的三个平面共线,该直线称为三面角的形心线(如图).



三面角的等倾线(isocline of a trihedral angle) 三面角的显著线之一.三面角的三个面角的垂直平分面共线,该直线称为三面角的等倾线(如图).三面角的等倾线与三面角的三条棱构成相等的角,且等倾线上的点到三面角的三条棱距离相等.显然,三面角切棱球球心位于等倾线上.



三面角的旁轴(paraxial of a trihedral angle) 三面角的显著线之一.三面角的一个二面角的平分面与另外两个二面角的邻补二面角的平分面共线,这条直线称为三面角的旁轴(如图).三面角的旁轴有三条,它们是三面角旁切圆锥的轴线.三面角的旁切球球心位于旁轴上.



三面角的轴线(axis of a trihedral angle) 三面角的显著线之一.三面角的三个二面角的平分面共线,这条直线称为该三面角的轴线.三面角轴线上的点到三面的距离相等.三面角的轴线就是三面角内切圆锥面的轴线.三面角的内切球球心位于该轴线上.

三面角的内部(interior of a trihedral angle) 三面角的重要概念.三面角把空间划分成两个区域,

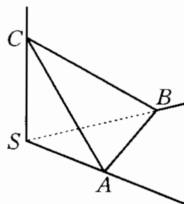
一个凸区域，一个凹区域，凸区域称为三面角的内部，凹区域称为三面角的外部.

三面角的外部(exterior of a trihedral angle) 见"三面角的内部".

等腰三面角(isosceles trihedral angle) 一种特殊的三面角.有两个面角相等的三面角称为等腰三面角.三面角的相等的两个面角所对的二面角也相等.反之亦真.

直三面角(rectangular trihedral angle) 一种特殊的三面角.三面角的二面角有直角时，按直二面角是一个、两个或三个，分别称为单直三面角、双直三面角和三直三面角.通常三直三面角简称直三面角.直三面角的三个面角也都是直角.直三面角从以顶点为球心的球面截下的球面三角形的三个内角都是直角，其面积是球面面积的八分之一(参见"直多面角").

双直三面角(birectangular trihedral angle) 一种特殊的三面角.指恰有两个二面角是直二面角的三面角.双直三面角有两个面角为直角，两直角棱的夹角不是直角，但与另一棱的夹角都是直角.双直三面角的判定定理：恰有两个面角是直角的三面角是双直三面角.双直三面角的直二面角所对的面角是直角.



单直三面角(monorectangular trihedral angle) 一种特殊的三面角.只有一个二面角是直二面角的三面角.其中：直二面角所对的面角，称为该三面角的斜面角，其余两个面角称为它的矩面角.直二面角的棱称为它的直角棱.过直角棱上任意一点作该棱的垂面若与三面角相截，则截口图形是一个直角三角形.

三面角的斜面角(inclined angle of a trihedral angle) 见"单直三面角".

三面角的矩面角(moment face angle of a trihedral angle) 见"单直三面角".

单直三面角相等的判定(decision of the equality of monorectangular trihedral angles) 判定两个单直三面角相等的几个充分条件.下列条件每一个都可判定两个单直三面角相等：

1.有一个非直二面角对应相等，它们所对的矩面角也对应相等，并且两个斜面角同为锐角或同为钝角.

2.斜面角和一个矩面角分别对应相等.

3.一个非直二面角和斜面角分别对应相等(参见"单直三面角").

有向三面角(directed trihedral angle) 确定了方向的三面角.即规定了三条棱的一种顺序的三面角.三面角的三条棱有两种不同的循环顺序：有向三面角规定其中一种为正向，另一种为负向.从三面角的顶点向各棱所指的方向看，三条棱的两种顺序相当于顺时针或逆时针方向.两个有向三面角在三条棱的正面同为顺时针(或同为逆时针)方向时称为同向三面角，否则(即一为顺时针方向另一为逆时针方向时)称为反向三面角.

同向三面角(synclastic trihedral angle) 见"有向三面角".

反向三面角(oppositely directed trihedral angle) 见"有向三面角".

三面角的相等(equality of trihedral angles) 经过合同变换重合的两个三面角之间的关系(参见本卷《平面几何》中的"图形的全等").

三面角相等的判定(decision of equality of trihedral angles) 判定两个三面角相等的几个充分条件.下列条件每一个都可判定两个三面角相等：

1.三个面角对应相等.

2.三个二面角对应相等.

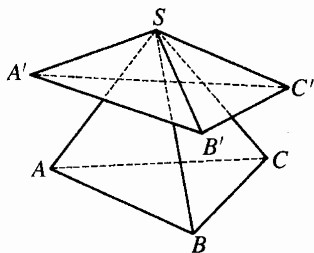
3.两个面角和所夹的二面角对应相等.

4.两个二面角和所夹的面角对应相等.

5.相互对称.

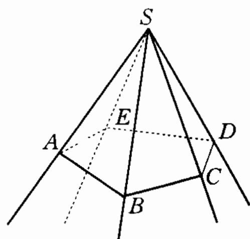
三面角的全等(congruence of trihedral angles) 见本卷《平面几何》中的"图形的全等".

补三面角(supplementary trihedral angle) 亦称极三面角.与一个三面角有关的三面角.从三面角$S\text{-}ABC$的顶点S作三条射线SA'，SB'，SC'分别垂直于平面BSC，CSA，ASB，并分别与SA，SB，SC在各相应平面的同侧，则三面角$S\text{-}A'B'C'$称为$S\text{-}ABC$的补三面角.这时$S\text{-}ABC$也是$S\text{-}A'B'C'$的补三面角(如图).一个三面角的每个面角(或二面角)与它的补三面角的对应二面角(或面角)互补.



极三面角(polar trihedral angle) 即"补三面角".

多面角(polyhedral angle) 亦称立体角.立体几何研究的基本图形.由若干条具有公共端点的不共面的有序射线SA，SB，SC，…，SL以及相邻射线所成的角$\angle ASB$，$\angle BSC$，…，$\angle LSA$(约定



五面角$S-ABCDE$

都小于平角)的内部构成的立体图形称为多面角.记为 $S\text{-}AB\cdots L$(如图).公共端点称为多面角的顶点,射线 $SA,SB,\cdots,SL$ 称为多面角的棱,相邻两棱所夹的角称为多面角的面角,相邻两棱间的平面部分称为多面角的面,不相邻的棱间的平面部分称为多面角的对角面,相邻两个面所成的二面角称为多面角的二面角,又称为多面角的棱角.若多面角有 n 个面,就称它是 n 面角.n 面角有 n 条棱,n 个面,n 个二面角.

多面角的顶点(vertex of polyhedral angles) 见"多面角".

多面角的棱(edge of polyhedral angles) 见"多面角".

多面角的面(face of polyhedral angles) 见"多面角".

多面角的面角(face angle of a polyhedral angle) 见"多面角".

多面角的二面角(dihedral angle of a polyhedral angle) 见"多面角".

多面角的棱角(edge angle of a polyhedral angle) 见"多面角".

多面角的对角面(face of opposite angles of a polyhedral angle) 见"多面角".

简单多面角(simple polyhedral angle) 一种多面角.指满足下列条件的多面角:

1.多面角的任意两个面角的内部无公共点.

2.多面角的任何一条棱不在多面角的一个面角的内部.

3.多面角的任两条棱不重合.

简单多面角把空间分成两个部分.如果将简单多面角的顶点放在球心,则各面与球面的交线是球面上一些大圆劣弧首尾相接的封闭球面折线,且把球面分成两个不同的部分.不是简单多面角的多面角称为复杂多面角或星形多面角.

复杂多面角(complex polyhedral angle) 见"简单多面角".

星形多面角(star polyhedral angle) 即"复杂多面角".

简单多面角的内部(interior of simple polyhedral angle) 有关多面角的重要概念.一个简单多面角把空间分为无公共点的两个部分,如指定其中一个部分为多面角的内部,那么另一部分就称为多面角的外部.凸多面角总是指定被划分出的凸区域为其内部.

简单多面角的外部(exterior of simple polyhedral angle) 见"简单多面角的内部".

凸多面角(convex polyhedral angle) 一种多面角.将多面角的任何一个面伸展成为平面,如果其他各面都在这个平面的同侧,则称该多面角为凸多面角.过凸多面角外部任何一点可以作一个平面,使凸多面角的所有点在这平面的同侧.凸多面角有如下性质:

1.所有面角的和小于 360°.

2.任何一个面角小于其余面角的和.

3.凸 n 面角的所有二面角的和大于 $(n-2)\cdot 180°$ 而小于 $n\cdot 180°$.

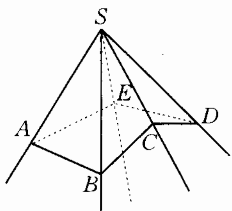
4.用一不过多面角顶点,且与各棱相交的平面截凸 n 面角,得到一个凸 n 边形.

凸多面角的内部(interior of a convex polyhedral angle) 凸多面角的重要概念.凸多面角把空间分成两个区域,其中一个是凸区域,一个是凹区域.凸区域称为该凸多面角的内部,凹区域称为这个凸多面角的外部.凸多面角的不同面上的任意两点连成的线段的内点总在凸多面角的内部.

凸多面角的外部(exterior of a convex polyhedral angle) 见"凸多面角的内部".

正多面角(regular polyhedral angle) 一种特殊的多面角.指所有面角相等,所有二面角也相等的凸多面角.

凹多面角(concave polyhedral angle) 一种特殊的多面角.指不是凸多面角的简单多面角.凹多面角可以用一些对角面划分为若干个凸三面角,这些凸三面角的内部与所作对角面的内点构成凹多面角的内部.如图中的多面角是一个凹五面角.



直多面角(right polyhedral angle) 亦称直多面体角.一种特殊的多面角.指以多面角的顶点为球心作单位球面,如果多面角在单位球面上截出的部分(球面多面形)的面积等于全球面面积的八分之一(即 $\pi/2$),则称该多面角为直多面角.

直多面体角(right polyhedral angle) 即"直多面角".

锐多面角(acute polyhedral angle) 一种特殊的多面角.指以多面角的顶点为球心作单位球面,如果多面角在单位球面上截出的部分(球面多边形)的面积小于全球面面积的八分之一($\pi/2$),则称该多面角为锐多面角.

钝多面角(obtuse polyhedral angle) 一种特殊多面角.以多面角的顶点为球心作单位球面,如果多面角在单位球面上截出的部分(球面多边形)的面积大于全球面面积的八分之一($\pi/2$),则称该多面角为钝多面角.

多面角的相等(equality of polyhedral angles)

多面角间的一种等价关系. 指经过合同变换后重合的多面角之间的关系(参见本卷《平面几何》中的“图形的全等”).

多面角的全等(congruence of polyhedral angles)　多面角间的一种等价关系. 即只经过平移和旋转就重合的多面角间的关系(参见本卷《平面几何》中的“图形的全等”).

对顶多面角(vertically opposite polyhedral angles)　两个特殊相关的多面角. 指具有公共顶点且关于顶点成中心对称的两个多面角. 它们反向相等.

对称多面角(symmetric polyhedral angles)　两个特殊相关的多面角. 互为中心对称、轴对称、镜面对称的多面角的统称. 两多面角中, 如果一个是另一个的中心对称图形、轴对称图形、镜面对称图形, 则分别称它们是互为中心对称、轴对称、镜面对称的多面角, 或者分别说一个多面角是另一个多面角的中心对称、轴对称、镜面对称多面角, 统称一个是另一个的对称多面角. 成轴对称的两个多面角, 可以通过空间绕轴旋转使一个与另一个重合. 而成镜面对称或中心对称的两个多面角常需要除平移和旋转外再作一次镜面反射才能使一个与另一个重合. 因此, 对称的两个多面角总是相等的. 其中, 只有轴对称多面角才是同向相等的.

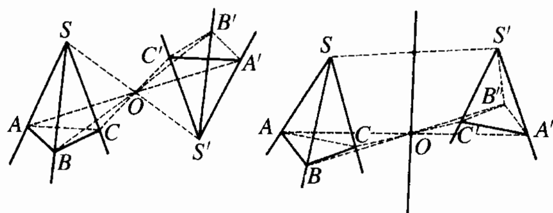


图 1　两中心对称三面角　　图 2　两轴对称三面角

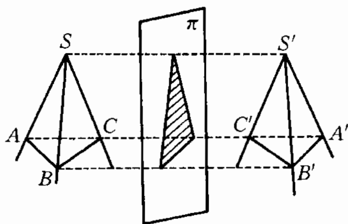


图 3　两镜面对称三面角

中心对称多面角(polyhedral angle of central symmetry)　见“对称多面角”.

轴对称多面角(polyhedral angle of axial symmetry)　见“对称多面角”.

镜面对称多面角(polyhedral angle of mirror plane symmetry)　见“对称多面角”.

对顶四面角(vertically opposite tetrahedral)　见“对称多面角”.

对顶三面角(vertically opposite trihedral angles)　见“对称多面角”.

多　面　体

多面体(polyhedron)　一种空间图形. 由若干个平面多边形围成的封闭几何体称为多面体. 这些多边形称为多面体的面, 两个面的公共边称为多面体的棱, 多边形的顶点也称为多面体的顶点, 多边形的角称为多面体的面角, 从每个顶点出发的所有的面和棱组成的多面角称为多面体的多面角或体角, 两相交面所夹二面角称为多面体的二面角, 它们也是多面体的多面角的二面角. 一个多面体至少有四个面, 多面体按照它的面数 $4,5,6,\cdots,n$ 分别称为四面体, 五面体, 六面体……n 面体($n\in\mathbf{N}, n\geqslant 4$).

多面体的面(face of a polyhedron)　见“多面体”.

多面体的棱(edge of a polyhedron)　见“多面体”.

多面体的顶点(vertex of a polyhedron)　见“多面体”.

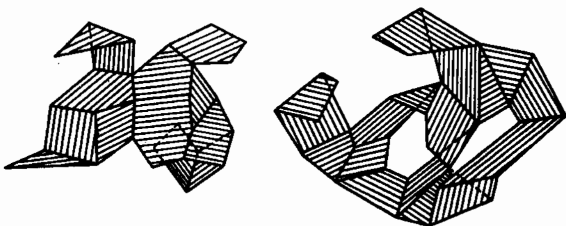
多面体的多面角(polyhedral angle of a polyhedron)　见“多面体”.

多面体的体角(body angles of a polyhedron)　见“多面体”.

多面面(polyhedral face)　一种空间图形. 如果有限个平面多边形组成的空间图形满足下列条件:

1. 其中任一多边形的任何一边, 或者只是这个多边形的边, 或者是与另一多边形的公共边.

2. 设 A, B 分别是其中任意两个多边形的不重合的顶点, 则必存在连结 A, B 的折线, 使它的每条线段都是某一已知多边形的一条边的空间图形称为多面面.



多面面的不同面可以在同一平面上, 也可以在不同平面上. 在同一平面上的面可能部分重叠, 也可能不重叠. 在不同平面上的面, 可能相穿插, 也可能不相穿插. 作成多面面的每一个多边形都称为多面面的面, 面的顶点称为多面面的顶点, 面的边称为多面面的棱, 当棱是两个面的交线时为内棱, 当棱只是一个面的边时, 称为界棱、外棱或自由棱. 多面面的所有界棱组成一条或多条空间折线, 称为多面面的边缘或周界. 一个多面面不一定有边缘, 例如, 多面体的表面就是无边缘的多面面.

多面面的面(face of polyhedral faces)　见"多面面".

多面面的顶点(vertex of polyhedral faces)　见"多面面".

多面面的棱(edges of polyhedral faces)　见"多面面".

多面面的内棱(interior edges of polyhedral faces)　见"多面面".

多面面的自由棱(free edges of polyhedral faces)　亦称多面面的界棱或外棱. 见"多面面".

多面面的边缘(edges of polyhedral faces)　亦称为多面面的周界. 见"多面面".

简单多面体(simple polyhedron)　一种多面体. 表面经过连续变形，可变形为球面的多面体. 因此，简单多面体与球面同胚. 凸多面体是简单多面体，但简单多面体不一定是凸多面体(参见"多面体的欧拉公式").

简单多面体的若尔当定理(Jordan theorem of a simple polyhedron)　关于简单多面体的一个定理. 该定理断言：每一个简单多面体的表面分空间为两个无公共点的区域.

简单多面体的内部(interior of a simple polyhedron)　有关多面体的重要概念. 简单多面体的表面把空间划分为两个区域，其中，能包含一直线的区域称为简单多面体的外部，另一区域称为简单多面体的内部.

简单多面体的外部(exterior of a simple polyhedron)　见"简单多面体的内部".

施勒革尔多面体图(Schlegel polyhedron graph)　一种特殊的平面展开图. 剥去多面体的一个面，将剩下的多面面延展开，并连续地摊开在一个平面上，这样得到的平面展开图称为施勒革尔多面体图. 施勒革尔多面体图可用来证明简单多面体的欧拉定理.

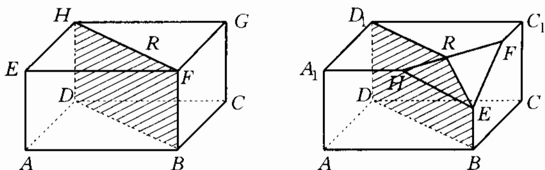
多面体的角隅(corner of a polyhedron)　即多面体的顶点(参见"多面体").

多面体的面角(plane angle of a polyhedron)　有关多面体的重要概念. 多面体的各多面角的面角称为多面体的面角. 多面体面角数是它棱数的二倍，因此，多面体的面角数是偶数. 若相交在多面体的每一个顶点的棱数都是 E，它的顶点数是 V，则多面体的面角数 $K=EV$. 若多面体所有的面都是由边数为 $n(n\in \mathrm{N}, n\geqslant 3)$ 的多边形组成，且面数为 F，则多面体的面角数 $K=nF$. 棱数为 E，面数为 F 的多面体的各面角和为 $2(E-F)\pi$.

多面体的二面角(dihedral angle of a polyhedron)　见"多面体".

多面体的对角线(diagonal line of a polyhedron)　与多面体有关的一条线段. 指连结多面体的不在同一个面上的两个顶点的线段. 四面体没有对角线.

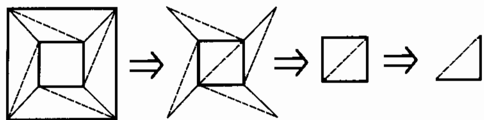
多面体的对角面(diagonal face of a polyhedron)　一种平面图形. 指不在多面体同一个面上的



三顶点所决定的平面，被多面体割出的平面图形. 凸多面体的对角面是平面凸多边形，但它的顶点不一定都是多面体的顶点. 如图中七面体的对角面 BDD_1. 凹多面体的一个对角面可能由一个或多个平面图形组成.

多面体的欧拉示性数(Euler characteristic number of a polyhedron)　表示多面体各元素间的关系的一个常数. 设多面体的顶点数为 V，棱数为 E，面数为 F，则 $\chi=V-E+F$ 称为多面体的欧拉示性数或欧拉特征. 多面体的欧拉示性数必为偶数. 简单多面体的欧拉示性数为 2. 简单多面面的欧拉示性数为 1. 一个多面体可以通过连续变形变成另一多面体的充分必要条件是它们的欧拉示性数相同.

多面体的欧拉公式(Euler formula of a polyhedron)　亦称简单多面体的欧拉定理. 关于多面体的一个著名定理. 设多面体的顶点数为 V，棱数为 E，面数为 F，则 $\chi=V-E+F$ 称为多面体的示性数. 简单多面体的示性数为 2，即 $V-E+F=2$. 在每个简单多面体中，顶点数 V、面数 F、棱数 E 满足不等式：$3V\leqslant 2E, 3F\leqslant 2E$. 它是欧拉(Euler, L.)于 1750 年公开发表，并于 1751 年对该公式给出了证明. 这个定理也是拓扑学中一个重要定理，故又名欧拉的拓扑学定理，尽管欧拉当时并未意识到这点. 在欧拉之前笛卡儿(Descartes, R.)在 1639 年已经知道了这个定理，但未发表. 1675 年，莱布尼茨(Leibniz, G. W.)从笛卡儿未发表的手稿中也得知这个定理. 1811 年，柯西(Cauchy, A.-L.)给出这定理的另一证明. 其思路是先挖去凸多面体的一个面，然后把它延展"摊"在一平面上成一平面网络，只要证它满足 $V-E+F=1$ 即可. 再把网络内每个多边形添加对角线构成三角形网络，显然划分后的 $V-E+F$ 的值不变，逐个拿掉三角形，$V-E+F$ 的值也不变，最后只剩下一个三角形，证实了 $V-E+F=3-3+1=1$. 定理获证(如图).

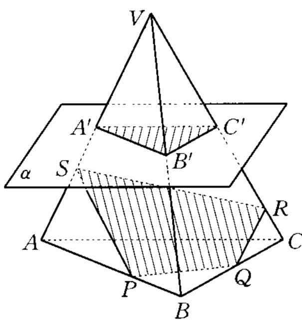


简单多面体的欧拉定理(Euler theorem of a simple polyhedron) 即"多面体的欧拉公式".

多面体的亏格(genus of a polyhedron) 表示多面体特点的一个常数.若 x 是多面体的欧拉示性数,则整数 $g=1-(x/2)$ 称为多面体的亏格.它表示多面体上"洞"的个数,简单多面体的亏格 $g=0$.即它是无调和的.

多面体的面的顶点法线(vertex normal of the face of a polyhedron) 与多面体有关的一组射线.指过多面体某面的顶点,向多面体外部引该面的垂直射线.

多面体的截面(section of a polyhedron) 一种平面图形.指一个平面和多面体相交,所截得的平面图形.如图中的$\triangle A'B'C'$是四面体 $V\text{-}ABC$ 与平面 α 相交而得到的截面,四边形 $PQRS$ 是一个平面与四面体 $V\text{-}ABC$ 相交而得到的另一截面.



凸多面体(convex polyhedron) 亦称欧拉多面体.一种简单多面体.即整个多面体都在其任何一个面所在平面同侧的多面体.凸多面体的任何一个面延展都不会通过它的内部.凸多面体内部或界面上任何两点所连的线段都在凸多面体内或界面上.一个多面体是凸多面体的充分必要条件是它的每个多面角是凸多面角.凸多面体是简单多面体,不是凸多面体的简单多面体称凹多面体.

凸多面体的主要性质有:

1.凸多面体的面必为凸多边形.

2.凸多面体的多面角必为凸多面角.

3.直线与凸多面体的面的交点,最多只有两个(直线段在多面体的面内的情形除外).

欧拉多面体(Euler polyhedron) 即"凸多面体".

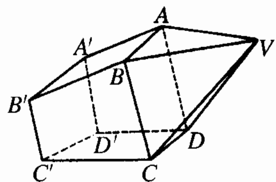
凹多面体(concave polyhedron) 见"凸多面体".

凸多面体的性质(property of convex polyhedron) 见"凸多面体".

凸多面体的极点(pole of a convex polyhedron) 即凸多面体的顶点.见"多面体".

对偶多面体(dual polyhedrons) 满足特定条件的两个多面体.如果两个多面体的棱数相同,且其中任一个多面体的顶点数、面数分别是另一个多面体的面数、顶点数,那么这两个多面体称为对偶多面体.如正六面体和正八面体,正十二面体和正二十面体分别是对偶多面体;正四面体和它自身是对偶多面体.

相邻多面体(adjacent polyhedrons) 两个有特殊关系的多面体.满足下述条件的两个多面体称为相邻的多面体:



1.至少有一个面或一个面的部分公用.

2.任一多面体的内部在另一多面体的外部.

相邻多面体的和(sum of adjacent polyhedrons) 相邻多面体的一种合成.即由相邻多面体导出的一个多面体.两个相邻多面体,剔除其所有的公共点后,所形成的第三个多面体,称为两个相邻多面体的和.例如,图中所示的多面体可看做五面体 $V\text{-}ABCD$ 及六面体 $ABCDA'B'C'D'$ 的和.

四面体(tetrahedron) 亦称三棱锥.一种简单多面体.指空间两两相交且不共线的四个平面在空间割出的封闭多面体.它有四个面、四个顶点、六条棱、四个三面角、六个二面角与十二个面角.若四个顶点为 A,B,C,D.则可记为四面体 $ABCD$,当看做以 A 为顶点的三棱锥时,也可记为三棱锥 $A\text{-}BCD$.四面体的每个顶点都有惟一的不通过它的面,称为该顶点的对面,原顶点称这个面的对顶点.在四面体的六条棱中,没有公共端点的两条称为对棱.四面体有三双对棱.且对棱的中点连结的线段(三条)彼此平分于同一点即四面体的重心,亦称四面体的形心.四面体的四个顶点与所对面(三角形)的重心连线(四条线段)必相交于同一点,即四面体的重心.若在四面体的四个顶点处各置重量相同的质心,则这个质点系的质心就在该四面体的重心处.或者当四面体由均匀物质构成时,它的质心就在四面体的重心处.四面体的重心平分四面体的每一双对棱中点连线.连结四面体的顶点与所对面的重心的线段,被四面体的重心内分为 3∶1(从顶点量起).过四面体的每双对棱作一对平行平面,这三对平行平面围成一个平行六面体,即为原四面体的外接平行六面体,四面体的棱都是其外接平行六面体的面(平行四边形)上的对角线.四面体的重心平分其外接平行六面体的每一条对角线.除重心性质外,四面体还有如下的性质:

1.四面体的每一条棱与其对棱的中点确定一个平面,这样的六个平面共点.

2.四面体外接平行六面体的各棱分别平行且等于四面体中连结各对棱中点的线段.

3.四面体的六条棱的六个中垂面共点,这点是四面体外接球的中心.每个四面体有惟一的外接球.

三棱锥(triangular pyramid) 即"四面体".

四面体的对面(opposite face of a tetrahedron)

见“四面体”.

四面体的对顶点(opposite vertex of a tetrahedron) 见“四面体”.

四面体的对棱(opposite edge of a tetrahedron) 见“四面体”.

四面体的重心(barycenter of a tetrahedron) 见“四面体”.

四面体的形心(barycenter of a tetrahedron) 见“四面体”.

四面体的外接平行六面体(circumscribed parellelepiped of a tetrahedron) 见“四面体”.

四面体的性质(property of a tetrahedron) 见“四面体”.

四面体的高线(altitude of a tetrahedron) 四面体的重要线段之一. 由四面体的每个顶点到所对面引垂线,称为四面体的高线,由顶点到垂足的线段,称为四面体的高,该顶点所以的面称为与该高线相应的底. 四面体的高线的性质是:

1. 两顶点引出的高线相交的充分必要条件是连结这两顶点的棱与其对棱垂直.

2. 若两个顶点所引的高线相交,则由其余两个顶点所引的高线也相交.

3. 若四面体有两对垂直的对棱,则第三双对棱也垂直. 此时四面体的四条高线交于一点. 称为四面体的垂心.

4. 若四面体的一双对棱垂直. 则连结其他两双对棱中点的二线段相等.

5. 垂心四面体中,连结三双对棱的中点的三条线段相等.

6. 正三棱锥是垂心四面体. 其外接平行六面体是菱面体,即各面均是相等菱形的六面体.

四面体高线的性质(property of altitude of a tetrahedron) 见“四面体的高线”.

四面体的度量公式(metric formulas of a tetrahedron) 四面体基本几何量的计算公式. 指计算四面体的体积、面积、内二面角和顶点角的一组公式. 设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的棱长 $\rho_{ij}=|P_iP_j|$,体积为 V,顶点 P_i 所对的面 f_i 的面积为 S_i,面 f_i 与 f_j 所夹的内二面角记为 $\langle i,j\rangle$,$(i,j=0,1,2,3,i\neq j)$,则有下列计算公式:

1. $$V^2=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} (\overrightarrow{P_0P_1})^2 & \overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_2} & \overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_3} \\ \overrightarrow{P_0P_1}\cdot P_0P_2 & \overrightarrow{P_0P_2}^2 & \overrightarrow{P_0P_2}\cdot\overrightarrow{P_0P_3} \\ \overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0P_3} & \overrightarrow{P_0P_2}\cdot\overrightarrow{P_0P_3} & (\overrightarrow{P_0P_3})^2 \end{vmatrix}$$

式中

$$\overrightarrow{P_0P_i}\cdot\overrightarrow{P_0P_j}=\rho_{0i}\cdot\rho_{0j}\cos\angle P_iP_0P_j =\frac{1}{2}(\rho_{0i}^2+\rho_{0j}^2-\rho_{ij}^2).$$

若改记 $\rho_{01}=x,\rho_{02}=y,\rho_{03}=z,\rho_{23}=a,\rho_{31}=b,\rho_{12}=c$,则

$$V^2=\frac{1}{288}\begin{vmatrix} 2x^2 & x^2+y^2-c^2 & x^2+z^2-b^2 \\ x^2+y^2-c^2 & 2y^2 & y^2+z^2-a^2 \\ x^2+z^2-b^2 & y^2+z^2-a^2 & 2z^2 \end{vmatrix},$$

即

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{q_1+q_2+q_3-q}.$$

称它为六棱求积公式,其中

$$q_1=(ax)^2(b^2+c^2+y^2+z^2-a^2-x^2),$$
$$q_2=(by)^2(c^2+a^2+z^2+x^2-b^2-y^2),$$
$$q_3=(cz)^2(a^2+b^2+x^2+y^2-c^2-z^2),$$
$$q=(abc)^2+(ayz)^2+(bzx)^2+(cxy)^2.$$

2. $$\cos\langle 2,3\rangle=\frac{\begin{vmatrix} 2x^2 & x^2+y^2-c^2 \\ x^2+z^2-b^2 & y^2+z^2-a^2 \end{vmatrix}}{16S_2S_3}.$$

3. 射影定理:

$$S_0=S_1\cos\langle 0,1\rangle+S_2\cos\langle 0,2\rangle+S_3\cos\langle 0,3\rangle,$$
$$S_1=S_0\cos\langle 0,1\rangle+S_2\cos\langle 1,2\rangle+S_3\cos\langle 1,3\rangle,$$
$$S_2=S_0\cos\langle 0,2\rangle+S_1\cos\langle 1,2\rangle+S_3\cos\langle 2,3\rangle,$$
$$S_3=S_0\cos\langle 0,3\rangle+S_1\cos\langle 1,3\rangle+S_2\cos\langle 2,3\rangle.$$

4. 余弦定理:

$$S_0^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2-2S_1S_2\cos\langle 1,2\rangle -2S_2S_3\cos\langle 2,3\rangle-2S_3S_1\cos\langle 1,3\rangle.$$

5. 正弦定理Ⅰ:

$$\frac{S_0}{\sin\angle P_0}=\frac{S_1}{\sin\angle P_1}=\frac{S_2}{\sin\angle P_2} =\frac{S_3}{\sin\angle P_3}=\frac{2S_0S_1S_2S_3}{(3V)^2},$$

式中 $\sin\angle P_0$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -\cos\langle 1,2\rangle & -\cos\langle 1,3\rangle \\ -\cos\langle 1,2\rangle & 1 & -\cos\langle 2,3\rangle \\ -\cos\langle 1,3\rangle & -\cos\langle 2,3\rangle & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}},$$

余此类推,这里$\angle P_0$ 称为四面体的顶点角.

正弦定理Ⅱ:

$$\frac{S_0}{\sin\angle P_0}=\frac{S_1}{\sin\angle P_1}=\frac{S_2}{\sin\angle P_2}=\frac{S_3}{\sin\angle p_3}=2R^2,$$

式中

$$\sin^2\angle P_k=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$a_{ij}=(\sin^2\angle P_iOP_j)/2(1\leqslant i,j\leqslant 3,0\leqslant k\leqslant 3,i,j\neq k)$. R 和 O 分别是外接球的半径和球心.

等面四面体(isohedral tetrahedron) 亦称等腰四面体. 一种特殊的四面体. 它是每条棱与其对棱总相等的四面体. 它的四个面是全等的锐角三角形. 每个顶点处的面角之和皆为平角. 它可以由锐角三角形沿着它的三条中位线折叠而得到. 等面四面体的外接平行六面体是长方体. 等面四面体的对棱中

点连线是这对棱的公垂线段，且三条公垂线段互相垂直平分于外心．三组对棱的长分别为 a,b,c 的等面四面体的体积计算公式为

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{(u^2-a^2)(u^2-b^2)(u^2-c^2)},$$

式中 $u^2=(a^2+b^2+c^2)/2$，表面积计算公式为

$$S=4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

式中 $p=(a+b+c)/2$．高 $h=12V/S=$内切球半径 r 的 4 倍．外接球半径 $R=(\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2})/4$．四个面的面积（或周长）皆相等的四面体是等面四面体．内切球与外接球同心的四面体必为等面四面体．

等腰四面体(isosceles tetrahedron)　即"等面四面体"．

垂心四面体(orthocentric tetrahedron)　一种特殊的四面体．有两双对棱互相垂直的四面体称为垂心四面体或正交四面体．垂心四面体的四条高线必相交于一点，这点称为垂心四面体的垂心．垂心四面体的一个特例是有一个三面角是三直三面角的四面体，称为三直角四面体．它的垂心就是三直三面角的顶点．正四面体也是垂心四面体的特例，它的垂心就是正四面体的重心．只有垂心四面体才有垂心．一般的四面体未必存在垂心．

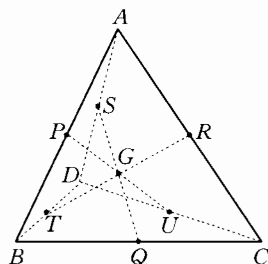
正交四面体(orthogonal tetrahedron)　即"垂心四面体"．

四面体的垂心(orthocenter of tetrahedron)　见"垂心四面体"．

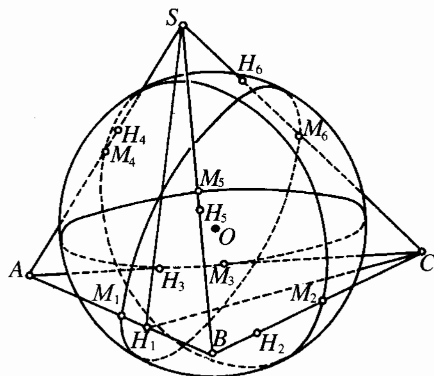
三直角四面体(trirectangular tetrahedron)　见"垂心四面体"．

垂心四面体的欧拉线(Euler line of an orthocentric tetrahedron)　垂心四面体的重要直线．对于一个垂心四面体，它的外接球心 O，重心 G，第一型十二点球心 O_1，垂心 H，按照这个顺序共线，此直线称为该垂心四面体的欧拉线．在欧拉线上，这四点彼此间的距离之比为 $OG:GO_1:O_1H=3:1:2$．

垂心四面体的第一型十二点球(twelve point sphere of the first form of an orthocentric tetrahedron)　垂心四面体的重要性质之一．在垂心四面体中，四个面的重心，四个高的垂足（即面的垂心），以及按 1∶2 之比自四面体的垂心向各顶点所连线段的分点，同在一个球上（即共球），此球称为这垂心四面体的第一型十二点球．



垂心四面体的第二型十二点球(twelve point sphere of the second form of an orthocentric tetrahedron)　垂心四面体的重要性质之一．在垂心四面体的各棱上有这样的一点，它是棱的两邻面内的两条高线的公共垂足（也是对棱公垂线的垂足）．六个这样的点及六棱的中点必共球，此球称为垂心四面体的第二型十二点球．如图，在垂心四面体 $S\text{-}ABC$ 中，因为 $AB\perp SC$，H_1 是相邻两面 ABS 和 ABC 在棱 AB 上的公共垂足（因 $AB\perp$平面 SH_1C）．同样 H_2,H_3,H_4,H_5,H_6 分别是 BC,AC,SA,SB,SC 各棱上相邻两面的公共垂足．又 M_1,M_2,M_3,M_4,M_5,M_6 分别为 AB,BC,AC,SA,SB,SC 六棱的中点，则 H_i 和 $M_i(i=1,2,\cdots,6)$ 到球心 O 的距离相等，所以球 O 就是这个垂心四面体 $S\text{-}ABC$ 的第二型十二点球．



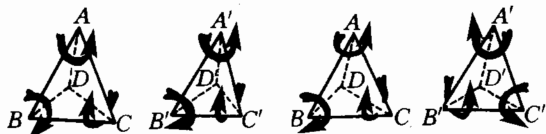
四面体的内切球及旁切球的个数定理(inscribed sphere of tetrahedron and theorem of escribde sphere numbers of tetrahedron)　计算四面体的内切球及旁切球的个数的一种方法，四面体的内外二面角的十二个平分面、每三个相交于一条直线，共有十六条交线（每个平面内有四条交线），在一般情况下，这十二个平面每六个共点，通过八点，在特殊情况下，这样的点数为五或六或七，因此，四面体有一个内切球与七个旁切球，但特殊情况下旁切球的个数可能是四或五或六个．

有向四面体(directed tetrahedron)　一种特殊的四面体．指给定了四个顶点的顺序的四面体．例如，对四面体 $ABCD$ 规定 A 为第一顶点，B 为第二顶点，C 为第三顶点，D 为第四顶点，则它是一个有向四面体，记为：四面体 $\overline{ABCD}$．对于有向四面体 $\overline{ABCD}$，当三面角 $\overline{A\text{-}BCD}$ 定为正向时，称它为正向四面体；当三面角 $\overline{A\text{-}BCD}$ 定为负向时，称它为负向四面体．

正向四面体(positive direction tetrahedron)　见"有向四面体"．

负向四面体(negative direction tetrahedron)　见"有向四面体"．

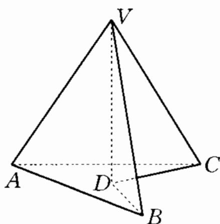
同向四面体(synclastic tetrahedron)　一种特殊四面体．指对应三面角同向的两个有向四面体．若



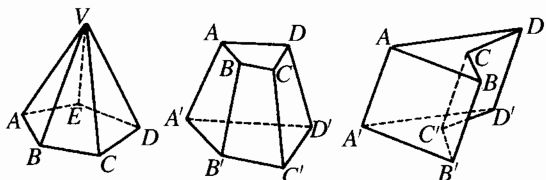
两个有向四面体$\overline{ABCD}$，$\overline{A'B'C'D'}$所对应的三面角$\overline{A\text{-}BCD}$，$\overline{A'\text{-}B'C'D'}$同向，则称这两个有向四面体同向，简称它们是同向四面体，否则称为反向四面体．如两个四面体$\overline{ABCD}$与$\overline{A'B'C'D'}$同向，则任意两个对应的三面角也同向，即三面角$\overline{B\text{-}ACD}$与$\overline{B'\text{-}A'C'D'}$，$\overline{C\text{-}ADB}$与$\overline{C'\text{-}A'D'B'}$等同向．而方向相反的两个四面体中，对应三面角均反向．

反向四面体(oppositely directed tetrahedron) 见“同向四面体”．

五面体(pentahedron)　一种简单多面体．即恰有五个面的多面体．只有五面的锥体是四棱锥，只有五面的台体是三棱台，只有五面的柱体有三个侧面．五面体不可能有三个面相互平行，也不可能有两对平行的面．存在凹五面体如图．



六面体(hexahedron)　一种简单多面体．即恰有六个面的多面体．只有六面的锥体是五棱锥，只有六面的台体是四棱台，只有六面的柱体是四棱柱．立方体是有六个面的正多面体．



正多面体(regular polyhedron)　亦称柏拉图立体．一种简单多面体．它是各面全等的正多边形和各多面角相等的正多面角的凸多面体．正多面体有且只有五种．用正三角形做面的，有正四面体、正八面体和正二十面体；用正方形做面的，有正六面体(即正方体或立方体)；用正五边形做面的，有正十二面体(见图)．正多面体的主要性质有：

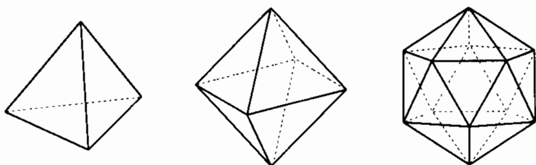
1．正多面体的各条棱相等，各个面角相等，各个二面角相等．

2．过各面中心所作的各面的垂线都相交于一点，这点称为正多面体的中心．

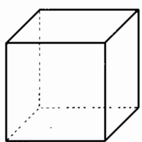
3．正多面体的中心到各顶点距离相等，到各棱的距离相等，到各面的距离也相等．

4．任何正多面体都有一个外接球、一个内切球和一个切棱球(和各棱相切于中点的球)，这三个球同以正多面体中心为球心．

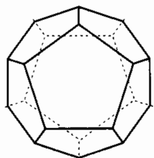
5．过正多面体内任一点到各面所引垂线段之和为一常数．



正四面体　　正八面体　　正二十面体



正六面体



正十二面体

棱长为 a 的正多面体的各几何量列在下表中：

名　称	正四面体	正六面体	正八面体
顶点数	4	8	6
棱数	6	12	12
面数	4	6	8
面的形状	正三角形	正方形	正三角形
面角弧度数	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
二面角度数	$\arccos\frac{1}{3}\approx$ $70°31'43.6''$	$\frac{\pi}{2}=90°$	$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\approx109°28'16.4''$
一面的面积	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	a^2	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
表面积	$\sqrt{3}a^2$	$6a^2$	$2\sqrt{3}a^2$
体积	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

名　称	正十二面体	正二十面体
顶点数	20	12
棱数	30	30
面数	12	20
面的形状	正五边形	正三角形
面角弧度数	$\frac{3}{5}\pi$	$\frac{\pi}{3}$
二面角度数	$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $\approx116°33'54.2''$	$\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\approx138°11'22.9''$
一面的面积	$\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
表面积	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$	$5\sqrt{3}a^2$
体积	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})a^3$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})a^3$

公元前 5 世纪希腊的毕达哥拉斯学派就发现了正多

面体．关于正多面体的数学论述起源于欧几里得(Euclid)的《几何原本》第8卷．此书的第一个附注指出：该书“将处理所谓柏拉图体．这个命名是不正确的，因为其中三个(正四面体、六面体、八面体)应归功于毕氏学派，而十二面体和二十面体则应归功于泰特托斯(Theaetetus)．”对于所有五种正多面体的描述是柏拉图(Plato)给出的，在其《蒂迈欧篇》中，他讲到如何把正三角形、正方形和正五边形放到一起来构造这些立体的模型．柏拉图书中的蒂迈欧(Timaeus)是毕氏学派，洛克里人．也许在柏拉图访问意大利时遇见过此人．在柏拉图的著作中，蒂迈欧将四种容易作的正多面体(正四面体、六面体、八面体和二十面体)与恩波多克尔(Enbodokel)的四个原始元素(火、土、气、水)联系在一起．他把后发现的正十二面体与包罗万象的宇宙联系在一起．故正多面体又称柏拉图正多面体．正多面体不多于五种，可证明如下：由简单多面体的欧拉公式 $V+F-2=E$ (其中 V 为顶点数，F 为面数，E 为棱数)，如设正多面体的面是 n 边形，一个顶点处的面角数为 m，则 $nF=2E$，$mV=2E$，于是

$$\frac{2E}{m}+\frac{2E}{n}-2=E,$$

即

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{E}=\frac{1}{2}.$$

在 $E\geqslant 3$ 的条件下，求出 m,n 的整数解为 $(m,n,E)=(3,3,6),(4,3,12),(5,3,30),(3,4,12),(3,5,30)$，它们分别对应于正四面体，正八面体，正二十面体，正六面体与正十二面体．这五种正多面体的存在性，可通过作图来解决，也可通过计算验证．在空间直角坐标系中，可取定正多面体的顶点坐标如下：正四面体 $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$；正六面体 $(\pm1,\pm1,\pm1)$；正八面体 $(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)$；正十二面体 $(\pm a,\pm1,0),(0,\pm a,\pm1),(\pm1,0,\pm a)$；正二十面体 $(\pm1,\pm a^2,0),(0,\pm1,\pm a^2),(\pm a^2,0,\pm1),(\pm a,\pm a,\pm a)$．其中 a 为黄金比，即 $a=(\sqrt{5}+1)/2$．

柏拉图立体(Platonic solids)　即“正多面体”．

正多面体的中心(centre of a regular polyhedron)　见“正多面体”．

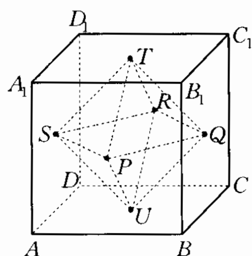
正四面体(regular tetrahedron)　见“正多面体”．

等边四面体(equilateral tetrahedron)　见“正四面体”．

正方体(cube)　亦称立方体．一种正多面体．即棱长相等的长方体．亦即正六面体(参见“正多面体”)．正方体除具有长方体的性质外，还具有如下性质：

1．六个面是全等的正方形．

2．对角线的长是一条棱长的 $\sqrt{3}$ 倍；对角线交于一点，且互相平分，这点是正方体的中心．



3．六个对角面是全等的矩形．对角面(矩形)的对角线与原立方体对角线重合，每个对角面截原正方体成相等两部分．

4．以各面中心作为顶点的多面体是正八面体．如图 P,Q,R,S,T,U 分别是正方体 AC_1 的六个面的中心，八面体 $T\text{-}PQRS\text{-}U$ 为正八面体．

5．过中心的平面截正方体成两个相等部分．

6．连结正方体两相对面(正方形)中心的线段平行且等于其他面上的棱．

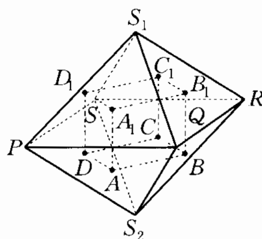
7．从一个顶点出发的对角线和三条棱的另三个端点所确定的平面相交，其交点分这条对角线为1∶2．

8．正方体的对角线与它的面中的对角线，或者具有公共端点，或者是互相异面且垂直．

立方体(cube)　即“正方体”．

正六面体(regular hexahedron)　即“正方体”．

正八面体(regular octahedron)　一种正多面体．即以正八面体各面中心作为顶点的多面体是正方体．如图，正八面体 $S_1\text{-}PQRS\text{-}S_2$ 的各面中心是正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点(参见“正多面体”)．



正二十面体(regular icosahedron)　一种正多面体．指由二十个全等的正三角形所围成的一个多面体(参见“正多面体”)．正多面体的具体作法如下：

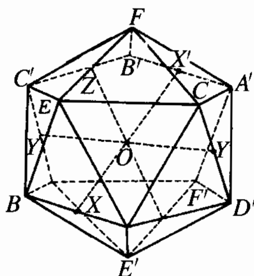


图1

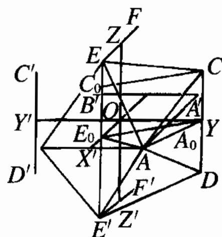


图2

作三根两两垂直的，互相平分于点 O 的，长度都是 $2a$ 的线段 XX'，YY'，ZZ'，分线段 a 为中外比，取较大的一段为 b，即满足 $a:b=b:(a-b)$．$b>a-b$．过 XX' 的两端点作线段 AB 与 $A'B'$，使 AB，

$A'B, YY'$同向平行，且 $AX=XB=A'X'=X'B'=b$（如图 1）；过 YY'的两端点作线段CD与 $C'D'$，使 $CD, C'D', ZZ'$同向平行，且 $CY=YD=C'Y'=Y'D'=b$；过 ZZ'的两端点作线段EF与$E'F'$，使EF，$E'F'$，XX'同向平行，且$EZ=ZF=E'Z'=Z'F'=b$，则 $A,B,C,D,E,F,A',B',C',D',E',F'$，即正二十面体的顶点，连结$AB,AE,AC,AD,AE',BD',BC'$，$BE,BE',CA',CD,CE,CF,DA',DF',DE',EC'$，$EF,FC',FB',FA',A'B',A'F',B'C',B'D',B'F'$，$C'D',D'F',D'E',E'F'$. 则可验明这三十条棱的长都是 $2b$，例如，在图 2 中，根据对称性，$AE=AE'=BE=BE', AC=AD, EC=E'D$；设 E_0 是EE'与OX的交点，A_0 是AA'与OY的交点，C_0 是 C 在EE'上的正射影，则$B'C\parallel E_0Y$，$\triangle AXE_0$，$\triangle AE_0E$，$\triangle AA_0Y$，$\triangle AYC$，$\triangle YOE_0$，$\triangle CC_0E$ 都是直角三角形，其中

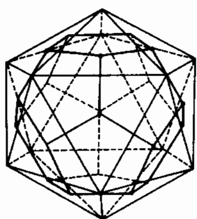
$$\begin{aligned}AE&=\sqrt{AE_0^2+E_0E^2}=\sqrt{AX^2+XE_0^2+E_0E^2}\\&=\sqrt{b^2+(a-b)^2+a^2}\\&=\sqrt{2(a^2-ab+b^2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC&=\sqrt{AY^2+YC^2}=\sqrt{AA_0^2+A_0Y^2+YC^2}\\&=\sqrt{a^2+(a-b)^2+b^2}\\&=\sqrt{2(a^2-ab+b^2)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CE&=\sqrt{CC_0^2+C_0E^2}=\sqrt{YE_0^2+C_0E^2}\\&=\sqrt{YO^2+OE_0^2+C_0E^2}\\&=\sqrt{a^2+b^2+(a-b)^2}\\&=\sqrt{2(a^2-ab+b^2)},\end{aligned}$$

由于 $a:b=b:(a-b), a(a-b)=b^2, a^2-ab=b^2$，所以 $\sqrt{2(a^2-ab+b^2)}=\sqrt{2\cdot 2b^2}=2b$，故知 $AB=AE=AC=EC=CD=AD=AE'=E'D=BE=BE'=2b$，余此类推.

正十二面体（regular dodecahedron） 一种正多面体以正二十面体每个面的中心为顶点的正多面体就是一个正十二面体. 因此，做出正二十面体也就能做出正十二面体（参见“正多面体”）.



对偶正多面体（dual regular polyhedrons） 亦称共轭正多面体. 满足特定条件的两个正多面体. 如果两个正多面体的棱数相等，并且其中一个的顶点数恰好等于另一个的面数，则称这两个正多面体是互为对偶正多面体，其中每一个多面体都称为另一个的对偶正多面体. 在五种正多面体中，正四面体是它自己的对偶正多面体；正八面体与立方体互为对偶正多面体；正十二面体与正二十面体互为对偶正多面体. 以一个正多面体的各面的中心为顶点的正多面体，是它的一个对偶正多面体.

共轭正多面体（conjugate regular polyhedrons） 即“对偶正多面体”.

多面体的外接球（circumscribed sphere of a polyhedron） 满足特定条件的一个球. 一个多面体的所有顶点若都在同一个球面上，则这个球称为该多面体的外接球，多面体称为这个球的内接多面体. 正多面体的外接球一定存在，且球心是该正多面体的中心.

球的内接多面体（inscribed polyhedron of a sphere） 见“多面体的外接球”.

多面体的切棱球（tangential edge sphere of a polyhedron） 满足特定条件的一个球. 如果一个球与多面体的各条棱都相切，则这个球称为该多面体的切棱球. 正多面体一定有切棱球，且在正多面体的各棱中点处与棱相切. 棱长为 a 的正多面体的外接球、切棱球和内切球的半径列表如下：

多面体	外接球半径	切棱球半径	内切球半径
正四面体	$\frac{\sqrt{6}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{\sqrt{6}}{12}a$
正六面体	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$
正八面体	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{6}}{6}a$
正十二面体	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}a$	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}a$
正二十面体	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$

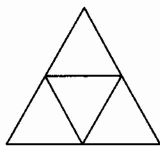
多面体的内切球（inscribed sphere of a polyhedron） 满足特定条件的一个球. 如果一个球与简单多面体的各面或其延展部分都相切，且此球在多面体的内部，则称这个球为此多面体的内切球. 多面体称为这个球的外切多面体. 正多面体的内切球均存在. 正多面体内任意点到各面距离之和为常数 $3FV/S$. 这里 F 为多面体的面数，S 为表面积，V 为体积. 故正多面体内切球半径为 $3V/S$.

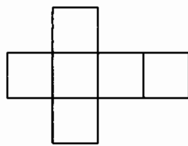
球的外切多面体（circumscribed polyhedron of a sphere） 见“多面体的内切球”.

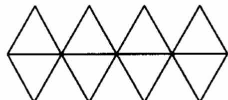
多面体的旁切球（escribed sphere of a polyhedron） 满足特定条件的一个球. 如果存在一个球与简单多面体的各个面或其延展部分都相切，但此球不在多面体内部，则该球称为此多面体的旁切球.

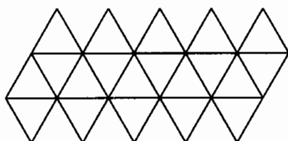
正多面体表面的平展图（plane expansion graph of surface of a regular polyhedron） 一种平面

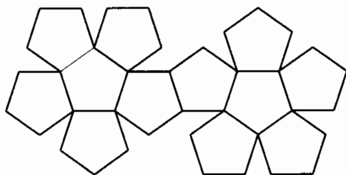
图形. 指正多面体的各面展开在一平面上. 正多面体的面都是全等的多边形，它们的表面平展图如图 1 至图 5 所示.


图1 正四面体展开图


图2 正六面体展开图

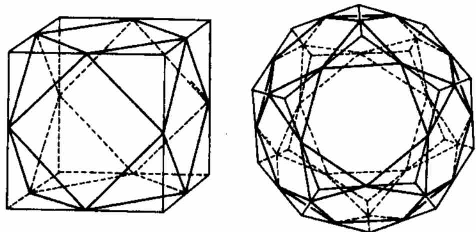

图3 正八面体展开图


图4 正二十面体展开图


图5 正十二面体展开图

半正多面体(semiregular polyhedron) 一类特殊的多面体. 等角半正多面体和等面半正多面体的统称.

等角半正多面体(equiangular semiregular polyhedron) 亦称阿基米德多面体. 一种特殊的多



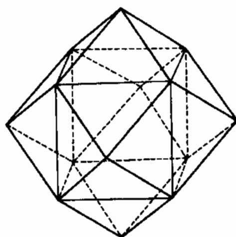
面体. 指所有多面角都相等，且各个面是边数不全相同的正多边形的多面体. 等角半正多面体的多面角最多有五个面. 侧面是正方形的正 n 棱柱是等角半正 $(n+2)$ 面体. 又如取正 n 面体($n=6$ 或 8，12 或 20)各棱的中点作为顶点所成的多面体也是等角半正多面体，分别称为立方八面体或中央晶体(由六个正方形和八个正三角形围成的)和十二兼二十面体(由十二个正五边形和二十个正三角形围成的).

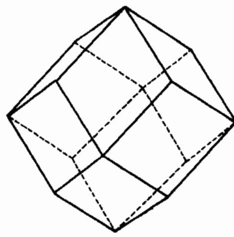
阿基米德多面体(Archimedean polyhedron) 即"等角半正多面体".

立方八面体(cuboctahedron) 见"等角半正多面体".

中央晶体(central crystal) 即立方八面体. 见"等角半正多面体".

等面半正多面体(isohedral semiregular polyhedron) 一种特殊的多面体. 指各个面都相等且各





个多面角是面数不全相同的正多面角的多面体. 等面半正多面体的面最多有五个边. 例如，公共底对称的两个正 n 棱锥所构成的 $2n$ 面体就是等面半正多面体. 又如过正方体的各棱分别作与各面成 45°角的平面，所围成的多面体称为十二菱面体(有十二个相等的菱形面，六个正四面角和八个正三面角)，也是等面半正多面体.

十二菱面体(rhombic dodecahedron) 见"等面半正多面体".

斜方十二面体(rhombic dodecahedron) 见"等面半正多面体".

等面多面体(isohedral polyhedron) 一种简单多面体. 各面彼此全等的多面体. 正多面体和等面半正多面体都是等面多面体.

等角多面体(equiangular polyhedron) 一种简单多面体. 各多面角相等，且各面都是等角多边形的多面体. 这里等角多边形可能是正多边形也可能是等角半正多边形. 例如，矩形是等角半正四边形. 长方体是等角多面体.

三八面体(trioctahedron) 一种特殊的正多面体. 以八面体的各面为底面，向体外各作一个三侧棱相等的三棱锥而得的几何体，它是一种特殊的二十四面体. 三八面体的二十四个面均系等腰三角形. 当三八面体是以正八面体各面为底，向体外各作一个正四面体形成时，则三八面体各面均为全等的正三角形.

五角十二面体(pentagonal dodecahedron) 一种特殊的多面体. 即由十二个五角形面围成的多面体. 当五角形面是正五边形时，五角十二面体就是正十二面体.

正星体(regular star body) 一种特殊的正多面体. 以正 n 面体各面为底，向外作正棱锥，使这些棱锥的侧面皆为相等的正三角形，这样得到的若是凹多面体，则称它为正(n 角)星体. 这类正星体有四种，它们分别是如图 1 至图 4 所示的正六角星体、正八角星体(各有 24 个面)和正十二角星体、正二十角星体(各有 60 个面).

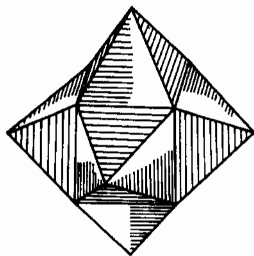


图 1

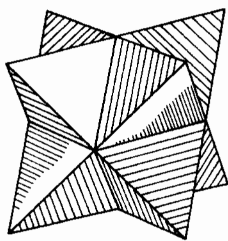


图 2

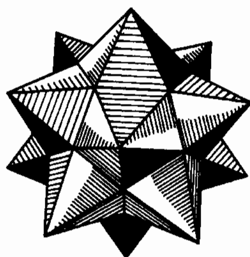


图 3

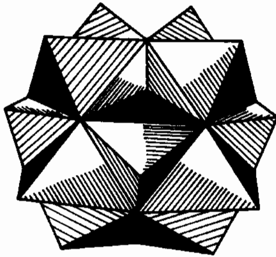


图 4

多面体的凸星形(convex star of a polyhedron) 一种与已知多面体相关的多面体. 多面体上,以一个顶点为公共顶点的各面组成的多面体,称为该多面体在该顶点处的星形. 这个顶点是星形的顶点. 当该星形在顶点处的多面角是凸多面角时,称这个星形为多面体的凸星形.

多面体的星形(star of a polyhedron) 见"多面体的凸星形".

柱面(cylindrical surface) 见本卷《空间解析几何》中的"柱面".

棱柱面(prismatic surface) 柱面的一种. 指准线是平面折线的柱面. 通过该折线顶点的母线称为棱柱面的棱,相邻棱之间的部分称为棱柱面的面.

棱柱面的棱(edge of a prismatic surface) 见"棱柱面".

棱柱面的面(face of a prismatic surface) 见"棱柱面".

柱体(cylinder) 简称柱. 一种特殊的多面体. 指有封闭准线的柱面被不平行于母线的两个平行平面所截得的封闭几何体. 平行截面称为柱的底面,简称底. 两底间的柱面部分称为侧面,两底面间的距离称为柱面的高,柱面母线被截得的线段称为柱的母线. 依据底面封闭曲线的形状,柱体有不同的分类,如有棱柱、圆柱、椭圆柱、弓形柱等.

柱(cylinder) 柱体的简称.

柱的底面(base of a cylinder) 见"柱体".

柱的侧面(lateral face of a cylinder) 见"柱体".

柱的高(height of a cylinder) 见"柱体".

柱的母线(generating line of a cylinder) 见"柱体".

截柱体(truncated cylinder) 一种与柱体有关的几何体. 用一个与柱体所有母线都相交的平面去截柱体,所得的两个几何体都称为原柱体的截柱体. 当截面平行于底面时,截柱体亦是柱体. 当截面不平行于底面时,截柱体称为斜截柱体. 通常把斜截柱体称为截柱体.

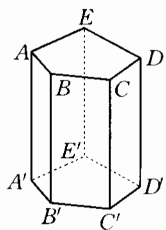
斜截柱体(truncated cylinder) 即"截柱体".

柱的直截面(right section of a cylinder) 一种与柱体有关的截面. 用垂直于柱的母线的平面去截柱体,如果截面与柱的所有母线(或侧棱)都相交,那么截线所围成的平面图形,称为柱的直截面.

直柱(right cylinder) 一种特殊的柱体. 两底面与母线垂直的柱体称为直柱体,简称直柱. 直柱的高等于母线之长,并且侧面在底面的正射影就是围成底面的封闭曲线.

斜柱(oblique cylinder) 一种特殊的柱体. 母线与底面不垂直的柱体称为斜柱体,简称斜柱. 如果斜柱的母线长为 a,母线与底面夹角为 θ,则斜柱的高 $h=a\sin\theta$.

棱柱(prism) 亦称角柱. 一种特殊的柱体. 它是底面为平面多边形的柱体. 依底面为三角形、四边形、五边形……n 边形而将棱柱分别称为三棱柱、四棱柱、五棱柱……n 棱柱. 棱柱的侧面是若干平行四边形. 相邻平行四边形的公共边称为棱柱的侧棱. 这些侧棱都是棱柱的母线. 棱柱可用标明顶点的字母表示,如图中的五棱柱记为 $ABCDE\text{-}A'B'C'D'E'$. 也可用它的一条对角线的两端字母来表示,又可记为棱柱 AC'.



棱柱的主要性质有:

1. 侧棱相等.

2. 侧面都是平行四边形.

3. 两底面以及平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形(参见"棱柱的对角面").

角柱(prism) 即"棱柱".

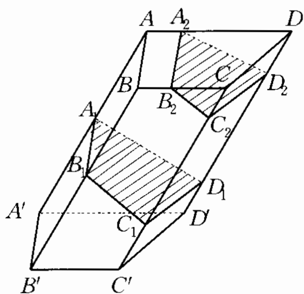
棱柱的侧棱(lateral edge of a prism) 见"棱柱".

棱柱的性质(property of a prism) 见"棱柱".

棱柱的对角面(diagonal plane of a prism) 一种与棱柱有关的截面. 棱柱中经过不相邻的任意两条侧棱的截面称为棱柱的对角面. 四棱以上的棱柱有对角面. 对角面都是平行四边形. 凸棱柱的对角面均在棱柱的内部,凹棱柱总存在不在或不全在内部的对角面. 棱柱作为多面体还有另外一类对角面,它们是不在棱柱的同一个面上的三个顶点确定的截

面. 但是通常约定棱柱的对角面不包括这类对角面.

棱柱的直截面(right section of a prism) 一种与棱柱有关的直截面. 垂直于棱柱的侧棱且和所有的侧棱都相交的截面. 同一棱柱的各个直截面是全等的多边形,其边数与侧棱数相等. 如图中,截面 $A_1B_1C_1D_1 \perp BB'$,并与其他所有侧棱相交. 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是棱柱 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的直截面. 但是四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 不是这棱柱的直截面. 一个棱柱不一定有直截面.



直棱柱(right prism) 一种特殊的棱柱. 指侧棱和底面垂直的棱柱. 直棱柱的主要性质有:

1. 侧棱与高相等.
2. 侧面都是矩形.
3. 对角面都是矩形.

正棱柱(regular prism) 一种特殊的棱柱. 指底面是正多边形的直棱柱. 正棱柱的主要性质有:

1. 两底面是全等的正多边形.
2. 侧面是全等的矩形.
3. 两底面中心的连线垂直于底面. 中国古算书上把正四棱柱称为方堡垛.

方堡垛(fang bao lie) 正四棱柱的中国古称.

正棱柱的轴(axis of a regular prism) 一种与正棱柱有关的直线或线段. 指正棱柱的两底面正多边形中心的连线. 正棱柱是镜面自对称几何体,它有几个与棱平行的对称镜面,正棱柱的轴就是这些对称镜面的交线.

正棱柱的轴向截面(axial section of a regular prism) 一种与正棱柱有关的截面. 通过正棱柱的轴的截面,称为此正棱柱的轴向截面或轴截面. 正棱柱的轴截面都是矩形.

斜棱柱(oblique prism) 一种特殊的棱柱. 指侧棱不和底面垂直的棱柱.

斜截棱柱(truncated prism) 一种与斜棱柱有关的多面体. 用不平行于棱柱底面的平面截棱柱,如平面和各侧棱都相交且交点不是顶点,所截得棱柱的每一部分,都称为原棱柱的斜截棱柱体. 简称斜截棱柱.

平行六面体(parallelepiped) 一种简单的棱柱体. 指底面是平行四边形的棱柱(如图 1). 平行六面体的主要性质有:

1. 平行六面体的六个面都是平行四边形.
2. 相对的两个面互相平行且全等.
3. 对角面是平行四边形.
4. 四条对角线相交于一点且在这点互相平分.

侧棱与底面垂直的平行六面体称为直平行六面体,否则称为斜平行六面体. 上、下底面为矩形的直平行六面体称为长方体或矩体. 各面是全等的菱形的平行六面体称为菱面体(如图 2),也称为斜方六面体.

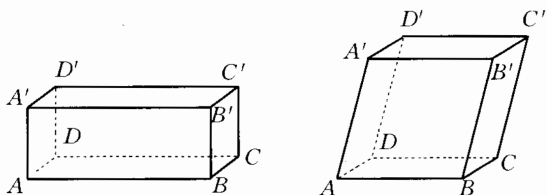


图 1　　图 2

直平行六面体(right parallelepiped) 见"平行六面体".

斜平行六面体(oblique parallelepiped) 见"平行六面体".

菱面体(rhombohedron) 见"平行六面体".

斜方六面体(rhombic hexahedron) 即"菱面体".

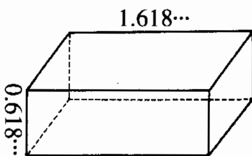
长方体(cuboid) 见"平行六面体".

矩体(cuboid) 即"长方体".

堑堵(qian du) 中国古算书上对底面为直角三角形的正三棱柱的称呼,是一种特殊的楔体. 用对角面截长方体可得到两个堑堵.

黄金长方体(golden cuboid) 一种特殊的长方体. 指长、宽、高之比为 $\varphi:1:1/\varphi$,的长方体,这里为黄金比 $\varphi=(\sqrt{5}+1)/2$,显然

$$\frac{1}{\varphi}=\varphi-1=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=0.618\cdots$$



黄金长方体图

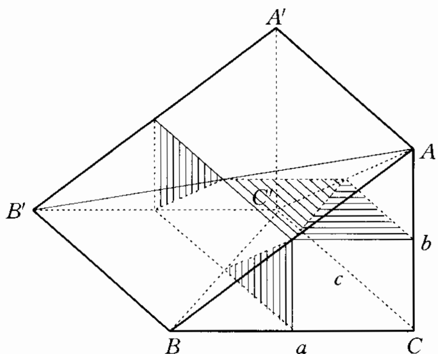
宽为单位长的黄金长方体的表面积为

$$S_A=2\left(\varphi\cdot 1+1\cdot\frac{1}{\varphi}+\varphi\cdot\frac{1}{\varphi}\right)=4\varphi.$$

而它的外接球表面积为 $S_{球}=4\pi$. 故 $S_A:S_{球}=\varphi:\pi$.

鳖臑(bie nao) 一种特殊的四面体. 在中国古算书中,将堑堵 $ABC\text{-}A'B'C'$ 用平面 $AC'B'$ 分成两部分,其中各面皆为直角三角形的四面体 $AA'B'C'$,称为鳖臑;另一部分是底为长方形,一棱与底垂直的四棱锥 $A\text{-}BB'C'C$,称为阳马(如图). 刘徽在《九章算术注》中指出多面体体积理论的关键是确定阳马和鳖臑的体积,因为任一多面体可以分割成有限个四面体,而任一四面体可以分割成六个鳖臑. 刘徽说:"邪解立方得两堑堵,邪解堑堵,其一为阳马,一为鳖臑,阳马居二,鳖臑居一,不易之率也."这就是说,斜解长方体得到两个堑堵. 斜解一堑堵(如图),所得阳马和鳖臑的体积之比恒为 2∶1,三棱锥的体积 $V_{A\text{-}BB'C'}$

$=V_{A\text{-}BC'C}$，又 $V_{B\text{-}C'CA}=V_{B\text{-}AA'C'}$. 因此阳马 $A\text{-}BB'C'C$ 的体积为 $abc/3$，鳖臑 $AA'B'C'$ 的体积为 $abc/6$.



阳马(yang ma) 见"鳖臑".

锥面(conical surface) 见 c《空间解析几何》同名条.

锥面的导线(directrix of a conical surface) 即"锥面的准线".

锥体(cone) 一种特殊的几何体. 指被不过锥面顶点且与所有母线相交的平面截得的封闭几何体. 简称锥. 截口面是锥体的底面，锥面上位于顶点和底面间的部分称为锥体的全侧面，锥面母线在锥顶与底面间的部分称为锥体的母线. 锥面的顶点也是锥体的顶点，顶点到底面的垂线段称为锥体的高. 通常用表示锥顶点的字母和表示锥底的字母来表示锥体.

锥(cone) 锥体的简称.

锥体的底面(base of a cone) 见"锥体".

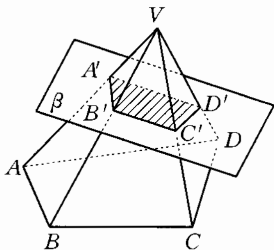
锥体的全侧面(total lateral of a cone) 见"锥体".

锥体的母线(generating line of a cone) 见"锥体".

锥体的顶点(vertex of a cone) 见"锥体".

锥体的高(height of a cone) 见"锥体".

截锥体(truncated cone) 一种与锥体有关的多面体. 指由平面截锥体而得的另一个锥体. 锥体被不过顶点且与锥体母线都相交的平面所截，留下的在截面和底面间的锥体部分称为截锥体，简称截锥. 图中表示锥体 $V\text{-}ABCD$ 被平面 β 所截，所得截锥体为 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$.



截锥(truncated cone) 截锥体的简称.

直锥(right cone) 一种特殊的锥体. 如果锥体的底面是中心对称图形，锥体的高线过底面对称中心，则称锥体为直锥. 不是直锥的锥体都称为斜锥. 斜锥亦称不规则锥或不等锥.

斜锥(oblique cone) 见"直锥".

不规则锥(irregular cone) 即"斜锥".

不等锥(unequal cone) 即"斜锥".

第一型截锥体(truncated cone of the first type) 亦称台体. 一种与锥体有关的多面体. 用不过锥面顶点的两平行平面去截锥面，如果顶点位于两平面的同侧，截口平面图形与锥面围成的封闭几何体，称为第一型截锥体.

第二型截锥体(truncated cone of the second type) 一种与锥体有关的多面体. 用不过锥面顶点的两平行平面去截锥面，如果顶点位于两平行平面之间，截口平面图形与锥面围成的封闭几何体，称为第二型截锥体.

棱锥(pyramid) 亦称角锥. 一种特殊的锥体. 底面是多边形的锥体. 棱锥除一个面是多边形外，其余各面是具有公共顶点的三角形. 棱锥的底面以外的其余各面称为棱锥的侧面，相邻侧面的公共边称为棱锥的侧棱. 顶点到侧面三角形底边上的高称为棱锥的斜高. 过不相邻两条侧棱的截面称为对角面. 棱锥依底面为三角形、四边形、五边形……而分别称为三棱锥、四棱锥、五棱锥……三棱锥就是四面体. 棱锥具有下列主要性质：

1. 棱锥的各个对角面都是三角形，它的一边是底面的对角线.

2. 平行于底面的截面和底面相似，截面和底面的面积之比等于对应线段的平方之比.

3. 棱锥的侧棱、高和任意连结顶点和底面上点的线段被平行于底面的截面分为成比例的线段.

4. 与底面平行的截面分棱锥所得小棱锥和原棱锥的体积之比等于对应线段的立方之比.

角锥(pyramid) 即"棱锥".

棱锥的侧面(lateral face of a pyramid) 见"棱锥".

棱锥的侧棱(lateral edge of a pyramid) 见"棱锥".

棱锥的对角面(diagonal plane of a pyramid) 见"棱锥".

棱锥的斜高(slant height of a pyramid) 见"棱锥".

正棱锥(regular pyramid) 亦称正角锥. 一种特殊的棱锥. 底面是正多边形，且顶点在底面的正射影是底面正多边形的中心的棱锥. 正棱锥的顶点与底面中心的连线称为它的轴. 正棱锥是镜面自对称的，它的轴是诸对称镜面的交线. 不是正棱锥的棱锥称为斜棱锥.

正棱锥的主要性质有：

1. 各侧面都是全等的等腰三角形.

2. 各对角面是等腰三角形.

3. 各侧棱都相等，且侧棱在底面上的射影是底面多边形外接圆的半径，并平分底面多边形的一个内角.

4. 各斜高都相等，且斜高在底面上的射影是底面多边形内切圆的半径，并垂直平分底面多边形的一条边.

5. 各侧面与底面所组成的二面角都相等.

6. 各侧棱与底面的夹角都相等.

7. 相邻两个侧面所组成的二面角都相等.

8. 正棱锥顶点处的多面角是正多面角.

正棱锥的性质(property of a regular pyramid)　见"正棱锥".

正角锥(regular pyramid)　即"正棱锥".

斜棱锥(oblique pyramid)　见"正棱锥".

方锥(square cone)　亦称方角体.一种棱锥体.底面为正方形的四棱锥.中国古称.

方角体(fang jiao ti)　即"方锥".

正棱锥的轴(axis of a regular pyramid)　一条与正棱锥有关的直线或线段.指正棱锥的顶点与底面中心的连线.正棱锥是镜面自对称几何体，它的轴是诸对称镜面的公共线.

正棱锥的轴截面(axial section of a regular pyramid)　一种与正棱锥有关的截面.指通过正棱锥的轴的截面.

双棱锥(bipyramid)　一种特殊的多面体.由两个具有公共底面，且顶点分别在公共底面的两侧的棱锥组成的多面体.

正双棱锥(regular bipyramid)　一种特殊的双棱锥.由两个有公共底面，顶点分别在公共底面的两侧，且相等的正棱锥组成的多面体.

台体(frustum)　亦称锥台或平截锥.一种与棱锥体有关的多面体.用不过锥体顶点且平行于锥体底面的平面截去锥体的锥尖部分得到的几何体.截面和原锥底称为台体的两底面.通常将大的底面称为下底面，小的底面称为上底面，被截锥体全侧面余下的部分称为台体的全侧面.两底面间的距离称为台体的高.台体可以用表示两个平截口面的字母来表示.

锥台(frustum)　即"台体".

平截锥(frustum)　即"台体".

台体的两底面(two bases of a frustum)　见"台体".

台体的全侧面(total lateral face of a frustum)　见"台体".

台体的高(height of a frustum)　见"台体".

棱台(prismoid)　亦称角台或平截棱锥.一种特殊的台体.即被截锥体是棱锥的台体(参见"台体").棱台底面的边是棱台的底棱.棱锥被截时，侧面余下的梯形称为棱台的侧面，相邻侧面的交线称为侧棱.棱台侧面梯形的高都称为棱台的斜高，一般情况下各斜高不等.由三棱锥、四棱锥……n 棱锥($n\geqslant 3, n\in \mathrm{N}$)截得的棱台分别称为三棱台、四棱台……$n$ 棱台.棱台用它的两底面的顶点字母表示，例如，五棱台记为棱台 $ABCDE\text{-}A'B'C'D'E'$，或简记为棱台 AC'.

棱台的主要性质有：

1. 两个底面是相似多边形.

2. 各侧棱的延长线交于一点.

3. 侧面都是梯形.

4. 对角面是梯形.

5. 与棱台底面平行的截面是和底面相似的多边形.

角台(prismoid)　即"棱台".

平截棱锥(frustum of a pyramid)　即"棱台".

棱台的底棱(base edge of a prismoid)　见"棱台".

棱台的侧面(lateral face of a prismoid)　见"棱台".

棱台的侧棱(lateral edge of a prismoid)　见"棱台".

棱台的斜高(slant height of a prismoid)　见"棱台".

棱台的性质(property of a prismoid)　见"棱台".

正棱台(regular prismoid)　一种特殊的棱台.由正棱锥截得的棱台.正棱台的两底面是两个相似正多边形，侧面是全等的等腰梯形.中国古算书上把正四棱台称为方亭或方台.

正棱台的主要性质有：

1. 正棱台的两底面以及平行于底面的截面是相似正多边形.

2. 各侧棱都相等.

3. 侧面是全等的等腰梯形.

4. 斜高都相等.

5. 对角面是等腰梯形.

6. 两底面中心的连线垂直于底面.

7. 各侧棱和底面所成的角相等.

8. 各侧面和底面所成的二面角相等.

方亭(fang ting)　正四棱台的中国古称.见"正棱台".

方台(fang tai)　正四棱台的中国古称.见"正棱台".

正棱台的性质(property of a regular prismoid)　见"正棱台".

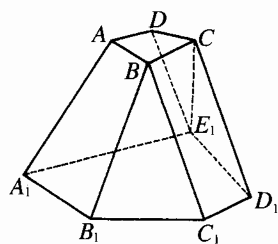
正棱台的轴(axis of a regular prismoid)　一条与正棱台有关的直线或线段.指正棱台的两底中心

连线.正棱台是一种面对称几何体,它的轴是对称面的交线.

正棱台的轴截面(axial section of a regular prismoid) 与正棱台有关的截面.通过正棱台的轴的截面.

斜棱台(oblique prismoid) 一种特殊的台体.指由斜棱锥截得的棱台.

拟柱体(quasi-prism) 一种特殊的多面体.指所有顶点都在两个平行平面内的多面体.拟柱体在这两个平行平面内的面称为该拟柱体的底面,其余各面称为拟柱体的侧面.拟柱体的侧面可以是三角形、梯形或平行四边形.侧面的公共边称为侧棱,两底面的边称为底棱,两底面间的距离称为拟柱体的高.经过高的中点,且与两底面平行的截面称为拟柱体的中截面.若设两底面的面积为 S, S',中截面的面积为 S_0,高为 h,则拟柱体的体积计算公式为



$$V=\frac{h(S+4S_0+S')}{6}.$$

棱柱、棱锥、棱台是特殊的拟柱体.

拟柱体的底面(base of a quasi-prism) 见"拟柱体".

拟柱体的侧面(lateral face of a quasi-prism) 见"拟柱体".

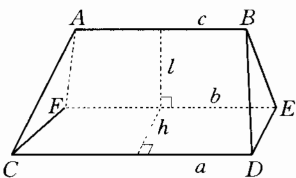
拟柱体的侧棱(lateral edge of a quasi-prism) 见"拟柱体".

拟柱体的底棱(lase edge of a quasi-prism) 见"拟柱体".

拟柱体的高(the height of a quasi-prism) 见"拟柱体".

拟柱体的中截面(the middle section of a quasi-prism) 见"拟柱体".

楔体(wedge solid) 一种特殊的拟柱体.将一个三棱柱(直三棱柱或斜三棱柱)用一个与三棱相交的截面(直截面或斜截面)去截开,所得的几何体称为楔体.它是一种拟柱体,下底面为梯形或平行四边形,上底面是与下底面的平行边平行的线段.图中画出了楔体 $AB\text{-}CDEF$.中国古算书《九章算术》中给出了当 AE 面垂直于 CE 面时被称为羡除的体积计算公式为



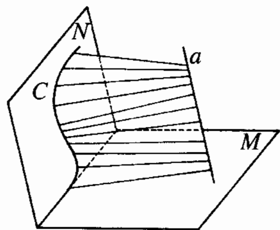
$$V=\frac{1}{6}(a+b+c)hl.$$

长方台(cuboid frustum) 一种特殊的拟柱体.两底面都是矩形的拟柱体称为长方台.中国古称刍童、盘池、冥谷,并在《九章算术》中给出它的体积计算公式为

$$V=\frac{1}{6}[(2a+c)b+(2c+a)d]h.$$

这个公式是拟柱体体积公式的特例.

劈锥曲面(conoid) 曲面的一种.给定直线 a,平面 N 内的曲线 C,平面 M,且 $a/\!/N$,a 和 M 相交,则满足下述条件的动直线的轨迹称为劈锥曲面(如图):



1. 动直线平行于平面 M.

2. 动直线与直线 a,曲线 C 均相交.

其中,定直线 a、定曲线 C、定平面 M 分别称为劈锥曲面的导向直线、导向曲线、导向平面.动直线称为劈锥曲面的母线.劈锥曲面被导向直线分成的两部分,称为劈锥曲面的两叶(图中只画出劈锥曲面的一叶);劈锥曲面的每一叶,称为半劈锥曲面.

劈锥曲面的导向直线(guide line of a conoid) 见"劈锥曲面".

劈锥曲面的导向曲线(guide curve of a conoid) 见"劈锥曲面".

劈锥曲面的导向平面(guide plane of a conoid) 见"劈锥曲面".

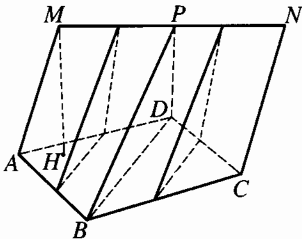
劈锥曲面的母线(generating line of a conoid) 见"劈锥曲面".

半劈锥曲面(half conoid) 见"劈锥曲面".

圆劈锥曲面(circular conoid) 一种特殊的劈锥曲面.指导向曲线是一个圆的劈锥曲面.圆劈锥曲面的导向曲线称为导向圆.

导向圆(guide circular) 见"圆劈锥曲面".

劈锥(conoid solid) 一种特殊的拟柱体.指导向曲线封闭的劈锥曲面,被平行于其导向直线的平面所截得的封闭立体.其中:截面称为劈锥的底面;导向直线交于劈锥的线段,称为劈锥的顶棱;顶棱和底面间的距离,称为劈锥的高;劈锥曲面的母线(直线)夹在劈锥的顶棱、底面间的线段,称为劈锥的母线;劈锥曲面夹在劈锥的顶棱、底面间的部分,称为劈锥的侧面.底面是圆的劈锥称为圆劈锥.图中劈锥 $MN\text{-}ABCD$ 的底面是平行四边形 $ABCD$;MN 为顶棱;$MH\perp$面 $ABCD$,H 为垂足,MH 为劈锥的高



线，其长度为劈锥体的高；MA，PB 等均是劈锥的母线. 曲面 $MABP$，$PBCN$，$NCDP$，$PDAM$ 都是劈锥的侧面.

劈锥的底面(base of a conoid solid)　见“劈锥”.

劈锥的顶棱(vertex edge of a conoid solid)　见“劈锥”.

劈锥的高(height of a conoid solid)　见“劈锥”.

劈锥的母线(generating line of a conoid solid)　见“劈锥”.

劈锥的侧面(lateral face of a conoid solid)　见“劈锥”.

圆劈锥(circular conoid)　见“劈锥”.

对棱劈锥(vertically opposite conoid)　一种特殊的劈锥. 导向曲线封闭的劈锥曲面和满足下述条件的两平行平面所围成的封闭立体，称为对棱劈锥：

1. 两平行平面与劈锥曲面的导向直线平行，且与所有的母线均相交.

2. 导向直线位于两平行平面之间.

两平行平面上对棱劈锥的面称为它的底面. 两个底面都是圆的对棱劈锥称为对棱圆劈锥.

对棱圆劈锥(vertically opposite circular conoid)　一种特殊的圆劈锥(参见“对棱劈锥”). 对棱圆劈锥的顶棱到两底面的距离相等.

旋　转　体

旋转体(revolution solid)　一种特殊的几何体. 指封闭的旋转面围成的几何体. 此时，旋转面的轴也称为旋转体的轴. 圆柱、圆锥、圆台、球等都是旋转体.

旋转面(surface of revolution)　见本卷《空间解析几何》中的“旋转曲面”.

旋转体的轴(axis of a rotation solid)　见“旋转体”.

圆柱面(circular cylindrical surface)　亦称旋转柱面或回转柱面. 柱面的一种. 如果柱面有一条准线是圆，且柱面母线方向又不与该圆所在平面平行，则此柱面为圆柱面. 母线与准线圆所在平面垂直的圆柱面称为直圆柱面. 母线不与准线圆所在平面垂直的圆柱面称为斜圆柱面. 与斜圆柱面母线垂直的平面截口是椭圆，因此斜圆柱面亦称为椭圆柱面. 通常所说的圆柱面指直圆柱面. 圆柱面可以看成由一直线绕与其平行的定直线旋转所形成的旋转面. 这条定直线称为直圆柱面的轴或旋转轴. 圆柱面是空间中与已知定直线有定距离的点的轨迹，也是与已知定直线平行且有定距离的直线的轨迹.

旋转柱面(cylinder of revolution)　即“圆柱面”.

直圆柱面(right circular cylindrical surface)　见“圆柱面”.

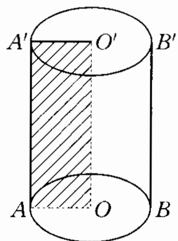
斜圆柱面(oblique circular cylindrical surface)　见“圆柱面”.

椭圆柱面(elliptical cylindrical surface)　见“圆柱面”.

圆柱面的切线(tangent line of a circular cylindrical surface)　一条与圆柱面有关的直线. 与圆柱面有惟一公共点或整个在圆柱面上的直线，称为圆柱面的切线. 切线上属于圆柱面的点称为切点. 圆柱面上任何一点处的切线的轨迹是过切点的柱面母线的一个平面(过切点的母线除外)，过圆柱面的任何一条切线作平面与柱面相截，则该切线与截口曲线(圆或椭圆或直线)相切.

圆柱面的切面(tangent plane of a circular cylindrical surface)　一种与圆柱面有关的平面. 圆柱面上任何一点处的切线的轨迹是一个平面，该平面称为圆柱面的切面. 圆柱面的每一切面与柱面有一条公共直线，它是柱面的一条母线.

圆柱(circular cylinder)　一种特殊的柱体. 由一个矩形绕其一边旋转一周而成的几何体称为直圆柱或正圆柱，简称圆柱. 旋转轴称为圆柱的轴，它是圆柱两底中心的连线. 矩形中垂直于轴的边旋转而成的圆面称为圆柱的底面；两个底面间的距离是圆柱的高；矩形中平行于轴的边旋转而成的圆柱面称为圆柱的侧面；该边在侧面各个位置上的直线段都称为圆柱的母线. 圆柱用表示它的轴的字母来表示，如图中圆柱记为圆柱 $O'O$；还可用分别在两底上，但不是同一母线的两个端点的字母表示，如圆柱 AB'. 圆柱可以用两个相互平行且垂直于圆柱面母线的平面去截圆柱面而得到.



圆柱的主要性质是：

1. 圆柱的两个底面是相等的圆，它们所在的平面平行.

2. 圆柱的母线互相平行，且都等于圆柱的高，都垂直于圆柱的两个底面.

3. 圆柱的轴过两底面的圆心，并且垂直于两底面，它的长等于圆柱的高.

4. 圆柱的轴截面是一个矩形，它的一组对边是圆柱的两条母线，另一组对边是圆柱底面圆的直径.

5. 平行于底面的截面是与底面相等的圆.

6. 圆柱的侧面可以展开在一个平面上.

直圆柱(right circular cylinder)　见"圆柱".

正圆柱(regular circular cylinder)　见"圆柱".

圆柱的轴(axis of a circular cylinder)　见"圆柱".

圆柱的底面(base of a circular cylinder)　见"圆柱".

圆柱的高(height of a circular cylinder)　见"圆柱".

圆柱的侧面(lateral face of a circular cylinder)　见"圆柱".

圆柱的母线(generating line of a circular cylinder)　见"圆柱".

圆柱的性质(property of a circular cylinder)　见"圆柱".

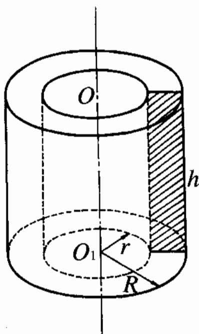
斜圆柱(oblique circular cylinder)　一种特殊的柱体. 即底面是圆的斜柱,称为斜圆柱. 斜圆柱也是斜圆柱面与两个平行于准线圆的平面围成的几何体.

圆柱的轴截面(axial section of a circular cylinder)　一种与圆柱有关的截面. 用一个过圆柱的轴的平面去截圆柱所得的截面. 圆柱的轴截面是相等的矩形.

等边圆柱(equilateral circular cylinder)　一种特殊的圆柱. 轴截面为正方形的圆柱称为等边圆柱.

斜截圆柱(truncated circular cylinder)　一种与圆柱有关的柱体. 用与圆柱所有母线都相交而不平行于圆柱底面的平面去截圆柱,所得的两个几何体都称为斜截圆柱.

空心圆柱(hollow circular cylinder)　旋转体的一种. 给定一个矩形以及一条在矩形平面上的与矩形不相交而平行于矩形一边的直线,矩形绕该直线旋转一周生成的几何体. 空心圆柱的上下底面是相等的圆环,内外侧面均是圆柱面. 两底面间的距离是空心圆柱的高(如图). 若空心圆柱底面的外圆半径为 R,内圆半径为 r,高为 h,则它的表面积计算公式为



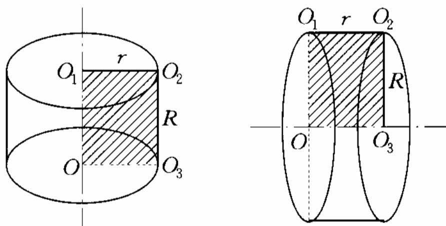
$$S_{表} = 2\pi(R + r)(R - r + h),$$

体积计算公式为

$$V = \pi(R^2 - r^2)h.$$

共轴圆柱(coaxial cylinders)　两个特殊相关的圆柱. 指轴线重合的圆柱. 两圆柱共轴时,可能两底面分别叠合、一底叠合而另一底不叠合、两底均不叠合.

共轭圆柱(conjugate cylinders)　两个特殊相关的圆柱. 指矩形分别绕其两邻边旋转成的两个圆柱. 其中一个圆柱的底面半径、高分别等于其共轭圆柱的高、底面半径(如图).



圆锥面(circular cone)　一种特殊的锥面. 指准线是一个圆的锥面. 顶点在该准线所在平面上的正射影是准线圆的中心时,圆锥面称为正圆锥面或直圆锥面,否则称为斜圆锥面. 顶点把圆锥面分为两叶. 通常所说的圆锥面指正圆锥面. 圆锥面也是动直线绕与之相交的定直线旋转时动直线的轨迹,故圆锥面亦称为旋转锥面. 这里定直线称为圆锥面的轴. 动直线称为圆锥面的母线. 与轴垂直的平面与圆锥面的交线都是圆.

直圆锥面(right circular cone)　见"圆锥面".

正圆锥面(regular circular cone)　见"圆锥面".

斜圆锥面(oblique circular cone)　见"圆锥面".

旋转锥面(revolution conical surface)　即"圆锥面".

圆锥面的轴(axis of circular cone)　见"圆锥面".

圆锥面的母线(generating line of circular cone)　见"圆锥面".

圆锥面的切线(tangent line of a circular cone)　一条与圆锥面有关的直线. 不过圆锥面的顶点,且与圆锥面有惟一公共点的直线,或整个在圆锥面上的直线,称为圆锥面的切线. 切线上属于圆锥面的点称为圆锥面与直线的切点. 圆锥面上,除顶点外的任何一点处的切线的轨迹是一个平面. 过圆锥面的任何一切线作平面截锥面,则该切线与截口曲线(圆、椭圆、抛物线、双曲线或直线)相切.

圆锥面的切面(tangent plane of a circular cone)　一种与圆锥面有关的平面. 与圆锥面只有一条公共直线的平面. 圆锥面上,除顶点外,任何一点处的切线的轨迹是一个平面,这平面称为圆锥面的切面. 圆锥面上任何一点处的切面过锥顶. 圆锥面的每一个切面与锥面有一公共直线,它是锥面的一条母线.

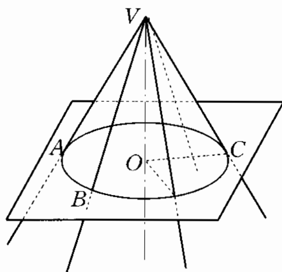
斜圆锥的逆平行截口(anti-parallel section of a

oblique circular cone）　一条与斜圆锥有关的封闭曲线. 斜圆锥的与底不平行的圆截口，称为斜圆锥的底面圆的逆平行截口. 斜圆锥有一系列逆平行截口. 以锥顶 S 为极，任作一反演球与斜圆锥侧相交，锥底面关于此球的反演图形就是一个逆平行截口. 如果作锥底圆与锥顶确定的球面 Σ，则 Σ 的反演图形是逆平行截口所在的平面，它平行于 Σ 的过 S 的切平面 α，因此任何两逆平行截口面是彼此平行的(参见“反演变换”).

立体角(solid angle)　一种与立体有关的简单闭曲线或封闭折线. 指以锥顶为球心的单位球截锥面得到的曲线. 如果用中心位于锥面顶点的单位球面去截锥面之一叶，所得截线是一简单闭曲线，那么锥面的这一叶称为立体角，锥面的顶点称为立体角的顶点. 多面角是立体角的特殊情况. 立体角的大小可以用中心在立体角的顶点的单位球面被立体角截下的球面积的大小来度量. 单位为球面度. 一单位球面共有 4π 球面度. 当立体角截下单位球的面积为 S 时，立体角为 $S/4\pi$ 球面度.

立体角的顶点(vertex of a solid angle)　见“立体角”.

圆锥(circular cone)　一种特殊的锥体. 如果用不经过圆锥面的顶点而垂直于圆锥面的轴的一个平面去截圆锥面的一叶，那么截面和圆锥面所围成的封闭几何体称为直圆锥或正圆锥，简称圆锥(如图). 截口圆是圆锥的底面. 锥面被截下的部分是圆锥的侧面. 圆锥也可以由一个直角三角形绕着它的一条直角边旋转一周而成. 用平面去截圆锥面的一叶而得圆锥时，圆锥面的轴也称为圆锥的轴，它过锥顶与底面圆心. 锥顶与底面圆心的连线段是圆锥的高线，高线的长称为圆锥的高. 圆锥面的母线被截下的线段称为圆锥的母线，圆锥母线长都相等，它也是圆锥的斜高. 圆锥可以用它的顶点以及它底面上的三个点的字母来表示，如图中的圆锥可以记为圆锥 V-ABC.



圆锥的主要性质是：

1. 圆锥的底面是圆.

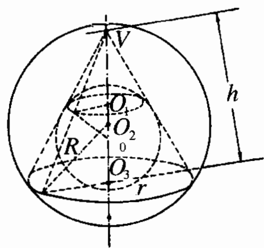
2. 圆锥的轴垂直于底面，垂足是底面圆的圆心.

3. 圆锥的母线都相等，它们和轴的夹角也都相等.

4. 圆锥的轴截面是一个等腰三角形，它的两腰是圆锥的两条母线，底边是圆锥底面圆的直径.

5. 经过圆锥的顶点与底面相交的截面是一个等腰三角形，它的两腰是圆锥的两条母线，底边是圆锥底面圆的弦.

6. 平行于圆锥的底面，但不过顶点的截面是一个圆，截面面积和底面面积的比等于从顶点到截面和从顶点到底面距离平方的比，所截得的小圆锥和原圆锥的体积之比等于对应线段的立方之比.



7. 圆锥的高、母线和母线在底面上的射影组成一直角三角形.

8. 圆锥的顶点、底面圆中心、内切球中心与外接球中心共线.

直圆锥(right circular cone)　即“圆锥”.

正圆锥(regular circular cone)　即“圆锥”.

圆锥的底面(base of a circular cone)　见“圆锥”.

圆锥的侧面(lateral face of a circular cone)　见“圆锥”.

圆锥的轴(axis of a circular cone)　见“圆锥”.

圆锥的高(height of a circular cone)　见“圆锥”.

圆锥的母线(generating line of a circular cone)　见“圆锥”.

圆锥的斜高(slant height of a circular cone)　见“圆锥”.

圆锥的性质(property of a circular cone)　见“圆锥”.

斜圆锥(oblique circular cone)　一种特殊的圆锥. 斜圆锥面被平行于准线圆面而不过顶点的平面截下的封闭几何体. 斜圆锥的底面是圆，顶点与底面圆心的连线不垂直于底面.

圆锥的截面(section of a circular cone)　几种与圆锥有关的截面. 指用平面与圆锥相截所得的几何图形. 圆锥的截面有：

1. 用垂直于圆锥的高线而不过圆锥的顶点的平面去截圆锥得到的截面是一个圆. 截面圆半径和底面圆半径的比，等于从顶点到截面和从顶点到底面的距离之比.

2. 用经过圆锥的顶点，并且和圆锥的底面相交的平面去截圆锥得到的截面是一个等腰三角形，它的两腰是圆锥的两条母线，底边是底面圆的弦.

3. 用不过圆锥顶点，与圆锥轴线的交角小于圆锥半顶角的平面去截圆锥得到的截面是双曲线弓形，弓形的弦是圆锥底面圆的弦.

4. 用不过圆锥顶点，与圆锥轴线的交角等于圆锥半顶角的平面去截圆锥得到的截面是抛物线弓形，弓形的弦是圆锥底面圆的弦.

5. 用不过圆锥的顶点，与圆锥轴线的交角大于圆锥半顶角的平面去截圆锥得到的截面是椭圆（截面与轴垂直时为圆）或椭圆弓形，弓形的弦也是圆锥底面圆的弦.

圆锥的轴截面(axial section of a circular cone)　一种与圆锥轴有关的截面. 用一个过圆锥的轴的平面去截圆锥，所得的截口三角形称为圆锥的轴截面，也称为圆锥的子午三角形. 圆锥的轴截面都是全等的等腰三角形，它们的两腰是圆锥的母线，底边是底面圆的直径.

圆锥的子午三角形(meridian-triangle of a circular cone)　即“圆锥的轴截面”.

圆锥的顶角(vertical angle of a circular cone)　一种与圆锥轴截面有关的角. 指圆锥的轴截面的顶角，即轴截面上两条母线间的夹角. 轴与母线的夹角称为圆锥的半顶角. 顶角为直角、锐角、钝角的圆锥分别称为直角圆锥、锐角圆锥、钝角圆锥.

圆锥半顶角(half vertical angle of a circular cone)　见“圆锥的顶角”.

直角圆锥(rectangular cone)　见“圆锥的顶角”.

锐角圆锥(acute circular cone)　见“圆锥的顶角”.

钝角圆锥(obtuse circular cone)　见“圆锥的顶角”.

等边圆锥(equilateral circular cone)　一种特殊的圆锥. 轴截面为正三角形的圆锥称为等边圆锥. 其顶角为 60°.

对顶圆锥(vertically opposite circular cone)　一个圆锥形的几何体. 用垂直于圆锥面的轴的两个平面去截圆锥面，如果圆锥顶点位于此两平行平面之间，两截口圆面与锥面围成的封闭几何体称为对顶圆锥. 对顶圆锥是特殊的第二型截锥.

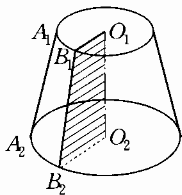
共轭圆锥(conjugate circular cone)　一对特殊相关的圆锥. 分别以直角三角形两条直角边为轴而旋转所得的两个圆锥，其中每一个圆锥称为另一个圆锥的共轭圆锥. 一个圆锥的底面半径、高分别等于其共轭圆锥的高、底面半径. 两圆锥共轭的充分必要条件为顶角和为 π，且母线长相等.

截圆锥体(truncated circular cone)　一种与圆锥有关的几何体. 由平面截圆锥所得的几何体. 用与所有母线均相交且不与底面相交的平面截去圆锥的锥尖部分，所余封闭几何体称为截圆锥体. 截圆锥体分为平截圆锥体和斜截圆锥体.

斜截圆锥体(truncated circular cone)　一种截圆锥体. 用与所有母线均相交，且不与底面平行和相交的平面截去圆锥的锥尖部分，余下的封闭几何体称为斜截圆锥.

平截圆锥体(truncated circular cone)　即“圆台”.

圆台(frustum of a cone)　亦称正圆台或平截圆锥体. 一种特殊的台体. 中国古算书称圆亭、由平行于圆锥底面的平面截去圆锥上部小圆锥后留下的几何体. 截面和圆锥的底面称为圆台的上、下底面，圆锥的轴、母线和侧面的留下部分称为圆台的轴、母线和侧面，轴长称为圆台的高. 圆台也是直角梯形（如图中的梯形 $O_1O_2B_2B_1$）绕一直角边旋转一周而生成的几何体.



图中 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 分别为圆台的上底、下底，A_1A_2，B_1B_2 等为圆台的母线，线段 O_1O_2 的长为圆台的高.

圆台的主要性质是：

1. 圆台的两个底面都是圆，它们所在的平面平行.

2. 平行于底面的截面都是圆.

3. 圆台的母线都相等，它们延长相交于轴上同一点.

4. 圆台的轴过两个底面的圆心，并且垂直于两底面，连结两底面圆心的线段的长等于圆台的高.

5. 圆台的轴截面是等腰梯形，它的两腰是圆台的两条母线，它的上、下底分别是圆台的上、下底面圆的直径.

6. 圆台的高、一条母线和经过这条母线两个端点的上、下底面半径组成一个直角梯形.

正圆台(regular frustum of a cone)　即“圆台”.

圆亭(yuan ting)　中国古称. 见“圆台”.

圆台的底面(base of a frustum of a cone)　见“圆台”.

圆台的轴(axis of a frustum of a cone)　见“圆台”.

圆台的母线(generating line of a frustum of a cone)　见“圆台”.

圆台的侧面(lateral of a frustum of a cone)　见“圆台”.

圆台的高(height of a frustum of a cone)　见“圆台”.

圆台的性质(property of a frustum of a cones)　见“圆台”.

圆台的轴截面(axial section of a frustum of a cone)　一种与圆台的轴有关的截面. 用一个过圆台轴的平面截圆台所得的截面. 圆台的轴截面是彼此全等的等腰梯形，其腰是圆台的母线，其上、下底是圆台底面圆的直径，其高等于圆台的高.

圆台的中截面(midsection of a frustum of a

cone） 一种与圆台有关的特殊截面．平行于圆台的两底面且经过圆台高线的中点的截面．圆台的中截面是以高线的中点为圆心的圆，它的半径是圆台两底面半径和的一半．它的面积 $S_{中}$ 与两底面面积 S_1，S_2 有关系式为

$$S_{中}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2.$$

球

球面(spherical surface) 一种重要的曲面．指空间中与一定点的距离等于定长的点的轨迹．这个定点称为球的中心，简称球心，定长称为球的半径．球面上两点所连直线段称为弦，通过球心的弦称为直径，同一直径的两个端点称为球面上的对径点．球面把空间的点分割成三部分，与球心的距离小于半径的点，称为球的内点，所有内点的集合组成球的内部．与球心的距离大于半径的点，称为球的外点，所有外点的集合组成球的外部．与球心的距离等于半径的点，称为球面点，所有球面点的集合组成球面，球面是其内部和外部的界限．球面也是旋转面，如果将半圆周绕其直径旋转一周，则半圆弧的轨迹是球面，称半圆弧为球面的母线．球面的任何平面截口都是圆，过球心的平面截口称为球的大圆．不过球心的平面截口称为球的小圆．在空间直角坐标系中，球心为点(a,b,c)半径为 R 的球面的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

球心(center of a sphere) 即球的中心，见"球面".

球的半径(radius of a sphere) 见"球面".

球的直径(diameter of a sphere) 见"球面".

球的内点(interior point of a sphere) 见"球面".

球的外点(exterior point of a sphere) 见"球面".

球面点(spherical point) 见"球面".

球面的母线(generating line of a spherical) 见"球面".

球面大圆(spherical great circle) 一条与球面有关的封闭曲线．指球面和通过球心的平面的交线．球面大圆的中心在球心，半径等于球半径．球面大圆具有如下性质：

1．经过球面上不是同一直径端点的两个点，有且只有一个大圆．

2．同球的两个大圆必相交于一双对径点．

3．同球的大圆皆相等．

4．球的任一大圆都平分这个球面．

5．球面上连结两点（非对径点）的线中，大圆劣弧最短．

球的径面(diameter plane of a sphere) 一种圆面．指通过球心的截面圆．球的任一径面都是球的大圆面，也是球的对称平面．

球面小圆(spherical small circle) 一条与球面有关的封闭曲线．指球面和不通过球心的平面的交线．球面小圆圆心与球心的连线，垂直于球的小圆面．在半径为 R 的球面中，圆心距球心为 d 的球面小圆的半径为

$$r=\sqrt{R^2-d^2}.$$

球面的平行圆(spherical parallel circle) 一对与球有关的闭曲线．用一组平行平面截球面，各截口圆称为球面的平行圆．

半球面(semi-spherical surface) 一种与球有关的曲面．球面被其大圆分成两部分，每一部分都称为半球面．

球冠(spherical crown) 一种与球有关的曲面．用平面与球面相截，将球面分成两部分，每一部分都称为一个球冠．当平面过球面中心时，所得的两个球冠均是半球面．

球冠的高(height of a spherical crown) 一条与球冠有关的线段．用平面去截球得到球冠时，平面亦将垂直于平面的球面直径截成两条线段，这两条线段分别是两个相应球冠的高线，球冠高线的长度称为球冠的高．球冠的高是球冠面上到球冠底面距离最远的点到球冠底面的垂线段的长度．球半径为 R 的球冠，如果底面半径为 $r(0<r\leqslant R)$，其高

$$h=R\pm\sqrt{R^2-r^2}.$$

当 $R<h<2R$ 时，公式取"＋"号，当 $0<h<R$ 时公式取"－"号．

球冠的底面(base of a spherical crown) 一种与球冠有关的平面图形．圆到用平面去截球面，得到球冠时，平面与球面的截口面称为球冠的底面．

球带(spherical zone) 球面的特殊部分．指球面夹在两个平行截面之间的部分．两个平行截面称为球带的底面，球冠可看成两个平行平面中的一个与球面相切时的球带．

球带的高(height of a spherical zone) 一条与球带有关的线段．球带的两个底面的公垂线段称为球带的高．它可以从连结球带的两底面圆的圆心得到．如果球带的半径为 R，球带上底半径为 r_1，下底半径为 r_2，球带高的计算公式：

$$h=\left|\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r_2^2}\right|$$

或 $$h=\sqrt{R^2-r_1^2}+\sqrt{R^2-r_2^2}.$$

球的弦(chord of a sphere)　一条与球面有关的线段. 指作为连结球面上两点的线段. 球的弦的主要性质有：

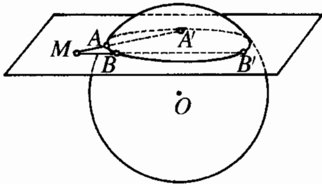
1. 弦的中垂面过球心，且与球面交线为大圆.

2. 球的过已知弦的截口圆中，以过球心的圆最大，以垂直于已知弦的中点与球心连线的圆为最小.

3. 相等的弦与球心的距离相等，且与球心距离较远的弦较短.

4. 与球心距离等于定长的弦的包络是一个与原球同心以定长为半径的球面.

点对于球的幂(power of a point with respect to a sphere)　刻画点关于球面位置关系的一个常量. 由空间一点向球作诸割线，那么在每一割线上从该点起到与球面相交的两点止的两有向线段之积为一常量，这个常量称为这点对于该球的幂. 如图，点 M 为空间一已知点，从点 M 引球 O 的任意两条割线，分别与球面相交于点 A, A' 和 B, B'，则 $MA\cdot MA'=MB\cdot MB'=k$，$k$ 就是点 M 对于球 O 的幂 $k=d^2-r^2$，式中 d 是点 M 到球心 O 的距离，r 是球半径. 当点 M 在球内时，线段 MA 和 MA' 反向，这时 $k<0$，点 M 称为负幂点；当点 M 在球外时，线段 MA 和 MA' 同向，这时 $k>0$，点 M 称为正幂点；当点 M 在球面上时，$MA=0$，这时 $k=0$. 球面是正幂点和负幂点的分界. 当点 M 在球外时，$k=$切线长(从点 M 到切点的距离)的平方. 对一个球的幂相等的点的轨迹是一个与原球同心的球面. 当幂为正时，它包含原球；当幂为负时，它含于原球内；当幂为零时，它与原球面重合.



球的正幂点(positive power point of a sphere)　见“点对于球的幂”.

球的负幂点(negative power point of a sphere)　见“点对于球的幂”.

球与直线相切(contact between a sphere and a line)　球与直线的一种特殊位置关系. 当球与直线只有一个公共点时，球与直线的位置关系称为相切. 这直线称为球的切线，公共点称为切点. 球与直线相切的充分必要条件是球心到直线的距离等于球半径. 过球面上一定点可作球的无数条切线，这些切线的轨迹是一个平面，它是球的切平面.

球的切线(tangent line of a sphere)　见“球与直线相切”.

球切线的性质(property of tangent line of a sphere)　与球的切线有关的几个结论. 球切线的主要性质是：

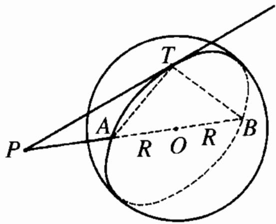
1. 球的切线和经过切点的球的半径垂直.

2. 经过球面上一点的切线有无数条，这些切线都在经过这点的切平面内.

3. 过球外任何一点可以作球面的无数条切线，这些切线的轨迹是球的外切圆锥面，该圆锥面与球的交线是一个球面圆，其中心在圆锥的轴上，轴过球心.

4. 过球外一点 P 作球的切线 PT 与割线 PB，割线与球交于 A, B 两点，则 $PT^2=PA\cdot PB$.

5. 过球外一点作球的任意两条切线，它们与此点到球心连线的夹角相等.



6. 如球半径为 R，球外一点 P 到球的切线长为 t，过球心 O 和点 P 的直线 OP 与球面相交于直径 AB，则球面上的点与 P 的最小距离为 $PA=\sqrt{R^2+t^2}-R$. 最大距离为 $PB=\sqrt{R^2+t^2}+R$(如图).

7. 空间中，过动点 P 作半径为 R 的球的切线，切线长为定值 t 时，点 P 的轨迹是一个球面，它与原球同心，半径为 $\sqrt{R^2+t^2}$.

球与直线相离(separation between a sphere and a line)　球与直线的一种特殊位置关系. 当球面与直线没有公共点时，球与直线的位置关系称为相离. 球与直线相离的充分必要条件是球心到直线的距离大于球半径.

球与直线相交(intersection between a sphere and a line)　亦称球与直线相割. 球与直线的一种特殊位置关系. 球面与直线有两个公共点时，这个球与此直线的位置关系称为相交. 与球相交的直线称为球的割线. 公共点称为交点. 球与直线相交的充分必要条件是球心到直线的距离小于球半径.

球与直线相割(secant between a sphere and a line)　即“球与直线相交”.

球的割线(secant line of a sphere)　见“球与直线相交”.

球面与直线的交角(intersection angle between a spherical and a line)　刻画球面与直线的相互关系的一个角. 若一直线与球面相交，球面在两个交点处的切平面与直线的交角称为球面与直线的交角. 直线与球面相切时交角为零. 直线与球面相离时无交角.

球与平面相交(intersection between a sphere and a plane)　球与平面的一种特殊位置关系. 当球与平面至少有两个公共点时，球与平面的位置关系称为相交，这个平面称为球的割平面或截平面. 球与

平面相交时，交线是一个球面大圆或小圆．球与平面相交的充分必要条件是球心到平面的距离小于球半径．平面与球面相交，平面过球心时，截口为球的大圆，否则截口为小圆．

球的割平面(secant plane of a sphere)　见“球与平面相交”．

球的截面(cross section of a sphere)　一种特殊的截面．指用一个平面截一个球所得的截面圆，如图．球截面的性质有：

1．球心和截面小圆圆心的连线垂直于截面．

2．球心到截面的距离 d 与球的半径 R 及截面圆半径 r 的关系式为 $r=\sqrt{R^2-d^2}$．当 $d=0$ 时，$r=R$，截面经过球心，球面被截得的圆最大，是球面大圆；当 $d=R$ 时，$r=0$，截面圆退缩成截平面与球的惟一公共点．

3．与球心距离相等的截面所截得的圆相等．

4．与球心距离不等的截面截得的圆不等，距离球心较近的截面所截得的圆较大．

球与平面相切(contact between a sphere and a plane)　球与平面的一种特殊位置关系．球与平面有且仅有一个公共点时，球与平面的位置关系．这平面称为球的切平面，公共点称为切点．球与平面相切的充分必要条件是平面到球心的距离等于球半径．图中，半径为 r 的球 O 与平面 α 相切于点 P，则平面 α 到球心 O 的距离 $PO=r$，P 为切点，α 为球的切平面．

球切面的性质(property of tangent plane of a sphere)　与球的切面有关的几个结论．球切面的主要性质是：

1．切面垂直于过切点的球半径．

2．过球面上一点只可以作球面的一个切面．

3．过球面外一点 P 可以作球面的无数个切面，每个切面上有球面的过 P 点的惟一切线，并且这些切面的包络是一个圆锥面．

4．切面上过切点的任何直线都是球的切线．

5．切面是球的过切点的切线轨迹．

球切面的判定定理(decision theorem of tangent plane of a sphere)　判定球与平面相切的几个充分条件．满足下列条件的平面都是球的切面：

1．过球半径的外端点且垂直于该半径．

2．与球心的距离等于球半径．

3．由球面上任何一点处的两相交球切线确定．

4．与球只有一个公共点．

球与平面相离(separation between a sphere and a plane)　球与平面的一种特殊位置关系．球与平面无公共点时，球与平面的位置关系．球与平面相离的充分必要条件是球心到平面的距离大于球半径．

球与平面的交角(intersection angle between a sphere and a plane)　刻画球面与平面的相互关系．一种二面角．当球面与平面 π 相交时，过交截圆上任一点的球切面 Σ 与 π 的交角 α 为常值，α 称为球与平面 π 的夹角．若球与平面相切，则说球面与平面的交角为零．当球与平面相离时，球与平面无交角．当平面与球面相交时，如球半径为 R，平面到球心的距离为 d，则平面与球面的交角为

$$\alpha=\arccos\frac{d}{R}.$$

两球相切(contact between two spheres)　两球间的一种特殊位置关系．指两球有惟一的公共点的位置关系．这时，如果一球在另一球的内部，则称为两球内切．如果一球在另一球的外部，则称为两球外切．若两球的半径分别为 R，$r(R\geqslant r)$，球心距为 d，两球内切的充分必要条件是 $d=R-r$，两球外切的充分必要条件是 $d=R+r$．当两球半径相等时，不可能内切．相切两球的球心与切点共线．

两球内切(interior contact between two spheres)　见“两球相切”．

两球外切(exterior contact between two spheres)　见“两球相切”．

两球相离(separation between two spheres)　两球间的一种特殊位置关系．指两球没有公共点的位置关系．此时，若一个球在另一个球的内部，则称为两球内离，又称两球内含．若一个球在另一个球的外部，则称为两球外离．若两球的半径分别为 R，r $(R\geqslant r)$，球心距为 d，两球内离的充分必要条件是 $d<R-r$，两球外离的充分必要条件是 $d>R+r$．当两球半径相等时，两球不能内离．

两球内离(interior separation between two spheres)　见“两球相离”．

两球内含(inclusion between two spheres)　即“两球内离”．

两球外离(exterior separation between two spheres)　见“两球相离”．

同心球(concentric spheres)　两球面相离的一种特殊情形．指有同一球心的球．

两球相交(intersection between two spheres)　两球间的一种特殊位置关系．指不重合的两球面至少有两个公共点的位置关系．这时交集是一个圆周，

该圆周所在平面垂直于两球的连心线，且圆心在两球的连心线上. 如两球半径分别为 R 与 $r(R\geqslant r)$，球心距为 d，则两球相交的充分必要条件为

$$R-r<d<R+r.$$

两球面的交角(angle between two intersecting spheres)　刻画两球面相互关系的一种二面角. 相交两球交点处两球切面的交角. 如果两球面相交，则在各交点处两球两个切面的夹角都相等，这个夹角就称为两球面的交角. 两球面的交角等于通过交点的两条半径的夹角或其补角. 当两球的交角是直角时，就称两球正交. 两球正交的充分必要条件是通过一个交点的两条半径互相垂直.

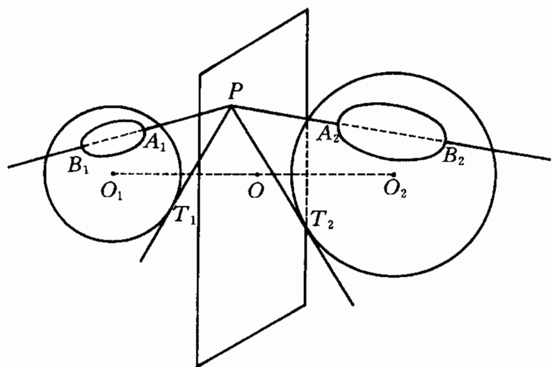
两球正交(orthogonality between two spheres)　见“两球面的交角”.

两球的根面(radical plane of two spheres)　亦称两球的等幂面. 一种与两球有特殊的平面. 对于不同心的两球有相等幂的点的轨迹是垂直于两球连心线的一个平面，称为两球的根面. 过两球的连心线任作一个平面与两球和根面相交，则两交线大圆的根轴就是所作平面与根面的交线. 由平面几何可知(参见“根轴”)：

1. 两球相切时，过切点的公切面是两球的根面.

2. 两球相交时，交线圆所在的平面是两球的根面.

3. 两球外离时，根面和连心线的交点与连心线中点的距离为 $(R_1^2-R_2^2)/2p$，且靠近大球一侧. 这里 R_1 是较大球半径，R_2 是较小球半径，p 为连心线长度. 特别当 $R_1=R_2$ 时，根面就是连心线的中垂面.



4. 两球内离时，根面与两球连心线交于两球外，且在两球面距离较近的一侧，交点到小球球心的距离为

$$d=\frac{R_1^2-R_2^2}{2p}-\frac{p}{2}.$$

5. 两球外离时，两球的与连心线共面的公切线段被根面平分.

6. 过两球根面上的任何一点 P 作两球的割线 PA_1B_1 与 PA_2B_2，切线 PT_1 与 PT_2(如图)，则

$$PA_1\cdot PB_1=PA_2\cdot PB_2=PT_1^2=PT_2^2.$$

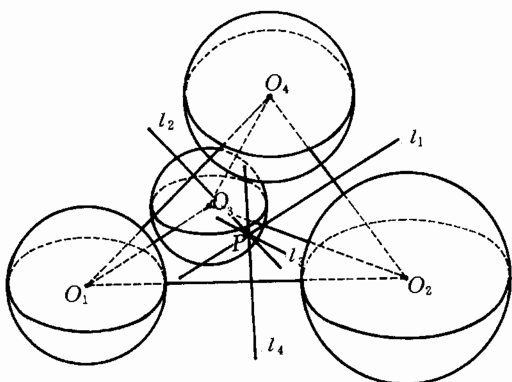
两球的等幂面(idempotent plane of two spheres)　即“两球的根面”.

两球的极限点(limit point of two spheres)　与两球相离有特殊关系的点. 指相离两球其连心线上的两个定点. 若两球相离，则凡与这两球同时正交的球均通过两球的连心线上的两定点，这两定点都称为两球的极限点.

三球的等幂轴(idempotent axis of three spheres)　亦称三球的根轴. 刻画三球位置关系的一条直线. 对于球心不共线的三个球的幂相等的点的轨迹是一条直线，称为三个球的等幂轴. 球心不共线的三球中任何两个都有一个根面，这样的三个根面必共线，这直线就是三球的根轴. 三球的根轴垂直于三球中心所确定的平面.

三球的根轴(radical axis of three spheres)　即“三球的等幂轴”.

四球的根心(radical center of four spheres)　亦称四球的等幂心. 关于四个球有相等幂的点. 球心不共面的四球有且仅有一点对这四个球的幂相等，这一点称为这四个球的根心. 球心不共面的四球中每三个有一根轴，这样的根轴一共有四根，它们共



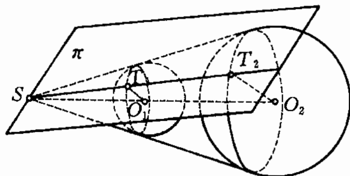
点，这点就是四球的根心. 图中四球 O_1,O_2,O_3 与 O_4 的球心不共面. 球 O_1,O_2 与 O_3 的根轴为 l_4，球 O_2,O_3 与 O_4 的根轴为 l_1，球 O_3,O_4 与 O_1 的根轴为 l_2，球 O_4,O_1 与 O_2 的根轴为 l_3. l_1,l_2,l_3 与 l_4 相交于点 P，P 是四球的根心. 显然，过四球根心作以四球中心为顶点的四面体各面的垂线就分别得到 l_1,l_2,l_3 与 l_4.

四球的等幂心(idempotent center of four spheres)　即“四球的根心”.

两球的公切线(common tangent line of two spheres)　有关两球位置关系的一种直线. 一直线与两球同时相切时，该直线称为两球的公切线. 两球内含时无公切线. 两球内切时，外公切平面上过切点的任何直线都是这两球的公切线. 如果一球面上存在点 A 不在另一球面上，过 A 作该球的切面，当切面与另一球相切、相交或相离时，过 A 点有一条、两条外公

切线或无公切线. 在过 A 点的公切线惟一的情况下,公切线与两球连心线共面.

两球的公切面(common tangent plane of two spheres) 有关两球位置关系的一种平面. 与两球都相切的平面称为两球的公切面. 如果两球在公切面的同侧,则该公切面称为外公切面. 如果两球在公切面的两侧,则该公切面称为内公切面. 两球的某个公切面如果与两球切于不同两点,则两切点的连线是两球的一条公切线,它与两球的连心线共面. 两球相离时,有无数个内公切面,它们的包络是一个以两球连心线为轴的圆锥面,圆锥面的母线都是两球的公切线. 两球相离时,有无数个外公切面. 如两球不相等,外公切面的包络是一个圆锥面. 如两球相等,外公切面的包络是一个圆柱面,它们的轴是两球的连心线. 两球外切时,只有一个内公切面,该公切面过两球的切点且与两球连心线垂直. 两球外切时,有无数个外公切面. 当两球不等时,外公切面的包络是圆锥面;当两球相等时,外公切面的包络是圆柱面;两球内切时,无内公切面,有惟一的一个外公切面,它过两球的切点并与两球连心线垂直. 两球相交时,无内公切面,有无数个外公切面. 当两球相等时,外公切面的包络是圆柱面;当两球不等时,外公切面包络是圆锥面. 两球内含时,既无外公切面也无内公切面.



外公切面(exterior common tangent) 见"两球的公切面".

内公切面(interior common tangent) 见"两球的公切面".

三球的公切面(common tangent plane of three spheres) 有关三球位置关系的一种平面. 如果一个平面同时与三个球相切,则该平面称为这三球的公切面. 三个球可以无公切面. 例如,三个球中有两球内含时,就一定无公切面. 互不相等且球心不共线的三个球有四条位似轴,如果过一条位似轴的一个平面与一球相切,则必与另两球相切. 它就是该三球的一个公切面. 三个球也只有这样的公切面. 因此三球的公切面不会超过八个.

球公切面的性质(property of common tangent plane of spheres) 有关球公切面的一些重要特征. 球公切面的主要性质是:

1. 两球的内公切面如果存在必通过两球的内位似心.

2. 不等的两球的外公切面如果存在,必通过两球的外位似心. 相等两球的外公切面如果存在,则它们中任何三个都不共点.

3. 三球的公切面必通过它们的一根位似轴,反之,通过位似轴的任何平面若与一球相切,必与其余两球相切.

4. 如果三球的一根位似轴与三球没有公共点,则三球有两个公切面通过这根位似轴.

如果四条位似轴与三球都没有公共点,则三球有八个公切面. 当这里的条件不满足时,公切面的个数减少,三球可能没有公切面.

两球的公切圆柱面(common tangent circular cylindrical surface of two spheres) 有关两球的一种特殊圆柱面. 指同时与两球相切的圆柱面. 两球只有半径相等时才有公切圆柱面.

两球的公切圆锥面(common tangent cone of two spheres) 有关不等二球面的一种特殊圆锥面. 过两球外部的一个位似中心的所有公切线构成的圆锥面. 两球可能无公切圆锥面,两球内含时就属这种情况. 如果不等的两球有外公切面,则与连心线共面的外公切线的轨迹为一外公切圆锥面. 相离两球有内公切面,与连心线共面的内公切线的轨迹为一内切圆锥面,两球公切圆锥面的轴过两球的中心.

当德兰球(Dandelin sphere) 与圆锥曲线有关的一种球面. 指用几何法求出圆锥曲线焦点的重要球面. 一个球面内切于一个圆锥并且与一个已知平面相切,该平面与圆锥交于一条圆锥曲线,则球面与平面的切点是圆锥曲线的焦点,球面与圆锥相切的圆所在平面与已知平面的交线是圆锥曲线的准线. 这球被称为当德兰球. 若已知平面与圆锥的交线为抛物线时,则当德兰球有且仅有一个;若交线为椭圆或双曲线,则当德兰球有且仅有两个. 图 1 中,球 O 内切于圆锥面 V,并和已知平面相切于点 F,这时已知平面和圆锥面 V 的交线是抛物线,切点 F 是抛物线的焦点,在这种情况下当德兰球只有一个. 图 2 中球 O 和 O_1 内切于圆锥面 V,球 O 和已知平面相切于 F_2,球 O_1 和已知平面相切于 F_1,这时已知平面和圆锥面 V 的交线是椭圆,切点 F_2 和 F_1 是椭圆的两个焦点,在这种情况下当德兰球有两个,即球 O 和 O_1. 图 3 中,球 O 和 O_1 分别内切于圆锥面 V 的两

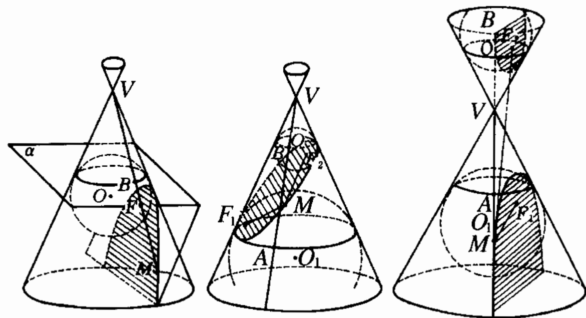


图 1　　图 2　　图 3

叶，且球 O 切已知平面于 F_2，球 O_1 在圆锥面 V 的另一叶内切已知平面于 F_1，这时已知平面和圆锥 V 的两叶相交，交线是双曲线，切点 F_2 和 F_1 是双曲线的焦点，此时当德兰球为两个，即球 O 和 O_1. 当德兰(Dandelin, G. P.)出生于法国巴黎，是比利时科学院院士，他于 1822 年首次提出并证明了上述命题.

两球的位似对应(homothetic correspondence of two sphere) 使两球(面)相关的一种映射. 指两球的一种特殊的相似对应(参见“两球的相似对应”和本卷《平面几何》中的“位似形”). 当两球同心时，外位似心与内位似心都是两球的公共中心. 当两球不同心时，有惟一的内位似心，且在两球的连心线上. 如果两球半径不等，一定有惟一的外位似心，在两球连心线的延长线上，且在半径较小球的一侧，两球半径相等时无外位似心.

两球的位似中心(homothetic center of two spheres) 两球外位似心与内位似心的统称. 见“两球的位似对应”.

两球的相似对应(similar correspondence of two spheres) 两球之间的一种对应关系. 指把其中一个球变成另一个球的相似变换决定的两球的点之间的对应. 相似变换是位似变换时的相似对应是位似对应. 位似对应的对应点的连线在两球相等时平行于连心线，在两球不等时通过连心线的同一个点，因此两球的位似对应是惟一的. 两球间的相似变换可以看做把一个球变成另一个球的位似变换和把第二个球的位似对应点变到相似对应点的合同变换的乘积. 因为把一个球的点变到同一个球的点的合同变换有无限多个(例如绕球的一条直径的旋转就有无限多个)，所以相似变换和由它决定的相似对应有无限多个.

三球的位似轴(homothetic axis of three spheres) 刻画三球位置关系的一组直线. 在互不相等且球心不共线的三球中，每次取其中两球所得的六位似中心(外位似心和内位似心)，分布在四条直线上，且每条直线上有三个，这四条直线都称为三球的位似轴. 这四条位似轴就是三球心确定的平面截三球所得三个大圆的四条位似轴. 位似轴上外位似心的个数必为奇数.

四球的位似面(homothetic plane of four spheres) 刻画四球位置关系的一组平面. 在互不相等且球心不共面的四球之中，每次取其两球的位似中心，这样所得的十二个位似中心分处于八个平面内，并且每一平面内有六点，这八个平面都称为四球的位似面.

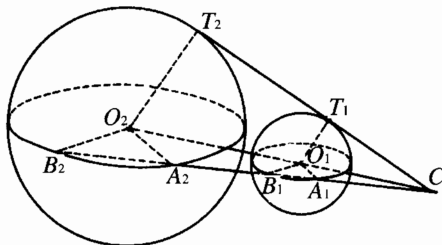
两球的反位似点(inverse homothetic point of two spheres) 刻画两球位置关系的特殊点. 设 φ 是两球的位似对应，C 为位似心. 若 C, A_1, A_2, B_1, B_2 共线，A_1 与 B_1 在第一个球上，A_2 与 B_2 在第二个球上，且 $\varphi: A_1 \to A_2, B_1 \to B_2$ 是位似对应，则 $\varphi': A_1 \to B_2, B_1 \to A_2$ 是 φ 的反位似对应. B_2 称为 A_1 的反位似点. 同样 A_2 也称为 B_1 的反位似点，当 φ 为外位似对应时，C 为外位似心，B_2 称为 A_1 的外反位似点. 当 φ 为内位似对应时，C 为内位似心，B_2 称为 A_1 的内反位似点. 过位似中心 C 作两球的公切线，如切点分别为 T_1 与 T_2，则 T_2 既是 T_1 的位似对应点，也是 T_1 的反位似对应点.

外反位似点(external inverse homothetic point) 见“两球的反位似点”.

内反位似点(internal inverse homothetic point) 见“两球的反位似点”.

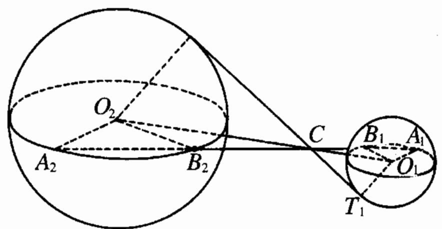
两球的外公幂(external common power of two spheres) 刻画两球位置关系的一个常数. 由两球的外位似心，到两球上关于该位似中心的任意两个反位似点的距离之积恒为一常数，此常数称为两球的外公幂. 图中二球 O_1, O_2 的外公幂为

$$k = CT_1 \cdot CT_2 = CA_1 \cdot CB_2 = CB_1 \cdot CA_2.$$



两球的内公幂(internal common power of two spheres) 刻画两球位置关系的一个常数. 由两球的内位似心，到两球上关于该位似中心的任意两个反位似点的距离之积恒为一常数，此常数称为两球的内公幂. 图中二球 O_1, O_2 的内公幂为

$$k' = CT_1 \cdot CT_2 = CA_1 \cdot CB_2 = CA_2 \cdot CB_2.$$



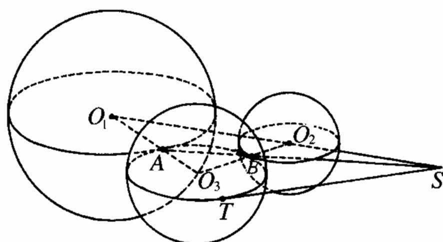
两球的公幂(common power of two spheres) 两球的外公幂和内公幂的统称.

三球相切的特征(contact characteristic of three spheres) 对三球位置关系的一种刻画. 三球相切的特征是：

1. 两定球与同一球相切时，两切点是两定球的反位似点；若同时为外切或同时为内切，则两切点关于外位似心反位似；若一外切一内切，则两切点关于内位似心反位似.

2. 两球的外位似心关于所有与两球同时外切或同时内切的球的幂,都等于两球的外公幂.

3. 两球的内位似心关于所有与两球一外切、一内切的球的幂,都等于两球的内公幂.



4. 一球通过两定球上的一对反位似点,若与两定球之一相切,则必与另一球相切. 图中球 O_3 与两定球 O_1 与 O_2 同时外切,切点分别为 A,B,O_1 与 O_2 外位似心为 S,ST 为球 O_3 的切线,S 对球 O_3 的幂 $ST^2=SA\cdot SB$ 是 S 关于二球 O_1 与 O_2 的外公幂,A 与 B 是一对反位似点.

球束(bouquet) 立体几何的基本概念之一. 指有某种共同属性的球的集合. 例如,同心球束、等幂球束、等半径球束等.

等幂球束(equal power pencil of spheres) 一种常见的球束. 指具有同一个等幂面的所有球的集合. 共同的平面称为球束的等幂面. 等幂球束中的所有球心共线,此直线称为球束的连心线. 按球束中的球与等幂面相交、相切、相离可把等幂球束分为椭圆型球束、抛物型球束、双曲型球束三类.

球束的等幂面(equal power plane of a pencil of spheres) 见"等幂球束". 从等幂面上的点作球束中各球的切线(如果可以的话),切线长相等.

球束的连心线(connecting line of a pencil of spheres) 见"等幂球束".

椭圆型球束(elliptic pencil of spheres) 一种特殊的球束. 即各球与等幂面相交的球束. 椭圆型球束中各球与等幂面交于同一圆周,且过此圆周的任何球都在该球束中. 椭圆型球束中无点球. 空间中任何一个平面与该平面上的一个圆可确定一个椭圆型球束,它以此平面为等幂面,且束中各球在已知圆处相交.

抛物型球束(parabolic bouquet) 一种特殊的球束. 即各球与等幂面相切的球束. 抛物型球束各球与等幂面切于同一点,且在此点与等幂面相切的球都在该球束之中. 抛物型球束中有惟一的点球,它就是球与等幂面的切点. 空间中任何一个平面与此平面上的一点确定一个抛物型球束,它以此平面为等幂面,且束中各球在已知点处与平面相切.

双曲型球束(hyperbolic bouquet) 一种特殊的球束. 即各球均与等幂面相离的球束. 双曲型球束中各球均不相交,且有两个点球在等幂面的两侧. 空间中任何一个平面与不在平面上的关于平面对称的两点确定一个双曲型球束,它以该平面为等幂面,且以两已知点为极限点.

双曲型球束的极限点(limit point of a hyperbolic pencil of spheres) 与双曲型球束有关的两点. 双曲型球束中有且仅有的两个点球(两点),称为该球束的极限点,或彭赛列极限点. 双曲型球束的两个极限点分居等幂面两侧,且关于等幂面对称,每一个极限点在与其同侧的球束中的所有球体的内部.

彭赛列极限点(Poncelet limit point) 配极理论中的一个重要概念. 即双曲型球束的极限点. 在几何学中关于极限点这个概念起源于阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P)),后来德萨格(Desargues,G.)等人也有过研究. 但是彭赛列(Poncelet,J.-V.)在这方面的研究有特殊的贡献,他给出了极限点与极线之间的变换的一般表示法,并在《论图形的射影性质》以及 1824 年提交巴黎科学院的《论配极的一般理论》中用作论证许多定理的工具. 为了纪念他在这个问题的研究中的独特成就,后来将双曲型球束的极限点以他的名字来命名.

椭圆型球束的判定(decision of a elliptic pencil of spheres) 判定椭圆型球束的一种方法. 判定等幂球束是椭圆型球束的条件是:有一个球与等幂面相交或不含点球.

抛物型球束的判定(decision of a parabolic pencil of spheres) 判定抛物型球束的一种方法. 判定等幂球束是抛物型球束的条件是:有一个球与等幂面相切或它是抛物型等幂球束恰有一个点球.

双曲型球束的判定(decision of a hyperbolic pencil of spheres) 判定双曲型球束的一种方法. 判定等幂球束是双曲型球束的条件是:有一个球与等幂面相离或有两个极限点(点球)的等幂球.

球体(sphere) 简称球. 一种重要的几何体. 球面所围成的封闭几何体(或半圆绕其两端所决定的直径旋转而产生的几何体)称为球体. 球面的中心称为球体的球心. 球面的半径与直径分别称为球体的半径与直径. 球体常用球心 O 的字母来表示,记为球 O. 中国古算书上曾把球体称为立圆. 半径为 R 的球体的体积:$V=4\pi R^3/3$. 表面积为:$S=4\pi R^2$.

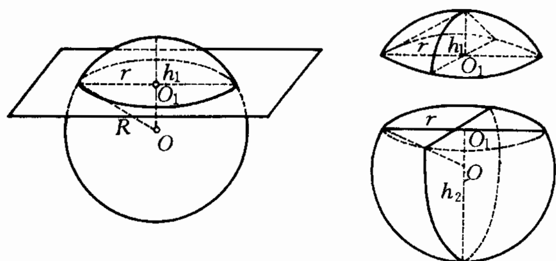
球(sphere) 球体的简称.

立圆(li yuan) 中国古称. 见"球体".

点球(point sphere) 一种特殊球. 即把一点看成是以此点为球心,半径为零的球.

球缺(spherical segment) 亦称球锥、球分,或称截球体、单底球台. 一种与球有关的几何体. 球被一个平面所截得的两个几何体都是球缺. 平面截球所得的截面圆称为球缺的底,垂直于截面的球的直径被截得的两线段是相应球缺的高线,其长度称为

球缺的高. 半径为 R 的球缺，若底面半径为 r，高为



球与它的球缺

h，则 $(R-h)^2+r^2=R^2$. 球缺的体积计算公式为：

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2).$$

球锥(spherical cone)　即“球缺”.

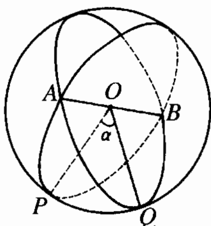
球分(segment of a sphere)　即“球缺”.

截球体(truncated sphere)　即“球缺”.

球缺的底(base of spherical segment)　见“球缺”.

球缺的高(height of spherical segment)　见“球缺”.

球楔(spherical wedge)　亦称球劈. 一种与球有关的几何体. 用球的两个大圆面把球分成四部分，每一部分都称为球楔. 一个球楔的表面由两个半圆和一部分球面组成，球面部分称为球楔的底面，是球面二角形. 两半圆面所夹的二面角称为球楔的角. 当球半径为 R，球楔的角为 α 弧度时，球楔的底面积 $S=2\alpha R^2$，体积 $V=2\alpha R^3/3$，该球楔的角为 2α 球面度 $=\alpha/2\pi$ 球面角(1 球面角 $=4\pi$ 球面度).



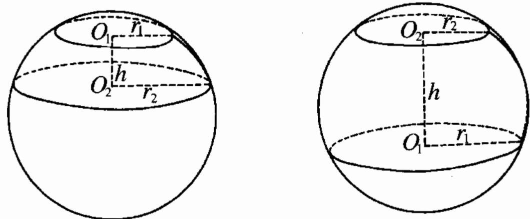
球劈(spherical wedge)　即“球楔”.

球楔的底面(base of a spherical wedge)　见“球楔”.

球楔的角(angle of a spherical wedge)　见“球楔”.

半球(semi-sphere)　一种特殊的球缺. 一个球体被通过球心的任何一个平面分成的两个几何体. 半球是一个高为球半径的球缺.

球台(spherical frustum)　一种与球有关的几



何体. 球被两个平行平面所截，夹在两个截面之间的封闭几何体. 平面截球所得的两个截面圆称为球台的底，两个平行平面之间的距离称为球台的高. 两底面间的球面部分称为球台的侧面，它是一个球带. 半径为 R 的球的球台，如果上底半径为 r_1，下底半径为 r_2，高为 h，则按底面在球心两侧或同侧面有如下两个关系式：

$$h=\begin{cases}\sqrt{R^2-r_1^2}+\sqrt{R^2-r_2^2},\\ \left|\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r_2^2}\right|.\end{cases}$$

球台的体积为 $V=\pi h[3(r_1^2+r_2^2)+h^2]/6$.

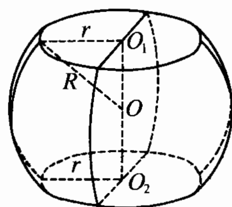
球台的底(base of a spherical frustum)　见“球台”.

球台的高(height of a spherical frustum)　见“球台”.

球台的侧面(lateral of a spherical frustum)　见“球台”.

单底球台(spherical segment)　即“球缺”.

腰台(middle spherical frustum)　亦称鼓形体. 一种与球有关的几何体. 它是上下底相等的球台. 即用两平行平面截球，且两平面间距离小于球直径，并与球心取等距，所截得的夹于两平面间的封闭几何体称为腰台. 两平面间的距离称为腰台的高，截口圆分别称为腰台的上、下底. 半径为 R 的球的腰台，如底半径为 r，则腰台的高



$$h=2\sqrt{R^2-r^2},$$

腰台的体积

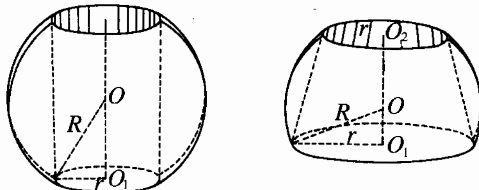
$$V=\frac{1}{6}\pi h(6r^2+h^2).$$

鼓形体(drum solid)　即“腰台”.

腰台的高(height of middle spherical frustum)　见“腰台”.

腰台的底(base of middle spherical frustum)　见“腰台”.

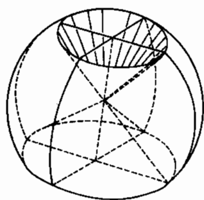
球环(spherical ring)　一种特殊的球台. 平面上一小于半圆的弓形绕不穿过它的直径旋转一周所

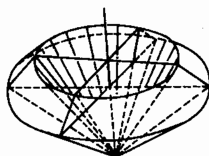


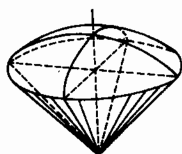
生成的几何体. 也可以将球环看成是从球台内截去一个与球台共底的圆台或圆柱而成的几何体.

球扇形(spherical sector)　亦称球心角体. 一种与球有关的几何体. 它是球的一部分. 一个顶点在

球心的旋转圆锥面把球体截成两部分，每一部分都称为球扇形. 用两个顶点在球心，共轴而不相等的旋转圆锥面把球体截成三部分，每一部分也称为球扇形. 将一个不足半圆的圆扇形，绕一条在扇形平面上的过圆心而不穿过扇形内部的直线旋转，也可生成球扇形. 扇形圆弧旋转所得到的球冠或球带称为球扇形的底面. 这个球冠或球带的高称为球扇形的高. 扇面的半径旋转生成的圆锥侧面称为球扇形的侧面. 当旋转轴与扇形有一直边重合时，生成的球扇形称为简单球扇形，亦称球面圆锥. 否则称为中空球扇形.







球心角体(spherical sector) 即“球扇形”.

球扇形的底面(base of a spherical sector) 见“球扇形”.

球扇形的高(height of a spherical sector) 见“球扇形”.

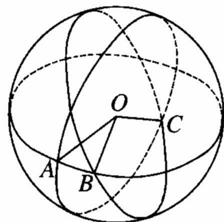
球扇形的侧面(lateral of a spherical sector) 见“球扇形”.

简单球扇形(simple spherical sector) 见“球扇形”.

球面圆锥(spherical circular cone) 即“简单球扇形”.

中空球扇形(hollow spherical sector) 见“球扇形”.

球面棱锥(spherical pyramid) 亦称球角锥. 一种与球有关的几何体. 顶点在球心的棱锥面的一叶在球体上截下的部分. 球面被截下的部分称为球面棱锥的底面. 球心称为球面棱锥的顶点. 棱锥面在球内的部分称为球面棱锥的侧面. 棱锥的棱在球体内的部分称为球面棱锥的侧棱. 显然，侧棱是球体的半径. 侧面是球体的大圆扇形. 底面为球面多边形，它是由若干个大圆弧围成的球面封闭图形. 半径为 R 的球的球面棱锥的顶角如果是 α 球面度，则它的体积是 $V=\alpha R^3/3$；底面积是 $S=\alpha R^2$.



球角锥(spherical pyramid) 即“球面棱锥”.

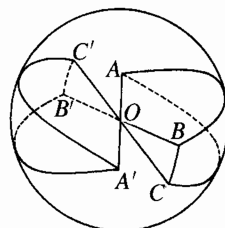
球面棱锥的底面(base of a spherical pyramid) 见“球面棱锥”.

球面棱锥的顶点(vertex of a spherical pyramid) 见“球面棱锥”.

球面棱锥的侧面(lateral of a spherical pyramid) 见“球面棱锥”.

球面棱锥的侧棱(lateral edge of a spherical pyramid) 见“球面棱锥”.

对称球面棱锥(symmetric spherical pyramid) 有关球面的一种特殊的几何体. 即分别以两个对称球面多边形为底的两个球面棱锥，互为对称球面棱锥. 图中是一个对顶球面三棱锥 $ABC\text{-}D\text{-}A'B'C'$.



空间作图的费马问题(Fermat problem of space construction) 一个有关四球的作图题. 指作图问题：求作一球使它切于四定球. 此题至多有 16 解.

阿基米德问题(Archimedean problem) 一个有名的作图不能问题. 指作图问题：求作一个平面，使它平行于半球底面且分半球为两个等积体. 在有限次运用欧几里得几何作图公法的规则下，此题不可能解.

变 换

空间旋转变换(rotation transformation in space) 一种特殊的几何变换. 指空间的所有点绕同一直线旋转同一角度的变换(参见本卷《高等几何》中的“旋转变换”).

空间半周旋转(half-cycle rotation in space) 见本卷《高等几何》中的“轴反射变换”.

空间轴反射变换(axial reflection transformation in space) 一种特殊的几何变换. 空间任一点变为关于同一直线的对称点的变换(参见本卷《高等几何》中的“轴反射变换”).

幺变换(identical transformation) 亦称恒等变换. 一种特殊的变换. 即使空间所有的点保持不变的变换.

螺旋运动(helicoidal motion) 一种空间变换. 指空间中一个旋转和一个移动方向与旋转轴平行的平移变换之积. 旋转的轴也称为**螺旋运动的轴**，旋转的角也称**螺旋运动的角**. 螺旋运动是一种空间运动，其逆变换仍是螺旋运动. 两螺旋运动的积是一个螺旋运动. 任意一个螺旋运动可以分解为两个轴反射之积，这两个轴反射的反射轴是异面直线. 空间的螺旋运动分两类. 若用弯曲的右手指表示构成螺旋运动的“旋转”方向时，伸直的拇指恰表示构成螺旋运动的“移动”方向，则称该螺旋运动是**右螺旋运动**. 否则称为**左螺旋运动**. 平移是旋转角为零的螺旋运动，

旋转是平移距离为零的螺旋运动.当螺旋运动不是平移或旋转时,没有不动点,而轴是惟一的不动线.又假如螺旋运动的角不等于 $k\pi(k\in\mathbb{Z})$,则它也没有不动面.

螺旋运动的轴(axis of a helicoidal motion) 见"螺旋运动".

螺旋运动的角(angle of a helicoidal motion) 见"螺旋运动".

右螺旋运动(right helicoidal motion) 见"螺旋运动".

左螺旋运动(left helicoidal motion) 见"螺旋运动".

变换的不动点(fixed point of transformation) 亦称变换的二重点.变换的基本概念之一.如果 f 是一个变换,A 是一点,且 $f(A)=A$,则称 A 为 f 的一个不动点.

变换的二重点(double points of transformation) 即"变换的不动点".

变换的不动线(fixed line of transformation) 亦称变换的二重线.变换的基本概念之一.如果 f 是一个变换,l 是一条直线,对于任一点 $A\in l$ 总有 $f(A)\in l$,则称 l 为变换 f 的不动线.f 的不动线上可能有 f 的不动点,也可能没有 f 的不动点.

变换的二重线(double lines of transformation) 即"变换的不动线".

空间变换的不动面(fixed plane of space transformation) 亦称空间变换的二重面.变换的基本概念之一.如 α 是空间中的一个平面,f 是空间的一个变换,对于任一点 $A\in\alpha$,总有 $f(A)\in\alpha$,则称 α 是 f 的一个不动面.f 的二重面上可能有二重线也可能没有不动线,可能有二重点也可能没有不动点.

空间变换的二重面(double plane of space transformation) 即"空间变换的不动面".

合同变换的二重几何元素(double geometric element of congruent tansformation) 合同变换的不变元素.指点、直线与平面如果在某合同变换 f 下保持不变,则分别称为 f 的二重点、二重线与二重面,也称为 f 的不动点、不动线与不动面,它们都是 f 的二重几何元素.一般地,如果 E 是一个几何图形,$f(E)=E$,则 E 称为合同变换 f 的二重几何图形.当 E 是 f 的二重几何图形时,f 是 E 的一个自同构,f 也是 E 的自对称变换.关于合同变换的二重几何元素,有下列结论:

1. 幺变换以任何点、直线与平面为二重点、二重线与二重面.

2. 平移如果不是幺变换,则没有二重点,每条平行于平移方向的直线,每个平行于平移方向的平面都是二重线、二重面.

3. 对任何旋转变换 $r(a,\theta)$,转轴 a 是二重线且上面的每一点都是二重点,每个垂直于转轴的面都是二重面.如 $r(a,\theta)$ 不是幺变换($\theta\neq 2k\pi,k\in\mathbb{Z}$),当它也不是轴对称变换($\theta\neq(2k+1)\pi,k\in\mathbb{Z}$)时,没有其他的二重几何元素;当它是轴对称变换时,与轴 a 垂直相交的直线都是二重直线,过轴 a 的任何平面和垂直于 a 的任何平面都是二重平面.

4. 螺旋运动如果不是平移或旋转,则无二重点,但它的轴是二重直线.又当旋转角 $\theta=(2k+1)\pi$,$k\in\mathbb{Z}$ 时,过轴的平面都是二重平面,否则无二重平面.

5. 面反射以反射面上的点为二重点,以反射面上的直线和垂直于反射面的直线为二重线,以反射面和垂直于反射面的平面为二重面.

6. 中心对称以反射心为二重点,过反射心的直线与平面为二重线与二重面.

空间旋转反射(rotation reflection in space) 一种空间变换.如果 $f_1=\omega(a,\varphi)$ 是空间的一个旋转角为 φ 的旋转变换,a 为旋转轴,f_2 是空间的一个面反射变换,反射面为 α,当 $a\perp\alpha$ 时,变换积 $f_2\cdot f_1$ 称为空间的旋转反射变换;并且直线 a 称为旋转反射轴,α 称为旋转反射面,a 和 α 的交点 O 称为旋转反射心,φ 称为旋转反射角.空间中三个面反射的积,当三个反射面恰有一个公共点时,就可以化为一个旋转反射,其公共点就是旋转反射心.旋转反射属于第二种合同变换.空间点反射是旋转角为二直角时的旋转反射.空间面反射是旋转角为零的旋转反射.

旋转反射轴(rotation reflection axis) 见"旋转反射".

旋转反射面(rotation reflection plane) 见"旋转反射".

旋转反射心(rotation reflection center) 见"旋转反射".

旋转反射角(rotation reflection angle) 见"旋转反射".

空间滑行反射(sliding reflection in space) 一种空间变换.平行于平面 α 的空间平移与以 α 作反射面的平面反射之积,称为空间滑行反射.平面 α 称为滑行反射面.滑行反射面平分连结每双对应点间的线段.空间滑行反射属于第二种合同变换.

滑行反射面(sliding reflection plane) 见"空间滑行反射".

平行于平面的合同变换(congruent transformation parallel to a plane) 一种合同变换.若 f 是空间的合同变换,且每双对应点的连线与一个固定的平面平行,则称 f 为一个平行于该固定平面的合同变换.如果有限个平面反射的反射面同时垂直于一固定平面,则它们的积是一个平行于固定平面的合同变

换.反之每个平行于固定平面的合同变换都可以分解为平面反射之积,使积因子数不超过三.平行于平面的第一种合同变换是幺变换、平移或旋转.平行于平面的第二种合同变换是滑行反射或反射.

空间合同变换的积(product of congruent transformations in space)　空间合同变换的重要特征之一.空间的两个合同变换的积也是空间的合同变换.关于空间合同变换的积有下列主要结论:

1.运动变换之积是运动变换,特别地:

1)平移的积是平移.

2)轴相同的两个旋转的积是旋转.

3)两个轴反射变换的积,当两轴相同时是幺变换,当两轴平行时是一个平移,当两轴相交时是一个旋转,当两轴异面时是一个螺旋运动.

4)两个螺旋运动之积是一个螺旋运动.

2.两个平面反射之积是一个运动,如果反射面相同,则是幺变换;如果反射面平行,则是平移;如果反射面相交,则是一个旋转.

3.两中心反射的积是一个平移.特别地,当两中心相同时是幺变换.

4.若轴 a 垂直于平面 α,垂足为 O,那么关于 O 的中心反射、关于 α 的平面反射、关于轴 a 的轴反射这三个变换中,任意两个的积是第三种反射变换.

空间合同变换的分解(decomposition of congruent transformations in space)　空间合同变换的重要特征之一.空间中任何合同变换都可以分解为若干平面反射之积,而且积中因子可以不超过四个.如果合同变换能表成偶数个平面反射之积,则是一个运动变换.如果合同变换能表成奇数个平面反射之积,则是一个第二种合同变换.具体地:

1.幺变换是任何一个平面反射与自身的积.

2.平移是两个反射面平行且垂直于平移方向的平面反射之积,两反射面的距离是平移距离的一半.

3.旋转是两个反射面相交于旋转轴的平面反射之积,两反射面的夹角是旋转角的一半,轴反射是半周旋转,可分解为反射面相交于对称轴且互相垂直的两个平面反射之积.

4.螺旋运动是旋转与平移的积,因而可分解为四个平面反射之积,其中两个表示旋转,两个表示平移.

5.旋转反射是旋转与平面反射之积,因而可分解为三个平面反射之积,其中两个之积表示旋转.

6.滑行反射是平移与平面反射之积,因而可分解为三个平面反射之积,其中有两个之积表示平移.

空间合同变换的关系(relation of congruent transformation in space)　空间合同变换的主要特征.空间合同变换的基本关系是:

1.每个合同变换都可以分解为平面反射的积,并且可以使积中因子数不超过四.

2.每个第二种合同变换都可以是一个平面反射或三个平面反射的积.

3.每个第二种合同变换,如果不是平面反射,则必是旋转反射或滑行反射.

4.每个第一种合同变换,如果不是平移也不是旋转,则必是螺旋运动(平移与旋转之积).

图形的全等(congruence of figures)　图形间的一种等价关系.指经过合同变换互相重合的图形间的关系(参见本卷《平面几何》同名条).

本质相等的图形(essential equal figures)　一种全等形.即正向全等形.指经过第一种合同变换重合的图形(参见本卷《平面几何》中的"图形的全等").

镜像相等的图形(mirror equal figures)　一种全等形.即镜像全等形(参见本卷《平面几何》中的"图形的全等").

四面体相等的判定定理(decision theorem of equality of tetrahedrons)　判定两个四面体相等的条件.若一个四面体的两个面及其所夹二面角,与另一个四面体的两个面及其所夹二面角对应相等,并且由一顶点出发的三棱所对应相等的三棱也从同一顶点出发,则两四面体相等.

多面体相等的性质(equality of polyhedrons)　保证多面体相等的一些条件.即若两个多面体之间存在着某个合同变换,使一个多面体能重合于另一个多面体(参见本卷《平面几何》中的"图形的全等").多面体的相等亦可以由下列条件确定:

1.对应的棱相等.

2.对应的面相等.

3.对应的多面角相等.

两个相等的多面体至多通过四次面反射便可将一个变为另一个.

两空间图形关于直线对称(two space figures symmetric with respect to a line)　两空间图形的一种对称关系.关于直线对称即轴对称(参见本卷《平面几何》中的"轴对称").

两空间图形的对称轴(symmetric axis of two space figures)　见本卷《平面几何》中的"轴对称".

两空间图形关于点对称(two space figures symmetric with respect to a point)　两空间图形具有的一种对称关系.若两空间图形的点成一一对应,每对对应点连结线段经过一定点,且被此定点所平分,则称此两图形关于这个定点对称.该定点称为它们的对称中心.

两空间图形的对称点(symmetric points of two space figures)　见"两空间图形关于点对称".

两空间图形关于平面对称(two figures sym-

metric with respect to a plane） 两空间图形的一种对称关系. 若两空间图形的点成一一对应，且每对对应点是关于一平面的镜面反射的对应点，则称这两个图形关于该平面对称. 这个平面称为它们的对称面. 两空间图形成平面对称又称为成镜面对称，其中一个图形是另一个图形的镜面像图形.

两空间图形的对称面（symmetric plane of two space figures） 见“两空间图形关于平面对称”.

空间图形的自对称变换（self-symmetry transformation of a space figure） 一种特殊的对称变换. 假如存在一个非恒等变换的空间合同变换把空间图形 F 变成它自己，则说 F 是自对称图形，并称该合同变换是 F 的一个自对称变换. 一个空间图形可以有各种不同的自对称变换，如圆柱面绕圆柱轴的旋转，沿轴向的平移与螺旋运动，沿轴的滑行反射，绕轴的旋转反射，关于轴截面的面对称，关于轴上点的中心对称，关于轴的轴对称等都是它的自对称变换. 但是假如一个图形处在空间的有限区域里，必不能以平移、滑行反射、螺旋运动为自对称变换.

空间图形自对称变换的阶（order of self-symmetry transformation of a space figure） 一个与自对称变换有关的数量. 若 f 是空间图形 F 的自对称变换，使 f^n 成为幺变换的最小自然数 n 存在，则 n 称为 f 的阶. 自对称变换的阶最小是 2. 面反射，线反射，点反射的阶都是 2. 一个自对称变换可能没有阶，例如，圆柱面的沿轴平移变换就没有阶.

轴对称图形（figure symmetric with respect to a straight line） 一种对称图形. 若一个空间图形上的任意点关于同一条直线（对称轴）的对称点仍属于该图形，则它称为轴对称图形. 例如球和正多面体都是轴对称图形（参见本卷《平面几何》同名条）.

图形的对称轴（symmetric axis of a figure） 见“轴对称图形”.

中心对称图形（central symmetric figure） 一种对称图形. 若空间图形上的点关于某定点的对称点仍在同一图形上，则称它为中心对称图形（参见本卷《平面几何》同名条），该定点称为图形的对称中心.

图形的对称中心（symmetric centre of a figure） 见“中心对称图形”.

面对称空间图形（space figure symmetric with respect to a plane） 一种特殊的图形. 空间图形以一个镜面反射变换为其自对称变换的图形. 镜面反射变换的反射面称为图形的对称面. 面对称空间图形可以不只一个对称面. 面对称空间图形上任何一点关于对称面的对称点都在本图形上，且任何一双对称点的连线段被对称面垂直平分.

空间图形的对称面（symmetric plane of a space figure） 见“面对称空间图形”.

空间图形的 n 阶对称轴（n-order symmetric axis of a space figure） 空间图形在特定条件下的旋转轴. 设 $r(a,\theta)$ 表示旋转轴 a 和旋转角 θ 的旋转变换，如果 $r(a,\theta)$ 是图形 F 的自对称变换，并且 $\theta=2\pi/n(n\in\mathrm{N},n\geqslant 2)$ 是使 $r(a,\theta)$ 成为 F 的自对称变换的最小正角，则 $r(a,\theta)$ 称为图形 F 的 n 阶旋转对称变换，a 称为 F 的 n 阶对称轴. 正 n 棱柱、正 n 棱锥的轴都是 n 阶对称轴，而圆柱的对称轴不能确定阶数或说没有阶数，有二阶对称轴的图形是轴对称图形，轴对称图形的对称轴的阶数$\geqslant 2$ 或没有阶数.

空间图形的 n 阶反射轴（n-order reflected axis of a space figure） 空间图形在特定条件下的旋转反射轴. 如果以 a 为轴，α 为反射面的旋转反射变换是图形 F 的自对称变换，其旋转反射角为 $\theta=2\pi/n$ $(n\in\mathrm{N},n\geqslant 2)$，并且 $2\pi/n$ 是使这个旋转反射变换成为 F 的自对称变换的最小正角，则此旋转反射变换称为 F 的 n 阶反射对称变换，轴 a 称为 F 的 n 阶反射轴. 正 n 棱柱的轴既是 n 阶对称轴又是 n 阶反射轴. 圆柱的轴也是无法定阶的旋转反射轴. $2n$ 阶反射轴同时也是对称轴，其阶数是 n 或 $2n$.

空间图形的对称元素（symmetric elements on a space figure） 空间图形的对称面、n 阶对称轴、n 阶反射轴和对称中心的统称.

平行六面体的对称元素（symmetric elements of a parallelepiped） 对平行六面体有关元素对称性的一种刻画. 当平行六面体是直四棱柱时，它的对称元素分述如下：

1. 底面是平行四边形，但不是菱形时，连结两底中心的直线是惟一的二阶对称轴；与两底等距的面是惟一的对称面；对称轴与对称面的交点是它惟一的对称中心.

2. 底面是菱形而不是正方形时，两对侧棱的中点连线、底面中心连线等是两两垂直的三条二阶对称轴；每两条对称轴确定的平面都是对称面，共有三个两两垂直的对称面；三对称面的交点是对称中心.

3. 底面是长方形，但没有正方形面时，连结对面中心的线是三根两两垂直的二阶对称轴；每两根对称轴确定的面是三个两两垂直的对称面；三对称面的交点是对称中心.

4. 底面是正方形而侧面不是正方形时，底面中心连线是四阶对称轴；两对侧面中心连线、两对棱中点连线是四根二阶对称轴；与三双对面距离相等的面及两对侧棱确定的面等五个面都是对称面；五个对称面的交点是对称中心.

5. 正方体，对面中心连线都是四阶对称轴；四根对角线都是六阶旋转反射对称轴，对棱中点连线都是二阶对称轴；正方体有九个对称面，其中六个各通

过两对角线,其他各与三双对面等距;对称面的交点是正方体的对称中心.

当平行六面体不是直棱柱时,它的对称元素分述如下:

1. 底面是菱形,侧面不是菱形且有一双对侧棱确定的平面垂直于底面时,这个对侧棱确定的面是平行六面体的对称面;另一双对侧棱的中点连线是一个二阶对称轴;对角线交点是对称中心.

2. 不是直棱柱的菱面体,它有一条对角线,两端都是菱面体的正三面角的顶点,这条对角线是菱面体的三阶对称轴,也是第六阶旋转反射轴;菱面体的三阶对称轴与不在此轴上的一个顶点确定的面都是对称面,从而菱面体有三个对称面;菱面体对角线的交点是对称中心.

不属于前面七种情况的平行六面体只有一个对称中心,它是平行六面体的对角线的交点.

四面体的对称元素(symmetric elements of a tetrahedron)　对四面体有关元素对称性的一种刻画. 四面体的对称元素可以从对它的外接平行六面体的对称元素的分析中得出如下结论(参见"平行六面体的对称元素"):

1. 若四面体的外接平行六面体的底面为菱形,有一双对侧棱确定的面垂直于底面,则四面体有一个对称面. 一般说来,没有别的对称元素.

2. 若四面体的外接平行六面体是以平行四边形为底的直棱柱,底不是菱形或矩形,则它只有一个二阶对称轴.

3. 若四面体的外接平行六面体是以菱形为底的直棱柱,底不是正方形,则它只有一个二阶对称轴和两个过此轴的对称面.

4. 若四面体的外接平行六面体是没有正方形面的长方体,则它有三个二阶对称轴;没有对称面.

5. 若四面体的外接平行六面体是正四棱柱,则它有一个二阶对称轴,即四阶旋转反射轴;它有两个二阶对称轴,但不是旋转反射轴;它有两个对称面.

6. 正三棱锥但不是正四面体时,有一个三阶对称轴,三个对称面.

7. 正四面体有四个三阶对称轴;有三个二阶对称轴,亦是三个四阶旋转反射轴;有六个对称面.

正多面体的对称性(symmetry of a regular polyhedron)　正多面体对称性的基本特征. 正多面体的对称性具有下列特点(文中的对称变换是指正多面体的自对称变换):

1. 存在惟一的对称变换,把正多面体的一面上相邻的三个顶点变成任意一面(包括本面)上相邻的三个顶点.

2. 恰有两个对称变换将正多面体一个指定的面角变成另一个指定的面角.

3. 正多面体的对称变换的集合,添入幺变换后,成为一个变换群. 群的阶数是正多面体的棱数的四倍(这个群称为正多面体的自对称群);正四面体有24个对称变换. 正六面体与正八面体有48个对称变换. 正二十面体与正十二面体有120个对称变换(均包括幺变换).

4. 两对偶正多面体有相同的对称元素.

五种正多面体的对称元素分述如下:

1. 正四面体的对称元素参见"四面体的对称元素".

2. 正方体和正八面体的对称元素参见"平行六面体的对称元素".

3. 正二十面体有下列对称元素:

1) 有一个对称中心,它是正二十面体外接球、内切球、切棱球的公共中心.

2) 过中心与对顶点有六条不同直线,它们都是五阶对称轴,也是十阶旋转反射轴.

3) 相对平行面的中心连线共有十根,它们都是三阶对称轴,也是六阶旋转反射轴.

4) 十五双相对且平行的对棱的中点连线都是二阶对称轴.

5) 通过中心且垂直于一条二阶对称轴的平面都是对称面. 这样的对称面共十五个.

4. 正十二面体是正二十面体的对偶正多面体,它们有相同的对称元素,只不过对称元素相对于多面体位置不同而已.

立方体的主对称面(principal symmetric plane of a cube)　亦称立方体的主平面. 一种与立方体有关的特殊平面. 即立方体的平行于面的对称面. 立方体除主对称面外,还有六个对称面,它们是通过立方体相平行的对棱所确定的平面.

立方体的主平面(principal plane of a cube)　即"立方体的主对称面".

达朗贝尔定理(d'Alembert theorem)　关于变换的著名定理. 该定理断言:每个有不动点的空间第一种合同变换是一个空间旋转.

沙勒定理(Chasles theorem)　关于变换的著名定理. 该定理断言:既非旋转也非平移的空间第一种合同变换是一个旋转与一个平移之积,且旋转轴平行于这平移的方向. 简言之,既非旋转又非平移的空间第一种合同变换(运动变换)是一个螺旋运动.

亚历山德罗夫定理(Aleksandrov theorem)　关于多面体的一个重要定理. 该定理断定:

1. 若两个多面体的面之间具有一一对应,每一双对应面的顶点法线同向平行,且任一面不能平行移置于其对应面的内部,则这两个多面体同向全等.

2. 若凸多面体的各面均有对称心,则该多面体必有对称心.

相似图形(similar figures)　图形之间的一种特殊关系.指图形上的点之间有一一对应,并且所有对应线段之比相同的两个空间图形(参见本卷《平面几何》中的“相似形”).

相似变换(similar transformation)　见本卷《高等几何》同名条.

图形的相似比(similar ratio of a figures)　一个确定的数值.指相似图形上对应线段长度之比(参见本卷《平面几何》中的“相似形”).

本质相似的图形(essential similar figures)　亦称直接相似的图形.一种相似图形.两个相似的空间图形,如果在它们内部的任意两个对应的四面体都是同向的(参见“同向四面体”),则称它们为本质相似的图形.两个本质相似的空间图形,可以经过一个第一种合同变换与一个外位似变换而重合(参见本卷《平面几何》中的“真正相似”).

直接相似的图形(directly similar figures)　即“本质相似的图形”.

镜像相似的图形(figures of mirror similar)　一种相似图形.相似但又不本质相似的空间图形(参见本卷《平面几何》中的“镜像相似”).

相似多面体(similar polyhedron)　相似多面体的几个充分条件.两多面体的相似可以用下列条件确定:

1. 面数相同且对应面相似,有相同的相似比.
2. 对应多面角相等.
3. 对应元素间有相同的结合关系(参见本卷《平面几何》中的“相似形”).

空间相似图形的性质(property of space similar figures)　空间相似图形的基本特性.空间相似图形的主要性质是:

1. 如空间图形 F 相似于空间图形 F',则存在相似变换 f,使 $f(F)=F'$.
2. 两相似图形上对应线段成比例.
3. 两相似图形上对应角、对应二面角、对应多面角相等.
4. 两相似图形上对应子图形相似.例如,对应三角形相似,对应多边形相似,对应子几何体相似等.
5. 两相似图形上的对应平面图形如果有面积,则其面积比为相似比的平方.
6. 两相似图形上的对应几何体如果有体积,则其体积比为相似比的立方.

位似变换(homothetic transformation)　见本卷《高等几何》同名条.

位似图形(homothetic figures)　见本卷《平面几何》中的“位似形”.其中的图形可以是空间图形.

配景相似的图形(perspective similar figures)　亦称位似图形.见本卷《平面几何》中的“位似形”.

位似多面体(homothetic polyhedron)　见本卷《平面几何》中的“位似形”.

位似变换的基本性质(fundamental property of homothetic transformation)　见本卷《高等几何》中的“位似变换”.

三空间图形的位似轴(homothetic axis of three space figures)　见本卷《平面几何》中的“位似轴”.

四空间图形的位似平面(homothetic plane of four space figures)　一种与四个两两位似的图形有关的平面.两两位似的四个空间图形的六个位似中心必共面,该平面称为它们的位似平面或相似平面.这六个位似中心构成一个完全四线形,它的边便是每次取三个图形所得的位似轴.

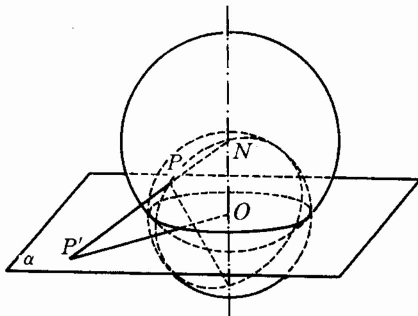
反演变换(inversion transformation)　见本卷《平面几何》同名条.

点关于球的反演点(inversion point of a point with respect to a sphere)　见本卷《平面几何》中的“双曲型反演变换”.

双曲型反演(hyperbolic inversion)　见本卷《平面几何》中的“双曲型反演变换”.

反演球(inversion sphere)　见本卷《平面几何》中的“双曲型反演变换”.

球极投影(stereographic projection)　球面到平面的一种映射.取球面上一点 N 为极,过球心 O 且与 ON 垂直的平面 α 作为投影平面.过球面上的任意一点 P 和极 N 的直线与投影平面 α 的交点为 P',则点 P 到点 P' 的映射称为球极投影.球极投影是一种特殊的双曲型反演,反演的极是投影中心



N,当球的半径为 r 时,反演球半径为 $\sqrt{2}r$.如图所示,N 是球极投影中心,球面 O 被映射为平面 α,点 P 与 P',S 与 O 都是球极投影的对应点,而

$$NP \cdot NP' = NS \cdot NO = 2r^2.$$

反演球是以 N 为中心,$\sqrt{2}r$ 为半径的球.球极投影除具有反演的保角性外,尚有下列性质:球面上不过投影中心的圆与投影平面上一个圆相对应;过投影中心的圆与投影平面上一条直线相对应.

空间图形的反演图形(inversion figure of space figure)　亦称空间图形的双曲型反演图形.两个有

特殊关系的空间图形.即两个空间图形,如果存在一个球,使一个图形是另一个图形的反演像,则称这个图形是另一个图形关于此球的反演图形,简称反形.由于反演变换是自逆变换,所以这两图形互为反演图形.空间中,球面或平面的反演图形是球面或平面:

1. 过反演极的球面的反演图形是平面,它平行于球面在反演极处的切面.图1中平面 α 是球面 O_2 关于反演球 O 的反演图形,α 平行于球 O_2 在 O 点处的切面.

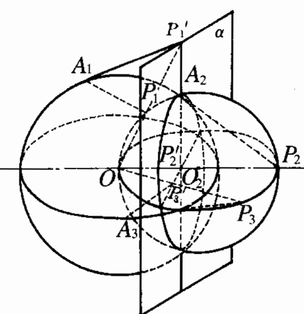


图 1

2. 过反演极的平面的反演图形是平面自身.

3. 不过反演极的球面的反演图形是不过反演极的球面,反演极是这两个球面的外位似中心.图2中,球面 O_1 与 O_2 是关于球 O 的互为反演像的两个图形,它们是以 O 为外位似中心的相似球.

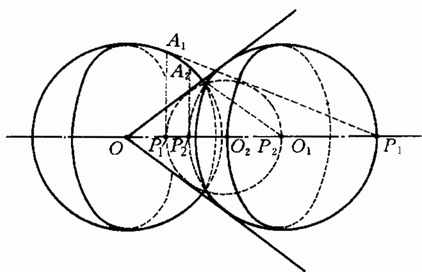


图 2

4. 不过反演极的平面的反演图形是过反演极的球面,它在反演极处的切面平行于原象平面.图1中,平面 α 关于球 O 的反演图形为球 O_2.球 O_2 在 O 点处的切面平行于 α.

空间图形的双曲型反演图形(hyperbolic inversion figure of space figure)　即"空间图形的反演图形".

反演的不变性(invariance of inversion)　有关反演变换的一种重要特征.指图形经过任何反演变换保持不变的性质.空间曲线之间的交角,曲线与曲面的交角,曲面与曲面的交角在反演变换下都保持不变(保角性).若将平面看做是半径为无穷大的球面,则在反演变换下球面变成球面(保球性).在反演变换下,反演球是不变点的集合.过反演极的直线、平面以及与反演球正交的球都是不变图形.

空间反演变换的性质(property of inversion transformation in space)　空间反演变换的基本特性.空间反演变换的主要性质是:

1. 同一图形关于同一极点的两个反形(反演幂可不同)互相位似,位似中心是极点.

2. 凡通过两个互反点的球必与反演球正交.反之,若通过某两点的球都与反演球正交,则这两点互为反点.

3. 镜面反射变换可看成反演幂趋于无穷大的极限情况,即镜面反射变换可看成一种特殊的反演.

4. 任意两点和它们的反点总在同一圆周上.反之,成点点对应的不在同一圆周上的两个图形,若一图形上的任意两点和它们的对应点在同一圆周上,那么它们互为反形.

5. 如 A',B' 分别是 A,B 的反演点,O 为反演极,k 为反演幂,则 $A'B'=AB\cdot k/OA\cdot OB$.

6. 一对反演点 A,A' 调和分隔它们所在的反演球直径 PQ,则有 $(PA/AQ)(PA'/A'Q)=-1$.

7. 如一曲面在一点有切面,则它的反演像在对应点也有切面,这两个切面关于两切点连线的中垂面对称.

8. 过极点的球或平面的反形是平面,不过极点的平面的反形是过极点的球,不过极点的球的反形是不过极点的球.

9. 互为反演图形的两个圆位于同一平面或同一球面上.

空间的椭圆型反演(elliptic inversion in a space)　亦称空间的负反演.一种特殊的反演变换.在空间中取定球 O,半径为 r,$f:P\to P'$ 是空间关于该球的反演变换,$\varphi:P'\to P''$ 是空间关于 O 点的反射变换,则这两次变换的积 $\varphi f:P\to P''$ 称为空间关于球 O 的椭圆型反演变换.O 称为这个椭圆型反演变换的极或中心.$-r^2$ 称为这个椭圆型反演变换的幂.

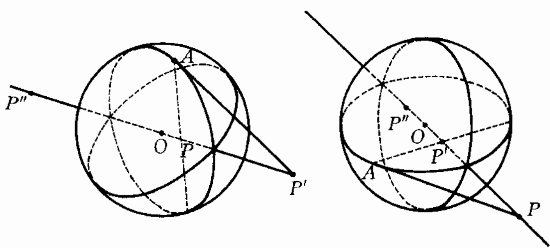


图 1　　　　图 2

P'' 称为 P 的椭圆型反演点.关于球 O 的椭圆型反演变换是空间除去 O 点后所得点集到自身的一一对应,并且是自逆对应.当 P'' 是 P 的像时,O 位于 P,P'' 之间,$\overline{OP}\cdot\overline{OP''}=-r^2$,$P$ 也是 P'' 的像.异于球心的一点 P 的椭圆型反演像 P'' 可如下求出(图1,图2):先求出 P 关于球 O 的反演像 P';再作 P' 关于球心 O 的对称点 P''.

空间的负反演(negative inversion in a space)　即"空间的椭圆型反演".

椭圆型反演的极(pole of elliptic inversion)

见“空间的椭圆型反演”.

椭圆型反演的中心(center of elliptic inversion) 见“空间的椭圆型反演”.

椭圆型反演的幂(power of elliptic inversion) 见“空间的椭圆型反演”.

空间图形的椭圆型反演图形(elliptic inversion figure of a space figure) 两个有特殊关系的空间图形.对于空间的两图形,如果存在一个球的椭圆型反演,把一个图形变成另一个图形,则称两图形中的一个图形是另一个图形的椭圆型反演图形.由于椭圆型反演是自逆变换,所以两图形互为椭圆型反演图形.空间的椭圆型反演把不过极点的球面变成不过极点的球面,把不过极点的平面变成过极点的球面,把过极点的平面变成过极点的平面,把过极点的球面变成平面.一个图形的椭圆型反演图形是它的关于同一反演球的双曲型反演图形的中心对称图形,对称中心是反演的极.

点关于球的椭圆型反演点(elliptic inversion point of a point with respect to a sphere) 两个有特殊关系的空间点.空间一个点关于反演球的反演点对于反演极的对称点,称为这个点的椭圆型反演点.反演球面上的点的椭圆型反演点是它的对径点.反演极到相互对应的两椭圆型反演点的有向线段的积为椭圆型反演幂$-r^2$,这里r是反演球的半径.极点关于球的椭圆型反演点不存在或者引进一个“无穷远点”和它对应,这样极点和无穷远点互为反点.

空间圆与球的关系(relation between a circle and a sphere in a space) 空间圆与球的几种位置关系.空间圆与球的基本关系是:

1.空间中,一个圆与圆所在平面外一点,确定一个球.

2.空间中有公共点的两圆周,当分别过其圆心且与所在面垂直的两条直线相交时,有惟一球面同时过两圆周,两条垂线的交点就是球心.

3.空间中两平行圆共球面的充分必要条件是两圆连心线垂直于它们所在的平面.

4.空间中所在面不平行且无公共点的两圆周共球面的充分必要条件是,过两圆心分别作两圆所在平面的垂线,两垂线相交且交点到两圆周上点的距离相等.

环面(torus) 见本卷《空间解析几何》中的“圆环面”.

迪潘圆纹面(Dupin cyclic surface) 一种特殊的反演图形.即圆环面的反演图形.迪潘圆纹面上有两组相互正交的圆族(直线当成半径无限大的圆).如果反演极取圆环面的基本圆周上的点,那么圆环面的反演圆形仍然是圆环面,它的轴线变为反演像的基本圆,它的基本圆变为反演像的轴线.迪潘(Dupin,P.-C.-F.)很重视几何学的应用,对曲面理论做出了重要的贡献.他所著《几何学的发展》一书中对此圆纹面有详细的论述.

体积与表面积

体积(volume) 刻画立体大小的量.体积有两种定义:

1.几何体所占空间部分的大小称为几何体的体积,它用单位正方体度量.几何体的体积是一个正的实数,具有下面两个基本性质:

1)运动不变性.全等的两个几何体的体积相等.

2)可加性.把几何体分成若干部分,则该几何体的体积等于各部分体积的和.

2.几何体体积是几何空间的测度(参见本卷《算术》同名条).

单位正方体(unit cube) 一种特殊的正方体.棱与长度单位相等的正方体称为单位正方体.单位正方体的体积是度量体积的单位,它的体积量数是1.

体积单位(unit of volume) 一种基本度量单位.作为度量几何体体积大小的单位正方体称为体积单位.单位正方体作为体积单位是指单位正方体所占空间的大小.几何体的体积度量数,是它与单位体所占空间大小的比值(参见本卷《算术》同名条).

长方体的体积(volume of a cuboid) 长方体的一种度量.长方体的体积等于三度(长、宽、高)之积.如果长方体长、宽、高分别为a,b,c则体积为$V_{长方体}=abc$.特别地,当$a=b=c$时,得正方体体积公式

$$V_{正方体}=a^3.$$

等积体(equivalent solid) 两个体积相关的几何体.体积相等的两个几何体称为等积体.全等的两个几何体一定是等积体,但两个等积体不一定是全等的几何体.

祖暅原理(Zu Geng principle) 亦称卡瓦列里原理.关于几何体等积的著名定理.是指:夹在两个平行平面间的两个几何体,如果用平行于这两个平面的任意一个平面去截,所得的两个截口面积总相等,那么这两个几何体的体积相等.卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)在《不可分几何学》(1635年)中,指出并应用这个原理解决了有关体积的计算问题.在希尔伯特公理系统下,祖暅原理是一个可以证明的定理.而在中国古代,则是将长方体的体积和祖暅原理作为体积理论的基础.刘徽在公元263年为《九章算术》所作的注中说:“从方亭(正四棱台)求圆亭(正圆台)之积,亦犹方幂求圆幂”,“圆锥比于方锥,亦二百分一百五十七”($\approx\pi/4$).这里已经用到如下的截割原理:同高的两立体,在等高处各作与底平行的一个

截面，若截面面积之比恒为一常数，则此二立体体积

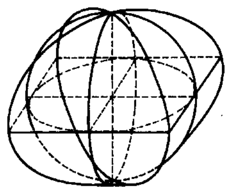


图 1

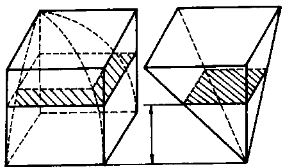


图 2

之比也等于这一常数. 刘徽在“开立圆术”注中还创造了“牟合方盖”这一模型(图 1 所示，它外切于一球而由两个正交的圆柱面组成). 刘徽发现牟合方盖与它的内切球的体积之比为 $4:\pi$. 可惜刘徽并没有给截割原理以明文的记述，而是祖暅(公元 5 世纪，祖冲之的儿子)在前人的基础上概括出“缘幂势既同，则积不容异”这一原理，并在刘徽研究牟合方盖的基础上，进一步考虑了球的外切立方体与牟合方盖所围成的八个相等的立体，每一个与同底等高的阳马(图 2)等积，从而给出了球的体积公式. 由上述历史事实可见，刘徽为祖暅原理打下了基础.

卡瓦列里原理(Cavalieri principle)　即“祖暅原理”.

牟合方盖(mou he fang gai)　见“祖暅原理”.

帕普斯法则(Pappus rule)　计算旋转体的体积和表面积的一种方法. 为了计算旋转体的体积和表面积，帕普斯(Pappus，(A))在《数学汇编》中给出法则：若平面曲线 C 绕直线 l 旋转(C 和 l 共面且 C 在 l 的一侧)，则所得旋转曲面的面积 S 等于母曲线 C 的长度与 C 的重心在旋转过程中所走路程的长度的乘积；若部分平面 A 绕同一平面内的一条直线旋转(此直线至多只能为 A 共边界点)，则所得旋转体的体积 V 等于 A 的面积与 A 的重心在旋转过程中所走路程长度的乘积.

古尔丁定理(Guldin theorem)　计算旋转体体积的一个著名定理. 即帕普斯法则的后半部. 帕普斯(Pappus，(A))提出该法则后，久不为人注意，一千多年后，终被古尔丁(Guldin，P.)重新发现，遂得以确立(参见“帕普斯法则”).

直棱柱的侧面展开图(expansion graph of the lateral face of a right prism)　一种平面图形. 指将直棱柱的侧面展成平面图形. 沿着棱柱的一条侧棱剪开并展开，把各侧面平放在一个平面上，就得到它的侧面展开图. 直棱柱的侧面展开图是一个矩形，矩形的长等于直棱柱底面的周长，宽等于直棱柱的高.

直棱柱的侧面积(lateral area of a right prism)　刻画直棱柱侧面大小的一个数量及其计算公式. 直棱柱各侧面面积之和称为直棱柱的侧面积. 直棱柱侧面展开图的面积就是它的侧面积. 如果直棱柱的底面周长是 C，高是 h，那么它的侧面积是

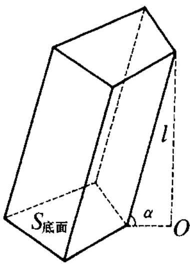
$$S_{\text{直棱柱侧}}=Ch.$$

棱柱的全面积(total area of a prism)　刻画棱柱表面积大小的一个数量. 棱柱的全面积等于棱柱的侧面积与两个底面面积的和.

柱体的侧面积(lateral area of a cylinder)　刻画柱体侧面积大小的一个数量. 如果柱体的底面是有面积的平面图形，且直截面周界是可求长曲线，则柱体的侧面积等于其直截面图形的周长与母线长的乘积. 柱体的体积等于其底面积与高的乘积.

柱体的体积(volume of a cylinder)　见“柱体的侧面积”.

棱柱的体积(volume of a prism)　刻画棱柱体积大小的一个数量. 其计算公式如下：



1. 棱柱的体积等于它的底面积和高的乘积. 如果底面积为 S，高为 h，则棱柱的体积

$$V_{\text{棱柱}}=Sh.$$

2. 斜棱柱与以它的直截面(与侧棱垂直的截面)为底，侧棱为高的直棱柱等积. 如果直截面面积为 S，侧棱为 l，则斜棱柱体积为

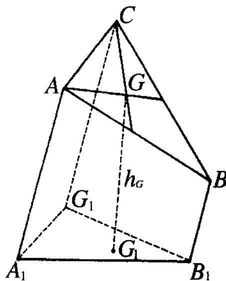
$$V_{\text{斜棱柱}}=S_{\text{底面}}\times h=S_{\text{直截面}}\times l.$$

3. 如斜棱柱的母线与底面之间的夹角为 α，母线长为 l，底面积为 $S_{\text{底面}}$，则斜棱柱体积为

$$V_{\text{斜棱柱}}=S_{\text{底面}}\cdot l\sin\alpha.$$

斜棱柱的侧面积(lateral area of a oblique prism)　刻画斜棱柱侧面积大小的一个数量. 斜棱柱的所有侧面的面积和称为斜棱柱的侧面积. 斜棱柱的侧面积等于它的直截面的周长与侧棱长的乘积.

截棱柱的体积(volume of a truncated prism)　刻画截棱柱体积大小的一个数量及其计算公式. 截棱柱的体积等于一个底面积与另一底面的重心到这个底面的距离之积. 如用 $S_{\text{底}}$ 表示截棱柱的一个底面积，h_G 表示另一底面的重心到这一底面的距离，则：



$$V_{\text{截棱柱}}=S_{\text{底}}\cdot h_G.$$

如图的截三棱柱中，设底 ABC 的重心为 G，到面 $A_1B_1C_1$ 的距离为 h_G，则

$$V=S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot h_G=\frac{1}{3}(a+b+c)S_{\triangle A_1B_1C_1},$$

其中 a,b,c 分别是 A,B,C 到面 $A_1B_1C_1$ 的距离. $a=AA_1\sin\alpha$，$b=BB_1\sin\alpha$，$c=CC_1\sin\alpha$. α 是侧棱与底面的夹角.

正 *n* 棱锥的几何量(geometric quantity of a regular *n*-pyramid)　与正 n 棱锥有关的一些几何

量及其计算公式.底面边长为 a,高为 h 的正 n ($n\in\mathbf{N},n\geqslant 3$)棱锥的各几何量如下表:

	项　目	量　值
底面正 n 边形	内　角	$\frac{n-2}{n}\pi$
	边对中心角	$\frac{2}{n}\pi$
	边心距	$\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$
	外接圆半径	$\frac{a}{2}\csc\frac{\pi}{n}$
	面　积	$\frac{1}{4}na^2\cot\frac{\pi}{n}$
侧面等腰三角形	侧　棱	$\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2\csc^2\frac{\pi}{n}}$
	斜　高	$\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2\cot^2\frac{\pi}{n}}$
	顶　角	$2\arcsin\frac{a\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{4h^2\sin^2\frac{\pi}{n}+a^2}}$
	面　积	$\frac{1}{4}a\sqrt{4h^2+a^2\cot^2\frac{\pi}{n}}$
侧棱与底面夹角		$\arcsin\frac{2h}{\sqrt{\left(4h^2+a^2\csc^2\frac{\pi}{n}\right)}}$
斜高与底面夹角 侧面与底面夹角		$\arcsin\frac{2h}{\sqrt{\left(4h^2+a^2\cot^2\frac{\pi}{n}\right)}}$
内切球半径		$\frac{ah\cot\frac{\pi}{n}}{\sqrt{4h^2+a^2\cot^2\frac{\pi}{n}}+a\cot\frac{\pi}{n}}$
外接球半径		$\frac{1}{2}h+\frac{a^2}{8h}\csc^2\frac{\pi}{n}$
体　积		$\frac{1}{12}nha^2\cot\frac{\pi}{n}$
各侧棱为棱的内二面角		$2\arcsin\sqrt{\frac{4h^2\cos^2\frac{\pi}{n}+a^2\cot^2\frac{\pi}{n}}{4h^2+a^2\cot^2\frac{\pi}{n}}}$

正棱锥的侧面展开图(expansion graph of the lateral face of a regular pyramid)　一种平面图形.即沿着正棱锥的一条侧棱剪开,并且将各侧面展平,就得到正棱锥的侧面展开图.这是一组全等的等腰三角形,正棱锥底面的顶点都在以其侧棱为半径的扇形弧上.

棱锥的侧面积(lateral area of a pyramid)　刻画棱锥侧面积大小的一个数量及其计算公式.即棱锥所有侧面的面积之和.如果棱锥有 n 个侧面三角形 $SA_1A_2,SA_2A_3,\cdots,SA_nA_1$,第 $i(i=1,2,\cdots,n)$个侧面三角形上斜高长为 h_i,底边长为 a_i,则侧面积为

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}h_ia_i.$$

正棱锥的侧面积(lateral area of a regular pyramid)　刻画正棱锥侧面积大小的一个数量及其计算公式.正棱锥的侧面积等于它的底面周长和斜高乘积的一半.如果底面周长是 C,斜高是 h',那么它的侧面积为

$$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}Ch'.$$

如果正棱锥的侧面与底面所成二面角为 θ,则

$$S_{正棱锥侧}=\frac{S_{正棱锥底}}{\cos\theta}.$$

棱锥的全面积(total area of a pyramid)　刻画棱锥表面积大小的一个数量及其计算方法.棱锥的全面积等于棱锥的侧面积与底面积的和.

棱锥的体积(volume of a pyramid)　刻画棱锥体积大小的一个数量及其计算公式.棱锥的体积等于和它等底等高的棱柱体积的三分之一,即等于它的底面积和高乘积的三分之一.如果棱锥的底面积为 S,高为 h,那么它的体积是 $V_{棱锥}=Sh/3$.底面积和高分别相等的两个棱锥的体积相等.

正棱台的侧面展开图(expansion graph of the lateral face of a regular prismoid)　一种平面图形.如果沿着正棱台的一条侧棱剪开,并把各侧面展平,就得到正棱台的侧面展开图,它是一组全等的等腰梯形.

棱台的侧面积(lateral area of a prismoid)　刻画棱台侧面积大小的一个数量及其计算公式.棱台的所有侧面面积的和.若棱台有 n 个侧面,其中第 i $(i=1,2,\cdots,n)$个侧面的上底长为 a_i,下底长为 b_i,高为 h_i,则

$$S_{侧}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)h_i.$$

正棱台的侧面积(lateral area of a regular prismoid)　刻画正棱台侧面积大小的一个数量及其计算公式.正棱台的侧面积等于两个底面周长的和与斜高乘积的一半.如果正棱台的上、下底面的周长分别是 C',C,斜高是 h',那么它的侧面积是

$$S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(C+C')h'.$$

如果正棱台的侧面与底面所成二面角为 θ,则

$$S_{正棱台侧}=\frac{S_{正棱台大底}-S_{正棱台小底}}{\cos\theta}.$$

正 n 棱台的几何量(geometric quantity of a regular n-prismoid)　与正 n 棱台有关的一些几何量及其计算公式.上底边长为 a,下底边长为 $b(a<$

b)，高为 h 的正 $n(n\in\mathrm{N},n\geqslant 3)$ 棱台的各几何量如下表：

	项　目	量　值
底面正 n 边形	内　角	$\frac{n-2}{n}\pi$
	边对中心角	$\frac{2}{n}\pi$
	边心距、内切圆半径	$\frac{A}{2}\cot\frac{\pi}{n}$　对上底 $A=a$
	外接圆半径	$\frac{A}{2}\csc\frac{\pi}{n}$　对下底 $A=b$
	面　积	$\frac{1}{4}nA^2\cot\frac{\pi}{n}$
侧面等腰梯形	侧　棱	$\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+(b-a)^2\csc^2\frac{\pi}{n}}$
	斜　高	$\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+(b-a)^2\cot^2\frac{\pi}{n}}$
	底　角	$2\arccos\frac{b-a}{\sqrt{4h^2+(b-a)^2\csc^2\frac{\pi}{n}}}$
	面　积	$\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{4h^2+(b-a)^2\cot^2\frac{\pi}{n}}$
侧棱与底面夹角		$\arcsin\frac{2h}{\sqrt{\left(4h^2+(b-a)^2\csc^2\frac{\pi}{n}\right)}}$
斜高与底面夹角 侧面与底面夹角		$\arcsin\frac{2h}{\sqrt{\left(4h^2+a^2\cot^2\frac{\pi}{n}\right)}}$
外接球半径		$\frac{1}{2h}\sqrt{4h^2A^2+(h^2+B^2-A^2)^2}$ $A=\frac{1}{2}a\csc\frac{\pi}{n},B=\frac{1}{2}b\csc\frac{\pi}{n}$
内切球半径		当斜高等于上、下底边心距之和时有内切球，半径为 $h/2$.
体　积		$\frac{1}{12}nh(a^2+b^2+ab)\cot\frac{\pi}{n}$
各侧棱为棱的内二面角		$2\arcsin\sqrt{\frac{4h^2\cos^2\frac{\pi}{n}+(b-a)^2\cot^2\frac{\pi}{n}}{4h^2+(b-a)^2\cot^2\frac{\pi}{n}}}$

棱台的全面积(total area of a prismoid)　刻画棱台表面积大小及其计算方法. 即棱台的全面积等于棱台所有的侧面积与两个底面积之总和.

棱台的体积(volume of a prismoid)　刻画棱台体积大小的一个数量及其计算公式. 如果棱台的上、下底面的面积分别是 S' 和 S，高是 h，则它的体积为

$$V_{\text{棱台}}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S').$$

若棱台的中截面面积为 S_0，则棱台的体积为

$$V_{\text{棱台}}=\frac{1}{6}h(S+S'+4S_0).$$

拟柱体体积公式(volume formula of a quasi-prism)　一种体积公式. 如果拟柱体的上、下底面面积分别为 S',S，中截面的面积为 S_0，高为 h，那么它的体积为

$$V_{\text{拟柱体}}=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S').$$

由于棱柱、棱锥、棱台都是特殊的拟柱体，所以，利用这个公式可以求棱柱、棱锥、棱台的体积，因此，这个公式又称万能求积公式或牛顿-辛普森公式(参见“拟柱体”).

万能求积公式(universal volume formula)　即“拟柱体体积公式”.

牛顿-辛普森公式(Newton-Simpson formula)　一种适应面较广的求积公式. 这个公式不仅适用于作为拟柱体的棱柱、棱锥和棱台，而且适用于不是拟柱体的圆柱、圆锥、圆台和球台，甚至像椭球体等. 更一般地，有定理：一个几何体被垂直于其高(或平行于其底)的平面所截，如果截面面积是它到上底(或下底)的距离的 K 次函数($K=0,1,2,3$)，即 $S(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，则它的体积为

$$V=\frac{h}{6}\left[S(O)+4S\left(\frac{h}{2}\right)+S(h)\right],$$

式中 h 为几何体的高，$S(O)$,$S(h)$ 是上、下底的面积，$S(h/2)$ 是中截面面积.

圆柱的侧面展开图(expansion graph of the lateral face of the frustum of a circular cone)　一种平面图形. 即把直圆柱的侧面沿着它的一条母线剪开后展在平面上，就得到它的侧面展开图. 这是一个矩形. 矩形的两边长分别是圆柱底面圆周长和母线长. 斜圆柱的侧面沿一条母线展开是一个曲边四边形，一对边是母线长，这边上的高是直截面圆的周长，另一边是正弦曲线.

圆柱的侧面积(lateral area of a circular cylinder)　刻画圆柱侧面积大小的一个数量及其计算公式. 直圆柱的侧面积等于底面的周长和高的乘积. 如果直圆柱底面半径是 r，周长是 C，侧面母线长是 l，那么它的侧面积是 $S_{\text{直圆柱侧}}=Cl=2\pi rl$. 斜圆柱的侧面积等于它的母线长 l 和它的直截面(垂直于母线的截面)圆的周长 C 的乘积，即 $S_{\text{斜圆柱侧}}=Cl$.

圆柱的全面积(total area of a circular cylinder)　刻画圆柱表面积大小的一个数量及其计算公式. 直圆柱的侧面积与底面积的和为它的全面积. 如果直圆柱的底面半径为 r，高为 h，那么它的全面积为

$S_{圆柱全}=2\pi r(h+r)$. 斜面柱的侧面积和它的两底椭圆面积的和是它的全面积. 设母线长为 l，直截面圆周长为 C，底面椭圆的长短半轴为 a,b，则斜圆柱全面积为 $S_{斜圆柱}=Cl+2\pi ab$.

圆柱的体积(volume of a circular cylinder) 刻画圆柱体积大小的一个数量及其计算公式. 直圆柱的体积等于它的底面积与高的乘积. 如果直圆柱底面积为 S，底面半径为 r，高为 h，那么直圆柱的体积是 $V_{圆柱}=Sh=\pi r^2h$. 斜圆柱的体积等于它的母线长 l 与直截面圆的面积之积. 设直截面圆的半径为 r，则斜圆柱体积为 $V_{斜圆柱}=l\pi r^2$.

正圆锥的几何量(geometric quantity of a regular circular cone) 与正圆锥有关的一些几何量及其计算公式. 底面半径为 R，高为 h 的正圆锥的各种几何量如下表：

项　目	量　值	备　注
母　线	$\sqrt{h^2+R^2}$	
锥顶角	$2\arctan\frac{R}{h}$	
锥顶立体角	$2\pi\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$	单位：球面度
母线与底面的夹角	$\arctan\frac{h}{R}$	
侧面展开图中心角	$\frac{2\pi R}{\sqrt{h^2+R^2}}$	单位：弧度
侧面积	$\pi R\cdot\sqrt{h^2+R^2}$	
底面积	πR^2	
体　积	$\frac{1}{3}\pi R^2h$	
内切球半径	$\frac{Rh}{R+\sqrt{h^2+R^2}}$	
外接球半径	$\frac{R^2+h^2}{2h}$	

圆锥的侧面展开图(expansion graph of the lateral face of a circular cone) 一种平面图形. 即把圆锥的侧面沿着圆锥的一条母线剪开后展开在平面上，就得到圆锥的侧面展开图. 它是一个扇形，这个扇形的弧长等于圆锥的底面圆的周长，半径等于圆锥侧面的母线长. 设圆锥的顶角为 α，母线为 l，底面半径为 r，侧面展开扇形的中心角为 θ，则

$$\theta=\frac{2\pi r}{l}\text{ 弧度}=2\pi\sin\frac{\alpha}{2}\text{ 弧度}.$$

圆锥的侧面积(lateral area of a circular cone) 刻画圆锥侧面积大小的一个数量及其计算公式. 圆锥的侧面积等于底面周长与母线的乘积的一半，即侧面展开图扇形的面积. 如果圆锥底面半径是 r，周长是 C，侧面母线长是 l，那么它的侧面积为

$$S_{圆锥侧}=\frac{Cl}{2}=\pi rl.$$

圆锥的全面积(total area of a circular cone) 刻画圆锥表面积大小的一个数量及其计算公式. 圆锥的全面积等于它的侧面积与底面积的和，其计算公式为 $S_{圆锥全}=\pi r(l+r)$.

圆锥的体积(volume of a circular cone) 刻画圆锥体积大小的一个数量及其计算公式. 圆锥的体积等于它的底面积与高的乘积的三分之一. 如果圆锥的底面积为 S，高为 h，圆锥的底面半径为 r，那么它的体积为

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

圆台的侧面展开图(expansion graph of the lateral face of the frustum of a circular cone) 一种平面图形. 即把圆台的侧面沿着它的一条母线剪开后展开在平面上，就得到圆台的侧面展开图，它是一个扇环. 若圆台上底半径为 r'，下底半径为 r，高为 h，母线为 l，则 $l^2-h^2=(r-r')^2$，且这个扇环的上底长为 $2\pi r'$，下底长为 $2\pi r$，中心角为

$$\theta=\frac{2\pi(r-r')}{r}\text{ 弧度}.$$

圆台的侧面积(lateral area of the frustum of a circular cone) 刻画圆台侧面积大小的一个数量及其计算公式. 圆台的侧面积等于它的两个底面周长的和与母线长度乘积的一半. 如果圆台的上、下底面的半径分别是 r',r，周长是 C',C，母线长是 l，那么它的侧面积为

$$S_{圆台侧}=\frac{1}{2}(C+C')l=\pi(r+r')l.$$

圆台的全面积(total area of the frustum of a circular cone) 刻画圆台表面积大小的一个数量及其计算公式. 圆台的全面积等于它的侧面积与两底面积的和，所以 $S_{圆台全}=\pi(rl+r'l+r^2+r'^2)$. 其中，$l$ 是圆台母线的长，r' 和 r 分别是圆台上、下底面圆的半径.

圆台的体积(volume of the frustum of a circular cone) 刻画圆台体积大小的一个数量及其计算公式. 如果圆台上、下底的面积分别是 S',S，半径分别是 r',r，高是 h，那么它的体积为

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2).$$

圆台体积也可借用拟柱体体积公式计算，即

$$V_{圆台}=\frac{1}{6}h(S+S'+4S_0),$$

这里 S_0 是圆台中截面面积，计算公式为

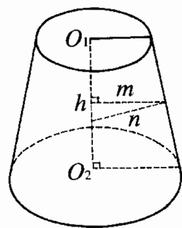
$$S_0=\pi r_0^2=\frac{\pi}{4}(r+r')^2,$$

r_0 为中截面圆的半径.

正圆台的几何量(geometric quantity of the regular frustum of a circular cone) 与正圆台有关的一些几何量及其计算公式. 上底面半径为 r,下底面半径为 $R(>r)$,高为 h 的圆台的各种几何量列表如下:

项　目		量　值
母　线		$\sqrt{(R-r)^2+h^2}$
母线与底面夹角		$\arctan\frac{h}{R-r}$
侧面展开图中心角		$\frac{2\pi(R-r)}{\sqrt{(R-r)^2+h^2}}$(弧度)
底面积	上底	πr^2
	下底	πR^2
侧面积		$\pi(r+R)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$
体　积		$\frac{1}{3}\pi h(r^2+R^2+rR)$
外接球半径		$\frac{1}{2h}\sqrt{4r^2h^2+(h^2+R^2-r^2)^2}$
内切球半径		$\frac{h}{2}$(当 $r+R=\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ 时才有内切球)

圆柱、圆锥、圆台侧面积统一公式(unified formula of lateral areas of circular cylinder, circular cone and frustum of a cone) 一种重要的面积公式,是对三类侧面积计算公式的概括与统一. 其统一公式是:



1. 如果圆柱、圆锥、圆台的高为 h,母线的中垂线夹在母线与轴之间的线段长为 n(如图),那么这三种旋转体的侧面积都是 $2\pi nh$,即 $S_{侧}=2\pi nh$.

2. 如果圆柱、圆锥、圆台的母线长为 l,母线中点到旋转轴的距离为 m(如图),则这三种旋转体的侧面积都是 $2\pi ml$,即 $S_{侧}=2\pi ml$.

球面面积(area of a sphere) 刻画球体表面积大小的一个数量及其计算公式. 球面面积等于它的大圆面积的 4 倍. 如果球的半径为 R,直径为 D,那么球面的面积为

$$S_{球面}=4\pi R^2=\pi D^2.$$

球的体积(volume of a sphere) 刻画球体体积大小的一个数量及其计算公式. 球的体积等于球面积和球半径乘积的三分之一. 如果球半径是 R,球直径是 D,那么球体积为

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3.$$

刘徽对球体积作过研究,他在《九章算术注》(公元 263 年)中,指出了球体积应小于 $9D^3/16$(D 为球直径),并指出了球体积等于一个牟合方盖(参见"祖暅原理"及其中的图)的体积的 $\pi/4$ 倍. 这个牟合方盖就是两个底半径等于球半径的圆柱垂直相交而得的公共部分. 在此基础上,祖暅考察了球的外切立方体与牟合方盖的八分之一所围成的八块相等的立体. 每一块与同底等高的阳马(方锥)等积,就是运用他的原理"缘幂势既同,则积不容异"而得出的. 由此得出牟合方盖的体积为

$$V=8\times\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)=\frac{2}{3}(2r)^3,$$

从而给出了球的体积公式为:

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

远在古希腊时期,阿基米德(Archimedes)在他所著的《球和圆柱》一文中指出:以球的大圆为底,以球直径为高的圆柱(即球的外切圆柱)的体积与全面积分别是该球的体积及面积的 3/2 倍. 后人根据阿基米德的遗愿,把球与它的外切圆柱的图形刻在他的墓碑上.

球冠的面积(area of a spherical crown) 刻画球冠面积大小的一个数量及其计算公式. 球冠的面积等于球的大圆的周长与球冠高的乘积. 如果球的半径是 R,球冠的高是 h,那么球冠的面积是 $S_{球冠}=2\pi Rh$. 球冠面积公式,对于半球面,大于半球的冠,球带甚至整个球面都成立(计算整个球面时 $h=2R$).

球缺的体积(volume of a spherical segment) 刻画球缺体积大小的一个数量及其计算公式. 如果球的半径是 R,球缺的底面半径是 r,球缺的高是 h,那么球缺的体积为

$$V_{球缺}=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)$$

或

$$V_{球缺}=\frac{\pi h}{6}(h^2+3r^2).$$

球楔的体积(volume of a spherical wedge) 刻画球楔体积大小的一个数量及其计算公式. 球楔的体积等于球楔的底面积(即球面二角形的面积)与球半径乘积的三分之一. 设球楔的底面积为 S,球半径为 R,则球楔的体积为

$$V_{球楔}=\frac{SR}{3}.$$

球扇形的体积(volume of a spherical sector) 刻画球扇形体积的一个数量及其计算公式. 球扇形的体积等于它的底面的面积和球半径乘积的三分之一. 若球扇形的底面(球冠或球带)的面积为 S,球半

径为 R，球扇形的高为 h，则球扇形的体积为

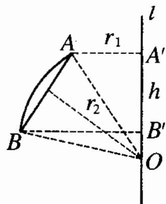
$$V_{球扇形} = \frac{1}{3}SR = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

球台的体积(volume of a spherical frustum) 刻画球台体积大小的一个数量及其计算公式. 若球台上、下底面半径分别是 r_1，r_2，高是 h，则球台的体积为

$$V_{球台} = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

球带的面积(area of a spherical zone) 刻画球带面积大小的一个数量及其计算公式. 作为球台的侧面，设球半径为 R，球台的高为 h，则球带的面积为 $S_{球带}=2\pi rh$. 同球或等球上的两个球带面积的比等于它们高的比.

球环的体积(volume of a spherical ring) 刻画球环体积大小的一个数量及其计算公式. 平面上一弓形绕不穿过它的直径(轴)旋转所得的球环体积等于球台与同底圆台的体积之差，又等于以弓形的弦长为底半径、以该弦在轴上的射影长为高的圆柱体体积的六分之一. 如图，设弓形的弦长为 AB，弦 AB 在旋转轴 l 上的射影长为 $A'B'=h$，$AA'=r_1$，$BB'=r_2$，则球环的体积为



$$V_{球环} = \frac{1}{6}\pi AB^2 \cdot A'B' = \frac{1}{6}\pi h[(r_2 - r_1)^2 + h^2].$$

空间图形的内外接和内外切

三面角的内切圆锥面(inscribed circular conical surface of a trihedral angle) 一个与三面角有关的圆锥面. 即三面角的内切直圆锥面. 圆锥的侧面与三面角的各面均相切时，称该圆锥为三面角的内切圆锥面. 三面角有惟一的内切圆锥. 它的内切圆锥的轴线是它的三个二面角的平分面的交线，亦是三面角内切球的球心轨迹. 过轴线上任意一点分别作三面角三面的垂线，三个垂足确定的圆就是三面角内切圆锥的一条准线. 三面角的内切斜圆锥不止一个，作三面角的任何一个截面三角形，以其内切圆为准线、三面角的顶点为顶点的斜圆锥或直圆锥都与三面角内切.

三面角的外接圆锥面(circumscribed circular conical surface of a trihedral angle) 一个与三面角有关的圆锥面. 即三面角的外接直圆锥面. 以三面角的各棱为母线的直圆锥，称为三面角的外接圆锥面. 三面角有惟一的外接圆锥面，它的轴是三面角的三个面角的垂直平分面的交线. 它的顶点是三面角的顶点. 过轴线上任意一点分别作三面角三条棱的垂线，三个垂足确定的圆就是三面角外接圆锥面的一条准线. 三面角的外接斜圆锥不止一个. 例如，以三面角的任意一个截面三角形的外接圆为准线，以三面角的顶点为顶点的圆锥都是外接圆锥.

柱的内接棱柱(inscribed prism in a cylinder) 与已知柱有关的棱柱. 满足下述条件的棱柱称为柱的内接棱柱(柱称为棱柱的外接柱)：

1. 棱柱的两底面分别是柱的相应底面的内接多边形(即棱柱底面多边形的顶点都在柱底面的边界线上).

2. 棱柱的各侧棱都是柱的母线.

棱柱的外接柱(circumscribed cylinder of a prism) 见“柱的内接棱柱”.

棱柱的外接圆柱(circumscribed circular cylinder of a prism) 一个与已知棱柱有关的圆柱. 指棱柱底面多边形有外接圆时，以此圆为底面的圆柱.

柱的外切棱柱(circumscribed prism of a cylinder) 一个与已知柱有关的棱柱. 满足下述条件的棱柱，称为柱的外切棱柱(柱称为棱柱的内切柱)：

1. 棱柱的两底分别是柱的相应底面的外切多边形(即棱柱底面的边与柱底面边界线相切).

2. 棱柱的侧棱与柱的母线平行且相等.

棱柱的内切柱(inscribed cylinder in a prism) 见“柱的外切棱柱”.

棱柱的内切圆柱(inscribed circular cylinder in a prism) 一个与已知棱柱有关的圆柱. 指棱柱底面多边形有内切圆时，以此圆为底面的圆柱.

锥的内接棱锥(inscribed pyramid in a cone) 一个与已知锥面有关的棱柱. 满足下述条件的棱锥称为锥(体)的内接棱锥(锥则称为棱锥的外接锥)：

1. 棱锥的底面多边形内接于锥的底面曲线.

2. 棱锥的各侧棱都是锥的母线.

棱锥的外接锥(circumscribed cone of a pyramid) 见“锥的内接棱锥”.

棱锥的外接圆锥(circumscribed circular cone of a pyramid) 一个与已知棱锥有关的圆锥. 指棱锥的底面多边形有外接圆时，以此圆为底面且与棱锥同顶点的圆锥.

锥的外切棱锥(circumscribed pyramid of a cone) 一个与已知锥面有关的棱锥. 即与锥相外切的棱锥. 满足下述条件的棱锥，称为锥(体)的外切棱锥(锥则称为棱锥的内切锥)：

1. 棱锥的底面多边形外切于锥的底面曲线.

2. 棱锥与锥共顶点.

棱锥的内切锥(inscribed cone in a pyramid) 见“锥的外切棱锥”.

棱锥的内切圆锥(inscribed circular cone in a pyramid) 一个与已知棱锥有关的圆锥. 指棱锥底

面多边形有内切圆时，以此圆为底面且与棱锥共顶点的圆锥.

锥台的内接棱台(inscribed prismoid in a frustum)　一个与已知锥台有关的棱台. 如果锥台由已知锥截来，则已知锥的内接棱锥被同一平面截得的棱台称为锥台的内接棱台，此锥台称为棱台的外接锥台.

棱台的外接锥台(circumscribed frustum of a prismoid)　见“锥台的内接棱台”.

棱台的外接圆台(circumscribed frustum of a cone of a prismoid)　一个与棱台有关的圆台. 当棱台的上、下底面多边形都有外接圆时，以此二圆为上、下底面的圆台.

锥台的外切棱台(circumscribed prismoid of a frustum)　一个与已知锥台有关的棱台. 如果锥台面由已知锥截来，则已知锥的外切棱锥被同一平面截得的棱台称为锥台的外切棱台，此锥台称为棱台的内切锥台.

圆柱的内接圆锥(inscribed circular cone in a circular cylinder)　一个与已知圆柱有关的圆锥. 指以圆柱一个底面为底面，另一个底面中心为顶点的圆锥.

球的外切圆柱面(circumscribed circular cylindrical surface of a sphere)　一个与已知球有关的圆柱面. 指平行于定直线且切于定球的动直线的轨迹所成的圆柱面. 此球称为该圆柱面的内切球.

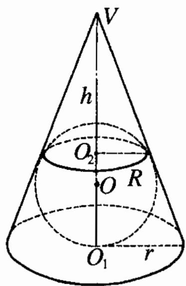
圆柱面的内切球(inscribed sphere in a circular cylindrical surface)　见“球的外切圆柱面”.

圆柱的内切球(inscribed sphere in a circular cylinder)　一个与已知圆柱体有关的球. 与圆柱两底面以及每条母线都相切的球称为这个圆柱的内切球，此圆柱称为球的外切圆柱. 等边圆柱才有内切球，球心在圆柱轴线中点处. 内切球半径与圆柱底面圆半径相等.

球的外切圆柱(circumscribed circular cylindrical of a sphere)　见“圆柱的内切球”.

圆柱的外接球(circumscribed sphere of a circular cylinder)　见“球的内接圆柱”.

圆锥的内切球(inscribed sphere in a circular cone)　一个与已知圆锥有关的球. 与圆锥的底面和各母线均相切的球，称为圆锥的内切球，此圆锥称为球的外切圆锥. 圆锥的内切球有且仅有一个，球心在圆锥的轴线上. 当圆锥高为 h，底面圆半径为 r 时，则内切球半径



$$R=\frac{r}{h}(\sqrt{h^2+r^2}-r).$$

球的外切圆锥(circumscribed circular cone of a sphere)　见“圆锥的内切球”.

圆锥的外接球(circumscribed sphere of a circular cone)　见“球的内接圆锥”.

圆台的内切球(inscribed sphere in a frustum of a circular cone)　一个与已知圆台有关的球. 即与圆台的上、下底面以及每条母线都相切的球，称为圆台的内切球，此圆台称为球的外切圆台. 当且仅当母线长与上、下两底面圆半径之和相等时，圆台才有内切球.

球的外切圆台(circumscribed frustum of a circular cone of a sphere)　见“圆台的内切球”.

球的内接圆柱(inscribed circular cylinder in a sphere)　一个与球有关的圆柱体. 指两底面是球的两个小圆的圆柱. 该球称为圆柱的外接球.

球的内接圆锥(inscribed circular cone in a sphere)　一个与已知球有关的圆锥. 底面是球的截面且顶点在球面上的圆锥. 此球称为圆锥的外接球.

球的内接圆台(inscribed frustum of a circular cone in a sphere)　一个与球有关的圆台. 上、下底面是球的两个平行截面的圆台，称为球的内接圆台. 此球称为圆台的外接球. 圆台也内接于一个球台(参见“球台”).

圆台的外接球(circumscribed sphere of a frustum of a circular cone)　见“球的内接圆台”.

棱柱有外接球的条件(condition of a prism with circumscribed sphere)　棱柱有外接球的必要条件. 指底面多边形有外接圆且高与底面垂直.

棱锥有外接球的条件(condition of a pyramid with circumscribed sphere)　棱锥有外接球的必要条件. 指底面多边形有外接圆.

棱台有外接球的条件(condition of a prismoid with circumscribed sphere)　棱台有外接球的必要条件. 两个底面多边形都有外接圆，且侧棱都相等.

撰　稿	马忠林	王为民	王和宽	王荆官	王爱生
	左铨如	冯治义	孙惠玲	李　盛	李　敏
	李晓华	李海良	张永顺	张根明	张毓新
	武炳琨	赵文成	郭文海	黄丽云	曹学俊
	章家谦	樊淑恩	戴世顺		
审　阅	马忠林	王本午	王培甫	张宁生	张根明

球 面 几 何

球面几何(spherical geometry) 亦称球面几何学.研究球面图形性质的几何学分支.其中,应用三角函数专门研究球面三角形边角间数量关系的部分,称为球面三角学.球面几何与立体几何及平面三角有着紧密的联系,被广泛应用于天文、航海、测量、制图等方面.球面几何(及其高维推广),又称为双重椭圆几何.用微分几何的观点看,球面几何便是高斯曲率为正常数的高斯曲率空间的几何;而在黎曼几何中,研究黎曼曲率为正常数的一类特殊的黎曼空间的几何,就是球面几何的高维推广.

球面几何的历史悠久,它是古代人类研究天文学的产物,是从观察天体在天球上的视运动而发展起来的.欧几里得(Euclid)的《现象》中,就有关于球面几何的18个命题,其中许多定理是用来探究恒星运动的.希帕恰斯(Hipparchus,(R))、西奥多修斯(Theodosius,(B))、门纳劳斯(Menelaus,(A))和托勒密(Ptolemy)也都是球面几何学的创始人.西奥多修斯的《球面学》,汇集了当时已知的球面几何知识.门纳劳斯的《球面学》,现存三篇,其中第一篇研究球面几何;第二篇以天文学为主题;第三篇则叙述球面三角.托勒密继承前人的工作,证明了球面直角三角形的四个关系式,讨论了斜角球面三角形的解法.

公元9世纪,阿尔·巴塔尼(al-Battānī)编写了《星之运动论》,使球面三角有了新的发展,书中已有球面三角形余弦公式的记述.球面三角的系统化是由纳西尔丁·图西(Nasīr al-Din al-Tūsī)在其《论四边形》中作出的.书中含有球面直角三角形的六个基本公式,并提出了用极三角形来解更一般的球面三角形的方法.可惜直到1450年左右,欧洲人才知道他的工作.

15世纪,雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)从收集、翻译、出版古希腊和阿拉伯的经典著作中,了解到阿尔·巴塔尼的工作,并从中得到益处.他在1462—1463年编著了《论三角》,书中荟萃了当时所知道的球面几何、球面三角和平面三角知识的精华,给出了球面三角的正弦和余弦定理.它无疑是欧洲第一本这方面内容的标准著作.尽管如此,当时的球面三角学仍是很不完善的,因为在他的著作中只用到正弦和余弦,且钝角的余弦和正切(负值)没有被承认为数.

16世纪,韦达(Viete,F.)把球面三角进一步系统化,在其《标准数学》中,对球面直角三角形,导出了用已知的两元素求另一未知元素的公式,并给出了帮助记忆这套公式的法则,即现在所说的纳皮尔法则.同时,还提出了关于钝角球面三角形角的余弦公式.17世纪初,对数的发明以及详细的三角函数表和三角函数对数表的出版,从根本上改进了球面三角的计算.

18世纪,微积分的发展使球面三角公式以优美、简单的形式出现.欧拉(Euler,L.)是现代球面三角学的创始人.他使球面三角学形成了完备的理论体系.这方面的代表著作有《球面三角基础》(1753年)和《综合球面三角学》(1779年).之后,德朗布尔(Delambre,J.-B.J.)于1807年提出德朗布尔公式(球面三角形中两角和、差之半的正弦、余弦公式);默比乌斯(Möbius,A.F.)于1846年将球面三角形的边、角的界限推广到2π,从而打破了欧拉球面三角形每条边和每个角小于π的限制;高斯(Gauss,C.F.)、罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)和施图迪(Study,E.)对球面三角的一些概念作了进一步的推广.罗巴切夫斯基在他的著作《虚几何学》中给出了关于球面三角形边和角的一些公式.这样,球面几何就更完备了.

中国古代数学家也为球面几何的发展做出了贡献.王恂和郭守敬,在他们编制的《授时历》中,当已知太阳的黄道经度,求其赤经和赤纬时,便应用了与球面三角类似的计算方法,并得到了与现代球面三角公式相当的两个著名公式.薛凤祚汇编了丛书《天学会通》,其中有一部名为《三角法》,比较系统地介绍了当时欧洲的平面三角和球面三角法,并配以对数计算.给出的球面三角公式中包括了有名的德朗布尔比例式和纳皮尔比例式.更值得称赞的是梅文鼎,他在球面三角学方面的贡献集中在《弧三角举要》、《堑堵测量》和《环中黍尺》这三部著作中.《弧三角举要》是中国最早的一本球面三角学专著.《堑堵测量》和《环中黍尺》中,对球面三角公式作了补证.原来从西方传入中国的三角学,大都只有名目或公式,缺乏解释和理论证明.对此,梅文鼎很不满意,他经数十年之探索,一一给以补充证明.在《堑堵测量》中,他成功地把球面三角形各弧、角间的关系化为四棱锥或三棱锥上各线、角间的关系来研究;在《环中黍尺》中,他创造性地利用投影原理,把球面三角的问题转化为平面三角问题加以解决.

球面几何学(spherical geometry) 即“球面几何”.

双重椭圆几何(double elliptic geometry) 见

"球面几何".

球 面 图 形

球面图形(spherical figure)　球面几何的研究对象,指所有点都在同一球面上的几何图形.在球面几何学中,主要研究的球面图形有球面大圆、小圆、球面多边形、球面二角形和球面三角形等.

对径点(antipodal points)　亦称径穿相对点或对心点.球面几何的基本概念.指大圆(或球)的同一条直径的两个端点.见本卷《立体几何》中的"球面".

对心点(antipodal points)　即"对径点".

球面圆(spherical circle)　球面几何的基本概念之一.球面在空间中与平面相交时的交线圆.包括平面通过球心时交成的球面大圆和平面不通过球心时与球面相交而成的球面小圆.垂直于球面圆所在平面的直径的两个端点(对径点)称为球面圆的球面中心,亦称为球面圆的极.球面大圆的圆弧、优弧、劣弧、余弧、共轭弧依次称为球面大圆弧、大圆优弧、大圆劣弧、余大圆弧、共轭大圆弧.当提到连结球面上非对径的两点的大圆弧时,通常指大圆劣弧.此大圆弧的长度称为此两点间的球面距离.因为球面上非对径的两点与球心不共线而决定一个平面,这两点就在由此平面与球面相交的惟一大圆上,所以上述球面距离的定义适用于球面上非对径的任意两点.至于球面的两个对径点,自然地以半大圆弧的长度作为它们的球面距离.球面圆的球面中心与球面圆上的点的球面距离相等,即球面圆是球面上与一个定点的距离等于定值的点的轨迹,此定点即球面圆的球面中心或极.这个定值称为球面圆的球面半径,亦称为球面圆的角半径、弧半径或极距.球面大圆的球面半径等于一象限弧.球面小圆与两个球面中心(极)相应有小于和大于一象限弧的两个球面半径,球面半径小于一象限弧的极称为近极,另一个称为远极,由于球面小圆的球面中心通常是指离该圆所在平面的距离较近的那个近极,因此,球面小圆的球面半径通常指小于一象限弧的那一个.

球面圆的球面中心(spherical center of a spherical circle)　见"球面圆".

球面圆的极(poles of a spherical circle)　即"球面圆的球面中心".

球面大圆弧(great circular arc of a sphere)　简称大圆弧.见"球面圆".

大圆弧(great circular arc)　球面大圆弧的简称.

大圆优弧(manor arc of a great circle)　见"球面圆".

大圆劣弧(minor arc of a great circle)　见"球面圆".

余大圆弧(complement of a great circular arc)　见"球面圆"和本卷《平面几何》中的"余弧".

共轭大圆弧(conjugate great circular arcs)　见"球面圆"和本卷《平面几何》中的"共轭弧".

球面圆的球面半径(spherical radius of a spherical circle)　亦称球面圆的角半径或球面圆的极距.球面圆的球面中心到该球面圆上任一点的球面距离(参见"球面圆").圆的球面半径通常指小于或等于一象限弧的那个半径.图中,大圆弧 AM(小于一象限弧)是球面小圆 C_1 的球面半径.大圆弧 PQ(等于一象限弧)是球面大圆 C_2 的球面半径.

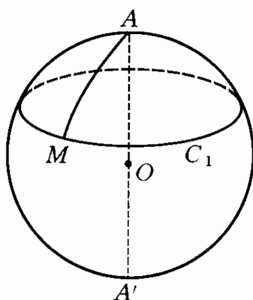


图 1

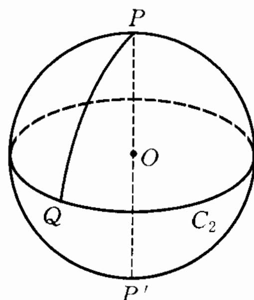


图 2

球面圆的角半径(angular radius of a spherical circle)　即"球面圆的球面半径".

球面圆的极距(polar distance of a spherical circle)　即"球面圆的球面半径".

球面圆的轴(axis of a spherical circle)　球面几何的基本概念之一.指垂直于球面圆所在平面的球的直径.有时也将该直径所在的直线称为球面圆的轴.

球面大圆(great circle of a sphere)　简称大圆.见"球面圆".

大圆(great circle)　球面大圆的简称.

有向大圆(directed great circle)　亦称定向大圆.球面大圆的一种.指规定了正方向的大圆.在球面大圆上,一动点从任意一点出发可按两个相反的方向沿大圆周移动,最后回到起始位置,在这两个方向中,如果规定其中一个为正向,那么另一个就是负向,这样规定了正方向的大圆称为有向大圆.规定了始端和终端的大圆弧,称为有向大圆弧或定向大圆弧.在有向大圆上,与指定的正方向相同的有向大圆弧称为正向大圆弧;与指定的正方向相反的有向大圆弧称为负向大圆弧.

有向大圆弧(directed great circular arc)　见"有向大圆".

正向大圆弧(positively directed great circular arc)　见"有向大圆".

负向大圆弧(negatively directed great circular

arc） 见“有向大圆”.

象限弧(quadrantal arc) 简称象限，见本卷《平面几何》同名条.

相等大圆弧(equal great circular arcs) 大圆弧间大小的比较. 指同一球面或等球面上，所对中心角相等的大圆弧.

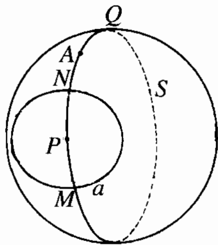
补大圆弧(supplement of a great circular arc) 球面几何的基本概念之一. 球面大圆的一半被异于端点的一点分成两段，其中每一段弧称为另一段弧的补大圆弧.

同向大圆弧(same directed great circular arcs) 亦称相同定向大圆弧. 球面几何的基本概念之一. 指在同一球面大圆上的定向相同的有向大圆弧.

反向大圆弧(great circular arcs of oppositely directed) 亦称相反定向大圆弧. 球面几何的基本概念之一. 指在同一球面大圆上的定向相反的两条有向大圆弧.

两点间的球面距离(spherical distance between two points) 刻画两点间关系的一个数. 球面上连结这两点的大圆弧的长度. 若这两点非对径时，通常指大圆劣弧. 在球面上，连结两点的所有曲线(弧)中，以这两点间的球面距离为最短(参见“球面圆”).

点到球面圆的球面距离(spherical distance from a point to a spherical circle) 刻画点与球面圆位置关系的一个数. 如图所示. 给定球面上一点 A 和一个球面圆 a，过点 A 作一大圆 S，与球面圆 a 垂直相交于 M,N 两点，则大圆弧 AM，AN 中的较短者，称为点 A 到球面圆 a 的球面距离.



球面上两大圆垂直(mutually perpendicular of two great circles on a sphere) 球面上两个大圆间的一种位置关系. 球面上两个大圆所构成的球面角是直角. 两个大圆垂直的充分必要条件是其中一个大圆通过另一个大圆的极.

球面小圆(small circle of a sphere) 简称小圆(参见“球面圆”和本卷《立体几何》中的同名条). 球面小圆上的任一段弧称为球面小圆弧，简称小圆弧. 球面上任意两点间的球面小圆弧之长不是这两点间的球面距离.

小圆(small circle) 球面小圆的简称.

球面小圆弧(small circle arc of sphere) 见“球面小圆”.

小圆弧(small circle arc) 球面小圆弧的简称.

球面小圆的近极(near pole of a spherical small circle) 见“球面圆”.

球面小圆的远极(far pole of a spherical small circle) 见“球面圆”.

对径小圆(diametricly opposed small circles) 两小圆的一种特殊位置关系. 指关于球心成中心对称的两个球面小圆. 其中一个小圆的近极(远极)是另一个小圆的远极(近极)，且它们的球面半径(均指小于一象限的那个球面半径)相等.

球面小圆的极圆(polar circle of a spherical small circle) 与一定小圆有某种特定关系的小圆. 球面上与一定小圆相切的动大圆，其极的轨迹是两个对径的小圆. 在这两个小圆中，有一个和定小圆位于同一半球面上，这个小圆就称为定小圆的极圆. 该极圆的近极是定小圆的近极，而它的球面半径和定小圆的球面半径互余.

球面小圆的内部(interior of a spherical small circle) 球面几何的基本概念之一. 球面被一球面小圆分成两个区域，其中小于半球面的那个区域称为球面小圆的内部，而大于半球面的那个区域称为球面小圆的外部.

球面小圆的外部(exterior of a spherical small circle) 见“球面小圆的内部”.

球面大圆与球面小圆垂直(perpendicular between a spherical great circle and a spherical small circle) 球面大圆与球面小圆间的一种相对位置关系. 当球面大圆和球面小圆所在的平面互相垂直时，就称此大圆和小圆是垂直的. 一个大圆和一圆(大圆或小圆)垂直的充分必要条件是前者含后者的极. 设球面上一点不是已知圆的极，过此点和已知圆的两个极点有球面上惟一的与已知圆垂直的大圆.

球面大圆与球面小圆的位置关系(positional relation of a spherical great circle and a spherical small circle) 球面几何研究的基本问题之一. 计有相交、相切和相离三种位置关系. 两圆相交时有且只有两个公共点，相切时有且只有一个公共点，这个惟一的公共点称为切点，相离时无公共点. 若取小圆的球面半径(指小于一象限大圆弧的)r 与从其近极到大圆的球面距离 h 相比较，则当 $r>h$ 时两圆相交，当 $r=h$ 时两圆相切，当 $r<h$ 时两圆相离. 又若取定小圆的任一极(不限于近极)，相应的球面半径为 r，并用 d 表示此极点与大圆的任一极之间的球面距离，q 表示一象限的大圆弧，则两圆的位置关系可由下列三式的等或不等来确定：

$$|q-r|\leqslant d,\quad d\leqslant q+r,\quad d+r\leqslant 3q.$$

当三式都取小于号时两圆相交，当其中至少有一式取等号时两圆相切，当其中至少有一式不成立(即只有取大于号才成立)时两圆相离.

球面大圆与球面小圆相交(intersection between a spherical great circle and a spherical small circle) 见“球面大圆与球面小圆的位置关系”.

球面大圆与球面小圆相离(separation between a spherical great circle and a spherical small circle) 见“球面大圆与球面小圆的位置关系”.

球面大圆与球面小圆相切(contact between a spherical great circle and a spherical small circle) 见“球面大圆与球面小圆的位置关系”.

两球面小圆间的位置关系(positional relation between two spherical small circles) 球面几何研究的基本问题之一.计有相交、相切或相离三种位置关系.两小圆相交时有且只有两个公共点.两小圆相切时有且只有一个公共点,这个惟一的公共点称为切点.相切分两种情形:除切点外,一个小圆的其余点均在另一个小圆的内部(参见“球面小圆的内部”)时称为内切,其余点在另一个小圆的外部时称为外切.两小圆相离时无公共点.相离也分两种情形:其中一个小圆的所有点均在另一个小圆的内部时称为内离,所有点在另一个小圆的外部时称为外离.设两小圆的近极间的球面距离为 d,球面半径分别为 r, r'.两圆的位置关系可由下列二式的等或不等来确定:$|r-r'|\leqq d, d\leqq r+r'$.当两式都取小于号时两圆相交,当第一式取等号时两圆内切,当第二式取等号时两圆外切,当第一式取大于号时两圆内离,当第二式取大于号时两圆外离.如果两小圆任取一极,仍设此二极的球面距离为 d,相应的球面半径为 r, r',并用 q 表示一象限的大圆弧长,则两圆的位置关系可由下列三式的等或不等来确定:$|r-r'|\leqslant d, d\leqslant r+r', d+r+r'\leqslant 4q$.当三式都取小于号时两圆相交,当其中至少有一式取等号时两圆相切,当其中至少有一式不成立(即只有取大于号才成立)时两圆相离.

两球面小圆相交(intersection between two spherical small circle) 见“两球面小圆间的位置关系”.

两球面小圆相离(separation between two spherical small circle) 见“两球面小圆间的位置关系”.

两球面小圆内离(interior separation between two spherical small circles) 见“两球面小圆间的位置关系”.

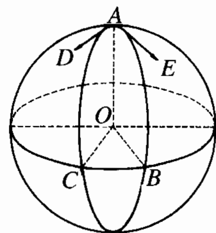
两球面小圆外离(exterior separation between two spherical small circles) 见“两球面小圆间的位置关系”.

两球面小圆相切(contact between two spherical small circles) 见“两球面小圆间的位置关系”.

两球面小圆内切(interior contact between two spherical small circles) 见“两球面小圆间的位置关系”.

两球面小圆外切(exterior contact between two spherical small circles) 见“两球面小圆间的位置关系”.

球面角(spherical angle) 一种特殊的球面图形.指由球面上一点和以此点为公共端点的两条大圆弧所构成的球面图形.公共端点称为该球面角的顶点,两条大圆弧称为该球面角的边.若球面角的顶点是 A,它的两条边分别通过点 B, C(如图),则该球面角可以记为 $\angle BAC$ 或 $\angle CAB$.球面角的度量有以下三种方法:



1. 用由平面 AOC 和 AOB 所构成的二面角来度量.

2. 用以球面角顶点为极的大圆,被该球面角截得的大圆弧 BC 之长来度量.

3. 用过顶点的两条边的切线所夹的角(平面角) $\angle DAE$ 来度量.

球面角也可以定义锐角、直角或钝角.小于 $\pi/2$ 的球面角称为锐球面角,等于 $\pi/2$ 的球面角称为直球面角,大于 $\pi/2$ 的球面角称为钝球面角.

球面角的顶点(vertex of spherical angle) 见“球面角”.

球面角的边(side of spherical angle) 见“球面角”.

锐球面角(acute spherical angle) 见“球面角”.

直球面角(right spherical angle) 见“球面角”.

钝球面角(obtuse spherical angle) 见“球面角”.

对顶球面角(vertical spherical angle) 球面几何的基本概念之一.指具有公共顶点,且其中一个角的两边分别是另一个角的两边(在所在大圆上)的反向延伸线的两个球面角.

邻接球面角(adjacent spherical angle) 球面几何的基本概念之一.指具有公共的顶点和一条公共边、另两条边分居于公共边两侧的两个球面角.特别,当后两条边处于同一个大圆上时,这两个邻接球面角称为邻补球面角.

邻补球面角(adjacent supplement spherical angle) 见“邻接球面角”.

有向球面角(oriented spherical angle) 亦称定向球面角.球面几何的基本概念之一.即规定了始边和终边的球面角.同一球面上的所有有向球面角可按下列方式分为两类.设想观察者站在有向球面角的顶点处(人在球外)观察该有向球面角.这时必可发现下列两种情况之一:

1. 从始边出发扫过角的内部旋转到终边的旋转方向是逆时针的.

2. 从始边出发扫过角的内部旋转到终边的旋转方向是顺时针的.

通常规定逆时针方向是正方向,顺时针方向是负方向,上述第一种有向球面角称为正向球面角,第二种有向球面角称为负向球面角. 对两个有向球面角,若它们的定向相同(即同为正向或同为负向),则称它们是同向球面角;否则,称它们为反向球面角.

正向球面角(positively directed spherical angle) 亦称正定向球面角. 见“有向球面角”.

负向球面角(negatively directed spherical angle) 亦称负定向球面角. 见“有向球面角”.

同向球面角(spherical angle of same direction) 见“有向球面角”.

反向球面角(spherical angle of appositive direction) 见“有向球面角”.

球面二角形(spherical lune) 亦称月形或瓜瓣形. 一种特殊的球面图形. 球面上两个对径点和以这两点为端点的两个半大圆所围成的球面图形称为球面二角形. 构成球面二角形的两个半大圆称为它的边,两个对径点称为它的顶点,一个顶点和两条边所构成的球面角称为它的角. 球面二角形也可以看做是半圆周绕直径旋转某一角度 α 所成的旋转面. 球面二角形的大小可以用其角的大小来表征. 其角是锐角的球面二角形称为锐球面二角形;其角是直角的球面二角形称为直球面二角形;其角是钝角的球面二角形称为钝球面二角形;其角是优角(大于180°,小于360°)的球面二角形称为优球面二角形.

月形(lunar) 即“球面二角形”. 与平面的月形两者同名,但分别是球面图形和平面图形(参见本卷《平面几何》同名条).

瓜瓣形(lunar) 即“球面二角形”.

球面二角形的顶点(vertex of spherical lune) 见“球面二角形”.

球面二角形的边(side of spherical lune) 见“球面二角形”.

球面二角形的角(angle of spherical lune) 见“球面二角形”.

球面二角形的赤道带(equatorial zone of a spherical lune) 球面几何的基本概念之一. 指连结球面二角形两边中点且与该球面二角形的角具有相同度量的大圆弧. 即是以球面二角形顶点为极的大圆上,夹在球面二角形两边之间的那段大圆弧. 若球半径为 R,球面二角形的角的弧度为 α,则球面二角形赤道带长 $R\alpha$,当 $R=1$ 时,赤道带长为 α.

球面二角形对应的二面角(dihedral angle corresponding to a spherical lune) 与给定球面二角形有着某种特定关系的二面角,即以球面二角形两顶点所在的直线为棱、球面二角形两边所在的半平面为面的二面角.

有向球面二角形(directed spherical lune) 一种球面二角形. 指规定了始边和终边的球面二角形.

正向球面二角形(positively directed spherical lune) 有向球面二角形中的一类. 对有向球面二角形两顶点所在的直线指定一个正方向,设想一观察者站在球面二角形的一个顶点处(其从脚到头的方向和上述指定的正方向一致),观察该球面二角形从始边出发经球面二角形的内部到终边的旋转方向. 这有两种可能的情形:

1. 旋转方向是逆时针的.

2. 旋转方向是顺时针的.

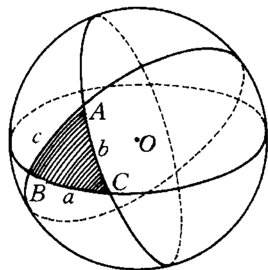
如果规定逆时针方向为正向,顺时针方向为负向,则凡从始边到终边的旋转方向是逆时针的球面二角形,称为正向球面二角形;否则,就称其为负向球面二角形.

负向球面二角形(negatively directed spherical lune) 见“正向球面二角形”.

球面二角形的面积(area of a spherical lune) 刻画球面二角形大小的一个数. 指球面上两个对径点和以这两点为端点的两个半大圆所围成的球面图形的面积. 其计算公式为 $S=2\alpha R^2$,式中 R 是球的半径,α 是球面二角形的角的弧度数.

全等球面二角形(congruent spherical lune) 两球面二角形的一种等价关系. 指能运用球面上的移置使之彼此重合的两个球面二角形. 在同一球面上,当两个球面二角形的角相等时,它们是全等的.

球面三角形(spherical triangle) 球面几何的基本概念之一. 球面上不在同一大圆上的三点 A,B,C 以及大圆劣弧 AB,BC,CA 所围成的球面图形(如图). 记为“球面三角形 ABC”其中,点 A,B,C 称为该球面三角形的顶点,大圆劣弧 AB,BC,CA 称为该球面三角形的边,球面角 $\angle ABC$,$\angle BCA$,$\angle CAB$ 称为该球面三角形的角(有时亦称为球面三角形的内角). 球面三角形是最简单的球面多边形. 在球面三角形定义中,有时并不限制各边均是大圆劣弧,这样定义的球面三角形,称为普遍球面三角形或默比乌斯三角形;而对于各边均是大圆劣弧的球面三角形,则称为欧拉球面三角形.



球面三角形的顶点(vertex of spherical triangle) 见“球面三角形”.

球面三角形的边(sides of spherical triangle) 见“球面三角形”.

球面三角形的角(angles of spherical triangle) 见"球面三角形".

普遍球面三角形(generalized spherical triangle) 见"球面三角形".

欧拉球面三角形(Euler spherical triangle) 见"球面三角形".

默比乌斯球面三角形(Möbius spherical triangle) 见"球面三角形".

球面三角形的基本元素(fundamental elements of a spherical triangle) 组成球面三角形的元素.球面三角形的三条边和三个角的统称.

默比乌斯-施图迪球面三角形(Möbius-Study spherical triangle) 一类特殊的球面三角形.指三边中至少有一条边大于半大圆的球面三角形.

球面三角形的内角(interior angle of a spherical triangle) 球面几何的基本概念之一.由球面三角形的两条相邻边所确定的球面角.一个球面三角形有三个内角,它们之和大于 π.

球面三角形的外角(exterior angle of a spherical triangle) 球面几何的基本概念之一.指球面三角形的任意一个内角的邻补角.一个球面三角形共有六个外角.

球面三角形的内角平分线(interior bisector of a spherical triangle) 研究球面三角形性质的重要元素.通常指平分球面三角形内角的一段大圆弧.它以内角的顶点和所在大圆与该角对边的交点为端点,且位于球面三角形的内部.一个球面三角形有三条内角平分线,它们相交于一点.有时,也可把内角平分线理解为平分球面三角形内角的整个大圆.

球面三角形的外角平分线(exterior bisector of a spherical triangle) 研究球面三角形性质的重要元素.指平分球面三角形的一个外角的球面大圆弧.一个球面三角形有三条外角平分线.

球面三角形的内中线(interior median of a spherical triangle) 研究球面三角形性质的重要元素.通常指以球面三角形的顶点和对边中点为端点,且位于该球面三角形内部的大圆弧.一个球面三角形有三条内中线,它们相交于一点.有时,球面三角形的内中线也可理解为通过该球面三角形的顶点及其对边中点的大圆.

球面三角形的外中线(exterior median of a spherical triangle) 研究球面三角形性质的重要元素.指过球面三角形的一个顶点及对边的补大圆弧之中点的大圆.一个球面三角形有三条外中线.

球面三角形的高线(altitude of a spherical triangle) 研究球面三角形性质的重要元素.过球面三角形的一个顶点作与其对边垂直的大圆,交对边或其延长线于一点,在所作大圆上,以此交点和球面三角形的顶点为端点且小于一象限的那段大圆弧,称为球面三角形在这条边上的高.三个内角不全是直角的球面三角形有三条高线,它们所在的大圆交于两个对径点.若某边的两个邻角都是锐角或都是钝角,则取居于球面三角形内部的弧为高线;若某边的两邻角为一锐角和一钝角,则取小于一象限的弧为高线;若某边的两邻角中仅有一个是直角,则取两垂边之一为高线.不共直径的三个大圆分球面成八个球面三角形,若其中一个三角形的三内角不全是直角,则这八个三角形的三高线(所在大圆)的交点有且仅有两个,它们是对径点.

球面三角形的外接圆(circumcircle of a spherical triangle) 球面三角形与圆的一种重要关系.指经过球面三角形三个顶点的球面小圆.球面三角形的外接圆的球面中心称为球面三角形的外心.它是球面三角形各边的垂直平分线(垂直且平分各边的大圆)的交点.

球面三角形的外心(circumcenter of a spherical triangle) 见"球面三角形的外接圆".

球面三角形的内切圆(inscribed circle of a spherical triangle) 球面三角形与圆的一种重要关系.指在球面三角形的内部且与球面三角形的各边都相切的球面小圆.球面三角形的内切圆的球面中心(即内切圆的近极)称为球面三角形的内心.它是球面三角形各内角平分线的交点.

球面三角形的内心(incenter of a spherical triangle) 见"球面三角形的内切圆".

球面三角形的旁切圆(escribed circle of a spherical triangle) 球面三角形与圆的一种重要关系.指和球面三角形的一边及其余两边的延长线相切的球面小圆.球面三角形旁切圆的球面中心称为球面三角形的旁心.一个球面三角形有三个旁切圆,它们分别是三个旁邻球面三角形的内切圆.

球面三角形的旁心(excenter of a spherical triangle) 见"球面三角形的旁切圆".

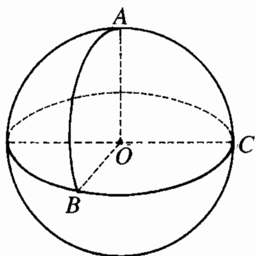
等腰球面三角形(isosceles spherical triangle) 球面三角形的一种.指有两条边相等的球面三角形.在等腰球面三角形中,等边所对的角相等.

等边球面三角形(equilateral spherical triangle) 亦称正球面三角形.球面三角形的一种.指三条边都相等的球面三角形.

正球面三角形(regular spherical triangle) 即"等边球面三角形".

直角球面三角形(right spherical triangle) 球面三角形的一种.即只有一个内角是直角的球面三角形.其直角的对边称为斜边,其余两边称为直角边或垂边.在球面三角形的三个角中,可以有一个、两个或三个直角.含有三个直角的球面三角形称为三

直角球面三角形，它的各边皆为一象限(如图中的球面三角形 ABC). 故又称象限球面三角形. 含有两个直角的球面三角形称为二直角球面三角形，其直角的对边皆为一象限，而第三边与第三角的弧度数相同. 所以，含有两个或三个直角的球面三角形，其边角关系都是确定的，不必再去研究它的解法. 正因如此，在通常情况下，特别是在解球面三角形时，遇到的直角球面三角形通常指只有一个内角是直角的球面三角形. 但有的书上也将直角球面三角形定义为：至少有一个角是直角的球面三角形.



二直角球面三角形(birectangular spherical triangle) 即有两个内角是直角的球面三角形(参见“直角球面三角形”).

三直角球面三角形(trirectangular spherical triangle) 亦称象限球面三角形. 指三个内角均为直角的球面三角形(参见“直角球面三角形”).

象限球面三角形(quadrantal spherical triangle) 即“三直角球面三角形”.

斜角球面三角形(oblique angled spherical triangle) 球面三角形的一种. 指三个内角都不是直角的球面三角形. 三个内角都是锐角的斜角球面三角形，称为锐角球面三角形；至少有一个内角是钝角的斜角球面三角形，称为钝角球面三角形.

锐角球面三角形(acute angled spherical triangle) 见“斜角球面三角形”.

钝角球面三角形(obtuse angled spherical triangle) 见“斜角球面三角形”.

直边球面三角形(right-sided spherical triangle) 球面三角形的一种. 即有一边长为一象限的球面三角形.

初等球面三角形(elementary spherical triangle) 一类特殊的球面三角形. 是与球半径相比三条边均很小，或者其中一边及其对角均很小的球面三角形的统称.

有向球面三角形(directed spherical triangle) 亦称定向球面三角形. 球面三角形的一种. 指规定了三个顶点顺序的球面三角形. 有向球面三角形三个顶点的顺序，规定了球面三角形三条边的环行方向. 这种环行方向有逆时针和顺时针两种(如图). 通常取逆时针方向为正向. 顶点顺序为正向的有向球面三角形称为正向球面三角形或正定向球面三角形；否则，称为负向球面三角形或负定向球面三角形. 两个有向球面三角形在定向相同时称为同向球面三角形，定向相反时称为反向球面三角形. 有向球面三角形的三个内角自然而成为定向协合的有向角.

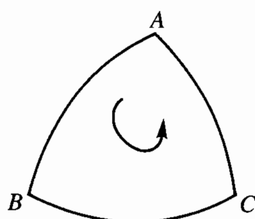


图 1

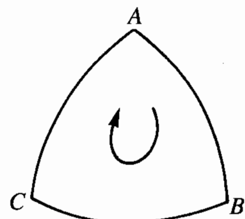


图 2

定向球面三角形(directed spherical triangle) 即“有向球面三角形”.

正向球面三角形(positively directed spherical triangle) 见“有向球面三角形”.

负向球面三角形(negatively directed spherical triangle) 见“有向球面三角形”.

同向球面三角形(spherical triangle of same direction) 见“有向球面三角形”.

反向球面三角形(spherical triangle of oppositive direction) 见“有向球面三角形”.

旁邻球面三角形(adjacent spherical triangle) 一种特殊的球面三角形. 指给定球面三角形的两个顶点和第三个顶点的对径点所构成的球面三角形. 一个球面三角形有三个旁邻球面三角形. 一个球面三角形和它的三个旁邻球面三角形合称为联系球面三角形，而原球面三角形则称为基本球面三角形.

联系球面三角形(associated spherical triangle) 见“旁邻球面三角形”.

基本球面三角形(fundamental spherical triangle) 见“旁邻球面三角形”.

对心球面三角形(oppositely central spherical triangle) 亦称对顶球面三角形. 两个位置相关的球面三角形. 指三个顶点分别互为对径点的两个球面三角形. 对心球面三角形关于球心成中心对称.

对顶球面三角形(vertically opposite spherical triangle) 即“对心球面三角形”.

对称球面三角形(symmetrical spherical triangles) 两个位置相关的球面三角形. 指具有对称性质的两个球面三角形. 对称球面三角形分两种类型：

1. 关于球心成中心对称，即对心球面三角形(参见“对心球面三角形”).

2. 关于某大圆对称(在空间，关于过球心的平面对称).

此时，两球面三角形的对应元素相等，但两球面三角形的定向相反.

全等球面三角形(congruent spherical triangles) 两个球面三角形的一种等价关系. 即在同球面或等球面上，一个球面三角形的三边、三角分别与另一个球面三角形的三边、三角对应相等的两个球

面三角形(参见本卷《平面几何》中的"图形的全等").全等球面三角形可分为两类:

1.定向相同的(称为本质相等的球面三角形或绝对相等的球面三角形).

2.定向相反的(称为镜像相等的球面三角形).在同球面或等球面上,具备下列条件之一的两个球面三角形全等:

1)两角及其夹边对应相等.

2)两边及其夹角对应相等.

3)两角及其中一角的对边对应相等,且其他两角的对边都小于一象限,或都大于一象限.

4)两边及其中一边的对角对应相等,且其他两边的对角均为锐角,或均为钝角.

5)三边对应相等.

6)三角对应相等.

本质相等的球面三角形(essentially equal spherical triangles) 见"全等球面三角形".

绝对相等的球面三角形(absolutely equal spherical triangles) 见"全等球面三角形".

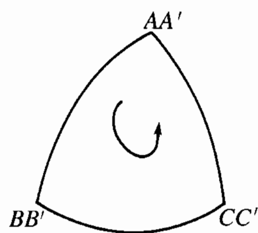
镜像相等的球面三角形(mirror equal spherical triangles) 见"全等球面三角形".

极三角形(polar triangle) 亦称极线三角形或补三角形.球面几何的基本概念之一.如果球面三角形 $A'B'C'$ 与球面三角形 ABC 有如下关系:

1. A',B',C' 分别是大圆 BC,CA,AB 的极.

2. 弧 AA',BB',CC' 均小于 $\pi/2$,

则称球面三角形 $A'B'C'$ 为球面三角形 ABC 的极三角形.相应地,称球面三角形 ABC 为原球面三角形.



极三角形有以下性质:

1.原球面三角形与极球面三角形的关系是相互对偶的,即原三角形的各顶点是极三角形各边的极;极三角形的各顶点是原三角形的各边之极.因此,球面三角形是其极三角形的极三角形.

2.原球面三角形的角(边)与其极三角形的对应边(角)互补.

3.若原球面三角形所有的边都小于 $\pi/2$,则极三角形在原三角形的外部;若原球面三角形的所有边都大于 $\pi/2$,则极三角形在原三角形的内部;若原球面三角形有一边或两边大于 $\pi/2$,而其余边小于 $\pi/2$,则极三角形与原三角形相交.

极线三角形(polar triangle) 即"极三角形".

补三角形(supplemental triangle) 即"极三角形".

球面三角形的球面角盈(spherical excess of a spherical triangle) 亦称球面三角形的球面角超或球面三角形的球面剩余.球面三角形的基本概念.指球面三角形的内角之和与平面三角形的内角之和的差.球面角盈一般用 ε 表示.对于球面三角形 ABC,其球面角盈 $\varepsilon=A+B+C-\pi$.

球面三角形的球面角超(spherical excess of a spherical triangle) 即"球面三角形的球面角盈".

球面三角形的球面剩余(spherical excess of a spherical triangle) 即"球面三角形的球面角盈".

球面三角形的面积(area of a spherical triangle) 球面几何的基本概念之一.指刻画球面三角形大小的数.球面三角形的面积可用下述公式计算:$S=\varepsilon R^2$,式中 R 为球半径,ε 为球面三角形的球面角盈(以弧度为单位).假设球半径取单位长度,则球面三角形的面积等于球面角盈.在同球或等球上,两个球面三角形的面积之比等于其球面角盈之比.

球面折线(spherical broken line) 一种特殊的球面图形.球面上每相邻三点不在同一大圆上的有限多个点 $A,B,C,\cdots,K,L$ 以及劣大圆弧(在相邻两点是对径时是任一半大圆弧)$AB,BC,\cdots,KL$ 的全体称为球面折线 $ABC\cdots KL$,其中点 A 和 L 称为球面折线的端点,点 $B,C,\cdots,K$ 称为球面折线的顶点.大圆弧 $AB,BC,\cdots,KL$ 称为球面折线的边或节.两个端点重合的球面折线,称为封闭球面折线.

球面折线的端点(end point of spherical broken line) 见"球面折线".

球面折线的顶点(vertex of spherical broken line) 见"球面折线".

球面折线的边(side of spherical broken line) 见"球面折线".

球面折线的锁线(chained line of a spherical broken line) 球面几何的基本概念之一.指连结球面折线的两个端点的大圆弧(当两个端点是对径点时是任一半大圆弧).

封闭球面折线(closed spherical broken line) 球面折线的一种.指两个端点重合的球面折线.封闭球面折线围成球面多边形.

简单球面折线(simple spherical broken line) 球面折线的一种.指满足下述条件的球面折线:

1.除顶点外,任意两边都没有其他公共点.

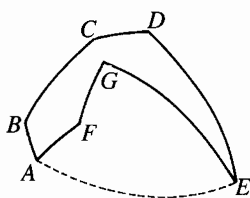
2.相邻两边的公共端点以及折线的两个端点都不在其他边上.

凸球面折线(convex spherical broken line) 一种简单球面折线.即对折线任一边所在大圆来说,其余各边都在同一半球内的简单球面折线.不是凸球面折线的简单球面折线称为凹球面折线.

凹球面折线(concave spherical broken line) 见"凸球面折线".

外包围球面折线(exterior envelopment spheri-

cal broken line) 亦称环抱球面折线.球面折线的一种.两条有公共端点的简单球面折线,若第一条折线在由第二条折线及其锁线所构成的简单球面多边形的内部,则第二条折线称为第一条折线的外包围球面折线,第一条折线称为被包围球面折线.如图,球面折线 $ABCDE$ 是球面折线 $AFGE$ 的外包围球面折线.



环抱球面折线(exterior envelopment spherical broken line) 即"外包围球面折线".

被包围球面折线(exterior envelopment spherical broken line) 见"外包围球面折线".

正球面折线(regular spherical broken line) 球面折线的一种.正球面折线是满足如下条件的球面折线:

1. 各边相等.
2. 相邻两边所夹的球面角均相等.
3. 相邻三边中,首、末两条边位于中间边所在大圆的同侧.

球面多边形(spherical polygon) 一种特殊的球面图形.在球面上依次给出有限个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n(n>2)$,其中相邻三点都不共大圆,依次用劣大圆弧 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_1$ 将它们连结,所围成的球面图形(在相邻两点是对径点时是任一半大圆弧)称为球面多边形.球面多边形就是封闭的球面折线.在球面多边形中,各劣大圆弧称为球面多边形的边;相邻两边的公共端点称为球面多边形的顶点;以相邻两边的公共端点(即球面多边形的顶点)为顶点、相邻两边所在大圆弧为边的球面角称为球面多边形的角.具有三条边的球面多边形称为球面三角形;具有 $n(n>3)$ 条边的球面多边形称为球面 n 边形.

球面多边形的边(side of spherical polygon) 见"球面多边形".

球面多边形的顶点(vertex of spherical polygon) 见"球面多边形".

球面多边形的角(angle of spherical polygon) 见"球面多边形".

球面 n 边形(spherical n-sided polygon) 见"球面多边形".

简单球面多边形(simple spherical polygon) 球面多边形的一种.指由封闭的简单球面折线所围成的球面多边形.如果对于一个简单球面多边形的每一边所在的大圆而言,其余各边都位于以该大圆为界的同一半球面内,则该简单球面多边形称为凸球面多边形;否则,称为凹球面多边形.对于凹球面多边形可以通过添加适当大圆弧化为凸球面多边形来研究.凸球面多边形的周长小于大圆的周长.以简单球面多边形的两个不相邻的顶点为端点的大圆弧称为该简单球面多边形的对角线.

凸球面多边形(convex spherical polygon) 见"简单球面多边形".

凹球面多边形(concave spherical polygon) 见"简单球面多边形".

简单球面多边形的对角线(diagonal of simple spherical polygon) 见"简单球面多边形".

球面区域(spherical domain) 简称球面域.一类特殊的球面点集.若一球面图形 F 将球面上所有不属于 F 的点分为具有下列性质的 A, B 两类,则 A, B 两类点各自所组成的点集分别称为球面区域.

1. 同类中的任意两点,都能用一条与 F 无公共点的球面折线连结起来.
2. 不同类的任何两点,不能用一条与 F 无公共点的球面折线连结起来.

例如,球面大圆把球面分成的两个半球面都是球面区域,两个相交的大圆把球面分成四个区域.

球面域(spherical domain) 球面区域的简称.

简单球面多边形的内部(interior of a simple spherical polygon) 球面几何的基本概念之一.即由简单球面多边形确定的一个区域.构成简单球面多边形的封闭简单球面折线划分球面为两个区域,若其中一个区域称为简单球面多边形的内部,则另一个区域就称为简单球面多边形的外部.对于凸球面多边形,其中一个区域必位于以某大圆 a 为界的同一半球面内,而不含 a 上点的这一区域称为该凸球面多边形的内部,另一区域称为凸球面多边形的外部.以凸球面多边形的两个不相邻的顶点为端点,位于该球面多边形内部的大圆弧,称为凸球面多边形的对角线.对于凹球面多边形,若指定其中任一区域为它的内部,则另一区域为它的外部.

简单球面多边形的外部(exterior of a simple spherical polygon) 见"简单球面多边形的内部".

凸球面多边形的内部(interior of a convex spherical polygon) 见"简单球面多边形的内部".

凸球面多边形的外部(exterior of a convex spherical polygon) 见"简单球面多边形的内部".

凸球面多边形的对角线(diagonal of a convex spherical polygon) 见"简单球面多边形的内部".

凹球面多边形的内部(interior of a concave spherical polygon) 见"简单球面多边形的内部".

凹球面多边形的外部(exterior of a concave spherical polygon) 见"简单球面多边形的内部".

凸球面多边形的内角(interior angle of a convex spherical polygon) 一类特殊的球面角.即以球面多边形的顶点为顶点,相邻两边所在的大圆弧为边,且使得连结这两边另外两个端点的大圆弧位

于该球面多边形内部的球面角.

凸球面多边形的外角(exterior angle of a convex spherical polygon)　一类特殊的球面角.即凸球面多边形内角的邻补球面角(参见"凸球面多边形的内角").

球面多边形的球面角盈(spherical excess of a spherical polygon)　亦称球面多边形的球面角超或球面多边形的球面剩余.球面几何的基本概念之一.这里的球面多边形是指简单球面多边形.简单球面多边形的内角和与同边数的平面多边形的内角和的差称为该球面多边形的球面角盈,一般用 ε 表示.设 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\lambda$ 表示球面 n 边形($n>2$)的各内角的弧度数,则该球面 n 边形的球面角盈为

$$\varepsilon=(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda)-(n-2)\pi.$$

在半径为长度单位的球面上,球面多边形的球面角盈等于此球面多边形的面积.在这种情况下,一个球面多边形以它的球面角盈为度量.

球面多边形的球面角超(spherical excess of a spherical polygon)　即"球面多边形的球面角盈".

球面多边形的球面剩余(spherical excess of a spherical polygon)　即"球面多边形的球面角盈".

简单球面多边形的面积公式(formula of the area of a simple spherical polygon)　球面几何的基本公式之一.简单球面多边形的面积可用下面公式计算:$S=\varepsilon R^2$,式中 R 是球半径,ε 是球面多边形的球面角盈(以弧度为单位).当 R 取为长度单位时,球面多边形的面积等于其球面角盈.

正球面多边形(regular spherical polygon)　球面多边形的一种.指各边相等、各内角也相等的简单球面多边形.

球面平行四边形(spherical parallelogram)　一种球面四边形.指两组对边分别相等的球面四边形.

球面菱形(spherical rhombus)　球面四边形的一种.指四边都相等的球面四边形.球面菱形的对角线互相垂直.

对称球面多边形(symmetrical spherical polygon)　具有特殊位置关系的两个球面多边形.若其中一个球面多边形的顶点依次是另一个球面多边形的顶点的对径点,则这两个球面多边形称为相互中心对称的球面多边形.关于过球心的平面镜像对称的两个球面多边形,称为相互镜像对称的球面多边形.中心对称和镜像对称的球面多边形统称对称球面多边形.

中心对称球面多边形(centrally symmetric spherical polygon)　见"对称球面多边形".

镜像对称球面多边形(mirror symmetrical spherical polygon)　见"对称球面多边形".

全等球面图形(congruent spherical figures)　两球面图形的一种等价关系.若图形 F 和 F' 在同一球面或等球面上,且它们的点之间可建立一一对应关系,使得以 F 的任意两点为端点的大圆弧(劣弧)等于以 F' 的相应两点为端点的大圆弧,则称 F 和 F' 为全等的球面图形.全等球面图形有本质相等和镜像相等两种.在两个全等的球面图形中,若对应的球面三角形同向(反向),且对应的球面角同向(反向),则称这两个球面图形是本质(镜像)相等的球面图形(参见本卷《平面几何》中的"图形的全等").

本质相等的球面图形(essentially equal spherical figures)　见"全等的球面图形".

镜像相等的球面图形(mirror equal spherical figures)　见"全等的球面图形".

关于大圆对称的球面图形(symmetric spherical figures about a great circle)　一类特殊的球面图形,即每一对对应点都关于同一个大圆对称的两个球面图形.设 A 和 A_1 是球面上的两点,若大圆弧 AA_1 被大圆 S 垂直平分,则称点 A 和 A_1 关于大圆 S 对称.如果两个球面图形的点之间存在一一对应关系,且每对对应点都关于大圆 S 对称,则称这两个球面图形关于大圆 S 对称,大圆 S 称为对称轴或反射轴.关于大圆对称的两个球面图形必是镜像相等的,在空间中它们关于该大圆所在的平面对称.

关于大圆的对称点(symmetric point about a great circle)　见"关于大圆对称的球面图形".

球面作图公法(postulation of spherical construction)　公认可以完成的、最基础的若干球面作图问题.它们表征球面作图工具的功能.球面作图公法有如下五种:

1. 以一已知点为极作球面大圆.
2. 确定两已知大圆的交点.
3. 以一已知点为极、已知弧为球面半径作球面小圆.
4. 确定两已知小圆的交点.
5. 确定已知大圆和小圆的交点.

所谓完成一个球面作图问题,就是设法把它归结为以上几个作图公法的有限次的、有序的结合.

球面直尺(spherical rular)　一种几何作图工具.指在球面上作大圆的两脚圆规,但两脚尖间的距离固定等于 $\sqrt{2}R$,其中 R 是球的半径.

球面圆规(spherical compass)　一种几何作图工具.指在球面上作小圆的两脚圆规,利用它可以完成如下球面作图:"已知一个极和相应于该极的球面半径,作球面小圆".

球面基本轨迹(fundamental locus on a spherical surface)　球面几何的基本概念之一.指球面上的一组基本轨迹命题.通常将如下命题作为基本

轨迹命题：

1. 球面上，到一定点 P 的球面距离等于给定大圆弧 r 的点的轨迹是一个圆，该圆以 P 为球面中心，r 为球面半径.

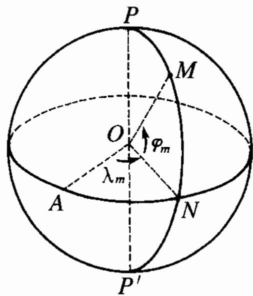
2. 球面上，到一定大圆的球面距离等于给定大圆弧 a（小于一象限）的点的轨迹是两个小圆，它们的球面中心是定大圆的两极，球面半径是给定圆弧 a 的余弧.

3. 球面上，到两个定点 A,B 的球面距离相等的点的轨迹是一个大圆，该大圆通过以 A,B 为端点的两大圆弧的中点，且垂直于大圆弧 AB.

4. 球面上，到两个定大圆的球面距离相等的点的轨迹，是两个互相垂直的大圆，它们各平分两个定大圆的夹角.

莱克塞尔定理(Lexell theorem)　关于球面上点的轨迹的一个定理. 该定理断言：若给定球面三角形的两个顶点及面积，则第三个顶点的轨迹是两个小圆，它们通过两已知顶点的对径点. 莱克塞尔(Лексель, А. И.)在球面三角、球面几何方面发表过四卷集的专著，此定理为他首先证明.

球面坐标系(spherical coordinate system)　用于表示球面上点的位置的一种坐标系. 选定球的一直径 PP'（它的端点 P,P' 称为极），在以 P,P' 为极的大圆（称为基圆或赤道）上选定一原点 A 及该大圆的一个正方向（在 P 点看大圆弧时，取指向为逆时针方向），这样就在球面上确定了一个坐标系，称为球面坐标系. 设 M 是球面上异于两极的任一点，半大圆 $P'MP$（称为子午线或经线）交基圆（赤道）于 N 点，于是两条有向大圆弧 AN 和 NM 就完全确定了 M 点在球面上的位置. 大圆弧 AN 的度数 λ_m（$0°\leqslant\lambda_m<360°$）称为 M 点的经度，大圆弧 NM 的度数 φ_m（$|\varphi_m|<90°$）称为 M 点的纬度. 纬度的正、负视有向弧 NM 和 MP 是否同向来决定. 点 M 的经度和纬度所组成的有序数组(λ_m,φ_m)就是 M 点的球面坐标. 对于极点 P,P'，其纬度的绝对值为 90°；但经度不确定. 对于经度 λ_m，也可以规定它不大于半大圆，即 $-180°\leqslant\lambda_m\leqslant180°$；当有向弧 AN 和基圆的正方向一致时，取正号，否则，取负号.



基圆(base circle)　见"球面坐标系".

赤道(equator)　亦称基圆. 见"球面坐标系".

经线(longitude line)　见"球面坐标系"及本卷《立体几何》中的"旋转曲面".

子午线(meridian)　亦称经线. 见"球面坐标系"及本卷《立体几何》中的"旋转曲面".

经度(degree of longitude)　见"球面坐标系"及"地球赤道坐标系".

纬线(latitude line)　见"球面坐标系"及本卷《立体几何》中的"旋转面".

纬度(degree of latitude)　见"球面坐标系"及"地球赤道坐标系".

地球赤道坐标系(globe equatorial coordinate system)　一种特殊的球面坐标系. 把地球理想化为一个圆球面，在地球面上使用的球面坐标系称为地球赤道坐标系（参见"球面坐标系"）. 这时把取定的两极分别称为地球的南北极；把赤道分成的两半球面，分别按南、北极所在的半球面称为南、北半球；平分南北半球的大圆称为赤道；并把经过英国格林尼治天文台的经线，称为本初经线或子午线；它和赤道的交点称为地球赤道坐标系的一个原点. 地球表面上一点 M 的地理纬度，就是此点在球面坐标系中的纬度，分别称为北纬、南纬，以 φ_m 表示（$0°\leqslant\varphi_m\leqslant 90°$）. 本初经线所在大圆把地球面分成两个半球面，从北极看赤道，本初经线向逆时针方向指的为东半球，向顺时针方向指的为西半球. 地球表面上一点 M 的地球经度就是此点在球面坐标系中的经度，用 λ_m（$0°\leqslant\lambda_m\leqslant180°$）表示. 点 M 在东半球时称东经，在西半球时称西经.

地球的南北极(north ploe and south pole of the earth)　见"地球赤道坐标系".

南半球(southern hemisphere)　见"地球赤道坐标系".

北半球(north hemisphere)　见"地球赤道坐标系".

南纬(south latitude)　见"地球赤道坐标系".

北纬(north latitude)　见"地球赤道坐标系".

本初经线(first meridian)　亦称子午线. 见"地球赤道坐标系".

东半球(eastern hemisphere)　见"地球赤道坐标系".

西半球(western hemisphere)　见"地球赤道坐标系".

东经(east longitude)　见"地球赤道坐标系".

西经(west longitude)　见"地球赤道坐标系".

球面三角

球面三角(spherical trigonometry)　球面几何的一个重要组成部分，专门研究球面三角形的边和角之间的数量关系. 详见"球面几何".

球面半角公式(formulas of spherical half angle)　球面三角的基本公式之一. 即用与球面三角形各边有关的三角函数表示其各角之半的三角函数的

公式. 设 A,B,C 及 a,b,c 表示球面三角形 ABC 的三个角及其相应对边, $p=(a+b+c)/2$. 表示各角之半的三角函数的公式计有:

1. 球面半角正弦公式:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}};$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}};$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.$$

2. 球面半角余弦公式:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}};$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.$$

3. 球面半角正切公式:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}};$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}};$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}.$$

球面半角正弦公式(sine formulas of the spherical half angle) 见"球面半角公式".

球面半角余弦公式(cosine formulas of the spherical half angle) 见"球面半角公式".

球面半角正切公式(tangent formulas of the spherical half angle) 见"球面半角公式".

球面半边公式(formulas of the spherical half side) 球面三角的基本公式之一. 即用与球面三角形各角有关的三角函数表示其各边之半的三角函数的公式. 设 a,b,c 及 A,B,C 表示球面三角形 ABC 的三条边及其相应对角, $P=(A+B+C)/2$. 表示各边之半的三角函数的公式计有:

1. 球面半边正弦公式:

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}};$$

$$\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\sin A\sin C}};$$

$$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\sin A\sin B}}.$$

2. 球面半边余弦公式:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}};$$

$$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-C)}{\sin A\sin C}};$$

$$\cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\sin A\sin B}}.$$

3. 球面半边正切公式:

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\cos(P-A)}{M};$$

$$\tan\frac{b}{2}=\frac{\cos(P-B)}{M};$$

$$\tan\frac{c}{2}=\frac{\cos(P-C)}{M};$$

$$M=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}{-\cos P}}.$$

球面半边正弦公式(sine formulas of the spherical half side) 见"球面半边公式".

球面半边余弦公式(cosine formulas of the spherical half side) 见"球面半边公式".

球面半边正切公式(tangent formulas of the spherical half side) 见"球面半边公式".

纳皮尔公式(Napier formulas) 球面三角的基本公式之一. 即球面三角形中两角(边)和、差之半的正切公式. 设在球面三角形 ABC 中, a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边, 则:

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2};$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2};$$

$$\tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2};$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}.$$

纳皮尔(Napier, J.)模仿平面三角中的正切定理推出上述四个公式, 用于解球面斜三角形.

球面三角形中两角和、差之半的正切公式(tangent formulas for a half of sum or difference of two angles in a spherical triangle) 即"纳皮尔公式".

球面三角形中两边和、差之半的正切公式(tangent formulas for a half of sum or difference of two sides in a spherical triangle) 即"纳皮尔公式".

德朗布尔比例公式(Delambre proportion formulas) 球面三角的基本公式之一. 即球面三角形中两角和、差之半的正弦(余弦)公式. 在球面三角形 ABC 中, 设 a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边, 则:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2};$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\frac{C}{2};$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2};$$

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}.$$

上述公式是德朗布尔(Delambre,J. B. J.)于1807年给出的.

球面三角形中两角和、差之半的正弦公式(sine formulas for a half of sum or difference of two angles in a spherical triangle)　即“德朗布尔比例公式”.

球面三角形中两角和、差之半的余弦公式(cosine formulas for a half of sum or difference of two angles in a spherical triangle)　即“德朗布尔比例公式”.

球面三角形的正弦定理(sine theorem of the spherical triangle)　揭示球面三角形各边的正弦与其对角的正弦间关系的定理.该定理断言:球面三角形各边的正弦与其对角的正弦之比相等,即

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

式中 a,b,c 是球面三角形的三边,A,B,C 分别是 a,b,c 的对角.

球面三角形边的余弦定理(cosine theorem of sides for the spherical triangle)　揭示球面三角形一边的余弦与其他边、角的正、余弦间关系的定理.该定理断言:球面三角形一边的余弦,等于其他两边的余弦之积,再加上这两边的正弦与它们夹角余弦的连乘积,即:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A;$$
$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B;$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,$$

式中 a,b,c 是球面三角形的三边,A,B,C 分别是 a,b,c 的对角.

球面三角形角的余弦定理(cosine theorem of angles for the spherical triangle)　揭示球面三角形一角的余弦与其他角、边的正、余弦间关系的定理.该定理断言:球面三角形一角的余弦,等于其他两角余弦之积的相反数,再加上这两角的正弦与它们夹边余弦的连乘积,即:

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a;$$
$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b;$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c,$$

式中 a,b,c 是球面三角形的三边,A,B,C 分别是 a,b,c 的对角.

球面三角形的正切定理(tangent theorem for a spherical triangle)　揭示球面三角形的两角和、差之半的正切与其对边和、差之半的正切间关系的定理.该定理断言:球面三角形中,两角和、差之半的正切之比,等于这两角所对边的和、差之半的正切之比.例如

$$\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{a-b}{2}},$$

式中 a,b,c 为球面三角形的三边,A,B,C 分别为 a,b,c 的对角.在测量学中,经常使用正切定理的近似式.例如

$$\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\approx\frac{a+b}{a-b}.$$

球面三角形的余切定理(cotangent theorem for a spherical triangle)　亦称球面三角形的余切公式.它揭示了球面三角形相邻四元素间的关系.球面三角形中的四个相邻元素,有以下六种可能的结合:

$$AcBa,cBaC,BaCb,aCbA,CbAc,bAcB.$$

对于每一种结合,首尾两元素称为临界的,其他两元素称为中间的.球面三角形相邻四元素之间有如下关系:中间边的正弦与临界边的余切之积,减去中间角的正弦与临界角的余切之积,等于中间边的余弦与中间角的余弦之积.这些关系称为球面三角形的余切定理,它可以用公式表示如下:

$$\sin c\cot a-\sin B\cot A=\cos c\cos B;$$
$$\sin a\cot c-\sin B\cot C=\cos a\cos B;$$
$$\sin a\cot b-\sin C\cot B=\cos a\cos C;$$
$$\sin b\cot a-\sin C\cot A=\cos b\cos C;$$
$$\sin b\cot c-\sin A\cot C=\cos b\cos A;$$
$$\sin c\cot b-\sin A\cot B=\cos c\cos A.$$

用这六个公式可以解球面三角形.因利用这些公式就可以根据三个已知元素确定其余三个未知元素.

球面三角形的余切公式(cotangent formulas of a spherical triangle)　即“球面三角形余切定理”.

边的正弦与邻角的余弦的乘积公式(product formulas for the sine of a side and the cosine of an adjacent angle)　球面三角形的第一正余弦定理.该定理断言:在球面三角形 ABC 中,关于边的正弦与邻角的余弦之乘积有如下一组公式:

$\sin a\cos B = \sin c\cos b - \cos c\sin b\cos A$；

$\sin b\cos C = \sin a\cos c - \cos a\sin c\cos B$；

$\sin c\cos A = \sin b\cos a - \cos b\sin a\cos C$；

$\sin a\cos C = \sin b\cos c - \cos b\sin c\cos A$；

$\sin b\cos A = \sin c\cos a - \cos c\sin a\cos B$；

$\sin c\cos B = \sin a\cos b - \cos a\sin b\cos C$.

即球面三角形一边的正弦与其一邻角的余弦之积，等于这个邻角的另一邻边的正弦与第三边的余弦之积，再减去这另一邻边的余弦、第三边的正弦及它们夹角余弦的连乘积.

球面三角形的第一正余弦定理(first sine and cosine theorems of the spherical triangle)　即"边的正弦与邻角的余弦的乘积公式".

角的正弦与邻边的余弦的乘积公式(product formulas for the sine of an angle and the cosine of an adjacent side)　球面三角形的第二正余弦定理. 该定理断言：在球面三角形 ABC 中，关于角的正弦与邻边的余弦之乘积有如下一组公式：

$\sin A\cos c = \sin B\cos C + \cos B\sin C\cos a$；

$\sin B\cos a = \sin C\cos A + \cos C\sin A\cos b$；

$\sin C\cos b = \sin A\cos B + \cos A\sin B\cos c$；

$\sin A\cos b = \sin C\cos B + \cos C\sin B\cos a$；

$\sin B\cos c = \sin A\cos C + \cos A\sin C\cos b$；

$\sin C\cos a = \sin B\cos A + \cos B\sin A\cos c$.

即球面三角形一角的正弦与其一邻边的余弦之积，等于这邻边的另一邻角的正弦与第三角的余弦之积，再加上这另一邻角的余弦、第三角的正弦及它们夹边的余弦的连乘积.

球面三角形的第二正余弦定理(second sine and cosine theorem of the spherical triangle)　即"角的正弦与邻边的余弦的乘积公式".

球面直角三角形的边角关系(relation between sides and angles of a spherical right triangle)　球面几何研究的重要课题. 即在球面直角三角形 ABC 中，当 $A=\pi/2$ 时，其余的边、角间有如下关系：

$\cos a=\cos b\cos c$；	$\cos a=\cot B\cot C$；
$\sin b=\sin a\sin B$；	$\sin b=\tan c\cot C$；
$\sin c=\sin a\sin C$；	$\sin c=\tan b\cot B$；
$\cos B=\cos b\sin C$；	$\cos B=\cot a\tan c$；
$\cos C=\cos c\sin B$；	$\cos C=\cot a\tan b$.

为了便于掌握这 10 个公式，纳皮尔(Napier, J.)提出了一个帮助记忆的法则，称为纳皮尔法则，亦称纳皮尔圆形法则. 将球面直角三角形 ABC 两直角边 b,c 分别用 $(\pi/2)-b,(\pi/2)-c$ 代替(如图 1)，不考虑直角 A，将其余五个元素 $a,B,(\pi/2)-c,(\pi/2)-b,C$ 按图 1 中的相对位置标在同一圆周上(如图 2)，则这五个元素中的任何一个，都有两个相邻元素和两个相对(即不相邻)元素. 纳皮尔法则是：每个元素的余弦，等于其相邻两元素余切之积，也等于其不相邻两元素的正弦之积(如图 2).

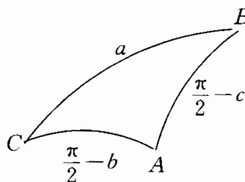


图1

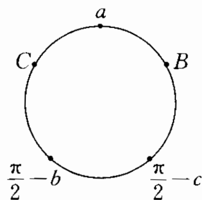


图2

利用这一法则，可得到上述 10 个公式. 例如，对元素 a，按纳皮尔法则，得

$\cos a= \cot B\cot C$,

$$\cos a= \sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right) = \cos b\cos c.$$

纳皮尔法则(Napier rules)　见"球面直角三角形的边角关系".

纳皮尔圆形法则(Napier graph rules)　即"纳皮尔法则".

球面直角三角形的勾股定理(Pythagorean theorem of a right angle spherical triangle)　揭示球面直角三角形斜边与直角边关系的定理. 该定理断言：在球面直角三角形 ABC 中($A=\pi/2$)，斜边 a 的余弦等于两直角边 b,c 的余弦之积：$\cos a=\cos b\cos c$. 这一定理起着与平面几何中的勾股定理相类似的作用.

球面三角形的角盈公式(excess formulas for a spherical triangle)　球面三角的基本公式之一. 即在球面三角形 ABC 中，a,b,c 为三边，A,B,C 分别为它们的对角，$2p=a+b+c$；ε 表示球面三角形 ABC 的球面角盈，则有公式：

$$1.\ \sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin C.$$

$$2.\ \sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\ \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

$$3.\ \tan\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}}.$$

$$4.\ \cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

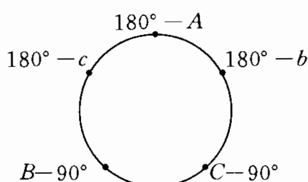
以上公式都是球面三角形的角盈公式. 其中，公式 1,2 是卡努里(Cagnoli)提出的，常被称为卡努里公式；公式 3 是吕利埃(L'Huillier, S.-A.-J.)所提出，常称为吕利埃公式.

球面直边三角形的边角关系(relations between sides and angles of a right sided spherical triangle)

球面三角的基本公式之一. 即在球面直边三角形 ABC 中,设 A,B,C 分别为三边 a,b,c 的对角,且 $a=\pi/2$;除边 a 外,其余的边、角间有如下关系:

$\cos A=-\cos B\cos C$; $\cos A=-\cot b\cot c$;
$\sin B=\sin A\sin b$; $\sin B=\tan C\cot c$;
$\sin C=\sin A\sin c$; $\sin C=\tan B\cot b$;
$\cos b=\cos B\sin c$; $\cos b=-\cot A\tan C$;
$\cos c=\cos C\sin b$; $\cos c=-\cot A\tan B$.

由于球面三角形的角与其极三角形的对应边互补,因此上述公式可由球面直角三角形的边角关系直接推得. 实际上,将球面直边三角形 ABC 中除 a 边外的五个元素按图所示排列,仍沿用纳皮尔法则可得:每个元素的余弦等于其相邻两元素的余切之积,也等于其不相邻两元素的正弦之积. 这样就可以得到以上 10 个关系式.



卡努里公式(Cagnoli formula) 见“球面三角形的角盈公式”.

吕利埃公式(L'Huillier formula) 见“球面三角形的角盈公式”.

球面三角形外接圆的球面半径公式(formulas of spherical radius for a circumcircle of a spherical triangle) 球面三角的基本公式之一. 即在球面三角形 ABC 中,设 a,b,c 为三边,A,B,C 分别为它们的对角,$2P=A+B+C$,$2p=a+b+c$,则其外接圆的球面半径 R 可用以下公式计算:

$$\tan R=\frac{\tan\frac{a}{2}}{\cos(P-A)}=\sqrt{\frac{-\cos P}{\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}};$$

$$\tan R=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}.$$

球面三角形内切圆的球面半径公式(formulas of spherical radius for a inscribed circle of a spherical triangle) 球面三角的基本公式之一. 即在球面三角形 ABC 中,设 a,b,c 为三边,A,B,C 分别为它们的对角,$2P=A+B+C$,$2p=a+b+c$,则其内切圆的球面半径 r 可用以下公式计算:

$$\tan r=\tan\frac{A}{2}\sin(p-a)=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}};$$

$$\tan r=\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\sin a}=\frac{\sqrt{-\cos P\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

球面三角形旁切圆的球面半径公式(formulas of spherical radius for a escribed circle of a spherical triangle) 球面三角的基本公式之一. 即在球面三角形 ABC 中,设 a,b,c 为三边,A,B,C 分别为它们的对角,$2P=A+B+C$,$2p=a+b+c$,设与边 BC 及另两边延长弧都相切的旁切圆的球面半径为 r_a,它可用以下公式计算:

$$\tan r_a=\tan\frac{A}{2}\sin p=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin(p-a)}};$$

$$\tan r_a=\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\sin a=\frac{\sqrt{-\cos P\cos(P-A)\cos(P-B)\cos(P-C)}}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

$\tan r_b$,$\tan r_c$ 可用相应的公式计算.

解球面三角形(solving the spherical triangle) 研究球面三角的重要课题. 指根据球面三角形的已知元素求出其他有关的未知元素的过程. 解球面三角形有六个基本问题:

1. 已知三边,求三角.
2. 已知三角,求三边.
3. 已知两边及夹角,求其余的边、角.
4. 已知两角及夹边,求其余的边、角.
5. 已知两边及一对角,求其余的边、角.
6. 已知两角及一对边,求其余的边、角.

利用原三角形与极三角形的关系,上述六种情形可归结为三种,即 1,3,5.

勒让德定理(Legendre theorem) 球面三角形的一种求近似值的解法. 即在一定条件下可将解球面三角形问题近似地归结为解平面三角形问题. 若球面三角形 ABC 的三边比球的半径小得多,则解该球面三角形可近似地归结为解平面三角形 $A'B'C'$,平面三角形 $A'B'C'$ 的各边之长分别等于该球面三角形各对应边之长,而它的各角分别等于该球面三角形各对应角减去 $\varepsilon/3$. 即

$$A'=A-\frac{\varepsilon}{3},\ B'=B-\frac{\varepsilon}{3},\ C'=C-\frac{\varepsilon}{3},$$

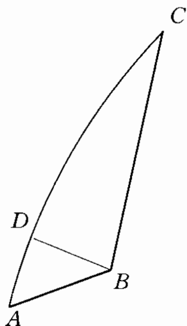
其中 ε 为该球面三角形的球面角盈. 由此引起的误差是微小的. 勒让德定理在大地测量上有广泛应用.

球面角盈表为

$$\varepsilon'' = \frac{bc\sin A'\rho''}{2R^2} \text{ 或 } \varepsilon'' = \frac{b^2\sin A'\sin C'}{\sin B'} \frac{\rho''}{2R^2},$$

式中 b,c 为球面三角形边长，A',B',C' 为归算后的平面角度，$f=\rho''/2R^2$ 是球面角盈为 $1''$ 的三角形面积的倒数. 实际计算时，f(或 $\lg f$)的值可由专门用表查得. 此定理是勒让德(Legendre, A.-M.)于1787年给出的.

初等球面三角形的近似解法(approximate method for solving the elementary spherical triangle)　球面三角形的一种求近似值的方法. 即初等球面三角形(指与球半径相比三边均很小，或者其中一边及其对角均很小的球面三角形)可近似地转化为平面三角形或近似地分割成平面直角三角形与球面直角三角形来求解. 前一种方法适用于与球半径相比，三边均很小的初等球面三角形(参见"勒让德定理"). 后一种方法适用于一边及对角均很小的初等球面三角形. 在球面三角形 ABC 中，若边 AB 及角 C 均很小，则可作另一边上的高 BD，并将△ABD 和△BCD 分别视为平面直角三角形和球面直角三角形来求解.



球面几何的度量结构(metric structure of spherical geometry)　球面几何的基本概念之一. 指在赋予球面度量后，可揭示球面几何中的定理、公式间的内在联系的一种结构. 球面几何是研究二维球面空间中图形的几何性质的学科. 在 $\mathbf{R}^3$ 的子集

$$S_r^2 = \{X \mid X = (x_0, x_1, x_2),\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = r^2, r > 0\}$$

上，给定一个度量 ρ: $S_r^2 \times S_r^2 \to \mathbf{R}$，规定

$$\forall A = (a_0, a_1, a_2), B = (b_0, b_1, b_2) \in S_r^2,$$

$$\rho(A,B) = r \arccos \frac{a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2}{r^2},$$

则 S_r^2 成为一个二维球面空间，记为 (S_r^2, ρ). 称 r 为此球面空间的曲率半径，$1/r^2$ 为高斯曲率，它是正的常数. 特别地，将 $r=1$ 的二维球面空间记为 S^2，并记

$$A \cdot B = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2,$$

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \right).$$

当 $A, B \in S^2$ 时，

$$A \cdot B = \cos \overset{\frown}{AB}, |A \times B| = \sin \overset{\frown}{AB}, \quad (1)$$

式中 $\overset{\frown}{AB} = \rho(A,B) \in [0,\pi]$. $\rho(A,B)$ 称为两点 A 与 B 间的(球面)距离. 它满足如下距离公理：

1. $\rho(A,B) \geqslant 0$，且 $\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

2. $\rho(A,B) = \rho(B,A)$.

3. $\rho(A,X) + \rho(X,B) \geqslant \rho(A,B)$.

因此 S^2 是一个度量空间. 记 $\alpha = \rho(A,B)$，$\alpha \in (0,\pi)$，在三角不等式中，等号成立的充分必要条件是

$$X = \frac{[A\sin(1-t)\alpha + B\sin t\alpha]}{\sin\alpha}, t \in [0,1]. \quad (2)$$

(2)式称为球面线段 AB 的参数方程. 将

$$C' = \frac{A \times B}{|A \times B|} \in S^2$$

定义为有向线段 AB 的极，

$$B' = \frac{A \times C}{|A \times C|} \in S^2$$

定义为有向线段 AC 的极，则 B' 与 C' 间的球面距离 $\overset{\frown}{B'C'}$ 可定义为球面角∠BAC 的大小. 从而有

$$\cos\angle BAC = \frac{(A \times B) \cdot (A \times C)}{|A \times B| |A \times C|}. \quad (3)$$

对于球面三角形 ABC，设有向线段 AB, BC, CA 的极依次为 C', A', B'，则以 A', B', C' 为顶点的球面三角形 $A'B'C'$ 称为球面三角形 ABC 的极三角形或对偶三角形. 记

$$a = \overset{\frown}{BC}, \quad b = \overset{\frown}{CA}, \quad c = \overset{\frown}{AB},$$

$$a' = \overset{\frown}{B'C'}, \quad b' = \overset{\frown}{C'A'}, \quad c' = \overset{\frown}{A'B'}.$$

则有

$$\begin{cases} A + a' = B + b' = C + c' = \pi, \\ A' + a = B' + b = C' + c = \pi. \end{cases} \quad (4)$$

运用拉格朗日恒等式，由(3)式得

$$\cos A = \frac{1}{\sin c \sin b} \begin{vmatrix} 1 & \cos b \\ \cos c & \cos a \end{vmatrix}.$$

容易推得

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A, \\ \cos b &= \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B, \\ \cos c &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

从这一组公式(边的余弦定理)出发，可导出全部球面三角公式. 以上只是运用解析方法从距离公式(1)出发，简略介绍采用度量结构的球面几何与球面三角体系的概貌.

球面空间的曲率半径(radius of curvature of spherical space)　见"球面几何的度量结构".

球面线段的参数方程(parametric equation of spherical segment)　见"球面几何的度量结构".

球面三角形的对偶三角形(dual triangle of spherical triangle)　见"球面几何的度量结构".

撰　稿　方锦暄　李　盛　张文华　郭文海　曹文培
审　阅　马忠林　方锦暄　陈晓中　郭卫中

平 面 解 析 几 何

平面解析几何(plane analytic geometry) 亦称平面坐标几何.用平面坐标法和代数方法研究平面图形性质的学科.其内容包括坐标系的建立,运用代数的计算解决平面上的几何问题,并系统地研究一次和二次的曲线.

坐标方法起源于古代,远在公元前4世纪,中国战国时代的石申制成世界上最早的星表《石氏星经》,就是运用坐标的思想记录了一百多颗恒星的位置.古希腊的阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))曾用两条互相垂直的直线作为研究圆锥曲线的基准,他的《圆锥曲线论》是一部最早关于椭圆、抛物线和双曲线的论著.14世纪在奥尔斯姆(Oresme,N.)的著作中,已有关于经纬度与函数图形表示的萌芽.他用数组表示点的位置,以图线表示因变量与自变量的关系.用代数形式表示几何命题的方法也很早就出现了.中国古代勾股测量提出了开平方的要求.刘徽的《海岛算经》(即《九章重差图》),李冶的《测圆海镜》十二卷(1248)都涉及了几何问题的代数解法.1593年,韦达(Viete,F.)已将古希腊著作中出现的几何形式的恒等关系用代数形式表示出来了.这些坐标思想和代数方法为创立平面解析几何提供了一定的基础.17世纪初,处于文艺复兴时代的欧洲,天文、力学、技术的迅速发展,要求数学用运动变化的观点研究问题.笛卡儿(Descartes,R.)受到奥尔斯姆思想的影响,从古代的天文和地理的经纬线制度中得到启发,于1637年出版了《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》,书中第三个附录《几何学》集中体现了笛卡儿的变量思想和平面坐标方法,为创立平面解析几何奠定了基础.他在平面上引进坐标系,建立了点与数组(x,y)的一一对应关系.进而将曲线看做动点的轨迹,并用含x,y的方程表示,形成他关于几何图形与代数方程互相表达的思想.于是几何问题转化成代数方程,通过代数运算,又可发现许多出乎意料的几何结果,使古典几何中许多难度较大的问题的解法大为简化.与笛卡儿同一时代的费马(Fermat,P. de)也是解析几何的创建者.在他的《平面与立体轨迹引论》(写于1629年,到1679年才出版)中,解析地定义了许多新的曲线,阐述了解析几何的基本原理:"只要在最后的方程里,出现了两个未知数,就得到了一个轨迹……"在很大程度上,笛卡儿从轨迹开始,找出它的方程.费马则从方程出发,来研究轨迹.如何实现这两个转化,正是贯穿于平面解析几何始终的两个基本问题.

解析几何经历了从对平面曲线的研究发展到对空间曲线、曲面的研究这样一个过程.虽然笛卡儿曾提到过立体解析几何,但他没有详细阐述.1679年,拉伊尔(La Hire,P. de)对三维坐标几何作了探讨.1700年以后,该领域才有了系统发展(详见"空间解析几何").

笛卡儿关于变量的思想和坐标方法,使函数概念获得了新生,牛顿(Newton,I.)、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的微积分随之出现,数学由常量数学进入到变量数学的新时期.当时代数和解析作为数学方法是混用的.所以,运用代数方法的平面几何称为平面解析几何,而被认为是代数方法扩展的微积分则称为无穷小量解析,后来解析即分析一词独立成为指包括所有建立在极限过程上的数学.1748年,欧拉(Euler,L.)在他的《无穷小分析引论》一书中,给出了现代形式下的解析几何的系统叙述.这是解析几何发展史上重要的一步.可以把《无穷小分析引论》看做是现代意义下的第一本解析几何教程.普吕克(Plücker,J.)对解析几何有突出的贡献.他的《解析几何的发展》(1828,1831)、《解析几何的体系》(1834)等著作,进一步完善了解析几何.他将点坐标发展为线坐标,从而为普吕克射影几何对偶原理的解析证明提供了基础.还导致了线几何学、圆几何学、维数论的产生和发展.

平面解析几何的理论和方法改变了整个数学的面貌,它的作用远远超过了笛卡儿的期望,从此对平面几何图形的研究进入到系统的定量研究.如抛射体的运动,行星的椭圆形轨道的发现,齿轮和凸轮的制造,透镜的设计等都需要数量知识,代数比几何变得更为重要.将平面坐标几何的方法与微积分结合起来研究光滑曲线便形成了古典微积分几何学的主要内容.从维数上将平面(二维)、空间(三维)解析几何向高维乃至无穷维推广,形成了高维点几何学和泛函分析.平面几何理论还被应用于希尔伯特公理系统的相容性证明和初等几何的机器证明之中.平面解析几何从产生到现在,经历了漫长的道路.现代的平面解析几何无论是方法还是内容都发生了很大变化.方法更加多样,内容更加丰富,应用更加广泛.

在中国,第一本关于解析几何与微积分方面的书是由清代李善兰与英国教士伟烈亚力(Wylie,A.)合译的《代微积拾级》18卷(1859年),前9卷为解析几何.当时他将解析几何译为代数几何,后又有代形合参、经纬几何、狄嘉尔形学等,各有借意.至

1935 年在《数学名词》中正式审定名为解析几何学.

平面坐标几何(plane coordinate geometry)　即"解析几何".

坐　标　法

坐标法(coordinate method)　亦称解析法. 研究几何的一种方法. 在平面或空间引进坐标系以后，平面(空间)中的点便和有序数对(三元有序数组)一一对应，从而几何图形便和方程建立起对应. 这样就可以用方程的知识为工具来研究几何图形的性质. 这种研究几何的方法称为解析法. 相对于此，研究几何的古典方法称为综合法.

直线上点的坐标(coordinate of a point on straight line)　确定直线上点的位置的数. 在直线上选定一个正向，取一个点 O(称为原点)，并且给定一个长度单位(例如可从点 O 起在直线正向一侧另取一点 E 称为单位点，以线段 OE 作为长度单位)，这就在直线上建立了一个坐标系或标架，记为 $\{O;\overrightarrow{OE}\}$. 这种建立了标架的直线称为坐标轴或数轴. 它被原点分成两部分，含点 E 的部分称为正半轴，另一部分称为负半轴. 坐标轴上任一点 M 与有向线段$\overline{OM}$之间具有一一对应关系. 有向线段$\overline{OM}$的数量 x 称为点 M 的坐标，记为 $M(x)$，有 $OM=x$ 或 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OE}$. 设轴上 A，B 两点的坐标分别是 x_1，x_2，据沙勒定理有 $AB=x_2-x_1$，$|AB|=|x_2-x_1|$. 对于数直线(一维欧氏空间)，这两式具有基础性的地位.

原点(origin)　见"直线上点的坐标".

数轴(number axis)　见"直线上点的坐标"及本卷《初等代数》同名条.

正半轴(positive half axis)　见"直线上点的坐标".

负半轴(negative half axis)　见"直线上点的坐标".

坐标(coordiate)　见"直线上点的坐标".

有向直线(directed line)　亦称轴. 解析几何术语. 指选定了正向的直线. 一条直线有两个相反的方向，如果选定其中的一个方向称为正向，那么相反的一个方向就称为负向. 在图上，轴的正向常用箭头来表示.

轴(axis)　即"有向直线".

有向线段(directed line segment)　亦称有序点偶. 解析几何术语. 指规定了端点的次序的线段. 它的第一个端点称为始点，第二个端点称为终点. 以 A 为始点，B 为终点的有向线段记为$\overline{AB}$. 从点 A 到点 B 的方向称为$\overline{AB}$的方向. 点 A 到点 B 的距离，即线段 AB 的长度称为$\overline{AB}$的模或绝对值. 显然，有向线段$\overline{BA}$与$\overline{AB}$是不同的，它们模相等，而方向相反. 有向线段是向量的一种直观模型.

有序点偶(ordered point pair)　即"有向线段".

始点(initial point)　见"有向线段".

终点(finishing point)　见"有向线段".

线段的方向(direction of a line segment)　见"有向线段".

线段的模(modus of a line segment)　见"有向线段".

有向线段的数量(magnitude of a directed line segment)　一个实数. 指有向线段的模连同表示它的方向的正负号. 对位于轴上的任一有向线段$\overline{AB}$，可以用正负号"＋"，"－"来表示它的方向. 当$\overline{AB}$与轴同向时，取正号＋；与轴异向时，取负号－. 有向线段$\overline{AB}$的数量记为 AB. 显然 $BA=-AB$. 也可以将记号$\overline{AB}$与 AB 不加区别，既表示有向线段的数量(数)，又表示有向线段(形). 当点 A 与点 B 重合时，称有向线段$\overline{AB}$为零线段. 它的方向不确定.

零线段(zero segment)　见"有向线段的数量".

沙勒定理(Chasles theorem)　一个著名定理. 即轴上有向线段的加法定理. 对于位于同一轴上的三点 A，B，C，不论它们的顺序怎样，有向线段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$和$\overline{AC}$的数量总有关系式：$AB+BC=AC$. 它是一个基本恒等式，称为沙勒定理. 特别地，上式也适用于两点相互重合的情形. 沙勒定理为射影定理、向量的内积满足分配律等提供了理论基础，而且对于推导公式、求曲线的方程都具有普遍意义. 使得在某一种情况下推导的结果也适用于其他情况. 避免了各种可能位置的繁琐讨论. 该定理是法国几何学家兼数学史家沙勒(Chasles，M.)发现的.

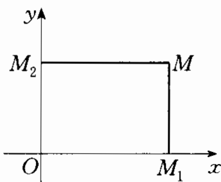
有向线段的加法定理(addition theorem of directed line segments)　即"沙勒定理".

两轴的交角(angle between two intersecting axes)　确定两轴位置关系的一个角. 轴作为有向直线，两轴的交角只考虑以交点为端点的两条正半轴作为射线所成的角. 一般是指不计两轴次序的无向角(参见本卷《平面几何》中的"角"). 有时也考虑与两轴次序有关的有向角(参见本卷《平面三角》中的"有向角").

有向线段在轴上的射影(project of a directed line segment on the axis)　确定有向线段方向的一个数. 平面上给定某轴 u，过有向线段$\overline{AB}$的始点 A 和终点 B 分别作轴 u 的垂线，设垂足分别为 A_u 和 B_u，则轴 u 上有向线段$\overline{A_uB_u}$的数量称为有向线段$\overline{AB}$在轴 u 上的(正)射影，并用记号写成等式：射影$_u$ $\overline{AB}=A_uB_u$. 有关系式：射影$_u$ $\overline{AB}=|AB|\cos\varphi$，式中 φ 是$\overline{AB}$与轴 u 的交角(作为无向角，$\varphi\in[0,\pi]$). 这

个实数也称为向量$\overrightarrow{AB}$在 u 的方向上的分量.

平面直角坐标(rectangular coordinates in plane)　一种常用的坐标.它是创立解析几何的基础.在平面上过一定点 O 作两条互相垂直的轴 x 和 y,在每条轴上取相同的长度单位,这样就在平面上建立了一个直角坐标系,记为 xOy.点 O 称为坐标系的原点.轴 x(通常是水平的)称为横轴或 x 轴,轴 y 称为纵轴或 y 轴,合称坐标轴.平面上任一点 M 的位置便可以这样来确定:由 M 分别作 x 轴、y 轴的垂线,垂足分别是 M_1,M_2.设 M_1 在 x 轴上的坐标为 x,M_2 在 y 轴上的坐标为 y,则 M 相对于坐标系的位置就可以用有序实数对(x,y)来确定.(x,y)称为点 M 的平面直角坐标.x 和 y 分别称为点 M 的横坐标和纵坐标.反过来,对于任意一对有序实数(μ,υ),在 x 轴和 y 轴上,分别有坐标为 μ,υ 的点 P,Q,过 P,Q 分别作 x 轴、y 轴的垂线,它们的交点存在而且惟一.因而平面上有惟一的点和(μ,υ)对应.这样,平面上所有的点和所有的有序实数对之间就建立了一一对应的关系.用向量来描述,设 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 分别是 x 轴和 y 轴上的单位向量,则任意点 $M(x,y)$的向径$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$.因此,点 M 的直角坐标 x,y 由原点 O 和单位向量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 完全确定.$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$称为直角标架,亦可用于表示直角坐标系.通过坐标系的建立,把平面上的点和有序实数对联系起来,从而把平面上点的几何问题转化为其坐标的代数问题,为用代数方法研究几何问题开辟了道路.数与形的这种结合方法是 17 世纪笛卡儿(Descartes,R.)首先系统地提出来的,因此,人们将平面直角坐标系称为平面笛卡儿直角坐标系.



坐标原点(origin of coordinates)　见“平面直角坐标”.

横轴(axis of abscissa)　见“平面直角坐标”.

纵轴(axis of ordinates)　见“平面直角坐标”.

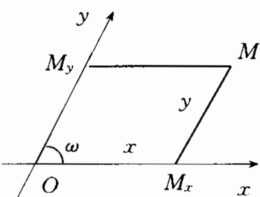
坐标轴(coordinate axis)　见“平面直角坐标”.

横坐标(abscissa)　见“平面直角坐标”.

纵坐标(ordinate)　见“平面直角坐标”.

平面笛卡儿直角坐标系(Cartesian rectangular coordinates system in plane)　见“平面直角坐标”.

平面斜坐标(oblique coordinates in plane)　亦称笛卡儿斜角坐标.平面直角坐标的推广.在平面上过一定点 O 作两条轴 x 和 y,两轴相交一般不成直角.在两条轴上取相同的长度单位,这样就在平面上建立了一个笛卡儿斜角坐标系,简称斜坐标系.两轴的交角$\angle xOy=\omega$ 称为坐标角.平面内任一点 M 的位置可以这样来确定:由 M 分别作 y 轴、x 轴的平行线,与 x 轴、y 轴分别交于 M_x,M_y,则由 M_x,M_y 分别在 x 轴、y 轴上的坐标 x,y(即有向线段$\overline{OM_x}$,$\overline{OM_y}$的数量)所组成的有序实数对(x,y)称为点 M 的斜坐标.平面上建立了斜坐标系后,所有点与全体有序实数对之间具有一一对应关系.显然,直角坐标系可以作为斜坐标系的特例(坐标角 $\omega=\pi/2$),统称平面笛卡儿坐标系.笛卡儿(Descartes,R.)用坐标法来解几何问题时,只引进一条坐标轴.他在给定的轴上标出 x,在与该轴成固定角的线上标出 y,并且作出其 x 的值和 y 的值满足给定关系的点.例如,若要作关系式 $y=x^2$,则对于 x 的每个值,可作出比例式 $1:x=x:y$ 的第四比例项 y.运用此法,可以成功地解决轨迹为高次曲线的问题.



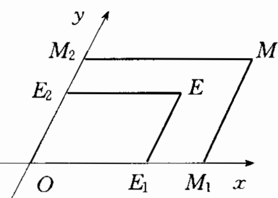
笛卡儿斜角坐标(Cartesian oblique coordinates)　即“平面斜坐标”.

坐标角(coordinate angle)　见“平面斜坐标”.

斜坐标(oblique coordinates)　见“平面斜坐标”.

平面笛卡儿坐标系(Cartesian coordinates system in plane)　见“平面斜坐标”.

平面仿射坐标(affine coordinates in plane)　一种平面坐标.平面上取两条相交的轴 x 与 y,交点 O 称为原点.在两轴上各取一个单位点 E_1,E_2,使 x 轴和 y 轴都成为坐标轴.对于平面上的任意点 M,过 M 作两轴的平行线,设它们与轴 x,y 的交点分别为 M_1,M_2,它们在轴 x,y 上的坐标分别为 x,y.因而点 M 对应着有序实数对(x,y).反过来,任意给一有序实数对(x,y),可以分别在 x,y 轴上作出坐标为 x,y 的点 M_1,M_2,过 M_1,M_2 分别作 y 轴、x 轴的平行线,得到其交点 M.可见平面上所有点与全体有序实数对(x,y)之间存在一一对应关系.这个一一对应关系称为平面仿射坐标系,又称平行坐标系.有序实数对(x,y)称为点 M 的平面仿射坐标,x,y 分别称为点 M 的第一坐标和第二坐标.点 $E(1,1)$称为仿射坐标系的单位点.平面仿射坐标系的两轴上,长度单位一般不同,如果相同就是斜坐标系.两轴的夹角可为任意角,若等于直角,且两轴上的长度单位相同,则为直角坐标系.如用向量来描述,记$\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$.则平面上任意一点 M 的向径$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{OM}$的坐标为$\{x,y\}$,点的坐标则为$(x,y)$,所以坐标系由取定的仿射标架$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$完全确定.或



者说平面仿射坐标系由不共线的三点 O,E_1,E_2 完全确定.

平面仿射坐标系(affine coordinates system in plane) 见"平面仿射坐标".

平行坐标系(parallel coordinate system) 即"平面仿射坐标系".

面积坐标(area coordinates) 一种平面坐标. 平面上任取一个有向三角形 $A_0A_1A_2$,称为坐标三角形. 设它的带号面积为 S,当顶点 A_0,A_1,A_2 按逆时针方向排列时 S 为正;按顺时针方向排列时 S 为负. 任一点 M 的面积坐标是指有序实数组(S_0,S_1,S_2). 其中 S_0,S_1,S_2 依次表示有向三角形 MA_1A_2,A_0MA_2,A_0A_1M 的带号面积,此时恒有 $S_0+S_1+S_2=S$. 设

$$\lambda_i=\frac{S_i}{S}=\frac{h_i}{H_i}\quad(i=0,1,2),$$

这里 h_i 和 H_i 分别为点 M 和 A_i 到对边 $A_jA_k(i,j,k$ 各取 0,1,2 中一个值)的带号距离,$(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$称为点 M 的重心坐标或默比乌斯坐标. 显然有 $\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1$. 坐标三角形的三个顶点的重心坐标为 $A_0(1,0,0)$,$A_1(0,1,0)$,$A_2(0,0,1)$. (点 M 与 A_i 在 A_jA_k 的同侧时,h_i 与 H_i 同号;异侧时异号). 对于平面上任意一点 O,点 M 与它的重心坐标$(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$之间有关系式

$$\overrightarrow{OM}=\lambda_0\,\overrightarrow{OA_0}+\lambda_1\,\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\,\overrightarrow{OA_2}.\qquad(1)$$

重心坐标还具有力学意义. 若以重量 m_0,m_1,m_2 分别放在三角形 $A_0A_1A_2$ 的顶点处,则此三角形的重心 G 的坐标为

$$\left(\frac{m_0}{m_0+m_1+m_2},\frac{m_1}{m_0+m_1+m_2},\frac{m_2}{m_0+m_1+m_2}\right).$$

由(1)式易得

$$\overrightarrow{A_0M}=\lambda_1\,\overrightarrow{A_0A_1}+\lambda_2\,\overrightarrow{A_0A_2}.\qquad(2)$$

因此,若知点 M 的重心坐标$(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$,则$(\lambda_1,\lambda_2)$就是这点在仿射标架$\{A_0;\overrightarrow{A_0A_1},\overrightarrow{A_0A_2}\}$下的仿射坐标. 如果$|A_0A_1|=|A_0A_2|=1$,且 A_0A_1 与 A_0A_2 垂直,则(λ_1,λ_2)就是点 M 的直角坐标. 重心坐标不仅用于几何的研究中,而且用于数值计算方法(如有限元法)和工程技术上. 它是默比乌斯(Möbius,A. F.)于 1827 年写的《重心坐标法》中首先引进的.

坐标三角形(coordinate triangle) 见"面积坐标".

重心坐标(barycentric coordinates) 见"面积坐标".

默比乌斯坐标(Möbius coordinates) 见"面积坐标".

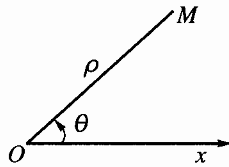
左手系(left-handed system) 解析几何术语. 指用来区分平面和相应的平面仿射坐标系(或空间和相应的空间仿射坐标系)方向的一种方式. 平面上给定不共线三点 O,E_1,E_2 可以确定一个平面仿射坐标系$\{O;\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{OE_2}\}$. 从点 O 到 E_1 再到 E_2,可以是顺时针方向的,也可以是逆时针方向的. 这就反映了平面以及坐标系有两种定向. 通常将逆时针方向定向的称为右手系,而将顺时针方向定向的称为左手系. 空间也有两种定向. 给定不共面 4 点 O,E_1,E_2,E_3,记$\overrightarrow{OE_i}=\boldsymbol{e}_i$,可以确定一个空间仿射坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$. 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的相对位置依次与右手的拇指、食指和中指的指向一致,则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 成右手系,相应的坐标系是右手系或右旋坐标系. 反之,则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 成"左手系",相应的坐标系是左手系或左旋坐标系.

右手系(right-handed system) 见"左手系".

右旋坐标系(right-hand coordinates system) 即"右手系".

左旋坐标系(left-handed coordinates system) 即"左手系".

极坐标(polar coordinates) 一种平面坐标. 在平面上取定称为极点的点 O,从 O 引一条称为极轴的射线 Ox,再选定一个长度单位和计算角度的正方向(通常取逆时针方向为正方向),这样就建立了一个平面极坐标系. 对于平面上任一点 M,它到极点 O 的距离$|OM|=\rho$ 称为点 M 的极径;以极轴 Ox 为始边,射线 OM 为终边所成的有向角$\angle xOM=\theta$ 称为点 M 的极角



(又称辐角),有序实数对(ρ,θ)称为 M 的极坐标,记为 $M(\rho,\theta)$. 当点 M 与极点 O 重合时,$\rho=0$,θ 可以取任意值. 因此 $\rho=0$ 总表示极点,不论 θ 取何值. 为了研究的方便,特别是研究曲线的极坐标方程,也允许 ρ 取负值. 当 $\rho<0$ 时,规定极坐标为(ρ,θ)的点 M 与点 $P(-\rho,\theta)$关于极点 O 成中心对称. 这样,对于任一有序实数对(ρ,θ),平面上总有惟一的点以(ρ,θ)为它的极坐标. 但反过来,一点的极坐标却可以有无限多种表示法. 如果(ρ,θ)是点 M 的极坐标,那么$(\rho,\theta+2k\pi)$,$(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)$也是点 M 的极坐标(k 是整数). 因此,平面上的点与极坐标之间不是一一对应. 如果限定:$\rho>0$,且 $0\leqslant\theta<2\pi$ 或 $-\pi<\theta\leqslant\pi$,那么除极点外,平面上的点与极坐标之间就可以一一对应. 这种极坐标称为狭义极坐标. 前面那种极坐标称为广义极坐标. 对研究螺线特别有用的平面极坐标系,是由雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)和牛顿(Newton,I.)在同时期各自独立创建和使用的,并用它研究了某些特殊曲线. 但极坐标系的完善工作,却得力于赫尔曼(Hermann,J.)和欧拉(Euler,L.). 赫尔曼指明了用极坐标研究曲线的普

遍可行性，给出了直角坐标与极坐标的变换公式，并自由地应用极坐标研究了很多著名的曲线. 欧拉扩充了极坐标理论的使用范围，明确地使用三角函数的记号，基本上构成了现代极坐标的理论系统.

极点(pole) 见“极坐标”.

极轴(pole axis) 见“极坐标”.

极径(radius vector) 见“极坐标”.

极角(polar angle) 见“极坐标”.

狭义极坐标(polar coordinates in narrow sense) 见“极坐标”.

广义极坐标(generalized polar coordinates) 见“极坐标”.

平面极坐标系(polar coordinate system in the plane) 见“极坐标”.

坐标网(coordinate net) 解析几何术语. 指平面仿射坐标系中由两族平行于坐标轴的直线组成的网. 平面极坐标系中由过极点的全体直线(中心直线束)和以极点为共同中心的全体圆(同心圆系)组成的网统称为坐标网. 常用的方格网纸是直角坐标网，极坐标纸画的是极坐标网.

两点间的距离公式(distance formula between two points) 解析几何中的基本公式之一. 在不同的平面坐标系下，距离公式有不同的形式：

1. 在平面直角坐标系下，若知两点 M_1,M_2 的直角坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，则 $\overline{M_1M_2}$ 在 x 轴和 y 轴上的射影分别为

$$x_2-x_1=|M_1M_2|\cos\varphi,$$
$$y_2-y_1=|M_1M_2|\sin\varphi.$$

因此

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2. 若知两点 M_1,M_2 的斜坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则由余弦定理得

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega},$$

式中 ω 是两轴的交角.

3. 若知两点 M_1,M_2 的重心坐标分别为 $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2),(\mu_0,\mu_1,\mu_2)$，则

$$\sum_{i=0}^{2}\lambda_i=\sum_{i=0}^{2}\mu_i=1,$$

$$|M_1M_2|=[-a_2^2(\lambda_0-\mu_0)(\lambda_1-\mu_1)-a_0^2(\lambda_1-\mu_1)(\lambda_2-\mu_2)-a_1^2(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_0-\mu_0)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{g_0(\lambda_0-\mu_0)^2+g_1(\lambda_1-\mu_1)^2+g_2(\lambda_2-\mu_2)^2},$$

式中 $g_0=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2-a_0^2)=a_1a_2\cos A_0,$

$$g_1=\frac{1}{2}(a_2^2+a_0^2-a_1^2)=a_2a_0\cos A_1,$$

$$g_2=\frac{1}{2}(a_0^2+a_1^2-a_2^2)=a_0a_1\cos A_2,$$

这里 a_0,a_1,a_2,A_0,A_1,A_2 是坐标三角形 $A_0A_1A_2$ 的边长和内角.

4. 若知两点 M_1,M_2 的极坐标分别为 (ρ_1,θ_1)，(ρ_2,θ_2)，则由余弦定理得

$$|M_1M_2|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}.$$

有向三角形(directed triangle) 解析几何术语. 指规定了三个顶点的顺序的三角形. 平面上不共线的三点 P_1,P_2,P_3 可有两种顺序，若三点按逆时针方向排列，则称 $\triangle P_1P_2P_3$ 为正向三角形；若三点按顺时针方向排列，则称 $\triangle P_1P_2P_3$ 为负向三角形. 这样规定了方向的三角形称为有向三角形. 若三角形顶点 P_i 的直角坐标为 $(x_i,y_i)(i=1,2,3)$，则有向三角形 $P_1P_2P_3$ 的面积为

$$S(P_1P_2P_3)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\1&1&1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3&x_1\\y_3&y_1\end{vmatrix}\right).$$

当 $\triangle P_1P_2P_3$ 为正向三角形时，$S(P_1P_2P_3)>0$；当 $\triangle P_1P_2P_3$ 为负向三角形时，$S(P_1P_2P_3)<0$. 并有下列关系式：$S(P_1P_2P_3)=S(P_2P_3P_1)=S(P_3P_1P_2)=-S(P_3P_2P_1)=-S(P_1P_3P_2)=-S(P_2P_1P_3)$.

$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=|S(P_1P_2P_3)|$.

若三点 P_i 的极坐标为 $(\rho_i,\theta_i)(i=1,2,3)$，则

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}|\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_3-\theta_2)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_1-\theta_3)|.$$

正向三角形(positive direction triangle) 见“有向三角形”.

负向三角形(negative direction triangle) 见“有向三角形”.

简单多边形的面积公式(area formula of a simple polygon) 一个重要的公式. 即用顶点坐标表示的多边形面积的公式. 设简单多边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的顶点 P_i 的直角坐标为 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$. 简单 n 边形 $P_1P_2\cdots P_n$ 的面积为下式取绝对值

$$\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}x_{n-1}&x_n\\y_{n-1}&y_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_n&x_1\\y_n&y_1\end{vmatrix}\right).$$

交角公式(formula of intersection angle) 计算角的一种公式. 设点 P_i 的直角坐标为 $(x_i,y_i)(i=0,1,2)$，则以射线 P_0P_1 与 P_0P_2 为边的角 $\theta\in(0,\pi)$ 可由余弦定理而得

$$\cos\theta=\frac{|P_0P_1|^2+|P_0P_2|^2-|P_1P_2|^2}{2|P_0P_1||P_0P_2|}$$
$$=\frac{(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}}.$$

由此可得平面解析几何中常用的正切公式

$$\tan\theta=\frac{|(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)|}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)}$$

(参见本卷《空间解析几何》中的“两向量的夹角”).

定比分点(point of division for fixed-ratio) 分一有向线段为定比的点.给定有向线段$\overline{AB}$和实数λ,在直线AB上若存在一点P,使$AP/PB=\lambda$,则称点P为分有向线段$\overline{AB}$成定比λ的分点,或称比为λ的定比分点.若在直线AB上建立坐标系,设点A,B,P的坐标分别为x_1,x_2,x,则由$AP=\lambda PB$,即$x-x_1=\lambda(x_2-x)$,得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1).$$

若在直线AB所在的平面上建立仿射坐标系,设点A,B,P的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x,y)$,则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ (\lambda\neq-1).$$

令$\lambda/(1+\lambda)=t$,则$t=AP/AB$,上面的分点公式可改记为

$$\begin{cases}x=(1-t)x_1+tx_2,\\y=(1-t)y_1+ty_2.\end{cases}$$

当$0<t<1$,即$\lambda>0$时,点P位于A,B之间,是线段AB的内分点;当$t>1$,即$\lambda<-1$时,点P在线段AB的延长线上;当$t<0$,即$-1<\lambda<0$时,点P在线段AB的反向延长线上.因此,当$\lambda<0$但$\lambda\neq-1$时,点P是线段AB的外分点.显然,当$t=0$或1时,点P与点A或点B重合.当$t=1/2$,即$\lambda=1$时,P是线段AB的中点,其坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

质点系重心坐标(coordinates of the barycenter of a particle system) 一种特殊坐标.它是确定质点系重心位置的计算公式.在点$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$上分别放置质量是m_1,m_2的两个质点,它们的重心G的坐标为

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\qquad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

一般地,在点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\cdots,P_n(x_n,y_n)$上分别放置质量是$m_1,m_2,\cdots,m_n$的$n$个质点,它们的重心$G$的坐标为

$$x=\frac{\sum_{i=1}^n m_ix_i}{\sum_{i=1}^n m_i},\qquad y=\frac{\sum_{i=1}^n m_iy_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

对称点的坐标(coordinates of symmetric points) 确定对称点位置的公式.即用一已知点的坐标表示其对称点的坐标.在平面解析几何中,有两类对称点,一类是关于某个定点成中心对称的,属于图形的仿射性质;另一类是关于某条定直线成轴对称的,属于图形的度量性质.它们是讨论曲线的对称性的基础.

1. 在仿射坐标系下,两点$P(x,y)$与$P'(x',y')$关于定点$S(x_0,y_0)$成中心对称的充分必要条件是

$$\begin{cases}(x+x')/2=x_0,\\(y+y')/2=y_0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x'=-x+2x_0,\\y'=-y+2y_0.\end{cases}\tag{1}$$

这是以$S(x_0,y_0)$为对称中心,点$P(x,y)$到点$P'(x',y')$的中心对称变换公式.

2. 在直角坐标系下,两点$P(x,y)$与$P'(x',y')$关于定直线$l:Ax+By+C=0$(或$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0$)成轴对称的充分必要条件是线段$PP'$的中点$((x+x')/2,(y+y')/2)$在直线$l$上,且$PP'\perp l$.即

$$\begin{cases}A(x'-x)+B(y'-y)=-2(Ax+By+C),\\B(x'-x)-A(y'-y)=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x'=x-2A\dfrac{Ax+By+C}{A^2+B^2},\\y'=y-2B\dfrac{Ax+By+C}{A^2+B^2}\end{cases}\tag{2}$$

或

$$\begin{cases}x'=-x\cos2\beta-y\sin2\beta+2p\cos\beta,\\y'=-x\sin2\beta+y\cos2\beta+2p\sin\beta.\end{cases}\tag{3}$$

这就是点$P(x,y)$到点$P'(x',y')$关于直线l成轴对称的反射变换公式.特别地,当l的方程为$y=x$时,点$P(x,y)$的对称点Q的坐标为(y,x).类似地,点$P(x,y)$关于直线$y=-x$的对称点为$(-y,-x)$;点$P(x,y)$关于原点O的中心对称点为$(-x,-y)$;关于x轴的对称点为$(x,-y)$;关于y轴的对称点为$(-x,y)$.

3. 在极坐标系下,任一点$P(\rho,\theta)$关于极点的中心对称点为$((-1)^k\rho,(k+1)\pi+\theta),k\in\mathbf{Z}$;关于极轴的对称点为$((-1)^k\rho,k\pi-\theta),k\in\mathbf{Z}$;关于极垂线(过极点垂直于极轴的直线)的对称点为

$$((-1)^k\rho,\ (k+1)\pi-\theta),\ k\in\mathbf{Z}.$$

中心对称变换公式(formula of central symmetric transformation) 见“对称点的坐标”.

反射变换公式(formula of reflection transformation) 见“对称点的坐标”.

平面仿射坐标变换(affine coordinates transformation in the plane) 一种坐标变换.指平面上任一点对于两个仿射坐标系的坐标之间的对应关系.设任一点M在仿射标架$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$中的坐标为$(x,y)$,在仿射标架$\{O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'\}$中的坐标为$(x',y')$.若$\overrightarrow{OO'}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}'_s=a_s\boldsymbol{e}_1+b_s\boldsymbol{e}_2(s=1,2)$,则从$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{O'M}=x'\boldsymbol{e}'_1+y'\boldsymbol{e}'_2$和$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+x'(a_1\boldsymbol{e}_1+b_1\boldsymbol{e}_1)+y'(a_2\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2)$可得下列仿射坐标变换的公式

$$\begin{cases}x = a_1x' + a_2y' + x_0,\\ y = b_1x' + b_2y' + y_0.\end{cases}\quad \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} \neq 0.$$

当两个仿射标架中有一个是直角标架时可得仿射坐标与直角坐标的关系式，而当两个仿射标架都是直角标架时又可得直角坐标变换的公式.

平面直角坐标变换(rectangular coordinates transformation in the plane)　一种常用的坐标变换. 指平面上任一点对于两个直角坐标系(具有相同的长度单位)的坐标之间的对应关系. 设任一点 M 在坐标系 xOy 中的坐标为 (x,y)，在坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为 (x',y'). 平面直角坐标变换公式可直接从仿射坐标变换公式导出(参见“平面仿射坐标变换”). 设两个直角坐标系都是右手系，直角标架分别是 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$ 和 $\{O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}'\}$，而且 $\angle(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}')=\theta$，即 x 轴和 x' 轴的交角是 θ. 于是 $\boldsymbol{i}'=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}'=-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}$. 再设新坐标原点 O' 的旧坐标为 (x_0,y_0). 直角坐标变换的公式是

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+x_0,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+y_0.\end{cases}$$

如下图，若新坐标轴在旧坐标系 xOy 中的方程为

$$\begin{cases}x'\text{轴}:\quad A_1x+B_1y+C_1=0,\\ y'\text{轴}:\quad A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

式中 $A_1A_2+B_1B_2=0$. 因为 $|x'|$ 是点 M 到 y' 轴的距离，故有

$$|x'|=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

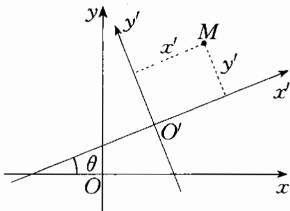
同理有

$$|y'|=\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

可得点 M 的坐标 (x,y) 与 (x',y') 之间的关系式

$$\begin{cases}x'=\pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},\\ y'=\pm\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.\end{cases}$$

要使它成为一般的平面直角坐标变换公式，式中的正负号可以这样选取：$\pm A_2>0$，使 x' 轴与 x 轴的夹角 $|\theta|<(\pi/2)$；为了使新坐标系为右手系，应使 $\pm B_1>0$；当 $A_2=0$ 时，应使 $\pm B_2$ 与 $\pm A_1$ 异号. 直角坐标变换公式也可以通过移轴和转轴两次变换复合而得到. 运用它可以化简二次曲线的方程.



坐标轴的平移(translation of coordinate axes)　一种坐标变换. 设旧坐标系为 xOy，平移后的新坐标系为 $x'O'y'$，新坐标系的原点 O' 在旧坐标系中的坐标为 (x_0,y_0)，平面上任意点 P 的旧坐标是 (x,y)，新坐标是 (x',y')，则关系式

$$\begin{cases}x = x' + x_0,\\ y = y' + y_0\end{cases}$$

称为坐标轴的平移或坐标轴的平移公式，简称移轴公式.

坐标轴的平移公式(translation formula of coordinate axes)　见“坐标轴的平移”.

移轴公式(formula of translation of axes)　坐标轴平移公式的简称.

坐标轴的旋转(rotation of coordinate axis)　一种坐标变换. 在平面内设旧坐标系为 xOy，新坐标系为 $Ox'y'$，坐标轴的旋转角为 θ(见图). 设平面内任意点 P 在旧坐标系中的坐标是 (x,y)，在新坐标系中的坐标为 (x',y')，则关系式

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\end{cases}$$

称为坐标轴的旋转或坐标轴的旋转公式，简称转轴公式. 其逆变换公式为

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}$$

坐标轴的旋转公式(formula of rotation of coordinate axes)　见“坐标轴的旋转”.

转轴公式(formula of rotation of coordinate axes)　坐标轴的旋转公式的简称.

极坐标与直角坐标的关系(relation between polar coordinates and rectangular coordinates)　一点的极坐标与直角坐标间的互换公式. 若取极点作为平面直角坐标系的原点，极轴作为 x 轴的正半轴，在两种坐标系中取相同的长度单位，则此平面上任一点的极坐标 (ρ,θ) 与直角坐标 (x,y) 之间满足下列关系

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta.\end{cases}$$

而任一点的直角坐标 (x,y) 所对应的狭义极坐标 (ρ,θ) 是

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (y\geqslant 0),\\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (y<0)\end{cases}\end{cases}\quad(\theta\in(-\pi,\pi]).$$

两种坐标在互换时常用到关系式

$$\rho^2=x^2+y^2, \quad \tan\theta=y/x \ (x\neq 0).$$

由于这种互换可将某些超越方程变成代数方程，从而采用极坐标为研究曲线提供了某种方便.

斜坐标与直角坐标的关系(relation between oblique coordinates and rectangular coordinates) 一点的斜坐标与直角坐标间的互换公式. 若将平面斜坐标系的横轴与直角坐标系的横轴相重合，并且具有相同的原点和长度单位. 设坐标角为 ω，平面上任一点 P 的直角坐标为 (x,y)，其斜坐标为 (x',y') 则有如下关系式：

$$\begin{cases} x=x'+y'\cos\omega, \\ y=y'\sin\omega, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x'=x-y\cot\omega, \\ y'=y\csc\omega. \end{cases}$$

这就是一点的直角坐标与斜坐标的互换公式.

仿射坐标与直角坐标的关系(relation between affine coordinates and rectangular coordinates) 见"平面仿射坐标变换".

重心坐标与直角坐标的关系(relation between barycentric coordinates and rectangular coordinates) 一点的重心坐标与直角坐标间的互换公式. 在平面直角坐标系下，设重心坐标系的坐标三角形为 $A_0A_1A_2$，其顶点 A_k 的直角坐标为 (a_k,b_k)(即 $\overrightarrow{OA_k}=a_k\boldsymbol{i}+b_k\boldsymbol{j}$)$(k=0,1,2)$. 又设平面上任一点 M 的直角坐标为 (x,y)(即 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$)，其重心坐标为 $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$(即 $\overrightarrow{OM}=\lambda_0\overrightarrow{OA_0}+\lambda_1\overrightarrow{OA_1}+\lambda_2\overrightarrow{OA_2}$). 则有如下关系式：

$$\begin{cases} x=a_0\lambda_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_2, \\ y=b_0\lambda_0+b_1\lambda_1+b_2\lambda_2, \\ 1=\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

这就是一点的直角坐标与重心坐标的互换公式.

曲线的方程(equation of a curve) 解析几何的重要概念之一. 它是用解析法研究曲线的基础. 曲线可以被看做适合某条件的点的集合. 在建立了坐标系以后，曲线的方程就是点在曲线上的充分必要条件的代数表达式. 在某坐标系下，若坐标满足方程 $F(x,y)=0$ 的点的集合是某曲线 C，则称方程 $F(x,y)=0$ 是曲线 C 的方程，而称曲线 C 是方程 $F(x,y)=0$ 的曲线(或图形). 因此，若说方程 $F(x,y)=0$ 是某曲线的方程，必须具备以下两点：

1. 坐标满足方程 $F(x,y)=0$ 的点都在曲线 C 上.

2. 坐标不满足方程 $F(x,y)=0$ 的点不在曲线 C 上.

曲线方程的概念反映了现实世界空间形式与数量关系之间的某种联系. 坐标系的建立在曲线与方程之间确定了一种对应关系，使对曲线的研究和不定方程的研究可以相互转化. 既可以通过对方程的研究来了解曲线的性质，也可以利用形象而直观的几何图形来反映方程、函数中变量间的关系，为代数、分析的研究提供了新的方法. 这里的二元方程 $F(x,y)=0$ 是隐函数形式，所以又称隐式方程或普通方程. 曲线的方程还可以写成参数方程的形式.

方程的曲线(curve of an equation) 见"曲线的方程".

方程的图形(graph of an equation) 见"方程的曲线".

隐式方程(implicit equation) 见"曲线的方程".

普通方程(general equation) 见"曲线的方程"和"曲线的参数方程".

流动坐标(current coordinates) 指动点的坐标.

平面曲线的分类(classification of plane curves) 解析几何研究的重要问题之一. 曲线的方程可以因坐标系的不同而有不同的形式. 但是在平面仿射坐标系(包括平面直角坐标系)下，由于仿射坐标变换和它的逆变换都是一次的，曲线的方程 $f(x,y)=0$ 经仿射坐标变换可以变为

$$f(a_1x'+b_1y'+h_1, a_2x'+b_2y'+h_2)=0,$$

它是关于 x',y' 的方程 $g(x',y')=0$，故当 $f(x,y)$ 是代数式或超越式时，$g(x',y')$ 仍然是代数式或超越式. 代数方程可化简为整式方程. 当 $f(x,y)$ 是 n 次多项式时，$g(x',y')$ 仍然是 n 次多项式. 可见曲线的方程的代数性或超越性以及整式方程的次数都不因仿射坐标系选取的不同而改变，都是曲线固有的不变性质. 因此，在仿射坐标系下，曲线的方程若为代数方程(或超越方程)，则称此曲线为平面代数曲线(或超越曲线). 若代数曲线的方程是 n 次整式方程，则称此曲线为 n 次曲线或 n 阶曲线. n 称为曲线的阶. 在平面解析几何中，一般只系统地研究一次曲线和二次曲线. 更高次的曲线是代数几何系统研究的对象. 在上述曲线分类中，把基础放在仿射坐标系(或直角坐标系)下，是最重要的事. 假如利用极坐标系，这种分类就失去了意义. 例如，在极坐标系中，方程 $\rho=1$ 与 $\rho=2\cos\theta$ 都表示半径为 1 的圆，但它的方程前者是一次的，后者是超越的. 又如在极坐标系下，一次方程 $A\rho+B\theta+C=0$ 的图形：当 $A=0$ 时，是过极点的直线；当 $A\neq 0$ 时，方程可改写成 $\rho=a\theta+\rho_0$. $a=0$ 时是圆. $a\neq 0$ 时是阿基米德螺线.

平面代数曲线(plane algebraic curve) 见"平面曲线的分类".

超越曲线(transcendental curve) 见"平面曲线的分类".

***n* 次曲线**(curve of degree n) 见"平面曲线的分类".

***n* 阶曲线**(curve of order n) 见"平面曲线的分类".

曲线的阶(order of curve)　见“平面曲线的分类”.

零曲线(null curve)　曲线的一种. 如果方程 $F(x,y)=0$ 无实数解，则称这方程的曲线为零曲线. 例如，方程 $x^2+y^2+1=0$ 所表示的曲线就是零曲线.

曲线的分支(branch of curves)　整体曲线的一部分. 当一方程表示两条以上曲线时，其中每一条均称为曲线的分支. 设平面代数曲线的方程为 $F(x,y)=0$，若多项式 $F(x,y)$ 可以分解成两个次数比它低的多项式的乘积，即 $F(x,y)=F_1(x,y)\cdot F_2(x,y)$，则由方程 $F_1(x,y)=0$，$F_2(x,y)=0$ 所确定的代数曲线称为曲线 $F(x,y)=0$ 的分支，或说曲线 $F(x,y)=0$ 是可分解的. 例如，三次曲线 $x^3+y^3-3axy+a^3=0$ 可分解为一条直线 $x+y+a=0$ 和一条二次曲线 $x^2+y^2-xy-ax-ay+a^2=0$. 只有一个分支的代数曲线称为不可约代数曲线.

不可约代数曲线(irreducible algebraic curve)　见“曲线的分支”.

曲线的交点(intersection point of curves)　刻画曲线位置关系的一种特殊点. 指多条曲线的公共点. 在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)下，两曲线 $C_1:f_1(x,y)=0$ 与 $C_2:f_2(x,y)=0$ 的交点与方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

的解成一一对应关系. 若方程组的解集为空集，则曲线 C_1 与 C_2 不相交.

曲线的切线(tangent line of curve)　研究曲线形状的一条重要直线. 设 P 是曲线 C 上一点，Q 是曲线 C 上异于 P 的一点，当点 Q 沿曲线 C 无限趋近于点 P 时，若直线 PQ 趋近于一确定的位置 PT，则称直线 PT 为曲线 C 在 P 点的切线，而点 P 称为切点，并称曲线 C 和直线 PT 在点 P 处相切. 过曲线上一点的切线，是过这点的所有直线中与给定曲线最贴近的直线，是属于曲线在一点邻近的局部性质. 在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)中，过曲线 $y=f(x)$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 上一点 $(x(t_0),y(t_0))$ 的切线方程是

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

过曲线 $F(x,y)=0$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程是

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

在极坐标系下，过曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 上一点 (ρ_0,θ_0) 的切线方程是

$$\rho=\frac{\rho_0^2}{\rho_0\cos(\theta-\theta_0)-\rho_0'\sin(\theta-\theta_0)}.$$

以上 $x'(t_0)$，$y'(t_0)$，ρ'_0 表示 x,y,ρ 在相应点的导数；$F_x(x_0,y_0)$，$F_y(x_0,y_0)$ 表示 $F(x,y)$ 在 (x,y) 的偏导数. 根据切线的定义，若将平面代数曲线 C 的方程和切线的方程联立起来，将会得出重根. 因此，切线是与曲线有两个重合的交点的直线，可以通过求重根的办法来求切线的方程(参见“二次曲线的切线方程”).

切点(point of contact)　见“曲线的切线”.

曲线的法线(normal of curve)　研究曲线形状的一条重要直线. 过曲线上一点的法线是与过这点曲线的切线垂直的直线. 在平面直角坐标系中，过曲线 $y=f(x)$ 上一点 (x_0,y_0) 的法线方程是

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

过曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 上一点 $(x(t_0),y(t_0))$ 的法线方程是 $x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))=0$. 过曲线 $F(x,y)=0$ 上一点 (x_0,y_0) 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0)}.$$

在极坐标系下，过曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 上一点 (ρ_0,θ_0) 的法线方程是

$$\rho=\frac{\rho_0\rho_0'}{\rho'\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0\sin(\theta-\theta_0)}.$$

以上 $x'(t_0)$，$y'(t_0)$，ρ'_0 表示 x,y,ρ 在相应点的导数；$F_x(x_0,y_0)$，$F_y(x_0,y_0)$ 表示 $F(x,y)$ 在 (x,y) 的偏导数.

曲线方程的求法(method for finding the curvilinear equation)　求曲线方程的一般方法. 曲线的方程是点在曲线上的代数表达形式. 它的求法一般有下列步骤：

1. 选用适当的坐标系.

2. 列出任意点 M 在曲线上的充分必要条件 $P(M)$(多是几何条件、物理条件等).

3. 用点 M 的坐标 x,y 表示条件 $P(M)$ 即得到所求曲线的方程 $f(x,y)=0$.

4. 将方程 $f(x,y)=0$ 化为最简形式，以便于讨论研究.

5. 证明以化简后的方程的解为坐标的点适合条件 $P(M)$，从而肯定化简所得的最简方程就是所求曲线的方程.

若步骤 4 的化简过程是同解变形过程，则步骤 5 可以省略.

方程图形的画法(construction of the graph of an equation)　画方程图形的一般方法. 由方程画出图形(一般是曲线)的基本方法是描点法，这是一种近似画法. 为了提高画图的速度和精度，通常先对方程进行讨论，以了解曲线的大致形态，然后列表、描点、画线. 例如，对于方程 $f(x,y)=0$ 而言，其画图的

主要步骤如下：

1. 讨论曲线的存在范围.

2. 讨论曲线的对称性.

3. 求曲线的截距.

4. 曲线的变化情况(如渐近线，函数的周期性，增减性，凹凸性以及极值点、拐点、尖点等).

5. 列表：先将方程化成函数式 $y=g(x)$ 或 $x=\varphi(y)$，有困难时可以化为参数方程，再计算出若干对应值而列成表格.

6. 描点、画线.

因为初等函数的图象一般是光滑的曲线，所以用描点法画这类函数的图象时要把所描的点用光滑的曲线连结起来. 但应注意某些曲线在某些点处不光滑，例如有尖点.

曲线的对称性(symmetry of curves)　曲线的重要特征之一. 在平面直角坐标系中设曲线 C 的方程为 $F(x,y)=0$. 曲线的对称性情形如下：

1. 如果曲线上任一点 (x,y) 关于 x 轴的对称点 $(x,-y)$ 也在此曲线上，则此曲线关于 x 轴对称. 因此，在曲线的方程 $F(x,y)=0$ 中，以 $-y$ 代替 y 时，方程必不变. 所以，曲线 C 关于 x 轴对称 $\Leftrightarrow C$ 的方程有性质：$F(x,y)=F(x,-y)=0$.

2. 在方程 $F(x,y)=0$ 中，如果以 $-x$ 代替 x，方程不变，则曲线 C 就关于 y 轴对称.

3. 在方程 $F(x,y)=0$ 中，同时以 $-x$ 代替 x，以 $-y$ 代替 y，方程不变，则曲线 C 关于原点对称. 例如，曲线 $y^2=2x$ 关于 x 轴对称；曲线 $y=2x^2$ 关于 y 轴对称；曲线 $xy=1$ 关于坐标原点对称. 在这三种对称性质中，如果有两种同时成立，则第三种也一定成立.

4. 在方程 $F(x,y)=0$ 中，如果以 y 代替 x，以 x 代替 y，方程不变，则曲线 C 关于直线 $y=x$ 为轴对称.

5. 在方程 $F(x,y)=0$ 中，如果以 $-y$ 代替 x，以 $-x$ 代替 y，方程不变，则曲线 C 关于直线 $y=-x$ 为轴对称.

在平面仿射坐标系中，只有关于原点对称的情形 3 成立.

曲线的截距(intercept of a curve)　曲线的重要特征之一. 如果曲线与坐标轴有交点，那么从原点到交点的有向线段的数量，即交点在此坐标轴上的坐标，称为曲线(在坐标轴上)的截距. 曲线在 x 轴上的截距简称横截距，在 y 轴上的截距简称纵截距. 曲线 $f(x,y)=0$ 在 x 轴 $(y=0)$ 上的截距可由方程 $f(x,0)=0$ 解得，在 y 轴 $(x=0)$ 上的截距可由方程 $f(0,y)=0$ 解得.

横截距(intercept of abscissas)　见"曲线的截距".

纵截距(intercept of ordinates)　见"曲线的截距".

曲线的渐近线(asymptote of a curve)　刻画曲线伸向无穷远时变化趋势的一种直线. 如果存在这样的直线，当曲线上的点 M 沿着曲线的一支趋向无穷远时，点 M 到某条直线的距离趋向零，那么就称此直线为该曲线的渐近线. 求曲线的渐近线的方法如下：

1. 设所给曲线的方程为参数式：$x=x(t)$，$y=y(t)$. 当 $t\to t_0$ 时：

1) 若 $x(t)\to\infty$，$y(t)\to\infty$，且 $y(t)/x(t)\to k$，$[y(t)-kx(t)]\to b$，则此曲线有渐近线 $y=kx+b$.

2) 若 $x(t)\to a$，$y(t)\to\infty$，则有渐近线 $x=a$.

3) 若 $x(t)\to\infty$，$y(t)\to b$，则有渐近线 $y=b$.

2. 对于曲线 $y=g(x)$：

1) 当 $x\to\infty$ 时，若 $g(x)\to b$，则有渐近线 $y=b$；若 $g(x)/x\to k$，且 $[g(x)-kx]\to b$，则有渐近线

$$y=kx+b;$$

2) 当 $x\to a$ 时，$g(x)\to\infty$，则有渐近线 $x=a$.

3. 对于代数曲线，其方程是关于 x,y 的 n 次方程 $F(x,y)=0$，设它的所有 n 次项之和为 $\Phi(x,y)$ (n 次齐次式)；将 $y=kx+b$ 代入方程 $F(x,y)=0$，令方程 $F(x,kx+b)=0$ 的最高次项(就是 $\Phi(x,kx)=\Phi(1,k)x^n$)及次高次项的系数等于零，构成以 k,b 为未知数的方程组，解之，便可得渐近线的方程 $y=kx+b$. 方程组有几组解便知有几条渐近线；若出现矛盾方程，就是没有渐近线；若 k,b 不定，可以再令 $F(x,kx+b)=0$ 的第三、第四……项系数等于零与 $\Phi(1,k)=0$ 构成方程组来求 k,b. 这时无穷远点是渐近线与曲线的多重交点. 当 $\Phi(0,1)=0$ 时，曲线有平行于 y 轴的渐近线，可令 $F(x,y)$ 中 y 的最高次项的系数为零，而解得渐近线的方程.

曲线的参数方程 (curvilinear parametric equation)　曲线方程的一种常用形式. 在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)下，如果曲线 C 上任意一点的坐标分量 x,y 都是变数 t 的函数

$$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t)\end{cases}\quad (t\in D),\qquad (1)$$

而且对于 D 内的每一个 t 值，由(1)式确定的点 (x,y) 都在曲线 C 上，那么称方程组(1)为曲线 C 的参数方程. 其中变数 t 称为参变数，简称参数. 它的取值范围 D 是函数 $f(t)$，$g(t)$ 的公共定义域，一般是实数集上的某个区间. 参数方程是通过变数 t 间接表示曲线上点的坐标 x 与 y 间的关系式. 而把直接表示曲线上点的坐标 x 与 y 间的关系式 $F(x,y)=0$ 称为曲线的普通方程. 同一曲线的参数方程可以有不同的形式. 例如，在直角坐标系下，参数方程

$$\begin{cases}x=(1-t)x_1+tx_2\\y=(1-t)y_1+ty_2\end{cases}(t\in[0,1])$$

与

$$\begin{cases}x=x_1+s\cdot\dfrac{x_2-x_1}{d}\\y=y_1+s\cdot\dfrac{y_2-y_1}{d}\end{cases}(s\in[0,d])$$

都表示以 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$为端点的线段,其中

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

设参数 t,s 所对应的点为 M,P,则前者参数 $t=|AM|/|AB|$,后者参数 $s=|AP|$,它们的几何意义不同.一般地,对于曲线 C 的参数方程(1),若作参数代换 $t=t(\theta)$,$\theta\in D'$,$t\in D$,且 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\theta\neq0$,则方程组

$$\begin{cases}x=f(t(\theta))\\y=g(t(\theta))\end{cases}(\theta\in D').$$

仍然是曲线 C 的参数方程.在极坐标系或其他坐标系下,曲线同样有参数方程.

化参数方程为普通方程(change of parametric equation to general equation) 研究曲线方程的重要方法之一.将曲线在仿射坐标系下的参数方程

$$\begin{cases}x=f(t),\\y=g(t).\end{cases}$$

中的参数 t 消去就得到普通方程 $F(x,y)=0$.化参数方程为普通方程的方法主要有:

1.代入消去法.例如,由参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t-1},\\y=\dfrac{2t}{t^3-1}.\end{cases}$$

的前一方程解得 $t=(x+1)/(x-1)$,代入后一方程便得普通方程

$$y=\frac{(x+1)(x-1)^2}{3x^2+1}.$$

2.利用恒等式.例如,由参数方程

$$\begin{cases}x=4+\cos\theta,\\y=\cos\theta+3\sin\theta.\end{cases}$$

利用恒等式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 可得普通方程

$$(x-4)^2+\frac{1}{9}(y-x+4)^2=1.$$

3.化简消去法.例如,由参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t^2+t+1},\\y=\dfrac{5t^2+7t+7}{t^2+t+1}.\end{cases}$$

先化为分子中不含 t^2 的形式,且由

$$x=\frac{t+1}{t^2+t+1}$$

得

$$y=5+\frac{2t+2}{t^2+t+1}=5+2x,$$

即得普通方程 $2x-y+5=0$.

一般说来,化参数方程为普通方程灵活性较大,而且有时很困难,甚至无法消去参数.在化参数方程为普通方程时,还应注意保持方程之间的等价性,即两个方程所表示的曲线要一致.例如,由参数方程

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=2-\sin^2\theta\end{cases}$$

消去参数 θ 得 $y=1+x^2(|x|\leqslant1)$.若不指出 x 的取值范围 $|x|\leqslant1$,则普通方程 $y=1+x^2$ 与原参数方程不等价.

化普通方程为参数方程(change of general equation to parametric equation) 研究曲线方程的重要方法之一.如果曲线在仿射坐标系下的普通方程是 $F(x,y)=0$,那么可以适当选取参数,将普通方程化为参数方程.参数的选择可以由图形的特点或所研究问题的特点来确定.选择参数的一般原则是:对于参变数 $t\in[a,b]$的每个值 t_0,都对应着曲线上惟一的点;反之,对于曲线上任一点,都至少存在一个参数 $t_1\in[a,b]$与之对应.这样,曲线上动点的坐标 x,y 是参数 t 的函数 $f(t)$,$g(t)$,且取值范围一致.选择参数的常用方法有:

1.利用恒等式:例如,将方程

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

化为参数方程,可令 $x=a\cos^3\theta$ 和 $y=a\sin^3\theta$,得

$$\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\y=a\sin^3\theta.\end{cases}$$

又如,双曲线方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

利用恒等式 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$ 可化为

$$\begin{cases}x=a\sec\theta,\\y=b\tan\theta.\end{cases}$$

或者令

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=t\neq0,\quad 有\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=t^{-1}.$$

从而得

$$\begin{cases}x=\dfrac{a(t+t^{-1})}{2},\\y=\dfrac{b(t-t^{-1})}{2}.\end{cases}$$

但是,若利用恒等式 $\mathrm{ch}^2t-\mathrm{sh}^2t=1$ 化为

$$\begin{cases}x=a\,\mathrm{ch}\,t,\\y=b\,\mathrm{sh}\,t.\end{cases}$$

它仅表示双曲线的右支.

2.用过曲线 $F(x,y)=0$ 上一点(x_0,y_0)的直线系方程 $y-y_0=t(x-x_0)$代入方程 $F(x,y)=0$,若能解得 $x=f(t)$,$y=g(t)$,往往就是所求曲线的参数方程.但有时会失掉 $t\to\infty$的一点.例如,在直角坐

标系下，令 $y=tx+R$，可将圆 $x^2+y^2=R^2$ 化为参数方程

$$\begin{cases}x=R\cdot\dfrac{-2t}{1+t^2},\\ y=R\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}.\end{cases}$$

3. 如果曲线的方程 $F(x,y)=0$ 最高次项与最低次项相差一次，例如，方程 $x^3+y^3-3xy=0$，可令 $y=tx$ 而化为参数方程

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3t^2}{1+t^3}.$$

用此方程计算曲线上点的坐标，避免了解三次方程的麻烦，有利于对曲线性质的研究.

参数方程曲线的画法(curve-tracing of parametric equation) 曲线的一种作图法. 即根据参数方程画出曲线. 由曲线的参数方程，给参数以若干个值，就可以计算出曲线上若干个点的坐标，然后用描点法画出曲线. 为了提高画图的速度和精度，通常先对曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}\ (t\in D)$$

进行讨论. 在直角坐标系下，主要讨论下列问题：

1. 范围：函数 $x=f(t)$ 的值域就是曲线上点的横坐标的变化范围；函数 $y=g(t)$ 的值域就是曲线上点的纵坐标的变化范围.

2. 对称性：令 $g(t')=-g(t)$，解出 $t'=\lambda(t)$，代入 $x=f(t')$，若能使 $f(t')=f(t)$，则曲线关于 x 轴对称；若能使 $f(t')=-f(t)$，则曲线关于原点对称. 其余类推.

3. 截距：令 $g(t)=0$，解得 $t=t_i$，则 $f(t_i)$ 为曲线在 x 轴上的截距. 同样，令 $f(t)=0$ 解得 $t=t_j$，则 $g(t_j)$ 为曲线在 y 轴上的截距.

4. 渐近线(参见“曲线的渐近线”).

曲线的极坐标方程(polar coordinates equation of a curve) 曲线方程的一种常用形式. 在平面极坐标系下，若以方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的解为极坐标的点的集合是某曲线 C，则称方程 $F(\rho,\theta)=0$ 为曲线 C 的极坐标方程，而称曲线 C 为极坐标方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的图形. 在极坐标系下研究曲线，一般不采用狭义极坐标. 给定一对实数 (ρ,θ)，平面上虽有惟一确定的点与之对应，但是平面上任一点 M 的极坐标却有可数多个 $((-1)^k\rho,\theta+k\pi)$(k 为整数)，特别对于极点 $\rho=0$，极角 θ 可取任意实数. 因此，若方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的图形是曲线 C，则方程

$$F((-1)^k\rho,\theta+k\pi)=0\qquad(1)$$

的图形也是曲线 C，即在式(1)中，当 k 取 $0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，所对应的方程都是曲线 C 的方程. 例如，方程 $\rho=a\sqrt{\cos2\theta}$ 与 $\rho=(-1)^ka\sqrt{\cos2(\theta+k\pi)}$(当 k 为奇数时，可化简为 $\rho=-a\sqrt{\cos2\theta}$)的图形相同，它们都是双纽线 $\rho^2=a^2\cos2\theta$ 的方程. 可见，在极坐标系下，某些曲线的极坐标方程，不但其形式可能不同，而且可以是互不等价的(方程的解集不同). 为了避免曲线有互不等价的多个形式的方程，也有把曲线的极坐标方程改作如下定义. 在极坐标系中，设有曲线 C 与方程 $F(\rho,\theta)=0$，如果满足下列两条：

1. 以方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的解 (ρ,θ) 为极坐标的点都在曲线 C 上.

2. 曲线 C 上任一点的极坐标至少有一个是方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的解. 那么称方程 $F(\rho,\theta)=0$ 为曲线 C 的极坐标方程.

但这个定义中的 1，2 两条并非互逆的命题. 为了简便起见，选取极坐标系来研究曲线，一般仅研究那些方程为显函数形式 $\rho=f(\theta)$ 的曲线，以及少数隐式方程 $F(\rho,\theta)=0$ 可化为显函数形式的曲线.

极坐标方程的图形(graph of polar coordinates equation) 见“曲线的极坐标方程”.

曲线的极坐标方程与直角坐标方程的互化(mutual conversion between polar coordinates equation and rectangular coordinates equation of a curve) 研究曲线方程的重要方法之一. 有两种情形：

1. 化直角坐标方程为极坐标方程. 将互化公式 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入曲线的直角坐标方程 $F(x,y)=0$，即得极坐标方程 $F(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)=0$.

2. 化极坐标方程为直角坐标方程. 这时常常应用公式 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$，$\tan\theta=y/x$ 等.

曲线极坐标方程的通式(general expression of polar coordinates equation of a curve) 曲线极坐标方程的一般形式. 在极坐标系下，如果曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=f(\theta)$，那么对于任何整数 k，方程

$$\rho=(-1)^kf(\theta+k\pi)\qquad(1)$$

也是曲线 C 的极坐标方程. (1)式称为曲线 C 的通式. 每个 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 所对应的方程都称为曲线 C 的特式. 引进通式、特式的概念，对于极坐标方程与直角坐标方程的互化，求两曲线的交点，讨论曲线的周期等问题都将带来方便.

曲线极坐标方程的特式(special expression of polar coordinates equation of a curve) 见“曲线极坐标方程的通式”.

极坐标系下两曲线的交点(intersection point of two curves in polar coordinates system) 求曲线交点的一种方法. 给定两条曲线的极坐标方程 $\rho=f(\theta)$，$G(\rho,\theta)=0$(若两条曲线的方程皆为隐式，可选其一化为显式)，则解方程组

$$\begin{cases}\rho=(-1)^k f(\theta+k\pi) \\ G(\rho,\theta)=0\end{cases}(k \text{ 为整数})$$

便得两曲线除极点外的所有交点.再检验两曲线是否都过极点,从而确定极点是否为交点.

曲线的周期(period of curves) 曲线的重要特征之一.在极坐标系下,对于某些周期函数所表示的曲线,例如,周期为 $2\pi/3$ 的函数 $\rho=\cos 3\theta$,当极角 θ 增加 π 时,曲线将重复出现.对于曲线 $\rho=f(\theta)$,若等式

$$f(\theta+n\pi)=(-1)^n f(\theta)$$

当 θ 取定义域内的每个值时都成立,而且 n 是适合该等式的最小正整数,则称曲线 $\rho=f(\theta)$ 具有周期性,而且把使曲线重复出现的极角 θ 所增加的最小正值 $n\pi$ 称为该曲线的周期.在描绘极坐标方程的图形时,只需要在曲线的一个周期内取 θ 值列表描点便可画出方程的图形.曲线 $\rho=f(\theta)$ 有且仅有 n 个互不等价的特式的充分必要条件是该曲线具有周期性,且曲线的周期为 $n\pi$(n 为正整数).曲线周期与函数周期既有区别又有联系.曲线周期性是仅对极坐标平面上的曲线而言的.曲线 $\rho=f(\theta)$ 有周期的充分必要条件是函数 $f(\theta)$ 为周期函数,且函数周期为 π 的有理数倍.

极坐标方程曲线的画法(construction of the curve of polar coordinates equations) 曲线的一种作图法.即根据极坐标方程画出曲线的方法.为了较准确迅速地用描点法画出曲线,通常先对极坐标方程 $\rho=f(\theta)$ 进行讨论(参见"方程图形的画法").主要讨论下列问题:

1.范围:若函数有界,即 $|f(\theta)|\leqslant r$,则在圆 $\rho=r$ 的外部没有图形.如极坐标方程 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$,$|\rho|\leqslant|a|$,$\cos 2\theta\geqslant 0$,故在圆 $\rho=a$ 的外部以及直线 $\theta=\pi/4$ 到 $\theta=3\pi/4$ 之间都没有图形.

2.对称性:若以 $-\theta$ 代 θ(或 $\pi-\theta$ 代 θ,$-\rho$ 代 ρ),方程不变,则曲线关于极轴对称.若以 $-\rho$ 代 ρ(或 $\theta+\pi$ 代 θ),方程不变,则曲线关于极点对称.若以 $-\rho$ 代 ρ,$-\theta$ 代 θ(或 $\pi-\theta$ 代 θ),方程不变,则曲线关于极垂线对称(参见"对称点的坐标").

3.曲线的周期:若对于函数 f 定义域内任意 θ 值,等式 $f(\theta+n\pi)=(-1)^n f(\theta)$ 有最小正整数解 n,则曲线有周期 $n\pi$,列表时只需在一个周期内取值.

4.渐近方向与渐近线:若存在一个实数 α,当 $\theta\to\alpha$ 时,$\rho=f(\theta)\to\infty$,则直线 $\theta=\alpha$ 的方向称为曲线 $\rho=f(\theta)$ 的渐近方向.由极坐标方程直接求渐近线比较困难,必要时可化为直角坐标方程再确定其渐近线.除列表用描点法画图外,若已知某方程 $\rho=f(\theta)$ 的图形,要画出方程 $\rho=f(\theta+\alpha)$(α 为常数)的图形,可运用极坐标系下的旋转变换

$$\begin{cases}\rho'=\rho, \\ \theta'=\theta+\alpha.\end{cases}$$

曲线的渐近方向(asymptotic direction of a curve) 见"极坐标方程曲线的画法".

直线与圆

一次曲线(curve of the first degree) 一种直线.指一次方程所表示的曲线.因为直线在平面仿射坐标系中的一般方程是二元一次方程 $Ax+By+C=0$,式中 A,B 不全为零(参见"平面曲线的分类"和"直线的一般方程").

直线的倾斜角(angle of inclination of a straight line) 亦称直线的倾角.一种反映直线相对于 x 轴(一般是水平方向)倾斜程度的量.在平面笛卡儿坐标系中,按逆时针方向把 x 轴旋转到首次与已知直线 l 平行,所旋转的角度 α 称为该直线 l 对 x 轴的倾斜角,简称倾角.若直线 l 平行于 x 轴,认为倾斜角为零.倾斜角 $\alpha\in[0,\pi)$.

直线的倾角(angle of inclination of a straight line) 即"直线的倾斜角".

直线的斜率(slope of a straight line) 亦称直线的角系数.描述直线相对于坐标轴的倾斜程度的一种量.在平面直角坐标系下,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 为给定的与 y 轴不平行的直线上的两点,则称

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

为直线 AB 的斜率.同一直线上选取的点不同,直线的斜率不会因此而变化.当直线与 y 轴平行时,斜率不存在,或者说斜率为无穷大并形式地表示成 $k=\infty$,$1/k=0$.若直线对 x 轴的倾斜角为 α,则此直线的斜率 $k=\tan\alpha$.

直线的角系数(angular coefficient of a straight line) 即"直线的斜率".

直线的点斜式方程(point slope form equation of a straight line) 直线方程的一种形式.由直线上一个定点与直线的斜率来表示的直线方程.在平面仿射坐标系中,过点 (x_1,y_1) 斜率为 k 的直线方程是 $y-y_1=k(x-x_1)$.这个方程称为直线的点斜式方程.它不能用来表示平行于 y 轴的直线.

直线的斜截式方程(slope intercept form equation of a straight line) 直线方程的一种形式.由直线的斜率与纵截距来表示的直线方程.在平面仿射坐标系中,方程 $y=kx+b$(一次函数)称为直线的斜截式方程,式中 k 是直线的斜率,b 是直线在纵轴上的截距.

直线的两点式方程(two-point form equation of a straight line) 直线方程的一种形式.由直线

上两定点的坐标表示的直线方程. 在平面仿射坐标系中，经过两个已知点$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$的直线的两点式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

当分母$x_2-x_1=0$时，约定相应的分子$x-x_1=0$，它表示平行于y轴的直线. 当分母$y_2-y_1=0$时，约定相应的分子$y-y_1=0$，它表示平行于x轴的直线. 直线的两点式方程可改写成行列式形式

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

直线的截距式方程(intercept form equation of a straight line)　直线方程的一种形式. 由直线的横纵截距表示的直线方程. 在平面仿射坐标系中，若直线在x轴和y轴上的截距分别为a和b，且$ab\neq 0$，则称方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

为直线的截距式方程. 若直线过原点或与坐标轴平行，这时截距为零或不存在，直线的方程不能写成截距式.

直线的一般方程(general equation of a straight line)　直线方程的一种规范形式. 由二元一次方程的一般形式表示的直线方程. 在平面仿射坐标系中，二元一次方程

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

称为直线的一般方程. 式中A,B不全为零. 当$B\neq 0$时，(1)式可化为斜截式

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

当$B=0$时，$A\neq 0$，(1)式可化为$x=-C/A$，表示与y轴平行(包括重合)的直线. 因为二元一次方程的图形称为一次曲线，所以直线就是一次曲线.

直线的参数方程(parametric equation of a straight line)　直线方程的一种常用形式. 由直线的参数表示的直线方程. 所选的参数不同，直线的参数方程的形式不同. 在平面仿射坐标系中，过两点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$的直线的参数方程(两点式)为

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}(t\in \mathrm{R}), \tag{1}$$

即

$$\begin{cases} x=(1-t)x_1+tx_2 \\ y=(1-t)y_1+ty_2 \end{cases}(t\in \mathrm{R}). \tag{1'}$$

式中(x,y)是动点M的坐标，参数$t=AM/AB$. 当$t\in[0,1]$时，上列方程是线段AB的参数方程. 当$t\in(0,+\infty)$时，方程(1)是射线AB的参数方程. (1)式可以改写为

$$\begin{cases} x=x_1+at \\ y=y_1+bt \end{cases}(t\in \mathrm{R}). \tag{2}$$

式中$b/a=k$是直线的斜率，而a,b称为直线的方向系数. (2)式称为直线的参数方程的一般式. 特别地，在直角坐标系下，参数方程

$$\begin{cases} x=x_1+s\cos\alpha, \\ y=y_1+s\sin\alpha, \end{cases} \tag{3}$$

式中(x_1,y_1)是直线上一点A的坐标，α是直线的倾斜角，参数s表示定点A到动点$M(x,y)$的带号距离，称为自然参数.

直线的方向系数(direction coefficient of a straight line)　见"直线的参数方程".

直线的自然参数(natural parameter of a straight line)　见"直线的参数方程".

直线的法线(normal of a straight line)　确定直线位置的一条直线. 在平面直角坐标系中，已知直线l的过原点的垂线称为直线l的法线. 当l不过原点时，规定从原点到垂足的方向为法线的正方向. 它与x轴的交角$\varphi\in[0,2\pi)$称为法线的辐角. 当l过原点时，规定法线对x轴的倾斜角φ就是它的辐角，这时$\varphi\in[0,\pi)$. 直线的法线的正方向可以用向量$(\cos\varphi,\sin\varphi)$表示.

法线的正方向(positive direction of normal)　见"直线的法线".

法线的辐角(argument of normal)　见"直线的法线".

直线的法线式方程(normal form equation of the straight line)　直线方程的一种形式. 由直线的法线所表示的方程. 在平面直角坐标系中，若已知直线l的法线的辐角为φ，l到原点的距离为p，则称$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$为直线的法线式方程，又称为直线的海色法线式方程. p,φ称为直线的位置参数. 法线式方程的特征：

1. x,y的系数平方和为1.

2. 常数项$-p\leqslant 0$，当$p=0$时，y的系数为正或者为零(如果y的系数也是零，那么这时x的系数为1).

一次方程仅当符合上述两个条件时，才是直线的法线式方程. 当已知直线到原点的距离p和其法线的辐角时，运用法线式方程来解决某些几何问题比较方便，并易于由此得出直线在极坐标系中的方程$\rho\cos(\theta-\varphi)=p$.

直线的位置参数(location parameter of a straight line)　见"直线的法线式方程".

法化因子(normal factors)　一个常数. 指将直线方程化为法线式所乘的常数. 将直线方程的一般式$Ax+By+C=0$乘以常数

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

即可得到这条直线的法线式方程

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

常数 $\lambda=1/\pm\sqrt{A^2+B^2}$ 称为该直线的法化因子.它的"±"号的取法是：

1. 当 $C\neq 0$ 时，λ 和 C 异号.
2. 当 $C=0, B\neq 0$ 时，λ 和 B 同号.
3. 当 $C=0, B=0$ 时，λ 和 A 同号.

直线的法向量(normal vector of a straight line)　确定直线位置的一个向量.是与直线垂直的非零向量.例如，在直角坐标系中，向量(A,B)是直线 $Ax+By+C=0$ 的一个法向量，它指示出三项式 $Ax+By+C$ 最大增长的方向和速度，称为线性函数 $Ax+By+C$ 的梯度.

直线的极坐标方程(polar coordinates equation of a straight line)　直线方程的一种形式.由极坐标表示的直线方程.在平面极坐标系中，直线的极坐标方程可有下列形式：

1. 法线式

$$\rho\cos(\theta-\theta_0)=p,$$

式中 θ_0 是直线的法线的辐角，p 是极点到直线的距离.当 $p=0$ 时，直线的极坐标方程简化为

$$\theta=\theta_0\pm\frac{\pi}{2}.$$

2. 点法式

$$\rho\cos(\theta-\theta_0)=\rho_1\cos(\theta_1-\theta_0),$$

式中(ρ_1,θ_1)是直线上一点，θ_0 是法线的辐角.

3. 点斜式

$$\rho\sin(\theta-\alpha)=\rho_1\sin(\theta_1-\alpha),$$

式中 α 是直线的倾斜角，(ρ_1,θ_1)是直线上一点.

4. 两点式

$$\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\rho}=\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_2},$$

式中(ρ_1,θ_1)，(ρ_2,θ_2)是直线上两点，且 $\rho_1\rho_2\neq 0$.若直线过点 $M_1(\rho_1,\theta_1)$和极点，则直线的极坐标方程为 $\theta=\theta_1$.

5. 一般式

$$A\cos\theta+B\sin\theta=-\frac{C}{\rho},$$

式中常数 A,B 不全为零.

点到直线的距离(distance between a line and a point)　描述点和直线位置关系的一个数.在平面直角坐标系中，一点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 l: $Ax+By+C=0$的距离 d 是指点 P 与直线 l 上任意点 $M(x,y)$的有向线段$\overline{MP}$在 l 的法线 n 上的射影的绝对值：$d=|$射影 $n\,\overline{MP}|$.由此可推算出

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

对法线式方程，点(x_0,y_0)到直线 $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$ 的距离为 $|x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-p|$.在平面极坐标系中，点$(\rho_0,\theta_0)$到直线 $\rho\cos(\theta-\varphi)=p$ 的距离为

$$|\rho_0\cos(\theta_0-\varphi)-p|.$$

点(ρ_0,θ_0)到直线 $A\rho\cos\theta+B\rho\sin\theta+C=0$ 的距离为

$$\frac{|A\rho_0\cos\theta_0+B\rho_0\sin\theta_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(参见本卷《平面几何》同名条)

点到直线的离差(deviation of a point from a line)　描述点和直线位置关系的一个数.在平面直角坐标系中，点 $P(x_0,y_0)$到直线 $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0(p\geqslant 0)$的离差为 $\delta=x_0\cos\varphi+y_0\sin\varphi-p$.当点 P 在直线的法向量$(\cos\varphi,\sin\varphi)$所指的一侧时，$\delta>0$，在另一侧时，$\delta<0$.点在直线上时，$\delta=0$.在平面极坐标系中，点$(\rho_0,\theta_0)$到直线 $\rho\cos(\theta-\varphi)=p(p\geqslant 0)$的离差为 $\delta=\rho_0\cos(\theta_0-\varphi)-p$，其中 φ 是法线的辐角.

直线划分平面(dividing a plane by a line)　解析几何研究的重要问题之一.在平面仿射坐标系中，一直线 l: $Ax+By+C=0$ 将此平面内 l 以外的任意两点 $P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$为端点的线段 P_1P_2 所分成的比为

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

当 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 异号，即 $\lambda>0$ 时，直线 l 与线段 P_1P_2 相交，即点 P_1,P_2 在直线 l 的异侧.当 Ax_1+By_1+C 与 Ax_2+By_2+C 同号，即 $\lambda<0$ 时，直线 l 与线段 P_1P_2 不相交，即点 P_1,P_2 在直线 l 的同侧.可见，直线 l: $Ax+By+C=0$ 将平面分为两个半平面，其中一个半平面内的点的坐标适合不等式 $Ax+By+C>0$，另一个半平面内的点的坐标适合不等式 $Ax+By+C<0$.因此，如同平面上的直线可以看做二元一次方程的几何表示一样，半平面可以看做是二元一次不等式的几何表示.由"同侧同号，异侧异号"的法则，要判别点 $P(x_0,y_0)$在直线 l: $Ax+By+C=0$ 的哪一侧的具体方法可有：

1. 若 $A>0$，则点 P 在直线 l 的右侧(x 轴正向所指的一侧)的充分必要条件是 $Ax_0+By_0+C>0$.
2. 若 $B>0$，则点 P 在直线 l 的上侧(y 轴正向所指的一侧)的充分必要条件是 $Ax_0+By_0+C>0$.
3. 若 $C>0$，则点 P 与原点在直线 l 的同侧的充分必要条件是 $Ax_0+By_0+C>0$.
4. 直线 l 的法向量(A,B)所指的一侧的点的坐标满足 $Ax+By+C>0$，另一侧的点的坐标满足 $Ax+By+C<0$.
5. 若规定直线 $Ax+By+C=0$ 的正方向为向

量$(B,-A)$所指的方向,则半平面 $Ax+By+C>0$ 在有向直线的左侧.

两直线的位置关系(positional relation between two straight lines) 初等几何研究的基本问题之一.在平面仿射坐标系中,给定两直线

$$l_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0\ (\text{或}\ y=k_1x+b_1),$$
$$l_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0\ (\text{或}\ y=k_2x+b_2).$$

它们的位置关系可能有平行(包括重合)和相交两种情况:

1. 两直线 l_1 与 l_2 平行(包括重合)的充分必要条件是:$A_1:A_2=B_1:B_2$(或 $k_1=k_2$).特别地,当且仅当 $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$(或 $k_1=k_2,b_1=b_2$)时,两直线 l_1 与 l_2 重合.

2. 两直线 l_1 与 l_2 相交的充分必要条件是 $A_1:A_2\neq B_1:B_2$(或 $k_1\neq k_2$).特别地,在平面直角坐标系中,直线 l_1 与 l_2 垂直的充分必要条件是 $A_1A_2+B_1B_2=0$(或 $k_1k_2=-1$).

两平行线间的距离(distance between two parallel lines) 描述平行线间位置关系的一个数.两平行直线的法线式方程为

$$l_1:\quad x\cos\theta_1+y\sin\theta_1-p_1=0,$$
$$l_2:\quad x\cos\theta_2+y\sin\theta_2-p_2=0.$$

当 $\theta_1=\theta_2$ 时,它们之间的距离为 $d=|p_1-p_2|$.当 $|\theta_1-\theta_2|=\pi$ 时,它们之间的距离为 $d=|p_1+p_2|$.若两平行直线的一般式方程为

$$l_1:\quad Ax+By+C_1=0,$$
$$l_2:\quad Ax+By+C_2=0.$$

其中 $A^2+B^2\neq 0$,则两平行直线之间的距离为

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

两直线的交角(angle between two intersecting straight lines) 描述相交直线位置关系的一个角.对于两条相交直线 l_1 与 l_2,将直线 l_1 绕交点按逆时针方向旋转到首次和直线 l_2 重合时所旋转的角度,称为直线 l_1 到 l_2 的角,记为 $\theta(l_1,l_2)$.有 $0<\theta(l_1,l_2)<\pi$,$\theta(l_1,l_2)+\theta(l_2,l_1)=\pi$.称 l_1 到 l_2 的角与 l_2 到 l_1 的角之中不大于直角的角为两直线的交角.若两直线平行,则规定它们的交角为 0.在平面直角坐标系中,若两直线的方程为

$$l_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0\ \text{或}\ y=k_1x+b_1,$$
$$l_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0\ \text{或}\ y=k_2x+b_2.$$

则

$$\tan\theta(l_1,l_2)=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

两直线的交角公式如下:

$$\tan\theta=\left|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$$

或

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\frac{|1+k_1k_2|}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}$$

或

$$\sin\theta=\frac{|A_1B_2-A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\frac{|k_2-k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}.$$

两曲线的交角(angle between two intersecting curves) 描述两曲线位置关系的一个角.两条曲线在交点处的切线的交角(一般指不大于直角者)称为两曲线的交角.

两直线交角的平分线(bisector of an angle between two intersecting straight lines) 一条直线.指到两直线距离相等的点的集合.设两直线在直角坐标系中的方程为 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$,则交角的平分线的方程为

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

这是两条互相垂直的直线.若要确定某一个角内的平分线的方程是哪一个,可在角内选一点依照"直线划分平面"中的方法去选择±号(参见"直线划分平面").

三直线的位置关系(positional relation of three straight lines) 初等几何研究的基本问题.即利用直线方程讨论三条直线的相关位置.在平面仿射坐标系中,设直线 l_i 的方程是 $A_ix+B_iy+C_i=0(i=1,2,3)$,则三直线 l_1,l_2,l_3 的位置关系共有 7 种可能情形.记

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}.$$

当 $\Delta=0$ 时,可能有两条重合而与第三条平行、重合或相交,也可能三条互相平行或互不平行而相交于一点(称为三线共点),共有 5 种可能情形.当 $\Delta\neq 0$ 时,可能三直线相交成三角形,或两直线平行(不重合)而与第三条直线相交.特别地,三个半平面 $A_ix+B_iy+C_i\geqslant 0(i=1,2,3)$的交集为三角形(包含内部)的充分必要条件是四个行列式

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}$$

都不为零而且同号.

三线共点(three straight lines concurrent) 见"三直线的位置关系".

直线系(system of straight lines) 亦称直线束.具有某一共同性质的直线的集合.如在平面仿射坐标系中,与已知直线 $Ax+By+C=0$ 平行的所有直线组成一个直线系.它的方程为 $Ax+By+\lambda=0$,

式中 λ 是参数. 又如,通过一个定点 (x_0,y_0) 的所有直线也是一个直线系,称为以 (x_0,y_0) 为束心的直线束. 它的方程为 $\lambda_1(x-x_0)+\lambda_2(y-y_0)=0$,式中 λ_1, λ_2 是不同时为零的参数. 如果只用一个参数来表示,直线束的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,式中 k 为参数. 但此直线束不包含直线 $x=x_0$. 一般地,对于给定的两直线

$$l_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

含有参数 λ_1,λ_2(不同时为零)的方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

表示由 l_1 和 l_2 决定的直线束,并且

1. 当 l_1 与 l_2 相交时,是以 l_1 与 l_2 的交点为中心的直线束,称为中心直线束.

2. 当 l_1 与 l_2 平行(但不重合)时,该直线束称为平行直线束,且当参数 λ_1,λ_2 取值为同号或异号时,所对应的直线位于直线 l_1 与 l_2 之间或之外.

直线束(pencil of straight lines) 即"直线系".

中心直线束(central pencil of straight lines)见"直线系".

平行直线束(pencil of parallel straight lines) 见"直线系".

圆的标准方程(standard equation of the circle) 圆方程的一种规范形式. 即用圆心坐标和半径表示的圆的方程. 圆作为平面上到定点的距离等于定长的点的集合,在平面直角坐标系中,已知圆心是 $C(a,b)$ 及半径是 r 的圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 特别地,圆心是原点 $O(0,0)$,半径为 r 的圆的标准方程为 $x^2+y^2=r^2$.

圆的三点式方程(three points form equation of the circle) 圆方程的一种形式. 平面上不共线的三点确定一个圆. 在平面直角坐标系中,过不共线三点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 的圆的方程为

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

这个方程称为圆的三点式方程,这个圆就是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外接圆.

圆的一般方程(general equation of the circle) 圆方程的一种形式. 在平面直角坐标系中,二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 称为圆的一般方程. 将它配方得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

此时:

1. 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时,图形为以 $(-D/2, -E/2)$ 为圆心,$\sqrt{D^2+E^2-4F}/2$ 为半径的圆.

2. 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时,图形为一点 $(-D/2, -E/2)$,或称点圆.

3. 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时,图形为空集,或称虚圆. 常用待定系数法,由三个独立条件来确定满足这些条件的圆的方程中的系数 D,E,F.

点圆(point circle) 见"圆的一般方程".

虚圆(imaginary circle) 见"圆的一般方程".

圆的参数方程(parametric equation of the circle) 圆方程的一种常用形式. 即圆方程的参数表示. 在平面直角坐标系中,已知圆心 $C(a,b)$ 和半径 r,任一点 $M(x,y)$ 在圆上的充分必要条件为

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=b+r\sin\theta, \end{cases}$$

该式称为圆 C 的参数方程,式中参数 $\theta=\angle xOM$.

圆的极坐标方程(polar coordinates equation of the circle) 圆方程的一种形式. 即圆方程的极坐标表示. 由于圆心位置的不同,其极坐标方程有三种形式:

1. 圆心在极点,半径为 r 的圆的极坐标方程为 $\rho=r$ 或 $\rho=-r$.

2. 圆心在 $(r,0)$,半径为 r 的圆的极坐标方程为 $\rho=2r\cos\theta$.

3. 圆心在 (ρ_0,θ_0),半径为 r 的圆的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2=r^2$.

圆的切线方程(tangent line equation of the circle) 圆的切线的表达形式. 常见的切线方程可分两种情况讨论:

1. 在直角坐标系中有四种形式:

1) 过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$;过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外点 $P(x_0,y_0)$ 可向圆作两条切线,这两条切线的方程为

$$(x_0x+y_0y-r^2)^2=(x_0^2+y_0^2-r^2)(x^2+y^2-r^2).$$

2) 过圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.

3) 过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上的一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$x_0x+y_0y+D\,\frac{x+x_0}{2}+E\,\frac{y+y_0}{2}+F=0.$$

4)圆 $x^2+y^2=r^2$ 的斜率为 k 的切线方程分别为

$$y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}.$$

2. 在极坐标系中有两种形式:

1) 过圆 $\rho=r$ 上点 (r,θ_0) 的切线方程为

$$\rho\cos(\theta-\theta_0)=r.$$

2) 过圆 $\rho=2r\cos\theta$ 上点 (ρ_0,θ_0) 的切线方程为

$$\rho\cos(\theta-2\theta_0)=2r\cos^2\theta_0.$$

两圆的交角(angle between two intersecting

circles） 刻画相交两圆相关位置的一个角．相交两圆在交点处的切线的交角称为两圆的交角，一般指角度不大于直角者．设相交两圆$\odot O_1$与$\odot O_2$的半径分别为r_1,r_2，则它们的交角$\theta\in[0,\pi/2]$的计算公式为

$$\cos\theta=\left|\frac{r_1^2+r_2^2-|O_1O_2|^2}{2r_1r_2}\right|.$$

设相交两圆$\odot O_1$与$\odot O_2$的方程分别为

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$
$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

两圆的交角θ的计算公式为

$$\cos\theta=\frac{|D_1D_2+E_1E_2-2F_1-2F_2|}{\sqrt{D_1^2+E_1^2-4F_1}\cdot\sqrt{D_2^2+E_2^2-4F_2}}.$$

此两圆正交（交角为直角）的充分必要条件为

$$D_1D_2+E_1E_2=2F_1+2F_2.$$

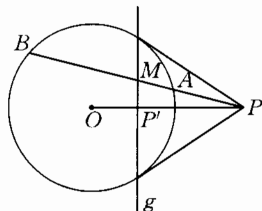
相交两圆的参数方程分别为

$$\begin{cases}x=a_1+r_1\cos t,\\y=b_1+r_1\sin t\end{cases}\text{及}\begin{cases}x=a_2+r_2\cos\varphi,\\y=b_2+r_2\sin\varphi.\end{cases}$$

交角θ的计算公式为

$$\cos\theta=\frac{|r_1^2+r_2^2-(a_1-a_2)^2-(b_1-b_2)^2|}{2r_1r_2}.$$

直线对于圆的极点（pole of line with respect to circle） 点与直线关于圆的一种特殊关系．设P,P'关于圆O互为反演点，g是过P'且垂直于OP的直线，则对于圆O而言，称点P为直线g的极点，g为点P的极线（见图）．除圆心O外，每一点都有它的确定的极线；除过圆心的直线外，每条直线都有它的确定的极点．在平面直角坐标系中，对于圆$x^2+y^2=r^2$而言，任一点$P(x_0,y_0)$ $(x_0^2+y_0^2\neq0)$关于此圆的极线为$x_0x+y_0y=r^2$．若点P在圆O上，则点P的极线就是过此点的切线；若点P在圆O的外部，则过P作圆O的切线所得两切点的连线就是点P的极线．设点P关于$\odot O$的极线为g，过P作割线交$\odot O$于A,B，交直线g于M，则P,M调和分隔A,B，即有



$$\frac{PA}{PB}=-\frac{MA}{MB}\Leftrightarrow\frac{2}{PM}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}.$$

若点P的极线g过点Q，则点Q的极线h必过点P．这种性质称为极点和极线的互易性．设两直线g，h的交点为R，则直线PQ是R的极线．三角形PQR的每个顶点关于圆的极线正是该顶点的对边，这样的三角形称为自配极三角形．

点对于圆的极线（polar line with respect to a circle） 见“直线对于圆的极点”．

极点和极线的互易性（reciprocity of pole and polar line） 见“直线对于圆的极点”．

自配极三角形（self-polar triangle） 见“直线对于圆的极点”．

点对于圆的幂（power of a point with respect to a circle） 关于圆的重要概念之一．指点到圆心的距离平方与半径平方之差（参见本卷《平面几何》同名条）．在平面直角坐标系中，点$M(x_1,y_1)$对于圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的幂为$p=(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2$．当点$M$在圆外时，$p>0$，就是从点$M$到圆所引切线长的平方；当点$M$在圆内时，$p<0$；当点$M$在圆上时，$p=0$．

两圆的根轴（radical axis between two circles） 一条直线．指对于两个圆有相等的幂的点的集合（参见本卷《平面几何》中的“根轴”）．若两个圆的方程为

$$C_1:\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$
$$C_2:\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

则根轴的方程为

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0.$$

圆系（system of circles） 亦称圆束．满足某一共同条件的圆的集合．在圆的方程中，如果含有一个（或几个）参数，给这些参数以一系列数值，就会得到相应的一系列具有共同性质的圆．这一系列圆称为圆系．例如，在圆的方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$中，把圆心坐标(a,b)看成固定数值，而把半径r看做参数，当r取不同的值时，这个方程就表示以点(a,b)为圆心的一系列同心圆．

圆束（pencil of circles） 即“圆系”．

共轴圆束（coaxial pencil of circles） 圆束的一种．对于两个已知圆

$$C_1:\quad x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$
$$C_2:\quad x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0,$$

由方程

$$\lambda(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\mu(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

所表示的所有曲线称为共轴圆束，式中λ,μ是不同时为零的参数．当$\lambda+\mu=0$时，上面的方程表示一条直线，这条直线是两已知圆的根轴．当$\lambda+\mu\neq0$时，对应于λ,μ的任一组值，上述方程均表示一个圆（参见本卷《平面几何》同名条）．

圆划分平面（dividing a plane by a circle） 解析几何研究的重要问题之一．圆C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$分坐标平面为圆上点的集合及圆内和圆外两个区域．在圆内的点满足不等式$x^2+y^2+Dx+Ey+F<0$；在圆外的点满足不等式$x^2+y^2+Dx+Ey+F>0$．

二次方程的图解法（solving method of quadratic equation by graph） 求实系数二次方程根的一

种方法. 求实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 之根的图解法如下：在直角坐标平面中，以点 $(-b/2a,(a+c)/2a)$ 为圆心作通过点 $(0,1)$ 的圆. 若此圆交 x 轴于两点，则它们的横坐标即为所给二次方程的两个实根(图 1). 若此圆与 x 轴相切，则有两个等根(图 2). 若此圆与 x 轴无交点，则方程有两个虚根(图 3).

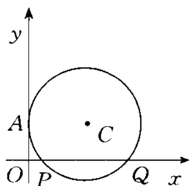


图1

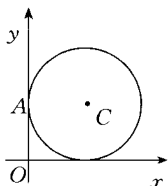


图2

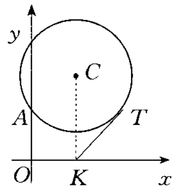
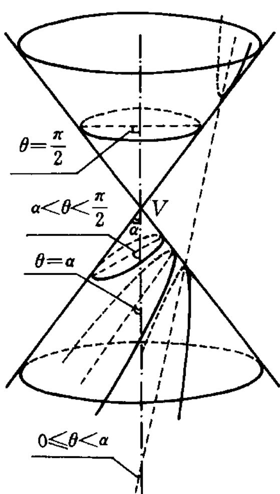


图3

圆锥曲线

圆锥曲线(conic) 亦称圆锥截线. 简称锥线. 一类重要的二次曲线. 它是不过圆锥顶点的平面与圆锥面相交而成的曲线. 设圆锥的半顶角为 α，平面与圆锥的轴所成的角为 θ. 当 $\theta=\alpha$ 时，截面和圆锥的一条母线平行，交线是抛物线；当 $\alpha<\theta\leqslant\pi/2$ 时，截面和所有的母线相交，交线是椭圆，特别当 $\theta=\pi/2$ 时，交线是圆；当 $0\leqslant\theta<\alpha$ 时，截面和两条母线平行，交线是双曲线. 因此，圆锥曲线包括抛物线、椭圆和双曲线，统称圆锥曲线.



如果平面过圆锥的顶点，截面与圆锥面的交集有以下几种情况：当 $\theta=\alpha$ 时，平面与圆锥面相切于圆锥的一条母线，可视为退化抛物线；当 $\alpha<\theta\leqslant\pi/2$ 时，平面与圆锥面有惟一公共点(圆锥的顶点)，可视为退化的椭圆；当 $0\leqslant\theta<\alpha$ 时，平面与圆锥面相交于两条母线，可视为退化双曲线. 这些交集统称为退化圆锥曲线. 一般所谓的圆锥曲线，是指非退化的圆锥曲线. 在平面仿射坐标系中，圆锥曲线的方程都是二元二次方程，因此，圆锥曲线又称为二次曲线. 而且平面与任何二次曲面的交线总是二次曲线. 例如，圆柱的斜截口即为椭圆. 设想在圆锥的顶点 V 处放一点光源，圆在灯光下的阴影一般是圆锥形的. 因此，圆锥曲线是圆在中心投影下，在不同平面上的射影. 椭圆、抛物线、双曲线与圆在中心投影下互变的规律性对于航空测量(高空照片的分析)和透视学研究具有重要意义.

圆锥曲线最早是由古希腊学者梅内克谬斯(Menaechmus)进行系统研究的. 他用顶角分别为直角、锐角和钝角三种直圆锥以不过顶点而垂直一条母线的平面截割这三种圆锥曲面而分别得到抛物线、椭圆和双曲线的一支. 到了亚历山大里亚时期，阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))在他的《圆锥曲线学》中指出同一圆锥的不同截口曲线可以是抛物线(齐曲线)、椭圆(亏曲线)和双曲线(超曲线)，并且研究了圆锥曲线的共轭直径、切线和法线及其性质，也研究了圆锥曲线的极点和极线的性质. 书中没有谈准线，但圆锥曲线是到定点(焦点)和到定直线(准线)的距离之比为常数(离心率)的点的轨迹，对此欧几里得(Euclid)是知道的，并由帕普斯(Pappus,(A))述及且给出证明. 这些对形成近代圆锥曲线的理论有着深远的影响. 自从笛卡儿(Descartes,R.)引进坐标系以来，沃利斯(Wallis,J.)在他的《论圆锥曲线》中，为了阐明阿波罗尼奥斯的结果，把几何条件转化为代数条件，第一个证明了动点坐标 x,y 的二元二次方程与几何里的圆锥曲线对应，并开始用方程的理论来研究曲线的性质. 16—17 世纪，随着机械工业的诞生和航海、建筑、造船、采矿等事业的发达，推动了天文学和力学的发展. 这时在天文学上发现行星的轨道是椭圆，力学上确定了抛射体的轨道是抛物线等，因此，有关圆锥曲线的深入研究也就成为迫切的需要了. 到了 18 世纪，由于欧拉(Euler,L.)等多人的努力，圆锥曲线的现代理论才有了完美的结果.

圆锥截线(conic section) 即“圆锥曲线”.

锥线(conic line) 圆锥曲线的简称.

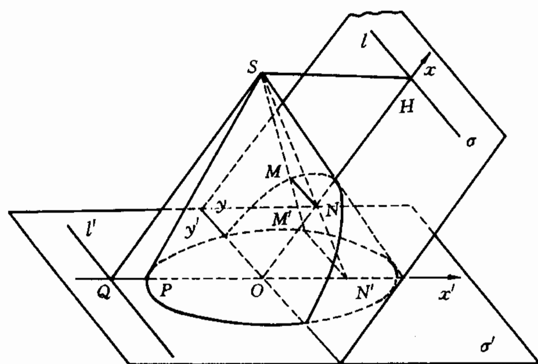
退化圆锥曲线(degenerate conic section) 见“圆锥曲线”.

圆锥曲线的当德兰定理(Dandelin theorem of conic) 见本卷《立体几何》中的“当德兰球”.

圆锥曲线的统一方程(homaloidal equation of conic) 圆锥曲线方程的表达形式. 即用离心率和焦参数表示的圆锥曲线方程. 圆锥曲线是圆锥面与不通过圆锥顶点 S 的平面 σ 的交线. 也是在以点 S 为中心的中心投影下，另一平面 σ' 内的圆 O 在平面 σ 上的射影. 如图所示，取两平面的交线为 y 轴(过圆心 O)，在平面 σ 与 σ' 内分别建立平面直角坐标系. 过点 S 作直线 $SH\parallel Ox'$，交平面 σ 于 H，在平面 σ 内过点 H 作直线 $l\parallel Oy$，过点 S 作直线 $SQ\parallel Ox$，交平面 σ' 于点 Q，在平面 σ' 内过点 Q 作直线 $l'\parallel Oy'$. 设圆 O 的方程为 $x^2+y^2=p^2(p=PO)$. 对圆 O 上任一点 $M'(x',y')$ 与平面 σ 上的对应点 $M(x,y)$，从图上诸三角形的相似关系可以导出

$$\frac{ON'}{QO}=\frac{ON}{QS-ON},\frac{N'M'}{NM}=\frac{SN'}{SN}=\frac{QS}{QS-ON}.$$

然后令 $h=QS=OH,q=QO=SH$. 可以得出点 M



和 M' 的坐标之间有关系式

$$\begin{cases} x' = \dfrac{qx}{h-x}, \\ y' = \dfrac{hy}{h-x}. \end{cases} \qquad (1)$$

将(1)式代入圆 O 的方程即得圆锥曲线的方程

$$(q^2-p^2)x^2+h^2y^2+2hp^2x-p^2h^2=0. \qquad (2).$$

当 $q>p$ 即 $QO>PO$ 时，与直线 $l':x'+q=0$ 不相交的圆 O 在中心投影下变成了椭圆. 当 $q=p$ 即 $QO=PO$时，与直线 l' 相切的圆 O 在中心投影下变成了抛物线. 当 $q<p$ 即 $QO<PO$ 时，与直线 l' 相交的圆 O 在中心投影下变成了双曲线. 以上结论对于斜圆锥亦成立. 特别当 $h=q$，即 $SQOH$ 是菱形时，记 $p/q=e$，可将圆锥曲线的方程(2)改记为

$$(1-e^2)x^2+y^2+2epx-p^2=0. \qquad (3)$$

从而有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{p}{e}\right|}=e.$$

这表明 O 点和直线 l 恰为圆锥曲线的焦点和准线. 方程(3)称为圆锥曲线的统一方程. 将方程(3)化为极坐标方程是

$$\rho = \frac{p}{1-e\cos\theta}. \qquad (4)$$

式中 e 是离心率，p 是焦参数. 圆锥曲线的统一极坐标方程(4)经旋转变换，可化为

$$\rho = \frac{p}{1-e\cos(\theta-\theta_0)}. \qquad (5)$$

作坐标变换 $x=-x'+p/(1+e)$，$y=-y'$，方程(3)可化简为(撇号已略去)

$$y^2 = 2px-(1-e^2)x^2. \qquad (6)$$

称此式为圆锥曲线的顶点式方程，原点是它的一个顶点.

圆锥曲线的顶点式方程(vertex form equation of conic)　见“圆锥曲线的统一方程”.

圆锥曲线的直径(diameter of conic)　一条直线. 指圆锥曲线的一组平行弦中点的轨迹. 连结圆锥曲线上任两点的线段称为圆锥曲线的弦. 在引进虚交点(交点坐标为虚数)的概念以后，可以证明圆锥曲线的一组平行弦的中点的轨迹是一条直线，此直线称为圆锥曲线的直径. 在只考虑实点的情形，椭圆的直径是线段；双曲线的直径是两条射线或一条直线；抛物线的直径是一条与轴平行的射线.

圆锥曲线的弦(chord of conic)　见“圆锥曲线的直径”.

圆锥曲线的焦点(focus of conic)　见“椭圆”、“双曲线”、“抛物线”.

圆锥曲线的准线(directrix of conic)　见“椭圆”、“双曲线”、“抛物线”.

焦半径(focal radius)　亦称焦点半径. 一条线段. 是连结圆锥曲线上任意点与焦点的线段. 也指圆锥曲线上任意点到焦点的距离. 对于椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

上任意点(x,y)，焦半径 $r=a\pm ex$. 对于双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上任意点(x,y)，焦半径 $r=ex\pm a$. 对于抛物线 $y^2=2px$ 上任意点(x,y)，焦半径 $r=x+p/2$.

焦点半径(focal radius)　即“焦半径”.

焦弦(focal chord)　一条线段. 指圆锥曲线的过焦点的任一条弦.

正焦弦(latus rectum)　亦称通径. 一种特殊的焦弦. 指通过圆锥曲线的焦点，且与准线平行的弦. 它垂直于通过焦点的轴.

通弦(chorda)　即“正焦弦”.

焦轴(focal axis)　曲线焦点所在的轴.

焦参数(focal parameter)　圆锥曲线的重要参数. 正焦弦长的一半称为焦点参数，简称焦参数，记为 p. 它等于焦点到相应的准线的距离与离心率 e 的乘积. 对于椭圆和双曲线

$$x^2+\frac{y^2}{1-e^2}=a^2,$$

焦参数 $p=b^2/a=a|1-e|$，其中 a,b 分别是半长(实)轴和半短(虚)轴的长. 对于抛物线 $y^2=2px$，p 为焦参数.

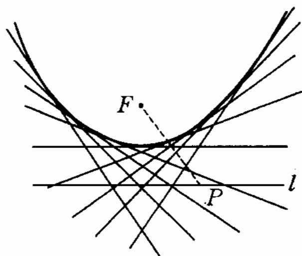
离心率(eccentricity)　见“圆锥曲线”.

偏心率(eccentricity)　即“离心率”.

离心距(eccentric distance)　一个数. 指椭圆和双曲线的焦点到中心的距离.

抛物线(parabola)　圆锥曲线的一种. 它是平面内到定点(焦点)和一条不过定点的定直线(准线)的距离相等的点的轨迹. 焦点到准线的距离 p 是抛物线的焦参数. 抛物线有一条对称轴，称为抛物线的轴. 轴和抛物线的交点称为抛物线的顶点(参见“抛物线的标准方程”中的图). 抛物线的离心率等于 1.

从抛物线的准线上任一点引抛物线的两条切线，它们一定互相垂直. 过抛物线的正焦弦的两端点引抛物线的切线，这两条切线互相垂直，且交点在准线上. 从抛物线的定义可知，抛物线的焦点与准线上任意点所连线段的中垂线与抛物线有惟一的交点，即是抛物线的切线. 因此，抛物线是定直线上任一点与直线外一定点所连线段的中垂线的包络(见图). 定直线是抛物线的准线，定点是抛物线的焦点.



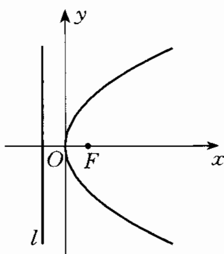
抛物线的轴(axis of a parabola)　见“抛物线”.

抛物线的顶点(vertex of a parabola)　见“抛物线”.

抛物线的准线(directrix of a parabola)　见“抛物线”.

抛物线的焦点(focus of a parabola)　见“抛物线”.

抛物线的标准方程(standard equation of a parabola)　抛物线方程的规范形式. 在平面直角坐标系下，抛物线的标准方程为 $y^2=2px$，式中 p 是抛物线的焦参数. 此抛物线的焦点是 $F(p/2,0)$，准线是 $x=-p/2$. 抛物线 $y^2=2px$ 关于 x 轴对称，是顶点在原点，轴和坐标轴相重合的抛物线(如图). 由于焦点的位置不同，图形的位置也不同. 还有下列各种标准方程：$y^2=-2px$，$x^2=2py$，$x^2=-2py$. 若抛物线的顶点位于 (x_0,y_0)，对称轴平行于 x 轴，开口方向与 x 轴正向一致，则其方程为 $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.



抛物线的参数方程(parametric equation of a parabola)　抛物线方程的一种常用形式. 在平面直角坐标系下，方程

$$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}(t\in\mathrm{R}).$$

称为抛物线 $y^2=2px$ 常用的参数方程. 参数 t 为抛物线上的点 (x,y) 与原点连线的斜率的倒数. 一般地，参数方程

$$\begin{cases}x=a_1+b_1t+c_1t^2\\y=a_2+b_2t+c_2t^2\end{cases}(t\in\mathrm{R}).$$

记
$$\Delta=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\b_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

当 $\Delta\neq0$ 时，表示以向量 (c_1,c_2) 的方向为开口方向的抛物线；当 $\Delta=0$ 时，表示直线.

抛物线的画法(construction of a parabola)　画抛物线的一般方法. 通常以抛物线的定义和各种性质为基础，常用的有下列几种：

1. 定义法. (见图 1)已知抛物线的焦点 F 和准线 l. 过 F 作 $Hx\perp l$，H 为垂足，则 HF 的中点 V 就是抛物线的顶点. 在 Vx 上任取点 A，过点 A 作 l 的平行线 AB，以 F 为圆心，HA 为半径作圆弧，交 AB 于 P 及 Q，则 P，Q 为抛物线上的点. 改变 A 的位置，可作出抛物线上任意多个点，把这些点用光滑曲线连结起来即得所求的抛物线.

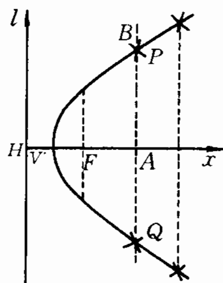


图 1

2. 拱形法. 已知拱形的跨度 AB 和高 HV，可用下面的方法画出抛物线拱形：

1）等分法. 作矩形 $ABCD$(见图 2)，H，V 分别是 AB，CD 的中点，分别将线段 AH 和 AD 分成 n 等分，设 AH，AD 上的分点为 k 和 k'(图中 $n=4$)，过 AH 上的分点 $k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 作与 HV 平行的直线 l_k，l_k 与直线 $Vk'(k'=1',2',\cdots,n'-1)$ 的交点 $A_k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 即为所求抛物线上的点，利用对称性作出另一半的点，用光滑曲线把它们连结起来即得所求的抛物线拱.

2）内接法(1/4 法). 参见图 2，分别作 $\triangle AHV$ 和 $\triangle BHV$ 的中位线 N_1H_1 和 N_2H_2 并延长到 P_1，P_2，使 $H_1P_1=H_2P_2=HV/4$. 然后对 $\triangle AH_1P_1$，$\triangle P_1H_1V$，$\triangle VH_2P_2$，$\triangle P_2H_2B$ 类似地作出点 P_3，P_4，P_5，P_6，如此继续下去直到作出足够多个点，然后用光滑曲线顺次将 A，P_3，P_1，P_5，V，P_6，P_2，P_4，B 连结起来，即得所求的抛物线拱.

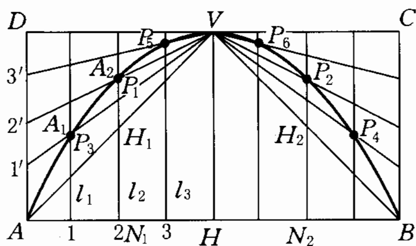


图 2

3. 外切法. 参见“抛物线”条中的图. 作直线 l 外的点 F 和直线上的点 P 所连线段的中垂线. 变动 P 在 l 上的位置可作任意多条如此的中垂线. 画与这些直线相切(即只交于一点)的光滑曲线就得到以 F 为焦点 l 为准线的抛物线.

抛物线拱(parabolic arch)　几何学术语. 指工程建筑上常用的一种拱形. 例如桥拱，它的拱轴线比

较理想的是采用悬链线 $y=a(e^{x/a}+e^{-x/a})/2$，抛物线只是它的一种近似曲线.

抛物线的切线方程(tangent line equation of a parabola)　抛物线的切线的表达形式. 经过抛物线 $y^2=2px$ 上一点 (x_0,y_0) 的切线方程是 $y_0y=p(x+x_0)$. 抛物线 $y^2=2px$ 具有已知斜率 k 的切线方程是 $y=kx+p/2k$.

抛物线的光学性质(optical property of a parabola)　抛物线在光学上的应用. 经过抛物线上某点 M 的切线，与焦半径 FM 以及另一条射线构成等角，此射线是从点 M 引出，平行于抛物线的轴，且向抛物线无限伸展的方向射出的. 这个几何性质的物理意义是：从抛物线的焦点 F 发出的光线或声波，经过旋转抛物面反射后，平行于抛物线的轴而射出. 反之，与抛物线的轴平行的光线经旋转抛物面反射后，都聚集到抛物线的焦点上. 这就是抛物线的光学性质. 它被广泛应用于探照灯、汽车前灯、天文望远镜、抛物面天线等.

椭圆(ellipse)　圆锥曲线的一种. 它是平面内到定点 F(焦点)与到不通过这个点的一条定直线 l(准线)的距离之比为小于 1 的常数 e(离心率)的点的轨迹. 椭圆另外还有一个焦点 F' 和一条准线 l'(如图 1). 椭圆亦是平面内与两个定点 F,F' 的距离之和等于常数 $2a(2a>|FF'|=2c)$ 的点的轨迹. 两焦点间的距离 $2c$ 称为焦距. 椭圆有两条互相垂直的对称轴(称为椭圆的轴)，它们的交点是对称中心(称为椭圆的中心). 通过焦点的轴称为长轴，另一条轴称为短轴. 两轴与椭圆的四个交点都称为椭圆的顶点. 长轴上两个顶点之间的线段及其长度 $2a$ 亦都称为长轴，短轴上两个顶点之间的线段及其长度 $2b$ 亦都称为短轴. 椭圆的四个常数 a,b,c,e 之间有关系：$c^2=a^2-b^2, e=c/a$. 椭圆还是定圆 F 上任一点 M 与圆内定点 F' 所连线段的中垂线的包络，即这种中垂线是椭圆的切线(图 2). 中国古代早对椭圆作了研究. 在《测量全义》、《恒星历指》、《交食历指》、《测天约说》等书中都记载了不少有关椭圆的知识. 1742 年编成的《历象考成后编》中，不仅记载了椭圆的许多性质和画法，而且研究了椭圆的切线和面积公式，特别是项名达、戴煦所著《椭圆求周术》中，用初等方法推得椭圆周长的计算公式与后人用积分方法的结果完全一致.

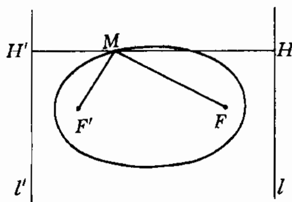


图 1

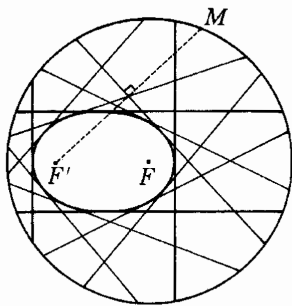


图 2

椭圆的焦距(focal distance an ellipse)　见“椭圆”.

长轴(major axis)　见“椭圆”.

短轴(minor axis)　见“椭圆”.

椭圆的轴(axis of an ellipse)　见“椭圆”.

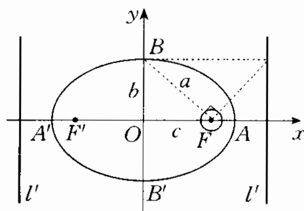
椭圆的中心(center of an ellipse)　见“椭圆”.

椭圆的顶点(vertex of an ellipse)　见“椭圆”.

椭圆的标准方程(standard equation of the ellipse)　椭圆方程的一种规范形式. 即椭圆的最简方程. 在平面直角坐标系下，椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

顶点 $A(a,0), A'(-a,0), B(0,b), B'(0,-b)$. 焦点 $F(c,0), F'(-c,0)$，相应于焦点 F,F' 的准线 l,l' 的方程分别为 $x=a^2/c, x=-a^2/c$. 若取椭圆的长轴所在直线作 y 轴，中心作原点建立直角坐标系，则椭圆的方程为



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>b>0).$$

若选取的 x 轴和 y 轴与椭圆的长轴和短轴分别平行，则中心为 $G(x_0,y_0)$ 的椭圆方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

椭圆的参数方程(parametric equation of the ellipse)　椭圆方程的一种常用形式. 即椭圆方程的参数表示. 在平面直角坐标系下，方程

$$\begin{cases}x=x_0+a\cos\varphi,\\ y=y_0+b\sin\varphi\end{cases}\ (\varphi\in[0,2\pi))$$

称为椭圆常用的参数方程，点 $G(x_0,y_0)$ 是椭圆的中心，参数 φ 是半径为 a 的圆 $G(a)$(称为椭圆的辅助圆)与点 $M(x,y)$ 对应的半径 GP 与 x 轴正向的交角，中心在原点的参数方程为

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\sin\varphi.$$

椭圆的辅助圆(auxiliary circle of an ellipse)　见“椭圆的参数方程”.

椭圆的扁平度(flattening of an ellipse)　刻画椭圆形状的数. 椭圆的短半轴和长半轴的比值称为椭圆的扁平度. 椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

的扁平度是 $b/a(0<b/a\leqslant 1)$. b/a 的值能刻画椭圆的扁平程度，b/a 的值愈接近1时，椭圆愈近于圆. 当 $b/a=1$(即 $a=b$)时，椭圆变为圆；当 b/a 的值愈接近于0时，椭圆就愈扁平. 习惯上，也常用离心率 $e=c/a$来刻画椭圆的扁平程度.

椭圆的共轭直径(conjugate diameters of an ellipse) 椭圆的重要概念之一. 椭圆的任一直径是平行弦中点的轨迹，与此直径平行的弦的中点的轨迹是另一条直径，这两条直径称为共轭直径. 位于它们上的两条半径称为共轭半径. 椭圆的长轴与短轴是一对共轭直径. 对于椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$

设某一对共轭直径的斜率为 k,k'，则 $kk'=-b^2/a^2=e^2-1$. 因此，除长短轴外，椭圆的任一对共轭直径总被它的长短轴隔开. 特别对于圆($e=0$)，它的任一对互相垂直的直径都是共轭直径. 在仿射变换下，椭圆变成椭圆，椭圆的任一对共轭直径变成椭圆的一对共轭直径，因此，共轭直径是仿射不变的. 伸缩变换 $x'=x,y'=(b/a)y(a>b>0)$，将圆 $C:x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi$ 变成椭圆 $x'=a\cos\varphi,y'=b\sin\varphi$. 将圆 C 的互相垂直的半径 OA,OB 变成了椭圆的一对共轭半径 OA',OB'. 切线 TA 变成 TA'. 将圆的外切正方形变成了椭圆的外切平行四边形. 设 $OA'=a',OB'=b',\angle A'OB'=\theta$，则有

$$\begin{cases}a'b'\sin\theta=ab,\\ a'^2+b'^2=a^2+b^2.\end{cases}$$

这就是说，作在椭圆的任何一对共轭半径上的平行四边形的面积，等于作在椭圆的两个半轴上的长方形的面积. 椭圆中任意一对共轭半径的平方和等于两个半轴的平方和. 这两个命题早在阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))的《圆锥曲线》的第三卷中就已提出，故称之为关于椭圆的第一个和第二个阿波罗尼奥斯定理.

椭圆的共轭半径(conjugate radius of an ellipse) 见“椭圆的共轭直径”.

椭圆的主轴(principal axis of an ellipse) 亦称椭圆的主直径. 描述椭圆形状的两条轴. 椭圆的长轴和短轴合称椭圆的主轴. 它们是互相垂直的共轭直径.

椭圆的主直径(principal diameters of an ellipse) 即“椭圆的主轴”.

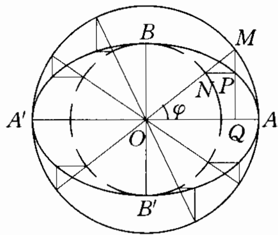
椭圆的补弦(supplementary chord of an ellipse) 椭圆的重要概念之一. 椭圆上任一点与其任意直径两端点的连线段，称为椭圆的补弦. 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

两补弦的斜率为 k_1 和 k_2，当两补弦不与椭圆的长、短轴垂直时，则有 $k_1\cdot k_2=-b^2/a^2$(定值).

椭圆的画法(construction of the ellipse) 画椭圆的一般方法. 通常以椭圆的定义和各种性质为基础，常用的画法有下列几种：

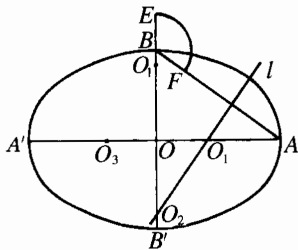
1. 拉线法. 已知椭圆的焦点 F,F' 和长轴长 $2a$. 在点 F,F' 处钉上钉子，用一根细线结成长为 $2a+|FF'|$ 的圆圈，套在钉子上，并用一笔尖 P 拉紧，则笔尖 P 在平面上移动所画曲线即为椭圆.



2. 定义法. 已知椭圆的长轴 $A'A$ 和短轴 $B'B$ 互相垂直平分于 O (参见“椭圆的标准方程”中的图). 以 B 为圆心，半长轴 OA 为半径作圆弧交 AA' 于 F,F'(焦点). 在 AA' 上任取一点 M_1，分别以 F,F' 为圆心，以 $AM_1,A'M_1$ 为半径画弧交于 P_1,P_1' 两点. 改变 M_1 的位置，同样画出 P_2 和 P_2'，P_3 和 P_3' 等点. 把各点连结成光滑的曲线就得到所要画的椭圆. 给定椭圆两焦点 F 和 F' 的位置以及长轴 $2a$，上述画法相当于画出以 F 和 F' 为圆心的两族同心圆. 两族圆中半径之和等于 $2a$ 的圆的交点都是椭圆上的点. 用光滑曲线将这些交点连结起来即得椭圆.

3. 辅助圆法. 以椭圆的长轴 $A'A$ 和短轴 $B'B$ 为直径分别作椭圆的大、小辅助圆 O(见图). 作射线 OM 和大、小辅助圆分别相交于 M 和 N，作 $MQ\perp OA$，作 $NP/\!/OA$，交 MQ 于 P，则 P 是椭圆上的点，取不同的 $\varphi=\angle AOM$ 可以得出椭圆上相应的不同的点 $P(a\cos\varphi,b\sin\varphi)$，把这些点用光滑的曲线连结起来，就形成一个椭圆. 椭圆还有其他画法，例如，可以参照“椭圆”中的图2那样作出一组切线来画，也可以利用仿射变换把圆变成椭圆的性质来画等.

椭圆的四心画法(construction of an ellipse from its four centres of an ellipse) 椭圆的一种近似画法. 已知椭圆的长轴$A'A=2a$ 和短轴 $B'B=2b$ 及其中心 O(参见“椭圆的标准方程”中的图). 在 OB 上截取 $OE=OA=a$，以 B 为圆心，BE 为半径画弧交 AB 于 F；作 AF 的中垂线 l 交 $A'A$ 于 O_1，交 OB' 于 O_2；作 O_1,O_2 关于 O 点的对称点 O_3,O_4；分别以 O_1,O_3 为圆心，O_1A 为半径画弧，以 O_2,O_4 为圆心，O_2B 为半径画弧，则四段圆弧相衔接即得所求的近似椭圆.



准圆(director circle) 用椭圆参数确定的圆.

椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

的两正交切线的交点的轨迹称为准圆，即圆心在椭圆的中心、半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆.

点椭圆(point ellipse) 一种特殊的椭圆. 在平面直角坐标系中，方程 $(x-x_0)^2+k(y-y_0)^2=0\ (k>0)$ 的图形是一个点 (x_0,y_0)，称为点椭圆或交于实点的二虚直线.

椭圆的切线方程(tangent line equation of the ellipse) 椭圆的切线的表达形式. 由椭圆的方程可得出其切线方程. 过椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

上点 (x_0,y_0) 的切线方程是

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

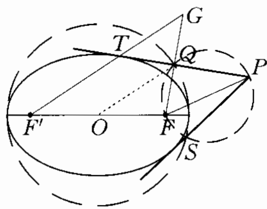
过此椭圆外点 (x_0,y_0) 所引椭圆的两切线的方程是

$$\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\right)^2-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0.$$

此椭圆有定斜率 k 的切线方程是

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}.$$

椭圆切线的画法(construction of the tangent line of an ellipse) 画椭圆切线的一般方法. 已知椭圆的焦点 F,F' 和半长轴长 a，任给一点 P，过点 P 画椭圆的切线的画法如下：以线段 PF 为直径作圆交椭圆的大辅助圆于点 Q,S，则直线 PQ,PS 即为椭圆的切线. 设 G,F 关于 PQ 对称，GF' 与 PQ 的交点 T 就是切点(见图).



椭圆的光学性质(optical property of the ellipse) 椭圆在光学上的应用. 经过椭圆上某点 M 的切线与焦半径 $FM,F'M$ 构成等角，且在 $\angle FMF'$ 之外通过. 这个几何性质的物理意义是：从椭圆的一个焦点 F 发出的光线或声波经过绕长轴旋转所得的椭圆面反射后，都通过另一焦点 F'. 这就是椭圆的光学性质，也是“焦点”命名的依据.

椭圆旋转(revolution of an ellipse) 一种平面仿射变换. 即将椭圆绕其中心旋转的平面仿射变换. 在平面直角坐标系中，椭圆旋转 $\tau:(x,y)\to(x',y')$ 的计算公式为

$$x'=x\cos\varphi-y\frac{a}{b}\sin\varphi,$$

$$y'=x\cdot\frac{b}{a}\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

椭圆的周长(perimeter of an ellipse) 有关椭圆的一个基本公式. 若椭圆的长、短轴分别为 $2a$ 和 $2b$，离心率为

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

则此椭圆的周长的计算公式为

$$C=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$
$$=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}e^3\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}e^4\right)^2-\cdots\right].$$

具体计算时，可查表或者选择使用下列近似公式：

$$C_1=\pi(a+b),\quad C_2=\pi\sqrt{2(a^2+b^2)},$$

$$C_3=\pi\left[\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right],$$

$$C_4=\pi\sqrt{2(a^2+b^2)-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2},$$

$$C_5=\frac{1}{16}(3C_1+3C_2+10C_3).$$

其中 C_5 与准确值 C 从 e^{12} 项开始才有偏差. 当 $b/a\leqslant0.5$ 时，$|C-C_5|<0.0002a$.

椭圆的面积(area of an ellipse) 有关椭圆的一个基本公式. 用其长短轴表示的椭圆的面积公式. 由椭圆的长半轴 a，短半轴 b，计算其面积的公式为

$$S=\pi ab.$$

双曲线(hyperbola) 圆锥曲线的一种. 它是平面内到一个定点 F(焦点)与到不通过这个点的一条定直线 l(准线)的距离之比为大于 1 的常数 e(离心率)的点的轨迹. 双曲线另外还有一个焦点 F' 和一条准线 l'(如图 1). 双曲线亦是平面内与两个定点 F,F' 的距离之差的绝对值等于常数 $2a(2a<|FF'|=2c)$ 的点的轨迹. 两焦点间的距离 $2c$ 称为焦距. 双曲线有两条互相垂直的对称轴(称为双曲线的轴)，它们的交点是对称中心(称为双曲线的中心). 通过焦点的轴称为实轴，另一条轴称为虚轴. 实轴与双曲线的两个交点称为双曲线的顶点. 两个顶点间的线段及其长度 $2a$ 都称为实轴. 双曲线的三个常数 a,c,e 之间有关系式 $e=c/a$. 双曲线还有

图 1

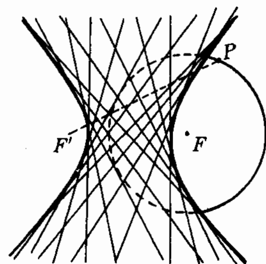


图 2

一个常数 $b=\sqrt{c^2-a^2}$，通常把双曲线的虚轴上以中心为中点、长度为 $2b$ 的线段及其长度都称为虚轴．双曲线还是由落在两条相交直线（渐近线）构成的一对对顶角内的点组成的，过这些点分别作渐近线的平行线，所围成的平行四边形的面积是常数．双曲线还是定圆 $F(2a)$ 上任一点与圆外一个定点 F' 所连线段的中垂线的包络，即这种中垂线是双曲线的切线（图 2）．

双曲线的焦距（focal distance of a hyperbola） 见“双曲线”．

双曲线的轴（axis of a hyperbola） 见“双曲线”．

双曲线的中心（center of a hyperbola） 见“双曲线”．

双曲线的顶点（vertex of a hyperbola） 见“双曲线”．

实轴（real axis） 见“双曲线”．

虚轴（imaginary axis） 见“双曲线”．

双曲线的标准方程（standard equation of a hyperbola） 双曲线方程的一种规范形式．即双曲线的最简方程．在平面直角坐标系下，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

称为双曲线的标准方程，它在 x 轴上的截距为 $\pm a$．顶点为 $A(a,0)$ 和 $A'(-a,0)$，虚轴的端点为 $B(0,b)$，$B'(0,-b)$，焦点为 $F(c,0)$，$F'(-c,0)$ 相应于焦点 F，F' 的准线 l，l' 的方程分别为 $x=a^2/c$，$x=-a^2/c$（如图）．若取双曲线的实轴所在直线作 y 轴，中心作原点建立直角坐标系，则双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1.$$

若选取的 x 轴和 y 轴与双曲线的实轴和虚轴分别平行，则中心为 $G(x_0,y_0)$ 的双曲线方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

双曲线的参数方程（parametric equation of a hyperbola） 双曲线方程的一种常用形式．即双曲线方程的参数表示．在平面直角坐标系下，方程

$$\begin{cases}x=x_0+a\sec\varphi\\ y=y_0+b\tan\varphi\end{cases},\quad \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$

称为双曲线的参数方程，点 $G(x_0,y_0)$ 是双曲线的中心．参数 φ 是圆 $G(a)$ 的与点 $M(x,y)$ 对应的半径 GP 与 x 轴正向的交角．中心在原点的参数方程为 $x=a\sec\varphi$，$y=b\tan\varphi$．双曲线的参数方程也可以表示为

$$\begin{cases}x=a\dfrac{t+t^{-1}}{2},\\ y=b\dfrac{t-t^{-1}}{2}.\end{cases}$$

或 $x=a\,\mathrm{ch}\,\varphi$，$y=b\,\mathrm{sh}\,\varphi$．但后一种参数方程仅表示双曲线的一支．

双曲线的补弦（supplementary chord of hyperbola） 双曲线的重要概念之一．双曲线上任一点与其任意实直径两端点的连线段称为双曲线的补弦．设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

两补弦的斜率为 k_1 和 k_2，当两补弦不与实、虚轴垂直时，则有 $k_1\cdot k_2=b^2/a^2$（定值）．

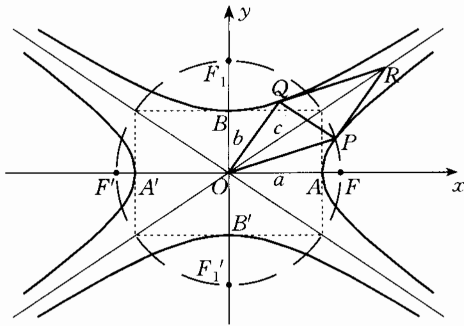
等轴双曲线（equilateral hyperbola） 一种特殊双曲线．指实轴和虚轴等长的双曲线．它的两条渐近线互相垂直，故又称为直角双曲线．其标准方程为 $x^2-y^2=a^2$，经转轴变换可化为 $xy=a^2/2$．等轴双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$．

直角双曲线（rectangular hyperbola） 即“等轴双曲线”．

共轭双曲线（conjugate hyperbolas） 两条具有特殊位置的双曲线．如果一双曲线的实轴及虚轴分别为另一双曲线的虚轴及实轴，则此二双曲线互为共轭双曲线（如图）．共轭双曲线在同一直角坐标系中的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad 及 \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

它们有相同的渐近线 $b^2x^2-a^2y^2=0$，并且 4 个焦点



共圆．它们的离心率的平方之和等于它们的离心率的平方之积．对于双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上的点 $P(a\sec\varphi,b\tan\varphi)$ 所对应的半径 OP，与它共轭的半径 OQ 的端点 $Q(a\tan\varphi,b\sec\varphi)$ 在其共轭双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

上，PQ 平行于一条渐近线，而被另一条渐近线所平

分.任一对共轭直径的斜率之积 $kk'=e^2-1$.设 $OP=a'$,$OQ=b'$,$\angle POQ=\theta$,则有

$$\begin{cases}a'b'\sin\theta=ab,\\ a'^2-b'^2=a^2-b^2.\end{cases}$$

这就是说,作在双曲线任意一对共轭半径上的平行四边形的面积,等于以实半轴和虚半轴为邻边的矩形的面积.双曲线的任意一对共轭半径的平方差等于它的半轴的平方差.这两个命题由古希腊阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))在总结前人对圆锥曲线论方面的成果的基础上,加上自己的创造,撰著成的《圆锥曲线论》中首次给出,因此被命名为关于双曲线的阿波罗尼奥斯定理.

双曲线的画法(construction of the hyperbola) 画双曲线的一般方法.通常以双曲线的定义和各种性质为基础.例如:

1.定义法.已知双曲线的实轴 $A'A$ 和虚轴 $B'B$ 互相垂直平分于 O,以 O 为圆心,AB 长为半径作弧交 AA' 于 F,F'(焦点).在 $F'F$ 的延长线上任取一点 M,分别以 F',F 为圆心,以 $A'M$,AM 为半径画弧交于 P,P' 两点.改变 M 的位置,同样画出 P_1 和 P_1',P_2 和 P_2' 等点.把各点连结成光滑的曲线就得到所要画的双曲线.给定双曲线两焦点 F 和 F' 的位置以及实轴 $2a$,上述画法相当于画出以 F 和 F' 为圆心的两族同心圆.两族圆中半径之差等于 $2a$ 的圆的交点都是双曲线上的点.用光滑曲线将这些交点连结起来即得双曲线(如图 1).

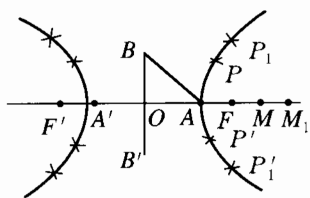


图 1

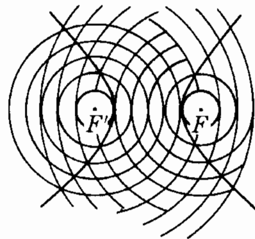
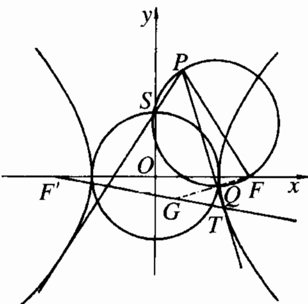


图 2

2.辅助圆法.以双曲线的实轴 $A'A(=2a)$ 为直径作圆 O.在 OA 上截取 $OT=b$,过点 T 作直线 $l\perp OA$.任作射线 OM 交$\odot O(a)$于 M,交 l 于 N.过 M 作$\odot O$ 的切线交 OA 于 Q,作 $NP\parallel OA$,$QP\perp OA$,NP 与 QP 交于 P 点.则 P 是双曲线上的点.取不同的 $\varphi=\angle AOM$ 可得出双曲线上相应的不同的点 $P(a\sec\varphi,b\tan\varphi)$,把这些点用光滑的曲线连结起来,就得所要画的双曲线.双曲线还有其他画法,例如可以参照"双曲线"中的图 2 作出一组切线来画等.

双曲线切线的作法(construction of the tangent line of a hyperbola) 画双曲线的切线的方法.给定双曲线的焦点 F,F' 和半实轴长 a,过双曲线外一点 P 作双曲线的切线的方法是:以线段 PF 为直径作圆交双曲线的大辅助圆于点 Q,S,则直线 PQ,PS 即为双曲线的切线.设点 F 关于直线 PQ 的对称点为 G,则 $F'G$ 与 PQ 的交点 T 就是切点(见图).



双曲线的切线方程(tangent line equation of a hyperbola) 双曲线的切线的表达形式.由双曲线的方程可得出其切线方程.过双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上点(x_0,y_0)的切线方程是

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

此双曲线的有定斜率 k 的切线方程为

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2-b^2}.$$

双曲线的光学性质(optical property of a hyperbola) 双曲线在光学上的应用.经过双曲线上某点 M 的切线,与焦半径 FM,$F'M$ 构成等角,且在$\angle FMF'$之内通过.这个几何性质的物理意义是:从双曲线的一个焦点 F 发出的光线或声波,经过绕实轴旋转所得的双曲面反射后,就好像是从另一个焦点 F' 射出来的一样.这就是双曲线的光学性质.它被运用在反射式天文望远镜的设计制造上.

双曲旋转(revolution of hyperbolic) 一种平面仿射变换.即将双曲线绕其中心旋转的平面仿射变换.在平面直角坐标系中,双曲旋转的计算公式为

$$\begin{cases}x' = x\,\mathrm{ch}\,\varphi + y\,\dfrac{a}{b}\mathrm{sh}\,\varphi,\\ y' = x\,\dfrac{b}{a}\mathrm{sh}\,\varphi + y\,\mathrm{ch}\,\varphi.\end{cases}$$

时差定位法(location by difference of times) 确定点的位置的一种方法.即利用声波或电磁波到达两点的时间差来确定点的位置的方法.其基本原理是:到两定点的时间差与声速(或光速)之积为定值的点在双曲线的一支上.船舶在一望无际的海洋上航行,需要测定自己在海洋上的位置,可以在沿海或岛屿上选择三个适当的地点,建立一个主导航台 F 和两个副导航台 F_1,F_2.航行的船舶上装有定位仪,能接受从主导航台发出的无线电信号和从两个副导航台转发出的相同无线电信号,从定位仪上读出三个信号间的两个信号时差,查阅预制好的双曲线时差定位海图,便知船舶在哪两条双曲线的交点处.双耳听力健全的人能判断声源的方位也是根据这个道理.

二次曲线(quadratic curve) 即圆锥曲线.解

析几何系统研究的一类常用曲线．在平面仿射坐标系或直角坐标系下，关于变元 x,y 的实系数二次方程 $F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 的图形称为二次曲线，其中二次项系数 a_{11},a_{12},a_{22} 不全为零．二次曲线 $F(x,y)=0$ 是二次锥面 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz=0$ 与平面 $z=0$ 的交线．二次曲线的方程亦可用矩阵表示为

$$(x\quad y\quad 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0.$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,3)$，矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为二次曲线的矩阵，对应的行列式 $I_3=\det A$ 称为方程左端二元多项式 $F(x,y)$ 的大判别式．可以用所谓的雅可比配平方法证明，当且仅当 $I_3=0$ 时，二元多项式可分解为两个复系数一次因式的乘积．二次多项式 $F(x,y)$ 经过仿射坐标变换（当 $a_1b_2-a_2b_1=1$ 时为直角坐标变换）

$$\begin{cases}x=a_1x'+b_1y'+c_1,\\y=a_2x'+b_2y'+c_2,\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}.$$

所得到的二次多项式的大判别式为

$$I_3'=I_3\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\0&0&1\end{vmatrix}^2.$$

因此，仿射变换不改变大判别式的符号．在直角坐标变换下，$I_3'=I_3$，即大判别式的值不变（参见本卷《高等几何》中的“二阶曲线”和“二次曲线”）．

二次曲线的矩阵(matrix of a quadratic curve) 见“二次曲线”．

二次曲线的判别式(discriminant of a quadratic curve) 见“二次曲线”．

二级曲线(curve of class 2) 二次曲线的一种表示方法．即用线坐标表示的二次曲线．当直线 $ux+vy+w=0$ 的系数 u,v,w 满足实系数二次方程

$$Au^2+2Huv+Bv^2+2Guw+2Fvw+Cw^2=0$$

（式中 $(A,B,H)\neq(0,0,0)$）时，这些直线的包络线称为二级曲线，它与二次曲线在本质上是一样的（参见本卷《高等几何》同名条）．

二次曲线与直线的相关位置(correlate position between a quadric curve and a line) 解析几何研究的重要问题之一．即讨论直线与二次曲线有多少交点，可以大致了解二次曲线的性状．过定点 (x_0,y_0)，方向为 $l:m$ 的直线 $x=x_0+lt,y=y_0+mt$ 与二次曲线 $F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 的交点由方程 $\Phi(l,m)t^2+2[lF_1(x_0,y_0)+mF_2(x_0,y_0)]t+F(x_0,y_0)=0$ 的根确定．这里引用了记号

$$\Phi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2,$$
$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},$$
$$F_2(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}.$$

当 $\Phi(l,m)\neq0$ 时，所给直线与二次曲线有两个不同的交点（相交）、相重合的交点（相切）或有两个共轭虚点（相离，这时两交点的坐标是共轭复数，它们的中点坐标是实数）．当 $\Phi(l,m)=0$ 时，直线与二次曲线交于一点或不相交或直线全部在二次曲线上（二次曲线退化的情形）．

二次曲线的奇点(singularity of a quadric curve) 二次曲线上的特殊点．在平面仿射坐标系下，对于二次曲线 $F(x,y)=0$，若存在点 (x_0,y_0) 满足条件

$$\begin{cases}F_1(x_0,y_0)=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0,\\F_2(x_0,y_0)=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0,\\F_3(x_0,y_0)=a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}=0,\end{cases}$$

则它称为二次曲线的奇异点，简称奇点．过奇点的任何直线都和此二次曲线交于重合的两点或整个属于二次曲线．例如，二次曲线 $x^2-y^2=0$ 上的点 $(0,0)$ 是奇点，二次曲线 $x^2=0$ 上的所有点都是奇点．

二次曲线的切线(tangent line of a quadric curve) 刻画二次曲线形状的重要直线．若一条直线与二次曲线有两个重合的交点或整个属于二次曲线，则这条直线称为二次曲线的切线．在平面仿射坐标系下，二次曲线 $F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 上非奇点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0$，即

$$(x-x_0)(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})$$
$$+(y-y_0)(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})=0.$$

二次曲线的极线(polar line of a quadric curve) 二次曲线的重要概念之一．在平面仿射坐标系下，对于一条非退化的二次曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$，任意给定点 $P(x_0,y_0)$，它所对应的直线 p：

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})x$$
$$+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23})y$$
$$+a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}=0$$

称为点 P 对于此二次曲线的极线，同时点 P 称为直线 p 对于此二次曲线的极点．若点 P 为圆锥曲线上的一点，则对应的极线是圆锥曲线的切线．若点 P 为圆锥曲线外的一点，则对应的极线与圆锥曲线有交点，这交点与点 P 的连线是圆锥曲线的切线．反之，过圆锥曲线外一点 P 作它的切线，连结切点 T_1，T_2 的直线就是点 P 对于圆锥曲线的极线，又称弦 T_1T_2 为圆锥曲线关于点 P 的切点弦．以上对于圆

锥曲线的结论，对于圆同样成立. 焦点对于圆锥曲线的极线就是圆锥曲线的相应的准线. 准线上任一点关于圆锥曲线的极线必过相应的焦点(参见本卷《高等几何》中的"二阶曲线的极线").

二次曲线的极点(polar point of a quadric curve) 见"二次曲线的极线".

切点弦(chord at contact) 见"二次曲线的极线".

二次曲线的中心(center of the quadric curve) 二次曲线的重要概念之一. 指平分经过它的所有弦的点. 在平面仿射坐标系下，点 G 为二次曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 的中心的充分必要条件是点 G 的坐标适合方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,\\F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0.\end{cases}$$

该方程组的行列式记为

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

当 $I_2\neq 0$ 时，二次曲线有惟一的中心. 有惟一中心的二次曲线称为中心二次曲线. 当 $I_2=0$ 时，若

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}},$$

则二次曲线没有中心. 没有中心的二次曲线称为无心二次曲线. 若

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}},$$

则直线 $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0$ 上的所有点都是二次曲线的中心，这条直线称为中心直线，有中心直线的二次曲线称为线心二次曲线.

中心二次曲线(central quadric curve) 见"二次曲线的中心".

无心二次曲线(centerless quadric curve) 见"二次曲线的中心".

线心二次曲线(line-central quadric curve) 见"二次曲线的中心".

中心直线(central straight line) 见"二次曲线的中心".

非中心二次曲线(noncentral quadric curve) 无心二次曲线与线心二次曲线的统称.

二次曲线的渐近方向(asymptotic direction of a quadric curve) 二次曲线的重要概念之一. 在平面仿射坐标系下，对于二次曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$，满足条件 $a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0$ 的方向 $l:m$ 称为二次曲线的渐近方向，否则，称为非渐近方向. 记 $I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. 当 $I_2>0$ 时，二次曲线没有实渐近方向，称为椭圆型的；当 $I_2=0$ 时，二次曲线有一个实渐近方向，称为抛物型的；当 $I_2<0$ 时，二次曲线有两个实渐近方向，称为双曲型的.

二次曲线的非渐近方向(nonasymtotic direction of a quadric curve) 见"二次曲线的渐近方向".

二次曲线的渐近线(asymptote of a quadric curve) 二次曲线形状的重要直线之一. 通过二次曲线的中心，且以渐近方向为方向的直线. 椭圆型二次曲线只有两条虚渐近线；双曲型二次曲线有两条实渐近线；无心二次曲线没有渐近线；线心二次曲线有一条实渐近线，就是它的中心直线. 在平面仿射坐标系下，二次曲线 $F(x,y)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 的渐近线方程为

$$l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+m(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0,$$

式中 $l:m$ 是渐近方向，它由方程 $a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2=0$ 确定. 其渐近线方程也可写成 $a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2=0$ 或者 $F(x,y)-I_3/I_2=0$. 前一式中的 x_0,y_0 由中心方程组确定；后一式中的

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{12} & a_{22}\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

二次曲线的直径(diameter of a quadric curve) 二次曲线的重要概念之一. 指二次曲线平行弦中点的轨迹. 二次曲线有非渐近方向 $l:m$ 的平行弦中点所属的直线称为与非渐近方向 $l:m$ 共轭的直径. 在平面仿射坐标系下，二次曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 的与非渐近方向 $l:m$ 共轭的直径的方程为 $l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+m(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0$，这条直径的方向 $l':m'=-(a_{12}l+a_{22}m):(a_{11}l+a_{12}m)$ 与平行弦的方向 $l:m$ 满足：$a_{11}ll'+a_{12}(lm'+l'm)+a_{22}mm'=0$，称这样的两个方向是互相共轭的方向. 渐近方向可以看成与自身共轭的方向. 由于 $a_{11}l'^2+2a_{12}l'm'+a_{22}m'^2=I_2(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2)$，故当 $I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$ 时，与非渐近方向共轭的直径的方向也是非渐近方向. 具有互相共轭的方向的两条直径称为共轭直径. 而当 $I_2=0$ 时，与非渐近方向 $l:m$ 共轭的直径的方向 $l':m'$ 一定是渐近方向，因此，所有的直径都平行于曲线的渐近方向. 在平面直角坐标系下，对于椭圆和双曲线 $x^2+y^2/(1-e^2)=a^2$，除两条互相垂直的对称轴外，其他的互相共轭的直径的斜率 k 与 k' 满足 $kk'=e^2-1$.

二次曲线的共轭方向(conjugate direction of a quadric curve) 见"二次曲线的直径".

二次曲线的共轭直径(conjugate diameters of a

quadric curve） 见“二次曲线的直径”.

二次曲线的主直径(principal diameter of a quadric curve) 二次曲线的特殊直径. 即垂直于它所平分的弦的直径,它是二次曲线的对称轴. 因而也称它为二次曲线的轴或主轴,主轴与二次曲线的交点称为二次曲线的顶点. 主直径的求法参见“二次曲线的主方向”.

二次曲线的主轴(principal axis of a quadric curve) 见“二次曲线的主直径”.

二次曲线的顶点(vertex of a quadric curve) 见“二次曲线的主直径”.

二次曲线的主方向(principal direction of a quadric curve) 二次曲线的重要概念之一. 即二次曲线主直径的方向. 设主直径所平分的弦的方向为 $l:m$,则与方向 $l:m$(l,m 不同时为零)共轭的方向 $-(a_{12}l+a_{22}m):(a_{11}l+a_{12}m)$(参见“二次曲线的直径”)就是主直径的方向,它们互相垂直的充分必要条件是

$$\frac{a_{11}l+a_{12}m}{l}=\frac{a_{12}l+a_{22}m}{m}. \tag{1}$$

设其比值为 $\lambda\neq0$(若 $\lambda=0$,则主直径不存在),因此主方向 $l:m$ 满足方程组

$$\begin{cases}a_{11}l+a_{12}m=\lambda l,\\ a_{12}l+a_{22}m=\lambda m,\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}l\\ m\end{pmatrix}. \tag{2}$$

它有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即
$$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0. \tag{3}$$

这个方程称为二次曲线的特征方程,它必有两个实根(称为特征根),而且至少有一个非零的特征根. 式中 $I_1=a_{11}+a_{22}$, $I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. 确定二次曲线的主方向和主直径的一般步骤是:

1. 由特征方程(3)解出特征根 λ(至少有一个根不为零).

2. 将特征根 λ 代入上面方程组(2)解得主方向 $l:m=a_{12}:(\lambda-a_{11})=(\lambda-a_{22}):a_{12}$. 当 $\lambda=0$ 时,对应的主方向是二次曲线的渐近方向.

3. 将非零特征根所对应的主方向代入直径的方程 $l(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+m(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0$,即得主直径的方程.

当 $I_2\neq0$ 时,若 $\Delta=I_1^2-4I_2=(a_{11}-a_{12})^2+4a_{12}^2=0$,则特征根为二重根 $\lambda=a_{11}=a_{22}(\neq0)$. 二次曲线(为圆)的任何直径都是主直径. 若 $\Delta\neq0$,二次曲线有两条主直径. 当 $I_2=0$ 时,二次曲线(不妨设 $a_{11}>0$)只有一条主直径

$$\alpha x+\beta y+\frac{\alpha a_{13}+\beta a_{23}}{\alpha^2+\beta^2}=0,$$

式中 $\alpha=\sqrt{a_{11}}$, $a_{12}/\alpha=\beta$, $\beta^2=a_{12}^2/a_{11}=a_{22}$. $\alpha:\beta$ 就是特征根 $\lambda=a_{11}+a_{22}$所对应的非渐近主方向. 而主直径的方向 $-\beta:\alpha=-a_{12}:a_{11}$是渐近方向.

二次曲线的特征方程(characteristic equation of a quadric curve) 见“二次曲线的主方向”.

二次曲线的特征根(characteristic root of a quadric curve) 见“二次曲线的主方向”.

二次曲线方程的化简(simplification of the equation of a quadric curve) 将二次曲线方程化为标准型的方法. 一般指在直角坐标系的情形用直角坐标变换化简二次曲线的方程以利于研讨此曲线. 设在平面直角坐标系中,已知二次曲线的方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$. 经过直角坐标变换(包括单独的移轴或转轴),曲线在新坐标系中的方程是 $a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0$. 从“二次曲线的正交不变量”已知有三个不变量 I_1,I_2,I_3 和半不变量 K_1. 化简方程的步骤是:

1. 先计算 I_3. 在 $I_3=0$ 时,二次曲线退化. 这时只要再计算 I_2 和 K_2 以确定曲线是什么样的两条直线(包括虚直线)即可,一般不必化简方程. 在 $I_3\neq0$ 时,二次曲线是椭圆(包括虚椭圆)、双曲线或抛物线. 这时就要找出直角坐标变换把方程化简成标准方程.

2. 已知 $I_3\neq0$,再计算 I_2. 这时有两种可能. 先讨论 $I_3\neq0, I_2\neq0$. 二次曲线是椭圆(包括虚椭圆)和双曲线,即是非退化的中心二次曲线,其惟一中心满足下列方程组(参见“二次曲线的中心”)

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0,\\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}=0.\end{cases}$$

设其解为(x_0,y_0). 取点 $O'(x_0,y_0)$作为新坐标系的原点进行移轴 $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$. 由于 O'是二次曲线的惟一中心即对称中心,二次曲线在新直角坐标系中不含一次项,即方程为 $a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+a'_{33}=0$. 这时可以进行转轴消去坐标乘积项(即使新方程的 $a''_{12}=0$). 只须取旋转角 θ 满足

$$\cot 2\theta=\frac{a'_{11}-a'_{22}}{2a'_{12}}.$$

最后得到易于化成标准方程的下列方程: $a''_{11}x''^2+a''_{22}y''^2+a'_{33}=0$. 所进行的直角坐标变换由先移轴后转轴合成.

3. 已知 $I_3\neq0, I_2=0$. 二次曲线是抛物线. 这时方程的二次项一定是完全平方,即方程可以改写成 $(a_1x+b_1y)^2+a_2x+b_2y+c=0$. 作直角坐标变换

$$x'=\pm\frac{a_1x+b_1y}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}},\quad y'=\pm\frac{a_2x+b_2y+c}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

可得易于化成标准方程的下列方程：$a'_{11}x'^2+2a'_{23}y'=0$. 例如，二次曲线的方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 经移轴变换 $x=\bar{x}+x_0, y=\bar{y}+y_0$ 可变为 $\bar{a}_{11}\bar{x}^2+2\bar{a}_{12}\bar{x}\bar{y}+\bar{a}_{22}\bar{y}^2+2\bar{a}_{13}\bar{x}+2\bar{a}_{23}\bar{y}+\bar{a}_{33}=0$，式中

$$\begin{cases}\bar{a}_{11}=a_{11}, \quad \bar{a}_{12}=a_{12}, \quad \bar{a}_{22}=a_{22}, \\ \bar{a}_{13}=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}, \bar{a}_{23}=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}, \\ \bar{a}_{33}=a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0 \\ \quad +a_{33}=\bar{a}_{13}x_0+\bar{a}_{23}y_0+(a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}).\end{cases} \tag{1}$$

又如，二次曲线的方程经过转轴变换

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \quad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

可变为 $a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0$，式中

$$\begin{cases}a'_{11}=a_{11}\cos^2\theta+a_{12}\sin 2\theta+a_{22}\sin^2\theta, \\ a'_{22}=a_{11}\sin^2\theta-a_{12}\sin 2\theta+a_{22}\cos^2\theta, \\ a'_{12}=a_{12}\cos 2\theta-\frac{1}{2}(a_{11}-a_{22})\sin 2\theta, \\ a'_{13}=a_{13}\cos\theta+a_{23}\sin\theta, \\ a'_{23}=-a_{13}\sin\theta+a_{23}\cos\theta, \\ a'_{33}=a_{33}.\end{cases} \tag{2}$$

二次曲线的规范方程(normalized equation of the quadric curve)　亦称二次曲线的简化方程. 二次曲线方程的一种特殊形式. 完全显现出二次曲线类型和形状的方程. 经过适当的直角坐标变换，二次曲线的方程总可以化简为利用不变量表出的下列三种方程之一：

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0 \qquad (I_2\neq 0);$$

$$I_1x^2-2\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}}y=0 \qquad (I_2=0, I_3\neq 0);$$

$$I_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0 \qquad (I_2=0, I_3=0).$$

式中 λ_1, λ_2 是特征方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 的根(参见“二次曲线的正交不变量”).

二次曲线的简化方程(reduced equation of a quadratic curve)　即“二次曲线的规范方程”.

二次曲线的正交不变量(orthogonal invariant of a quadric curve)　二次曲线的重要概念之一. 即二次曲线经正交变换保持不变的量. 由二次曲线在直角坐标系中的方程的系数组成而在正交变换或直角坐标变换下不改变其值的代数式. 常用于表达曲线的几何性质和几何量. 更深刻地揭示了曲线与方程的关系. 设二次曲线方程左端的二元二次多项式为

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 + 2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}.$$

经过直角坐标变换

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+x_0, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+y_0,\end{cases}$$

$F(x,y)$ 变成 $F'(x',y')=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a_{13}'x'+2a'_{23}y'+a'_{33}$. 由 $F(x,y)$ 的系数 a_{ij} 所组成的一个代数式 f，若与 $F'(x',y')$ 的对应的系数所组成的相同的代数式的值总是相等，即无论直角坐标变换如何选择，总有

$$f(a'_{11}, a'_{12}, \cdots, a'_{33})=f(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{33}),$$

则称代数式 f 为二次曲线的正交不变量，简称不变量. 如果 f 的值只是经过转轴变换不变，那么称它为二次曲线的正交半不变量，简称半不变量. 例如：

$$I_1=a_{11}+a_{22},$$

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

是二次曲线的基本不变量，而

$$K_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$$

是二次曲线的半不变量. 由不变量所组成的任一代数式仍然是不变量. 例如，特征方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 的判别式 $\Delta=I_1^2-4I_2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2$ 以及特征根也都是二次曲线的不变量. 曲线的方程依赖于坐标系的选择，而曲线的几何性质如形状、大小等则与坐标系无关，表示这些几何性质的量，例如离心率 e、焦参数 p 等都是二次曲线的不变量，可以用基本不变量表示为：

$$e^2=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}+|I_1|}\leqslant 2, \\ \dfrac{2\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}-|I_1|}>2;\end{cases}$$

$$p^2=\begin{cases}\dfrac{8}{(\sqrt{\Delta}+|I_1|)^3} \ (I_1I_3\leqslant 0), \\ \dfrac{8|I_3|}{(\sqrt{\Delta}-|I_1|)^3} \ (I_1I_3>0).\end{cases}$$

二次曲线的正交半不变量(orthogonal half invariant of a quadric curve)　见“二次曲线的正交不变量”.

二次曲线的基本不变量(basic invariant of a quadric curve)　见“二次曲线的正交不变量”.

二次曲线的分类(classification of quadric curves)　解析几何研究的重要问题之一. 二次曲线根据其类型和形状可分为 9 类. 通过直角坐标变换，二次曲线的方程总可以化简为下表中所示的 9 种标准方程之一的形式；通常又将二次曲线按 $I_3=0$ 及 $I_3\neq 0$ 而分为退化二次曲线及非退化二次曲线(包

括圆锥曲线和虚椭圆). 二次曲线分类如下:

型别			类别	标准方程
中心二次曲线	椭圆型 $I_2>0$	$I_3\neq 0$	1. 椭圆 $I_1I_3<0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
			2. 虚椭圆 $I_1I_3>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
		$I_3=0$	3. 点椭圆(相交于实点的二虚直线)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
	双曲线 $I_2<0$	$I_3\neq 0$	4. 双曲型	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
		$I_3=0$	5. 相交二直线	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
非中心二次曲线	抛物型 $I_2=0$	$I_3\neq 0$	6. 抛物线	$x^2=2py$
		$I_3=0$	7. 二平行直线 $K_1<0$	$x^2=a^2$
			8. 二平行虚直线 $K_1>0$	$x^2=-a^2$
			9. 二重合直线 $K_1=0$	$x^2=0$

上面是关于二次曲线的度量分类(二次曲线共分为 9 类),除重合二直线外,其余每一类中有无数多个不全等的曲线. 但在仿射分类中,它们是互相仿射等价的. 因此,在仿射变换群下,二次曲线的仿射分类就是 9 个,它们的标准方程分别为:

1. $x^2+y^2-1=0$.
2. $x^2+y^2+1=0$.
3. $x^2+y^2=0$.
4. $x^2-y^2-1=0$.
5. $x^2-y^2=0$.
6. $x^2-y=0$.
7. $x^2-1=0$.
8. $x^2+1=0$.
9. $x^2=0$.

从表中可知,二元二次多项式可以分解成复系数一次因式的乘积的充分必要条件是 $I_3=0$;可以分解成两个实系数一次因式的乘积的充分必要条件是 $I_3=0$ 且 $I_2<0$ 或 $I_2=0, K_1\leqslant 0$.

二次曲线族(family of quadric curves) 二次曲线的集合. 指具有某种共同性质的二次曲线的全体. 它可简化求适合一定条件的二次曲线的方程的步骤:

1. 给定两条二次曲线 $F_1(x,y)=0, F_2(x,y)=0$,经过这两条二次曲线的所有交点(一般有 4 个)的二次曲线族的方程为 $\lambda_1F_1(x,y)+\lambda_2F_2(x,y)=0$,式中 λ_1,λ_2 是不同时为零的参数.

2. 经过两条直线 $L_i=A_ix+B_iy+C_i=0\ (i=1,2)$ 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 的交点的二次曲线族的方程为 $F(x,y)+\lambda L_1L_2=0$,式中 λ 是参数.

3. 经过 4 点 $P_i(x_i,y_i)\ (i=1,2,3,4)$ 的二次曲线族的方程为 $L_{12}L_{34}+\lambda L_{23}L_{41}=0$,式中 λ 是参数, $L_{i,i+1}=(y_{i+1}-y_i)(x-x_i)-(x_{i+1}-x_i)(y-y_i)$, $x_5=x_1, y_5=y_1$.

4. 与已知两直线 $L_1=0, L_2=0$ 分别相切于已知点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ 的二次曲线族的方程为 $L_{12}^2+\lambda L_1L_2=0$,式中 $L_{12}=(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)$, λ 是参数. 例如,已知 $A(-1,0), B(1,0), C(a,b)$ 和 AB 边上的中线 OC 上一点 P, $OP/OC=f$,则与两直线 AC, BC 分别相切于点 A, B,且过点 P 的二次曲线为 $f^2b^2x^2-2f^2abxy+(f^2a^2+1-2f)y^2+2f^2by-f^2b^2=0$. 当 $f=1/2$ 时,图形为抛物线;当 $0<f<1/2$ 时,图形为椭圆;当 $1/2<f<1$ 时,图形为双曲线.

5. 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 相切于已知点 (a,b) $(F(a,b)=0)$ 的二次曲线族的方程为 $F(x,y)+\lambda(x-a)^2+\mu(y-b)^2=0$,式中 λ,μ 是参数, $\lambda^2+\mu^2\neq 0$.

共焦有心圆锥曲线族(family of the confocal central conics) 一类圆锥曲线的集合. 即以两定点 F, F' 为焦点的椭圆以及双曲线的全体. 设焦点坐标为 $(\pm c,0)$,则以 t 为参数的方程 $tx^2+(c^2+t)y^2=t(c^2+t)$ 表示该曲线族,并且椭圆族 $(t>0)$ 与双曲线族 $(0>t>-c^2)$ 正交. 通过各象限内部的点属于这个曲线族的椭圆及双曲线各有一个,而且它们是正交的. 因而,这个曲线族构成的正交曲线坐标系,称为椭圆坐标系.

椭圆坐标(coordinate of the ellipse) 见"共焦有心圆锥曲线族".

共焦抛物线族(family of confocal parabolas) 一类抛物线的集合. 即有公共焦点的抛物线的全体. 含有抛物线 $y^2=2px$ 的共焦抛物线族是以 t 为参数的曲线族 $y^2=2(p+t)(x+t)$. 它确定一个正交曲线坐标系.

平面曲线

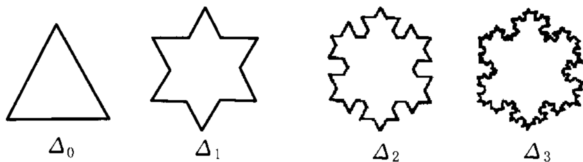
曲线(curve) 亦称线. 初等几何中被作为不言自明的原始概念之一. 欧几里得(Euclid)在《几何原本》卷首指出,"面的界是线","线有长度没有宽度","线的界是点". 这些并没有给线以完全的定义. 线分为直线与曲线. 然而直与曲是相对的. 现已把直线看做特殊的曲线,因此,曲线与欧几里得的线是同义语. 若曲线上所有的点在同一平面内,这曲线称为平面曲线. 在解析几何中,曲线被看做质点运动的轨迹. 即适合一定条件的点的集合. 建立了平面坐标系后,平面曲线可用方程 $F(x,y)=0$ 表示,或者用参数方程

$$x=f(t),\ y=g(t),\ t\in[a,b] \qquad (1)$$

表示.若 f,g 是区间$[a,b]$上的连续函数,则此曲线称为连续曲线.即连续曲线是线段$[a,b]$的单值连续映射的象.对应于 a 或 b 的点称为曲线的始点或终点.如果这两点重合,则曲线为闭曲线.对于开区间(a,b)上任意不同的参数 t,若所对应的点$(f(t),g(t))$总不同,这样的连续曲线称为简单曲线或简单弧.即简单曲线是线段(包括或不包括始点或终点)的一一连续映射的象.平面上的简单闭曲线称为若尔当曲线.若尔当曲线将平面分为内外两个区域.有限个简单弧若相交于有限个点,并且它们的并集连通时,称为寻常曲线.寻常曲线虽已包括常见的曲线,但仍存在其他类型的曲线.例如,由正弦摆线

$$y=\sin\frac{1}{x}\ (-1\leqslant x<0,0<x\leqslant 1)$$

和 y 轴上的线段 $x=0,-1\leqslant y\leqslant 1$ 组成的曲线.又如下列曲线:将边长为 1 的正三角形,去掉每边中间的 1/3 的线段,而代之以它为底边的等边三角形的另两边,得一个周长为 $3\times 4/3$ 的凹六边形 Δ_1,再用同样的方法改造 Δ_1 的每条边而得到 Δ_2(见图).



如此重复下去,得到一个周长为 $3(4/3)^n$ 的凹多边形 Δ_n,它是一个简单闭曲线.当 $n\to\infty$时,Δ_n 趋于某极限曲线 K,称为科克曲线.科克(Koch,H. von)于 1904 年首先对它作了描述.对于一般的曲线,乌雷松(Урысон,П. С.)和门杰(Menger,K.)于 1921 年用一维的连续统来定义.

平面曲线(plane curve)　见“曲线”.

连续曲线(continuous curve)　见“曲线”.

寻常曲线(ordinary curve)　见“曲线”.

科克曲线(Koch curve)　见“曲线”.参见《数学辞海》第三卷《分形几何》同名条.

垂足曲线(pedal curve)　一种平面曲线.即由一已知曲线所产生的另一曲线.给定一条曲线 C 和一个定点 O,从点 O 向曲线 C 的任一条切线作垂线,垂足 M 的轨迹 S 称为曲线 C 关于 O 点的垂足曲线.反过来,C 称为曲线 S 关于 O 点的反垂足曲线.例如,抛物线关于焦点的垂足曲线是直线,椭圆和双曲线关于焦点的垂足曲线都是圆,等边双曲线关于中心的垂足曲线是双纽线.

反垂足曲线(antipedal curve)　见“垂足曲线”.

等距线(equidistant line)　亦称平行曲线.一种平面曲线.即由一已知曲线所产生的另一曲线.曲线 Γ 上的每点沿着 Γ 在该点法线的一个方向(正负两个方向)移动等距离 a 得到新的点,这些点的轨迹 Γ_1(和 Γ_2)称为曲线 Γ 的等距线.曲线 Γ:$x=x(t),y=y(t)$的等距线的参数方程为

$$\begin{cases} X=x(t)\pm\dfrac{ay'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}, \\ Y=y(t)\mp\dfrac{ax'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}. \end{cases}$$

设凸闭曲线 Γ 与 Γ 的外等距线的曲率半径分别为 r 和 r_a,周长分别为 L 和 L_a,面积分别为 A 与 A_a,则有 $r_a=r+a$;$L_a=L+2\pi a$;$A_a=A+aL+\pi a^2$.后两式称为关于凸闭曲线的等距线的施泰纳公式.

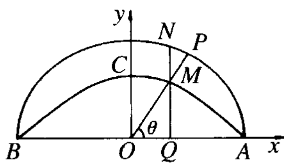
平行曲线(parallel curves)　即“等距线”.

等距线的施泰纳公式(Steiner formula of equidistant line)　见“等距线”.

割圆曲线(quadratrix)　亦称圆积线.一类特殊曲线.指解决化圆为方问题的曲线.求作一个正方形,使它的面积与已知圆的面积相等,称为化圆为方问题.凡是可以用来解决化圆为方问题的曲线,都称为割圆曲线.例如,阿基米德螺线,蜗牛线 $\rho=a\sin\theta/\theta$,琴豪生割圆曲线 $y=a\sin(\pi x/2a)$,奥扎南曲线 $x=2a\sin^2(y/2a)$都是割圆曲线.而最有名的要算狄诺斯特拉托斯割圆曲线 $y=x\cot(\pi x/2a)$ $(|x|\leqslant a)$,极坐标方程为

$$\rho=\frac{2a(\theta-\pi/2)}{\pi\sin(\theta-\pi/2)}\quad\left(\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

它是圆的一条匀速旋转的半径 $OP(=a)$与匀速平移的半弦 QN 的交点 M 的轨迹,QN 与直径 AB 垂直,点 P,Q 开始时位于 A 点,同时到达 B 点(见图).此割圆曲线与 y 轴交点 C 的纵坐标为 $2a/\pi$.作线段 x,使得 $OC:AB=AB:x$,则 $x=4a^2/OC=2\pi a$;再作 x 与 $a/2$ 的比例中项 m,则 $m^2=\pi a^2$.以 m 为一边的正方形与半径为 a 的圆等积.狄诺斯特拉托斯割圆曲线是希皮亚斯(Hippias,(E))发现的,在各种曲线里,除去直线和圆以外,就算它发现得最早了.用它很容易解决三等分任意角问题.狄诺斯特拉托斯(Dinostratus)继续研究这种曲线,发现可以用它解决化圆为方问题.

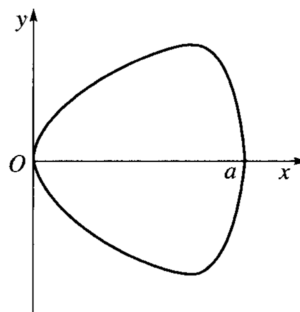


圆积线(quadratrix)　即“割圆曲线”.

珍珠线(pearl curve)　一种特殊曲线.一族曲线,其直角坐标方程为

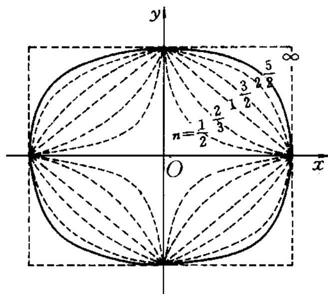
$$x^s(a\pm x)^r=\frac{a^{r+s}}{b^p}y^p,$$

式中 p,r,s 为自然数.一个重要特例是:$x^4+y^4-ax^3=0$(斯吕塞珍珠线,如图).



亚椭圆(hypoelliptic) 一种特殊曲线. 在平面直角坐标系下,方程

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1$$



的图形:当 $n=1$ 时是菱形;当 $n=2$ 时是椭圆;当 $1<n<2$ 时称为亚椭圆;当 $n>2$ 时称为超椭圆. 图中用实线画出的 $n=5/2$ 的超椭圆于 1959 年在斯德哥尔摩城市建设中曾被用于矩形广场上的喷水池外形曲线.

超椭圆(hyperelliptic) 见"亚椭圆".

蔓叶线(cissoid) 一种特殊曲线. 设定圆的直径 $OA=a$,P 是定圆圆周上一点,过 A 点作定圆的切线交射线 OP 于 Q 点. 在 OQ 上截取 $OM=PQ$. 当点 P 在定圆上变动时,点 M 的轨迹称为蔓叶线. 如图,建立直角坐标系,取$\angle AOP=\theta$ 为参数,则蔓叶线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\sin^2\theta,\\ y=a\sin^2\theta\ \tan\theta.\end{cases}\tag{1}$$

令 $t=\tan\theta$,它的参数方程又可表示为

$$\begin{cases}x=\dfrac{at^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{at^3}{1+t^2}.\end{cases}\tag{2}$$

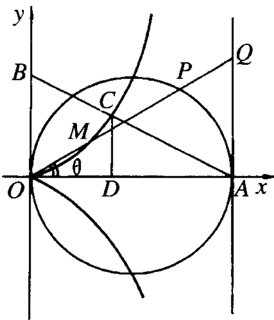
普通方程为

$$y^2=\frac{x^3}{a-x}.\tag{3}$$

极坐标方程为

$$\rho=a\sin\theta\tan\theta.\tag{4}$$

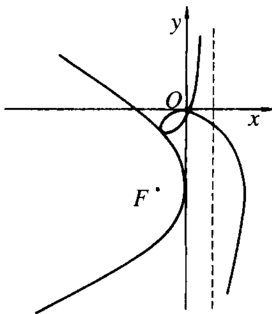
蔓叶线在原点 $O(0,0)$处与 x 轴相切,点 O 是尖点. 曲线有渐近线 $x=a$. 曲线与渐近线之间的面积 $S=3\pi a^2/4$. 从抛物线的顶点引各切线的垂线,垂足的轨迹是蔓叶线. 抛物线关于顶点的反演图形亦为蔓叶线. 蔓叶线是狄俄克利斯(Diocles)研究立方体倍积问题(尺规作图不能问题之一)时首次发现的,故亦称为狄俄克利斯蔓叶线. 应用蔓叶线解决立方体倍积问题的方法是:作直线 AB:$x+2y-a=0$ 交蔓叶线于 C,作 $CD\perp OA$,垂足为 D,则以 OD 为一边的立方体体积是以 CD 为一边的立方体体积的两倍.



狄俄克利斯蔓叶线(Diocles cissoid) 即"蔓叶线".

蔓叶类曲线(cissoidal curve) 一类特殊曲线. 即由一组曲线方程的线性组合所表示的曲线. 设曲线 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 的极坐标方程分别为 $\rho=f_1(\theta)$, $\rho=f_2(\theta),\cdots,\rho=f_k(\theta)$,这些方程的线性组合所成方程 $\rho=\lambda_1f_1(\theta)+\lambda_2f_2(\theta)+\cdots+\lambda_kf_k(\theta)$的曲线称为关于极点 O 的 $C_1,C_2,\cdots,C_k$ 的蔓叶类曲线. 例如,狄俄克利斯蔓叶线就是蔓叶类曲线的一种. 它是由直线 C_1:$\rho=a/\cos\theta$和圆 C_2:$\rho=a\cos\theta$,$\lambda_1=1$,$\lambda_2=-1$ 线性组合而成的. 斯吕塞蚌线、尼科米迪斯蚌线也都是直线与圆组合而成的蔓叶类曲线的一种. 笛卡儿叶形线也可以看做是直线与椭圆组合而得到的蔓叶类曲线的一种.

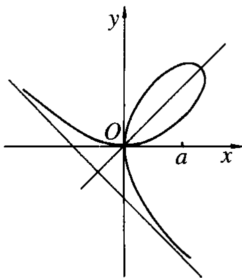
蛇尾线(ophiuride) 由抛物线产生的一种曲线. 设 O 是抛物线在其顶点处的切线上的任意点,从点 O 引抛物线切线的垂线垂足的轨迹称为蛇尾线(见图). 在以 O 为原点并以抛物线顶点处的切线为 y 轴的直角坐标系中,蛇尾线的方程可以写成



$$x(x^2+y^2)=y(ay-bx),$$

$(-a,-b)$是抛物线的焦点坐标. 特别当 $b=0$ 时得到蔓叶线.

笛卡儿叶形线(Cartesian folium) 一种特殊曲线. 在平面直角坐标系中,由方程 $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$表示的曲线,简称叶形线或柳叶线. 它关于直线 $y=x$ 对称,顶点为 $(3a/2,3a/2)$,原点 $O(0,0)$是它的结点. 在原点处,叶形线与 x 轴和 y 轴相切,曲率半径为 $3a/2$. 叶形线具有渐近线 $x+y+a=0$,且与渐近线之间的面积为 $3a^2/2$. 圈套所围成的面积亦为 $3a^2/2$. 笛卡儿叶形线的参数方程为



$$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}\quad(t=\tan\theta).$$

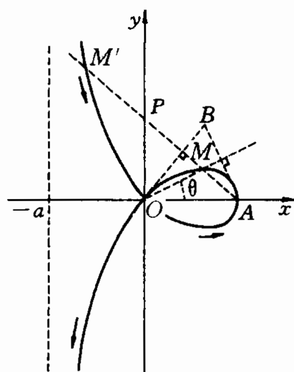
极坐标方程为

$$\rho=\frac{3a\tan\theta}{\cos\theta(1+\tan^3\theta)}.$$

环索线(strophoid) 亦称结绳线. 一种特殊曲线. 已知定点 A 与定直线 l 的距离为 $OA=a$ $(a>0)$,过定点 A 的任一直线交定直线 l 于点 P,直线

AP 上到点 P 的距离等于$|OP|$的动点 M 的轨迹称为环索线.点 A 称为它的顶点(见图).取定直线 l 为 y 轴建立直角坐标系.设 $A(a,0)$,取$\angle AOM=\theta$ 为参数,则环索线的参数方程为

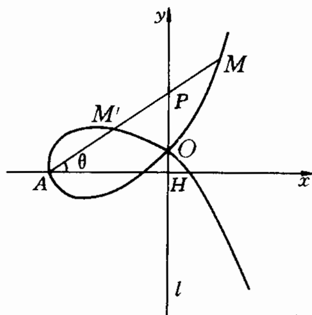
$$\begin{cases} x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = at\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} (t=\tan\theta).$$



普通方程为 $y^2(a+x)=x^2(a-x)$;极坐标方程为 $\rho=a\cos 2\theta/\cos\theta$.它有结点 $O(0,0)$,有渐近线 $x=-a$,且与渐近线之间的面积为 $2a^2+\pi a^2/2$.圈套所成的面积为 $2a^2-\pi a^2/2$.环索线也是以 O 为顶点,腰长为定值 a 的等腰三角形 OAB 的垂心的轨迹.等边双曲线关于其一顶点的反演图形为环索线.

结绳线(strophoid) 即"环索线".

斜环索线(oblique strophoid) 一种特殊曲线.已知定直线 l 和其上定点 O,过直线 l 外定点 A 的任一直线交直线 l 于点 P,直线 AP 上到点 P 的距离等于$|OP|$的动点 M 的轨迹称为斜环索线(见图).特别当 $AO\perp l$ 时,即为环索线.作 $AH\perp l$,H 为垂足.取 A 为极点,AH 为极轴,设 $AH=a$,$HO=b$,则斜环索线的极坐标方程为

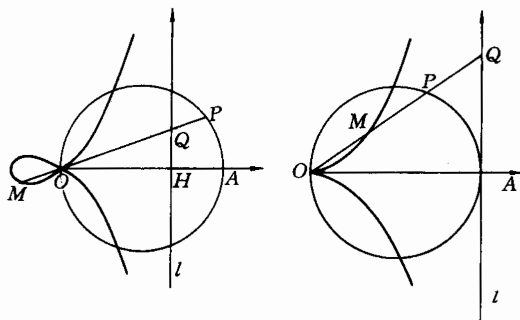


$$\rho=\frac{a}{\cos\theta}+a\tan\theta-b \text{ 或 } \rho=\frac{a}{\cos\theta}-a\tan\theta+b;$$

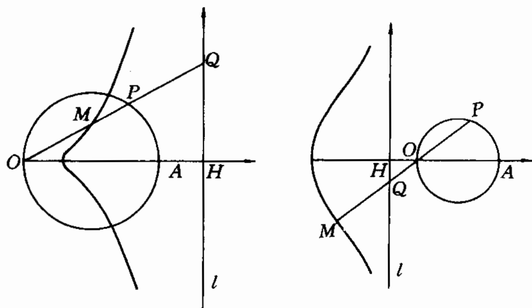
直角坐标方程为

$$(x^2+y^2)(x-2a)+(a^2-b^2)x+2aby=0.$$

斯吕塞蚌线(Sluse conchoid) 一种特殊曲线.



从定圆周上定点 O 作任意直线,交定圆于 P,交定直线 l 于 Q,定直线 l 垂直于定圆的直径 OA,H 为垂足,但 l 不过 O 点.在 OP 上取点 M,使 $OM=PQ$,并且 OM 与 PQ 同向,点 M 的轨迹称为斯吕塞蚌线.定直线 l 是斯吕塞蚌线的渐近线.当直线 l 与定圆相切时,斯吕塞蚌线化为蔓叶线;当 l 与定圆相交时,斯吕塞蚌线有一个结点,称为长幅蔓叶线;当 l 与定圆相离时,斯吕塞蚌线没有尖点和结点,称为短幅蔓叶线.设定圆直径 $OA=2r$,$OH=a$,当



OH 与 OA 同向时 $a>0$,异向时 $a<0$.取 OA 为极轴,O 为极点,则斯吕塞蚌线的极坐标方程为

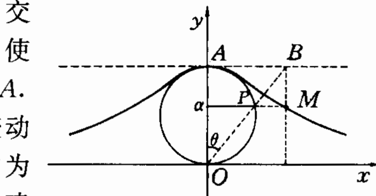
$$\rho=\frac{a}{\cos\theta}-2r\cos\theta;$$

其直角坐标方程为 $y^2(a-x)=x^2(x+2r-a)$.当 $r=a$ 时为环索线.以极点为反演极,斯吕塞蚌线的反演图形为圆锥曲线,且极点是圆锥曲线的一个顶点.短幅蔓叶线反演得到椭圆,长幅蔓叶线反演得到双曲线,蔓叶线反演得到抛物线.

长幅蔓叶线(prolate cissoid) 见"斯吕塞蚌线".

短幅蔓叶线(curtate cissoid) 见"斯吕塞蚌线".

箕舌线(versiera) 由圆产生的一种曲线.设定圆的直径 $OA=a$,过 O 作任一弦 OP,过点 A 作圆的切线与射线 OP 交于 B,再作点 M,使 $BM/\!/OA$,$PM\perp OA$.当 P 点在定圆上变动时,点 M 的轨迹称为箕舌线.如图所示,建立直角坐标系,取$\angle AOB=\theta$为参数,则箕舌线的参数方程为



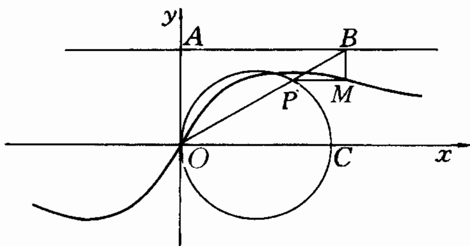
$$\begin{cases} x=a\tan\theta, \\ y=a\cos^2\theta; \end{cases}$$

其普通方程为 $y(x^2+a^2)=a^3$.箕舌线有渐近线 $y=0$,曲线与渐近线之间的面积为 πa^2,有拐点 $(\pm a/\sqrt{3},3a/4)$,在这两点处的切线斜率分别为 $\mp 3\sqrt{3}/8$.过曲线上任一点 M 作 $MQ\perp OA$ 交圆于 P,则有 $QM:QP=OA:OQ$.女数学家阿涅西(Agnesi,M.G.)对箕舌线作了详细的研究,故又称

箕舌线为阿涅西箕舌线. 费马(Fermat, P. de)和格兰迪(Grandi, G.)早已知道这种曲线.

阿涅西箕舌线(Agnesi witch) 即"箕舌线".

蛇形线(serpentine) 一种特殊曲线. 已知定直线 $y=a$ 和定圆 $x^2+y^2=cx$,过原点 O 的动直线交定圆于 P 点,交定直线于 B 点. 再作点 M,使 PM 和 MB 分别平行于 x 轴和 y 轴. 点 M 的轨迹称为蛇形线(见图).

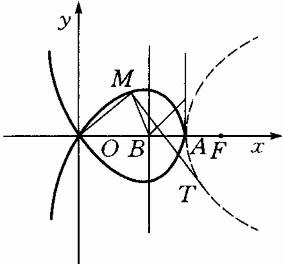


设定直线与 y 轴交于点 $A(0,a)$,取 $\angle AOB=\theta$ 为参数,则蛇形线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\tan\theta, \\ y = c\sin\theta\cos\theta; \end{cases}$$

普通方程为 $y(x^2+a^2)=acx$.

麦克劳林三等分角线(Maclaurin trisectrix) 可用于将一角三等分的平面曲线. 从抛物线的焦点 F 关于准线的对称点 O,引此抛物线的切线的垂线,垂足的轨迹. 设 $OF=4a$. 抛物线的方程为 $y^2=4a(x-3a)$,则麦克劳林三等分角线的方程为 $x(x^2+y^2)+a(y^2-3x^2)=0$. 若取点 $B(2a,0)$ 为极点,BF 为极轴,则方程可化为 $\rho\cos(\theta/3)=a$. 在麦克劳林三等分角线上任取点 $M(\rho,\theta)$ 作以极半径 ρ 为斜边,定长 a 为直角边的直角三角形 ABC,则 $\angle ABC=\theta/3$. 因而可用于将角 θ 三等分.



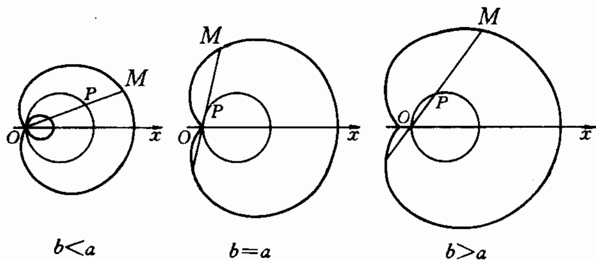
三等分角线(trisectrix) 一种特殊曲线. 指可用于将角三等分的曲线. 例如,蚌线、阿基米德螺线等都是三等分角线.

帕斯卡蜗线(Pascal vortex line) 亦称蚶线. 一种圆外旋轮线. 过直径为 a 的定圆周上的定点 O,引直线交定圆于点 P,在动直线 OP 上距点 P 为 b 的点 M 的轨迹. 是帕斯卡(Pascal, É.)首先研究的. 机器上的凸轮机构有时采用蜗线作为凸轮的轮廓曲线,可使从动杆按余弦规律往返运动.

取 O 为极点,极轴通过圆心,则蜗线的极坐标方程为

$$\rho = a\cos\theta + b (或 \rho = a\cos\theta - b).$$

其直角坐标方程为 $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$,此



式中当 $b>a$ 时含一个孤立点(0,0). 参数方程为

$$\begin{cases} x = (a\cos t + b)\cos t, \\ y = (a\cos t + b)\sin t. \end{cases}$$

当 $b=a$ 时称为心脏线. 蜗线是圆 $(x-a)^2+y^2=b^2$ 关于原点的垂足曲线. 又是特殊的圆外旋轮曲线. 还是圆锥曲线关于其焦点的反演图形.

蚶线(limaçon) 即"帕斯卡蜗线".

心脏线(cardioid) 见"帕斯卡蜗线".

蚌线(conchoid) 一种特殊曲线. 沿给定平面曲线 $C:\rho=f(\theta)$ 的极径方向增加或减少一个定长线段 b,这样得到的曲线 $\rho=f(\theta)\pm b$ 称为曲线 C 的蚌线,或称为一般蚌线. 圆的蚌线就是帕斯卡蜗线.

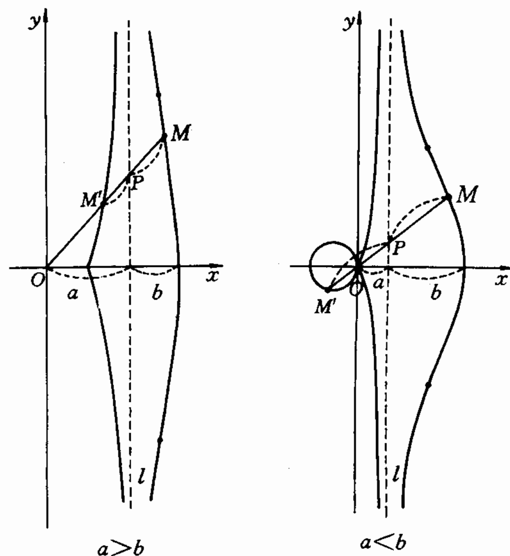


图 1

直线 l 的蚌线称为尼科米迪斯蚌线,通常的蚌线就是指尼科米迪斯蚌线(见图 1). 它的极坐标方程是 $\rho=a\sec\theta\pm b$. 蚌线有两支,都以定直线 l 为渐近线,一支与定点 O 位于定直线的同侧,称为蚌线的内支,另一支与定点 O 位于定直线的异侧,称为蚌线的外支. 它们都关于极轴对称. 在广义极坐标系下,方程 $\rho=a\sec\theta+b$ 与 $\rho=a\sec\theta-b$ 表示相同的曲线,化

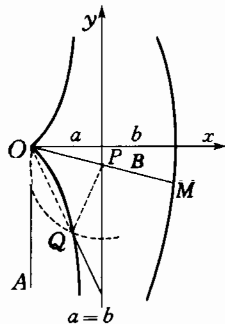


图 2

为直角坐标方程就是$(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$. 这方程表示的曲线，当$a>b$时含有一个孤立点O，当$a=b$或$a<b$时，原点O是尖点或结点. 尼科米迪斯(Nicomedes)在研究任意角三等分时发现了蚌线. 用蚌线三等分任意角的方法如图2($a=b$的情形)所示. 给定$\angle AOB$，过边OB上任一点P作与边OA平行的直线，再以两平行线间的距离为a，OP长为b作出蚌线，以P为圆心作半径为b的圆交蚌线于点Q，则$\angle AOQ=\angle AOB/3$.

尼科米迪斯蚌线(Nicomedes conchoid)　见“蚌线”.

卡西尼卵形线(Cassini ovals)　一种特殊曲线. 平面上到两个相距为$2c$的定点的距离之积等于定值a^2的点的轨迹. 其直角坐标方程为$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$. 极坐标方程为

$$\rho^2=c^2\cos 2\theta\pm\sqrt{a^4-c^4\sin^2 2\theta}.$$

两个定点称为焦点，其坐标为$(\pm c,0)$. 其图形随常数a与c的比值不同而变化(见图1)：

1. 当$a<c$时，它是两支不交的卵形线；点$(\pm\sqrt{c^2-a^2},0)$和$(\pm\sqrt{a^2+c^2},0)$是顶点.

2. 当$a=c$时，称为伯努利双纽线，简称双纽线(见图2)，是雅各布第一・伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)最先研究的.

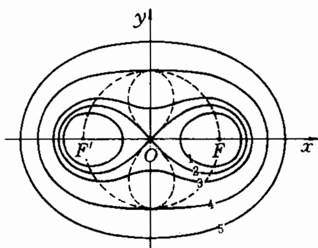


图 1

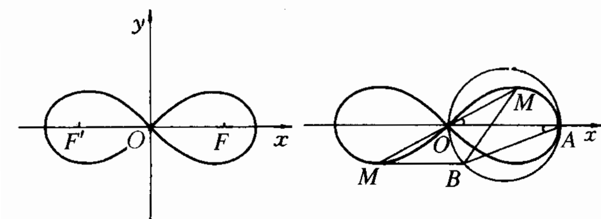


图 2

3. 当$c<a<\sqrt{2}c$时，它是有四个拐点的凹曲线. 拐点坐标为$(\pm\sqrt{(m-n)/2},\pm\sqrt{(m+n)/2})$，其中$m=\sqrt{(a^4-c^4)/3}$，$n=(a^4-c^4)/3c^2=m^2/c^2$. 这些拐点位于双纽线$\rho^2=-c^2\cos 2\theta$上.

4. 当$a=\sqrt{2}c$时，它是有两个拐点的凸闭曲线.

5. 当$a>\sqrt{2}c$时，它是凸闭曲线，有四个顶点$(\pm\sqrt{a^2+c^2},0)$和$(0,\pm\sqrt{a^2-c^2})$. 当a从0变到$\sqrt{2}c$时，极值点$(\pm\sqrt{4c^4-a^4}/2c,\pm a^2/2c)$(或$\rho=c$，$\sin\theta=a^2/2c^2$)位于圆$\rho=c$上.

卡西尼卵形线是卡西尼(Cassini, G. D.)首先研究的.

伯努利双纽线(Bernoulli lemniscate)　见“卡西尼卵形线”.

双纽线(lemniscate)　伯努利双扭线的简称.

笛卡儿卵形线(Cartesian oval)　一种四次曲线. 给定两定点F,F'，满足条件$|FM|+n|F'M|=2a(2a>|FF'|)$的点M的轨迹. 当$n=1$时，曲线就成了椭圆. 在一般情况下，笛卡儿卵形线是四次曲线. 它包括两个没有共同点的闭曲线，而且一个在另一个之内. 在内的一个类似于椭圆，在外的一个可能是凸的，也可能有拐点(如图). 笛卡儿(Descartes, R.)在《折光》里讨论了这个曲线和它的折光性质. 他成功地解决了什么样的曲面作为两种介质的交界面时，能使从第一种介质内一点发出的光线射到曲面上，折入第二种介质而聚于一点. 他发现具有这个性质的旋转面是由笛卡儿卵形线产生的.

开普勒卵形线(Kepler oval)　一种特殊曲线. 极坐标方程为

$$\rho^2=\frac{p^2}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

的曲线称为真开普勒卵形线，其直角坐标方程为

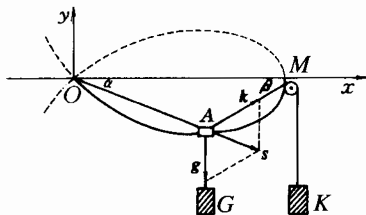
$$(x^2+y^2-p^2)^2-\varepsilon^2x^2(x^2+y^2)=0.$$

而$\rho=2a\cos^3\theta$的曲线称为假开普勒卵形线，它是孟格尔(Münger)卵形线$\rho=2a\cos^n\theta$取$n=3$的一种. 开普勒(Kepler, J.)在《天文学的光学部分》中，研究了二次曲线的互相转化问题，并给出了此曲线.

真开普勒卵形线(proper Kepler oval)　见“开普勒卵形线”.

假开普勒卵形线(improper Kepler oval)　见“开普勒卵形线”.

滑绳线(sliding rope curve)　在物理中常见的一种曲线. 绳子一端结牢在天花板上一点O，另一端穿过固定在天花板上的定滑轮M以后，在下端挂一个重物K. 在O与M之间的一段绳子上套了一个小环，可以沿绳子滑动，环下面挂了另一重物G. 设重物K在某高度时，小环滑到一点A处使整个系统平衡. 当K改变高度时，平衡点A的轨迹称为滑绳线. 如图，用向量$\boldsymbol{g},\boldsymbol{k}$分别表示重物$G,K$的拉力，$\boldsymbol{s}$表示绳子最左部分的拉力. 根据力的合成法则得：



$$|\boldsymbol{s}|\cos\alpha = |\boldsymbol{k}|\cos\beta,$$
$$|\boldsymbol{s}|\sin\alpha + |\boldsymbol{k}|\sin\beta = |\boldsymbol{g}|,$$

消去$|\boldsymbol{s}|$得$|\boldsymbol{g}|\cos\alpha=|\boldsymbol{k}|(\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha)$. 设$|OM|=l$, $|\boldsymbol{k}|/|\boldsymbol{g}|=a/l$, $A(x,y)$, 将

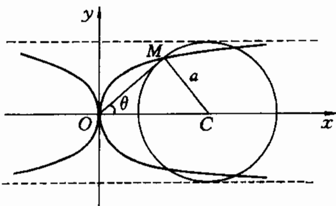
$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\beta=\frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}$$

代入化简得滑绳线的方程

$$y^2=x^2\frac{(l-x)^2}{a^2-x^2}.$$

当$l=a$时就是环索线.

卡帕曲线(Kappa curve)　一种由圆产生的曲线. 半径为定长a的动圆C的圆心在x轴上滑动, 从坐标原点O向圆C所作切线的切点M的轨迹称为卡帕(κ)曲线(见图). 它的极坐标方程为$\rho=a\cot\theta$, 直角坐标方程为$y^2(x^2+y^2)=a^2x^2$. 17世纪斯吕塞(Sluse, R.-F. de)与惠更斯(Huygens, C.)在通信中第一次提到卡帕曲线. 当时是为了解答下面的运动学问题: 同一平面内有一个固定的直角坐标系xOy和一个运动的直角坐标系$x'O'y'$, 已知x'轴始终通过点O, y'轴与x轴的交点C到O'的距离等于定长a, 求动坐标系的原点O'的轨迹. 这里的点O'相当于图中的点M, x'轴相当于直线MO.



皮利福梅曲线(Piriforme curve)　一种由圆产生的曲线. 过圆$x^2+y^2-2ax=0(a>0)$上的动点P与x轴平行的直线交圆之定直径AB($x=a$)于Q, 直线OQ与过点P且平行于y轴的直线的交点M的轨迹(见图)称为皮利福梅曲线. 它所围的面积为πa^2. 它的直角坐标方程为$x^4-2ax^3+a^2y^2=0$; 参数方程为

$$\begin{cases}x=a(1+\cos\varphi),\\ y=a\sin\varphi(1+\cos\varphi),\end{cases}$$

其中$\varphi=\angle xCP$. 极值点坐标$(3a/2, \pm 3\sqrt{3}a/4)$. 拐点坐标$((3-\sqrt{3})a/2, \pm\sqrt[4]{12}(3-\sqrt{3})a/4)$. 尖点坐标$(0,0)$.

代数螺线(algebraic spiral)　一种特殊曲线. 指极坐标方程为$\rho=a\theta^k$的一类曲线.

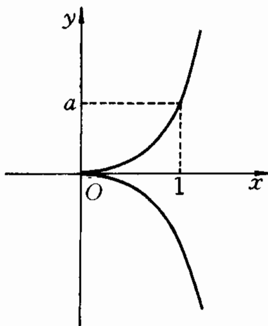
三次曲线(cubic curve)　一种常见的曲线. 指在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)中, 由三次方程表示的曲线.

立方抛物线(cubical parabola)　一种三次曲线. 见本卷《初等代数》同名条.

半立方抛物线(semi-cubical parabola)　亦称尼尔曲线. 一种特殊曲线. 在平面直角坐标系中, 由方程$y^2=a^2x^3$表示的曲线(见图). 它在原点$(0,0)$处有一个尖点, 它的参数方程是

$$\begin{cases}x=t^2,\\ y=at^3.\end{cases}$$

尼尔(Neile, W.)证明了抛物线的渐屈线是半立方抛物线.



尼尔曲线(Neile curve)即"半立方抛物线".

四次曲线(quartic curve)　一种常见的曲线. 指四次方程表示的曲线. 在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)中, 四次方程表示的曲线, 下面举几个例, 并在直角坐标系中作图.

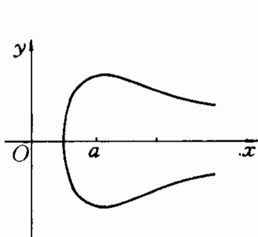


图1　梨线 $y^2=\frac{2x-a}{x^2}a^3$

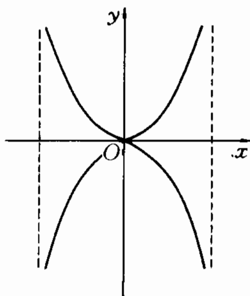


图2　炭锭线 $\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{y^2}=1$ 即 $x^2=\frac{a^2y^2}{y^2+b^2}$

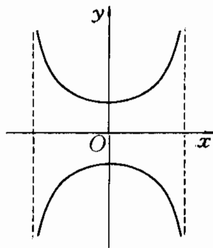


图3　沙漏线 $y^2=b^2\frac{a^2+4b^2x^2}{a^2-4b^2x^2}a^3$

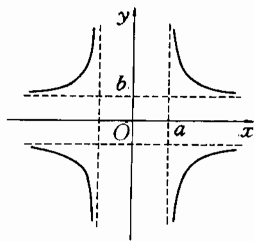


图4　十字线 $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ 即 $y^2=\frac{b^2x^2}{x^2-a^2}$

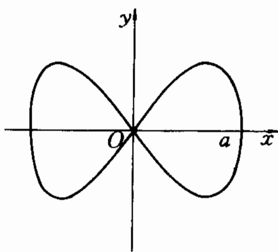


图5　8字线 $y^2=x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$

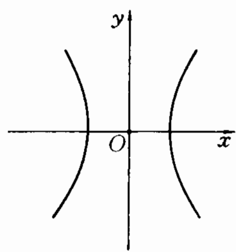


图6　枕头线 $y^2=x^2\frac{x^2-a^2}{a^2}$

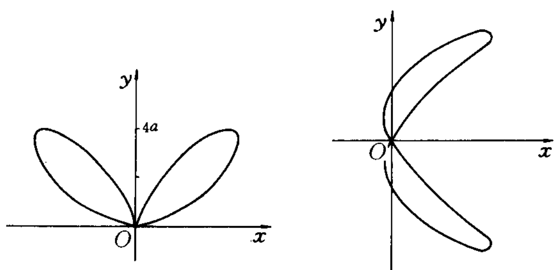


图 7 双叶线 $x^4+y^4-8ax^2=0$　　图 8 钱囊线 $(y^2-ax)^2=b^2(y^2-x^2)$

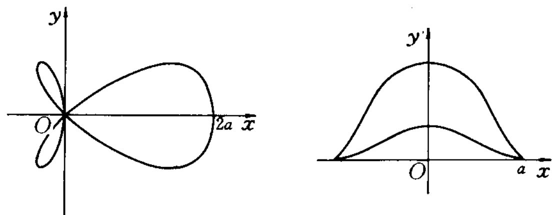


图 9 三叶线 $x^4+y^4=2ax(x^2-y^2)$　　图 10 菱角线（鸡冠线）$(x^2-a^2)^2+(y^2+4ay)(x^2-a^2)+4a^2y^2=0$

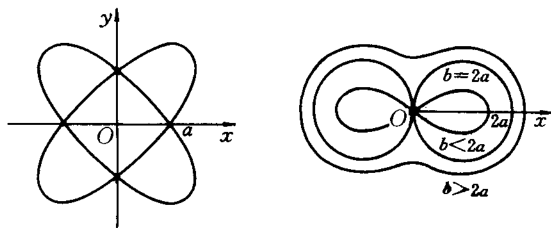


图 11 $c=-b^4=-a^4$　　图 12 布思纽状线 $(x^2+y^2)^2=b^2(x^2+y^2)-4a^2y^2$

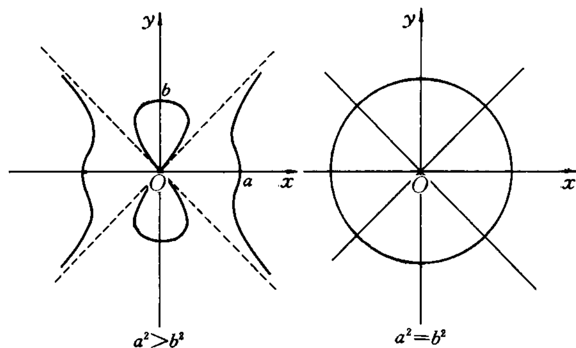
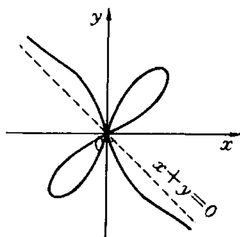
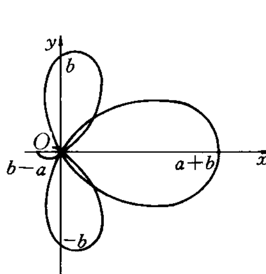


图 13 魔鬼线 $x^4-y^4-a^2x^2+b^2y^2=0$

五次曲线(quintic curve)　一种常见的曲线. 即在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)中，五次方程表示的曲线. 例如，五次方程 $x^5-2x^2y+y^5=0$ 表示图中的曲线.



六次曲线(sextic curve)　一种常见的曲线. 即在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)中，六次方程表示的曲线. 下面的两条曲线，都是在直角坐标系中作图.



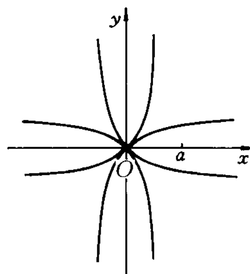
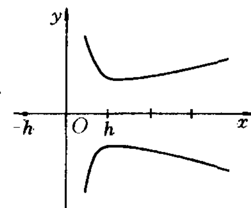
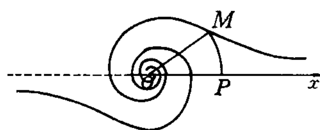


图 1 蜕螂线 $\rho=a\cos\theta+b\cos 2\theta$ $(0<a<b)$　　图 2 风车线 $\rho=2a\cot 2\theta$ 即 $x^2y^2(x^2+y^2)=a(x^2-y^2)^2$

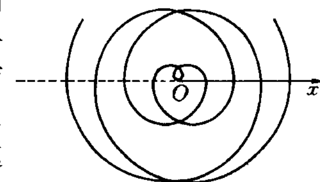
童衫线(kinderhemd)　一种特殊曲线. 在平面直角坐标系中，由方程 $xy^2=h(x+h)^2$ 表示的曲线(见图).



连锁螺线(lituus)　一种特殊曲线. 指极坐标方程为 $\rho^2\theta=a^2$ 的曲线. 它是点 P 在极轴上移动时，使圆扇形 OPM 的面积保持定值 $a^2/2$ 的点 M 的轨迹(见图). 极轴是它的渐近线.

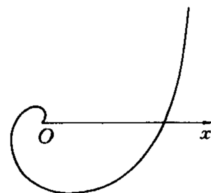


阿基米德螺线(Archimedean spiral)　亦称等速螺线. 在实践中常用的一种曲线. 动点在一直线上做匀速运动，而这条直线又围绕着自己上面的一个定点作匀速转动的动点的轨迹称为阿基米德螺线，它的极坐标方程为 $\rho=a\theta+b(a\neq 0)$ (见图，$b=0$ 的情形). 阿基米德(Archimedes)对它作过研究.



等速螺线(constant velocity spiral)　即"阿基米德螺线".

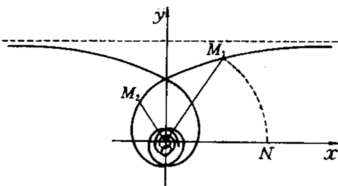
伽利略螺线(Galilei spiral)　亦称等加速螺线. 一种特殊曲线. 极坐标方程为 $\rho=a\theta^2+b\theta+c$ 的曲线称为伽利略螺线(见图，$b=c=0$ 的情形). 伽利略螺线是 17 世纪发现的，在地球赤道某地的上方有一个自由落体，当它随地球一起转动时，画出的曲线就是伽利略螺线. 它是动点沿着一条定直线作等加速运动，同时这条直线又绕着它上面一点作等角速度旋转时，动点的轨迹.



等加速螺线(uniformly accelerated spiral)　即"伽利略螺线".

双曲螺线(hyperbolic spiral)　亦称反螺线. 一

种特殊曲线. 是阿基米德螺线关于极点的反演图形. 极坐标方程为 $\rho=a/\theta$ 的曲线称为双曲螺线(见图). 直线 $\rho\sin\theta=a$ 为渐近线. 曲率半径



$$r=\frac{a}{\theta}\left(\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta}\right)^3,$$

扇形 OM_1M_2 的面积

$$S=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_2}\right)=\frac{a}{2}(\rho_1-\rho_2).$$

对于双曲螺线上任意点 $M_1(\rho_1,\theta_1)$,将极半径 OM_1 旋转 θ_1 角后落到极轴 Ox 上,M_1 所走过的路程 $\overset{\frown}{M_1N}$的弧长等于定长 a.

反螺线(inverse spiral) 即"双曲螺线".

抛物螺线(parabolic spiral) 一种特殊曲线. 指极坐标方程为

$$(\rho-l)^2=a^2\theta$$

的曲线. $l=0$,即方程为 $\rho^2=a^2\theta$ 的曲线称为费马曲线(见图).

费马螺线(Fermat spiral) 见"抛物螺线".

对数螺线(logarithmic spiral) 一种特殊曲线. 在极坐标系中,极半径 ρ 的对数与极角 θ 的比为常数的点 $M(\rho,\theta)$的轨迹. 它的极坐标方程为 $\rho=ae^{k\theta}$. 式中 a,k 为常数,e 为自然对数的底. 对数螺线上点 $M(\rho,\theta)$ 的切线与极半径 OM 的夹角 α 都相等($\cot\alpha=k$),因而亦称它为等角螺线(见图). 当极角按算术级数增加时,对数螺线的极半径按几何级数增加. 对数螺线关于极点 O 的垂足曲线和反演图形仍然是与原曲线全等的对数螺线,仅位置有所不同. 对数螺线的渐伸线和渐屈线也都是对数螺线. 对数螺线是 1638 年由笛卡儿(Descartes,R.)引入的,雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)作了深入的研究,他在遗嘱里吩咐要把对数螺线刻在他的墓碑上. 因此又称伯努利螺线.

等角螺线(equiangular spiral) 即"对数螺线".

伯努利螺线(Bernoulli spiral) 即"对数螺线".

科茨螺线(Cotes spiral) 一种特殊曲线. 指极坐标方程为 $\rho=a\sin p\theta$(或 $\rho=a\cos p\theta$)的曲线,即玫瑰线. 以极点为反演极的反演图形

$$\rho=\left(\frac{h}{\sin\ p\theta}\right)\text{或 }\rho=\left(\frac{h}{\cos\ p\theta}\right).$$

当 $p=1/3$ 时是麦克劳林三等分角曲线. 当 $p=2$ 时是十字线.

正弦螺线(sine spiral) 一种特殊曲线. 指极坐标方程为 $\rho^n=a\cos n\theta$ 的曲线. 其上任一点处切线对于极轴的倾斜角 α 是极角 θ 的线性函数 $\alpha=\mu+\theta=(n+1)\theta+\pi/2$,故极径与切线的夹角 $\mu=n\theta+\pi/2$. 如图 1,曲率中心 C 位于法线 MN 上,对于正弦螺线,有 $\overrightarrow{MN}=(n+1)\overrightarrow{MC}$. 正弦螺线 $\rho^n=a\cos n\theta$的特例:

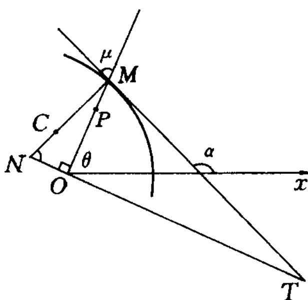


图 1

当 $n=-2$ 时为等边双曲线;

当 $n=-1$ 时为直线;

当 $n=-1/2$ 时为抛物线;

当 $n=-1/3$ 时为契尔恩豪森三次曲线;

当 $n=1/2$ 时为心脏线;

当 $n=1$ 时为圆;

当 $n=2$ 时为伯努利双纽线. 图 2 上画出 $n=3$,4,3/5 时的正弦螺线.

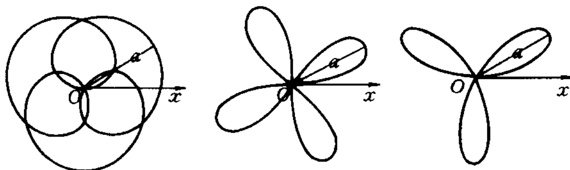


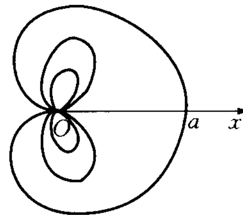
图 2

孟格尔卵形线(Münger oval) 一种特殊曲线. 指极坐标方程是 $\rho=2a\cos^n\theta$ 的曲线,式中 n 为正整数.

蜗牛线(cochleoid) 一种特殊曲线. 指极坐标方程为

$$\rho=\frac{a\sin\theta}{\theta}$$

的曲线(如图).



一般旋轮线(general cycloid) 亦称轮转曲线. 研究曲线方程中必不可少的一种曲线. 当一曲线 Γ 与定曲线 C 相切,同时沿曲线 C 无滑动地滚动时,在 Γ 上的一定点 M 的轨迹称为以 C 为基线,以 Γ 为滚线,以 M 为极的一般旋轮线. 例如,当基线为直线,滚线为抛物线,其焦点为极的轮转曲线为悬链线. 基线 C 为直线,滚线 Γ 为椭圆或双曲线,极 M 是 Γ 的焦点的一般旋轮线称为德洛内曲线. 此曲线是德洛内(Delaunay,C. E.)于 1841 年研究椭圆和双曲线沿直线滚动时其焦点的轨迹时提出的.

轮转曲线(cycloid) 即"一般旋轮线".

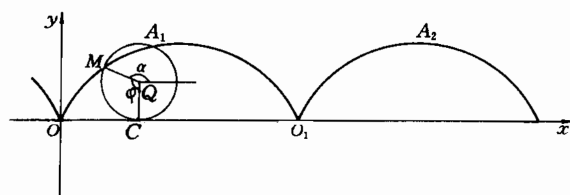
德洛内曲线(Delaunay curve) 见"一般旋轮线".

摆线(cycloid) 亦称旋轮线.在实践中广泛应用的一种曲线.平面上半径为 r 的动圆 Q(称为母圆)沿着一条定直线 l(基线)无滑动地滚动时,动圆周上点 M 的轨迹.取定直线为 x 轴(水平位置),设动点 M 的初始位置为原点 O,切点 $C(r\varphi,0)$,则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QM}=(r\varphi,r)+(r\cos\alpha,r\sin\alpha).$$

其中 $\alpha+\varphi=3\pi/2$,故摆线的参数方程为

$$\begin{cases}x=r\varphi-r\sin\varphi,\\ y=r-r\cos\varphi,\end{cases}$$



当参数 φ 从 0 变化到 2π 时,便得曲线的一拱.一拱的长为 $8r$,且此拱与 x 轴之间的面积为 $3\pi r^2$(母圆面积的三倍).曲率半径 $R=4r|\sin\varphi/2|$.极大值点 $A_k((2k-1)\pi r,2r)$,尖点 $O_k(2k\pi r,0)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.摆线具有等时性.即位于摆线轨道(假定它的图形是与上图中的摆线关于 x 轴对称的)上的一质点从静止状态落到轨道上最低点处所需下降时间恒为 $\pi\sqrt{r/g}$,与起始点 M_0 位置无关.因此,摆线又称为等时曲线.另外,设 P,G 为一铅直平面上不在同一条铅直线上的两点,则质点在重力作用下,沿某曲线无摩擦地从点 P 滑动到点 G,当曲线为摆线的一段弧时,所需的时间最短.因此,摆线又称为最速降线或捷线.

摆线的定义是梅森(Mersenne,M.)于 1615 年给出的.伽利略(Galilei,G.)是最早研究摆线的人.惠更斯(Huygens,C.)发现了摆线的等时性以后,就用它设计出摆动周期不受振幅变化的影响的摆线时钟.摆线这个名称,正是由于这种曲线被应用于改进钟摆而得来的.约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)于 1696 年 6 月号《教师学报》上提出了最速降线问题,而正确答案是由牛顿(Newton,I.)、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)、洛必达(L'Hospital,G.-F.-A. de)及伯努利兄弟等多人获得的.

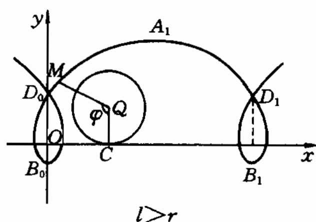
旋轮线(cycloid) 即"摆线".

等时曲线(tautochrone) 即"摆线".

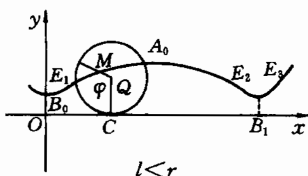
最速降线(brachistochrone) 即"摆线".

捷线(brachistochrone) 即"摆线".

次摆线(trochoid) 亦称余摆线、变幅摆线.摆线的一种.平面上半径为 r 的动圆 Q(称为母圆)沿着一条定直线 k(基线)无滑动地滚动时,固定在圆 Q 所在平面内但不在圆周上的点 M 的轨迹.当点 M 在母圆外部时,称为长幅摆线,又称长幅旋轮线(上图);当点 M 在母圆内部时,称为短幅摆线,又称短幅旋轮线(下图).



设 $QM=l$,得次摆线的参数方程为 $x=r\varphi-l\sin\varphi,y=r-l\cos\varphi$.当 $l>r$ 时是长幅摆线,有结点



$$D_k\left(2k\pi r,r-\sqrt{l^2-r^2t_0^2}\right)$$

$(k=0,\pm1,\cdots,t_0$ 是方程 $t=l\sin t$ 的最小正根);当 $l<r$时是短幅摆线,有拐点

$$E_k\left[r\ \mathrm{Arccos}\frac{l}{r}-l\sqrt{1-\left(\frac{l}{r}\right)^2},r-\frac{l^2}{r}\right];$$

又若 $l=r$,就是摆线的方程.摆线和次摆线是由两种简单运动合成的:一个是圆心 Q 做匀速直线运动,另一个是动点 M 同时绕 Q 点做匀角速度旋转运动.

余摆线(complement cycloid) 即"次摆线".

变幅摆线(variable amplitude cycloid) 即"次摆线".

长幅摆线(prolate cycloid) 见"次摆线".

短幅摆线(curtate cycloid) 见"次摆线".

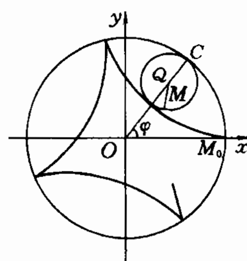
长幅旋轮线(prolate cycloid) 即"长幅摆线".

短幅旋轮线(curtate cycloid) 即"短幅摆线".

内摆线(hypocycloid) 亦称圆内旋轮线.摆线的一种.平面上半径为 r 的动圆 Q(称为母圆)在半径为 R 的定圆 O(称为基圆)内部无滑动地滚动时,动圆周上点 M 的轨迹.它的参数方程为

$$\begin{cases}x=(R-r)\cos\varphi+r\cos\left(1-\dfrac{R}{r}\right)\varphi,\\ y=(R-r)\sin\varphi+r\sin\left(1-\dfrac{R}{r}\right)\varphi\end{cases}\quad(R>r).$$

当 $R=2r$ 时,图形为基圆的一条直径 $x=R\cos\varphi,y=0$.这个结论被称为卡尔达诺定理.由卡尔达诺(Cardano,G.)得出.当 $R/r=4$ 或 $R/r=4/3$ 时,图形是同样的星形线.



圆内旋轮线(hypocycloid) 即"内摆线".

卡尔达诺定理(Cardano theorem)　见"内摆线".

外摆线(epicycloid)　亦称圆外旋轮线.在生产实践中常用的一种摆线.平面上半径为 r 的动圆 Q(称为母圆)在半径为 R 的定圆 O(称为基圆)外部无滑动地滚动时,动圆周上点 M 的轨迹.当 x 轴正半轴通过曲线上的最近点时,外摆线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(R+r)\cos\varphi-r\cos\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\varphi,\\ y=(R+r)\sin\varphi-r\sin\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\varphi.\end{cases}$$

当 x 轴正半轴通过曲线上最远点时,对应于图1(母圆与基圆外切)的外摆线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(R+r)\cos\varphi+r\cos\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\varphi,\\ y=(R+r)\sin\varphi+r\sin\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\varphi.\end{cases}$$

对应于图2(母圆在基圆外部而内切)的外摆线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(r-R)\cos\varphi+r\cos\left(1-\dfrac{R}{r}\right)\varphi\\ y=(r-R)\sin\varphi+r\sin\left(1-\dfrac{R}{r}\right)\varphi\end{cases}\left(0<\frac{R}{r}<1\right).$$

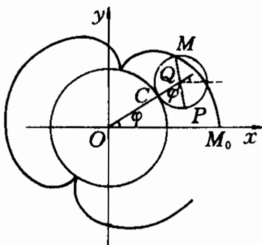


图 1

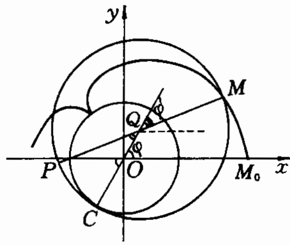


图 2

当 $R/r=1$ 或 1/2 时,图形是心脏线.

圆外旋轮线(epicycloid)　即"外摆线".

长(短)幅圆内旋轮线(hypotrochoid)　亦称内次摆线,又称变幅内摆线.内摆线的一种.平面上半径为 r 的动圆 Q(称为母圆)在半径为 R 的定圆 O(称为基圆)内部无滑动地滚动时,固定在圆 Q 平面内的点 M 的轨迹.设点 M 到动圆心的距离为 l,此旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(R-r)\cos\varphi+l\cos\left(\dfrac{R}{r}-1\right)\varphi\\ y=(R-r)\sin\varphi-l\sin\left(\dfrac{R}{r}-1\right)\varphi\end{cases}(R>r).$$

当 $l>r$ 时为长幅圆内旋轮线;当 $l<r$ 时为短幅圆内旋轮线;当 $R=2r$ 时为椭圆.

内次摆线(internal trochoid)　即"长(短)幅圆内旋轮线".

变幅内摆线(variable amplitude hypocycloid)　即"长(短)幅圆内旋轮线".

长(短)幅圆外旋轮线(epitrochoid)　亦称外次摆线,又称变幅外摆线.外摆线的一种.平面上半径为 r 的动圆 Q(称为母圆)在半径为 R 的定圆 O(称为基圆)外部无滑动地滚动时,固定在圆 Q 平面内的点 M 的轨迹.设点 M 到动圆心的距离为 l,此旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(R+r)\cos\varphi-l\cos\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\varphi,\\ y=(R+r)\sin\varphi-l\sin\left(1+\dfrac{R}{r}\right)\varphi.\end{cases}$$

当 $l>r$ 时为长幅圆外旋轮线;当 $l<r$ 时为短幅圆外旋轮线.

外次摆线(external trochoid)　即"长(短)幅圆外旋轮线".

变幅外摆线(variable amplitude epicycloid)　即"长(短)幅圆外旋轮线".

旋轮类曲线(cycloidal curve)　亦称摆线族曲线.各种旋轮线的统称.长短幅圆内、外旋轮线(参见"长(短)幅圆内旋转线"和"长(短)幅圆外旋轮线")的方程可以统一写成

$$\begin{cases}x=e[\cos\varphi+g\cos(1-m)\varphi],\\ y=e[\sin\varphi+g\sin(1-m)\varphi].\end{cases}\tag{1}$$

它所表示的曲线称为旋轮类曲线,m,g 和 e 决定曲线的形状和大小.式中 $m=\pm R/r$.当 $m>1$ 时是长(短)幅圆内旋轮线;当 $m<1$ 时是长(短)幅圆外旋轮线.$g=l/e$ 称为形状系数.$e=r|1-m|$ 表示母圆与基圆中心间的距离,称为偏心距.基圆 O 的半径 $R=|m/(1-m))|e$.曲线上点 $M(\varphi)$ 处的法线必过母圆 Q 的转动瞬心

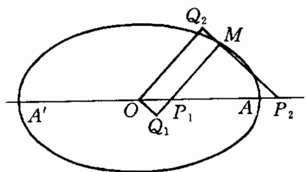
$$C\left(\frac{me\cos\varphi}{m-1},\frac{me\sin\varphi}{m-1}\right).$$

点 C 分 OQ 所成的比为 $-m$,点 $M(\varphi)$ 到基圆中心 O 的距离 $\rho=e\sqrt{1+g^2+2g\cos m\varphi}$ 是周期性变化的,周期为 $2\pi/|m|$.当母圆圆心 Q 绕 O 点旋转一周时,φ 增加 2π,动点 M 描绘出 $|m|=R/r$ 支拱弧,故称 m 为拱弧支数.当 $|1-m|\geqslant 1$ 时:

1. 若 $g=1/|1-m|$(即 $l=r$),则曲线(1)为圆内(外)旋轮线(有尖点).

2. 若 $g>1/|1-m|$(即 $l>r$),则曲线为长幅圆内(外)旋轮线.

3. 若 $g<1/|1-m|$(即 $l<r$),则曲线为短幅圆内(外)旋轮线.



旋轮类曲线是由两个匀速旋转运动合成的:点 Q 绕定点 O 旋转的时候,同时动点 M 绕点 Q 旋转,两个旋转的角速度之比为 $1-m$.每一条旋轮类曲线可以有两种不同的创立方法,两曲线(m_1,g_1,

e_1)与(m_2,g_2,e_2)当且仅当

$$(1-m_1)(1-m_2)=1, g_1g_2=1, e_2=g_1e_1$$

时,这两条曲线全等. 当 $m_1=m_2=2, e_1=(a-b)/2$ $(a>b>0), g_1=(a+b)/(a-b)$ 时,曲线为椭圆,图中表示了它的两种创立方法. 点 P_1, P_2 沿直线 AA' 运动,且满足

$$P_1Q_1=OQ_1=Q_2M=e_1,$$
$$Q_1M=OQ_2=P_2Q_2=e_1g_1.$$

据此可设计出加工椭圆的机械或椭圆规. 当形状系数 $g=1$ 时,图形是玫瑰线

$$\rho=2e\cos\frac{m}{2-m}\theta.$$

当 $m=-1$ 时,图形是帕斯卡蜗线

$$\rho=e(1+2g\cos\theta).$$

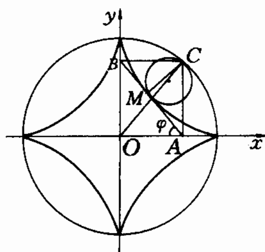
旋轮类曲线广泛应用于图案设计、齿轮设计和机油泵、旋转活塞发动机的缸体轮廓线等方面.

摆线族曲线(cycloid family curve) 即"旋轮类曲线".

形状系数(shape coefficient) 见"旋转类曲线".

偏心距(eccentric distance) 见"旋转类曲线".

星形线(asteroid) 一种特殊的旋轮线. 与半径为 a 的定圆内切的半径为 $a/4$ 的动圆沿定圆无滑动地滚动,动圆上一点的轨迹(见图)称为星形线. 它是特殊的圆内旋轮线,故又称四尖圆内旋轮线或四尖内摆线. 其直角坐标方程是



$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};$$

其参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3\varphi,\\ y=a\sin^3\varphi.\end{cases}$$

曲线全长为 $6a$,所围成的面积为 $3\pi a^2/8$. 星形线的几何画法:定长线段 $AB=a$,它的两个端点在垂直相交于 O 的两直线上滑动,作矩形 $AOBC$,过 C 点作 AB 的垂线 CM,垂足 M 即为星形线上的点. 改变线段 AB 的位置,便可作出星形线上若干点.

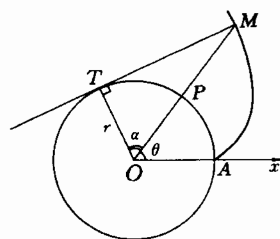
四尖圆内旋轮线(hypocycloid of four cusps) 即"星形线".

四尖内摆线(hypocycloid of four cusps) 即"星形线".

圆的渐伸线(involute of the circle) 亦称圆的渐开线. 在生产实践中常用的一种曲线. 当一条直线紧贴着定圆(基圆)而无滑动地滚动时,直线上一点的轨迹(如图). 取基圆圆心 O 为极点,设基圆半径为 r,动直线与基圆相切于 T 点,则

$$MT=\overset{\frown}{AT}=r(\theta+\alpha).$$

圆的渐伸线的极坐标参数方程为



$$\begin{cases}\rho=\dfrac{r}{\cos\alpha},\\ \theta=\tan\alpha-\alpha.\end{cases}$$

式中参数 α 在机械学中称为压力角. 机械工程上常称函数 $\theta=\tan\alpha-\alpha$ 为 α 的渐开线函数,用 $\mathrm{inv}\,\alpha$ 表示. 齿轮的齿廓曲线常用圆的渐开线. 圆的渐伸线的直角坐标参数方程为

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi,\\ y=r\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi.\end{cases}$$

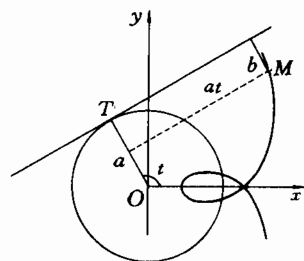
式中参数 $\varphi=\theta+\alpha$.

圆的渐开线(involute of the circle) 即"圆的渐伸线".

渐开线函数(involute function) 见"圆的渐伸线".

压力角(pressure angle) 见"圆的渐伸线".

圆的广义渐伸线(generalized involute of a circle) 亦称圆的伸展渐开线. 圆的渐伸线的一般情况. 当动直线 l 沿着定圆 O 的圆周无滑动地滚动时,平面上与直线 l 固定连结但不一定在 l 上的点 M 的轨迹. 它的参数方程为



$$\begin{cases}x=(a-b)\cos t+at\sin t,\\ y=(a-b)\sin t-at\cos t.\end{cases}$$

若 $b=0$,即点 M 在 l 上时,曲线就是圆的渐伸线. 若 $b=a$,曲线就是阿基米德螺线,它的极坐标参数方程为

$$\rho=a\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).$$

圆的伸展渐开线(generalized involute of a circle) 即"圆的广义渐伸线".

玫瑰线(rose curve) 实践中常用的一种曲线. 在极坐标系下,方程 $\rho=a\cos p\theta$(或 $\rho=a\sin p\theta$)所表示的曲线称为玫瑰线,其中 a,p 是常数(可限定 $a>0, p>0$ 且 $p\neq1$). 当 p 为正有理数 n/q(n 与 q 互素)时,若 n 与 q 都是奇数,则玫瑰线有 n 叶;若 n 和 q 有一个是偶数,则玫瑰线有 $2n$ 叶. 当 p 为无理数时,玫瑰线有无穷多叶. 当 $p=3$ 时,$\rho=a\cos3\theta$ 的曲线称为三叶玫瑰线;当 $p=2$ 时,$\rho=a\cos2\theta$ 的曲线称为四叶玫瑰线. 玫瑰线是形状系数为 1 的旋轮类曲线. 格兰迪(Grandi,G.)以一生的主要精力从事平面曲线的研究. 1714 年,他首次给出玫瑰线的定义、性质及应用.

三叶玫瑰线(three-leaved rose curve)　见"玫瑰线".

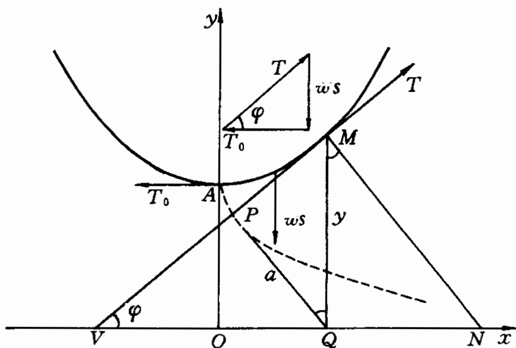
四叶玫瑰线(four-leaved rose curve)　玫瑰线的一种. 定长线段 $AB=2a$,它的两个端点在垂直两直线上滑动,从两直线的交点 O 向线段 AB 作垂线 OM,垂足 M 的轨迹称为四叶玫瑰线(见图). 其极坐标方程为

$$\rho = a\sin 2\theta.$$

超越曲线(transcendental curve)　一类重要的平面曲线. 在平面仿射坐标系(包括直角坐标系)中,超越方程所表示的曲线. 指数函数,对数函数,幂函数,三角函数等的图形都是超越曲线.

悬链线(catenary)　一种特殊曲线. 由自由悬挂在两个支点上的一条理想的有重量的均匀绳索所形成的曲线. 其最低点 $A(a,0)$ 是顶点. 伽利略(Galilei,G.)研究过这条曲线,他以为就是抛物线. 后来,莱布尼茨(Leibniz,G. W.)、惠更斯(Huygens,C.)和约翰第一・伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)找到了正确的答案. 设悬链线(如图)的方程为

$$y=y(x),$$



顶点 A 处的水平张力为 T_0,沿点 M 的切线方向的张力为 T,曲线弧 AM 的长度为 s,绳索的单位长度的重量为 w,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\varphi = \frac{ws}{T_0} = \frac{s}{a},$$

其中 $a=T_0/w$ 称为悬链线的参数. 于是悬链线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{s}{a}. \tag{1}$$

在顶点 A 的下方距离为 a 的水平线称为悬链线的准线,以准线为 x 轴,y 轴过顶点 A,则由(1)式积分便得

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a},\quad s = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}. \tag{2}$$

所有的悬链线都在几何上相似于双曲余弦曲线 $y=\mathrm{ch}\,x$ 即 $y=(e^x+e^{-x})/2$. 由(1),(2)式得

$$y^2 = s^2 + a^2,\quad s = a\tan\varphi,\quad y = a\sec\varphi. \tag{3}$$

悬链线在点 M 处的曲率半径等于被 x 轴所截的法线长

$$r = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = a\sec^2\varphi = y\sec\varphi = MN.$$

悬链线的准线(directrix of catenary)　见"悬链线".

曳物线(tractrix)　在研究物理现象中常见的一种曲线. 用长度为 a 的细线牵引一个质点 M,使细线另一端 P 沿不过质点的定直线移动,这时质点 M 的运动轨迹. 定直线是曳物线的渐近线. 曳物线的每一条切线与定直线的交点到切点的距离恒为 a. 取定直线为 x 轴,并假设开始时,质点位于点 $A(0,a)$ 处,细线位于 y 轴上. 则此曳物线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\ln\tan\dfrac{\alpha}{2}+a\cos\alpha, \\ y=a\sin\alpha. \end{cases}$$

直角坐标方程为

$$x = \pm\left(a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2-y^2}\right),$$

即
$$x = a\,\mathrm{Arch}\,\frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2-y^2}.$$

它有一个尖点 $A(0,a)$,$\overset{\frown}{AM}$ 的弧长为 $a\ln(a/y)$. 曲率半径 $R=a\cot(x/y)$.

追踪曲线(curve of pursuit)　一种特殊曲线. 当一点 P 在 x 轴上作匀速运动,另一点 M 恒向着点 P 作匀速运动,则点 M 的轨迹为追踪曲线. 若 P 的速度为 M 的速度的 k 倍时,则追踪曲线的方程

当 $k\neq1$ 时为

$$2(x-a)=\frac{y^{1-k}}{c(1-k)}-\frac{cy^{1+k}}{1+k};$$

当 $k=1$ 时为

$$2(x-a)=\frac{1}{c}\ln y-\frac{c}{2}y^2.$$

将点 P 在 x 轴上运动的条件换成在更一般的曲线上运动时,也可考虑类似的问题.

撰　稿　王爱生　王琳静　左铨如　邢凤珠　吕德正　向小引　刘宇民　刘增贤　李玉琪　李金旺　李健民　沈米成　张锐军　陈坤元　贾　遂　晁国勋　鲁钟祥　谢文泉　薛志文

审　阅　王焕文　刘增贤　徐源富　夏定中　贾　遂　谢文泉

空间解析几何

空间解析几何(space analytical geometry)　亦称空间解析几何学. 几何学的一个分支. 是用代数方法研究三维空间的几何学. 空间解析几何着重研究平面、空间直线和二次曲面的仿射不变性(如平行性、简单比等)和度量不变性(如正交性、距离、角度等). 空间解析几何在仿射坐标系中探讨几何图形的仿射性质,在直角坐标系中探讨几何图形的度量性质. 因为直角坐标系也是一种仿射坐标系,所以在不涉及几何性质的本质时,一般也常统一采用直角坐标系. 空间解析几何一般用线性代数作为研究的工具. 它把几何同代数、分析统一起来,对这三大数学分支的发展起了积极的推动作用.

把平面解析几何(二维坐标几何)推广到三维空间,是从17世纪中叶开始的. 它的发展则是18世纪的事,而且早期的工作和微分几何的发展有着紧密的联系. 1715年,约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ)在给莱布尼茨(Leibniz, G. W.)的信中引用了现在通用的三个坐标平面. 克莱罗(Clairaut, A.-C.)在他的《关于双重曲率曲线的研究》(1731年)中,不仅给出了一些曲面的方程,而且弄清楚了表示一条空间曲线所需要的相交成该曲线的两个曲面的方程,并看出过一条曲线的两个曲面方程的某种组合,例如,两个方程相加,给出过这条曲线的另一曲面的方程. 利用这个事实,他说明怎样才能得到这些空间曲线的投影的方程,也就是求垂直于坐标平面的柱面方程. 他还说明了 x, y 和 z 的齐次方程表示顶点在原点的一个锥面.

欧拉(Euler, L.)对曲面方程做过一些早期工作,但是系统地致力于三维坐标几何,是在他的《无穷分析引论》(1748)第二卷的附录中. 他引进了坐标变换和欧拉角,用它将一般的三元二次方程化成标准形,得到了六种曲面:锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶双曲面、双曲抛物面(这是他发现的)以及抛物柱面. 蒙日(Monge, G.)的论文包含大量的三维解析几何的内容. 在他的论文《代数在几何中的应用》(1802)中,证明了二次曲面的每一个平面截口都是一条二次曲线,而且邻近的平行截口是相似的二次曲线. 还证明了单叶双曲面和双曲抛物面是直纹曲面,即它们都能由直线组成.

由于欧拉、拉格朗日(Lagrange, J.-L.)和蒙日的工作,解析几何变成了一个独立的而且充满活力的数学分支(参见"解析几何").

空间解析几何学(space analytical geometry)　即"空间解析几何".

向量与坐标

向量(vector)　亦称矢量. 数学中最基本的概念之一. 它是速度、加速度、力等这类既有大小,又有方向的量的数学抽象,常用一个拉丁字母上面加一个箭号或用黑斜体字母表示向量,例如 $\vec{a}$, $\vec{e}$ 或 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$ 等. 并且在向量中定义了加法和数乘这样两种运算. 相对于向量,常把仅表示大小的量称为数量,又称纯量或标量. 近代采用向量的公理化定义,认为向量是向量空间或线性空间的元素(参见本卷《高等代数》中的"线性空间").

在解析几何中,常用空间的有向线段(即有序点偶)直观地表示向量,有时称为几何向量. 设有向线段的始点为 A,终点为 B,则由它表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$,箭头表示向量的方向由 A 到 B,线段 AB 的长度表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小. A 为终点 B 为始点的向量 $\overrightarrow{BA}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的反向量,也可记为 $-\overrightarrow{AB}$,即有 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$. 在空间存在平移变换将 A 变成 A', B 变成 B'(即 AB 与 $A'B'$ 是平行、相等且同向的有向线段)时, $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为相等的向量,记为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$,且有 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.

所有相等的有向线段是一个等价类,把相等的向量看做同一个向量,相当于认为同一个等价类的有向线段表示同一个向量. 这种始点可以是空间任意一点的向量称为自由向量. 而始点固定的向量称为固定向量. 例如,始点总在原点的向径就是固定向量. 给定任一点 A 及一向量 $\boldsymbol{a}$,一定存在惟一的点 B,使得 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$.

亚里士多德(Aristotle)已经知道力可以用有向线段表示,两个力的合成,可以由平行四边形法则得到. 伽利略(Galilei, G.)清楚地叙述了这个法则. 稍后,韦塞尔(Wessel, C.)、阿尔冈(Argand, J. R.)发现了复数的几何表示,高斯(Gauss, C. F.)建立了复平面的概念. 在此基础上,人们开始寻找具有加、减、乘、除运算的复数的三维类似物. 哈密顿(Hamilton, W. R.)经过15年的研究被迫放弃了乘法交换律而于1843年引入了"四元数",并开始研究包含 n 个分量或 n 元数组的超复数. 向量这一词也是他作为四元数的一部分而首先使用的.

1844年,格拉斯曼(Grassmann, H. G.)发表了《线性扩张理论》,引进了内积和外积以及与 n 维几

何有关的高阶乘积,他的思想有助于进入张量理论.吉布斯(Gibbs,J. W.)和赫维赛德(Heaviside,O.)为三维向量分析的创立做出了贡献,向量从此与四元数正式分裂.为便于理解和运用,赫维赛德还把向量作为笛卡儿坐标的速记形式:$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$,从此向量与向量分析成为数学和工程技术中十分有用的工具.

发展到了近代,空间向量的笛卡儿坐标表示扩展成为有限维向量空间在取定基底后的坐标表示,导致反过来用相当于一组坐标的有序数组来规定有限维向量空间的向量,这发展了向量概念并使之有了更广阔的应用前景.

矢量(vector) 即"向量".

反向量(reverse vector) 见"向量".

标量(scalar) 见"向量".

纯量(scalar) 即"标量".

自由向量(free vector) 见"向量".

固定向量(fixed vector) 见"向量".

径向量(radius vector) 亦称向径,又称径矢.一种特殊向量.指始点在坐标原点 O 的向量.向径 $\overrightarrow{OP}$ 又称为点 P 的位置向量.常以 $\boldsymbol{p}$ 表示点 P 的位置向量.这样,点与位置向量有一一对应的关系.

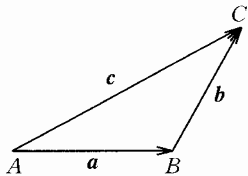
向径(radius vector) 即"径向量".

径矢(radius vector) 即"径向量".

位置向量(position vector) 见"向量".

零向量(zero vector) 一种特殊向量.指始点和终点重合的向量.记为 $\mathbf{0}$.

向量的和(sum of vectors) 与两个或多个向量有关的一个向量.即对它们进行加法运算的结果.已知两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再作向量 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则以 A 为始点,C 为终点的向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相加的和,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.上述求两向量的和的作图方法称为向量的加法,亦称向量加法的三角形法则(如图).向量的加法具有下列基本运算规律:



1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. (结合律)
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. (交换律)
3. $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$,其中 $\mathbf{0}$ 为零向量.
4. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$,向量 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的反向量.

向量加法(addition of vectors) 见"向量的和".

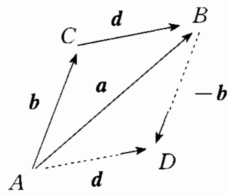
向量加法的三角形法则(triangle law of addition of vectors) 见"向量的和".

向量加法的多边形法则(polygon law of addition of vectors) 求多个向量的和的一种方法.给定 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,自空间任一点 O 依次作向量 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$,则向量 $\overrightarrow{OA_n}$ 就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和:

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

由向量加法的结合律和交换律知道,这些向量相加的次序可以随意交换,其和不变.这种求向量的和的几何方法是向量加法的三角形法则的推广.

向量的差(difference of vectors) 与两个向量有关的一个向量.即对它们进行减法运算的结果.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两已知的向量,任取一点 A,作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再作向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,以 C 为起点,以 B 为终点的向量 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{d}$ 称为从向量 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$ 的差,记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$.即 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.上述求向量差的作图方程称为向量的减法(如图所示).从图中可知,若从点 A 作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再作 $\overrightarrow{BD}=-\boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,由平行四边形定理知 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{d}$ 可知 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.即向量的减法运算可转化成加法运算.



向量的减法(subtraction of vectors) 见"向量的差".

数乘向量(scalar multiplication of vectors) 与一个实数和一个向量有关的一种向量运算.即由数量与向量的乘法运算.对于向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与实数 k,在两点 O,A 所确定的直线上取一点 B,使有向线段 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的数量之比等于 k(当 $k>0$ 时,$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 同向;当 $k<0$ 时,$\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 反向;当 $k=0$ 时,$\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$).这时向量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 用 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ 表示.这种运算称为向量的数量乘法,简称数乘.向量 $\boldsymbol{b}$ 称为数 h 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积.数乘具有下列基本运算规律:

1. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.
2. $m(k\boldsymbol{a})=(mk)\boldsymbol{a}$. (结合律)
3. $(m+k)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$. (第一分配律)
4. $m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$. (第二分配律)

式中 m,k 为实数.

向量的线性运算(linear operation of vectors) 向量加法与数量乘法两种运算的统称.

向量的线性组合(linear combination of vectors) 见本卷《高等代数》中的"线性组合".

共线向量(collinear vectors) 一些有特殊位置关系的向量.即彼此平行的一组向量.零向量与任何一组共线的向量共线.在向量代数中,除特别声明外,平行总包括重合这一特殊情形,而将重合归于平行一类之中,因为所讨论的是可以任意平移的自由向量.

共面向量(coplanar vectors)　一组有特殊位置关系的向量.即平行于同一个平面的一组向量.零向量与任何一组共面的向量共面.

线性相关(linearly dependence)　线性空间的一个重要概念(参见本卷《高等代数》同名条).两个向量平行(或称共线)的充分必要条件是它们线性相关.三个向量共面(即平行于同一平面)的充分必要条件是它们线性相关.

线性无关(linearly independence)　见本卷《高等代数》同名条.

向量的分量(component of a vector)　见本卷《高等代数》中的"n 元向量".

仿射空间(affine space)　见本卷《高等几何》中的"仿射几何".

内积(inner product)　亦称数量积或点乘.向量的一种乘法.其结果是一个与二向量有关的数.两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积,记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,也可以写成$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$或 $\boldsymbol{ab}$.在解析几何中,一般用向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度、$\boldsymbol{b}$ 的长度和 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角余弦的连乘积定义它们的内积,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$(参见本卷《高等几何》中的"欧几里得空间").

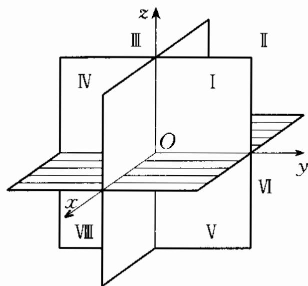
数量积(scalar product)　即"内积".

点乘(dot product)　即"内积".

向量的长度(length of a vector)　亦称向量的模.刻画向量长短的一个数.表示向量的有向线段的长度(参见本卷《高等代数》同名条).

单位向量(unit vector)　向量代数的基本概念.指长度为 1 的向量.

标架(frame)　亦称坐标系.几何学的基本概念.n 维仿射空间中的一个定点 O 连同一组有序基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 合在一起,称为空间的一个仿射标架或仿射坐标系,记为$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$.对于 n 维欧几里得空间,若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是标准正交基,即两两互相垂直的单位向量,则称$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$为空间的一个笛卡儿直角标架,简称直角标架或直角坐标系.点 O 称为坐标系原点;$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 称为基向量.标架与基向量的次序有关.空间任一点 X 所对应的位置向量$\overrightarrow{OX}$在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为点 X 在标架$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$下的坐标.点在直角坐标系中的坐标称为它的直角坐标,在仿射坐标系中的坐标称为它的仿射坐标.在三维欧氏空间中,常用$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$表示它的一个直角坐标系,而且习惯上 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 成右手系.过 O 点,且分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为方向的有向直线 Ox,Oy 和 Oz 分别称为横轴、纵轴、立轴或 x 轴、y 轴、z 轴,统称为坐标轴.每两条坐标轴所决定的平面称为坐标面.按照坐标面所包含的坐标轴,分别称为 xy 平面、yz 平面、xz 平面.三个坐标面把空间划分为八个区域,每一个区域都称为卦限.各个卦限的顺序名称如图.



坐标系(coordinate system)　即"标架".

坐标轴(coordinate axis)　组成坐标系的基本元素.横轴、纵轴及立轴的统称.见"标架".

坐标面(coordinate plane)　见"标架".

卦限(octant)　见"标架".

空间仿射坐标系(affine coordinate system in space)　见"标架".

空间直角坐标系(rectangular coordinate system in space)　见"标架".

基向量(base vector)　见"标架".

向量在轴上的射影(projection of vector on an axis)　亦称向量在轴上的投影.解析几何的基本概念.给定某轴 u,设与其同方向的单位向量为 $\boldsymbol{u}$.过任一向量$\overrightarrow{AB}$的始点 A 和终点 B 分别作垂直于轴 u 的平面,设垂足分别为 A_u 和 B_u,则轴 u 上的向量$\overrightarrow{A_uB_u}$称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的射影向量,轴 u 上有向线段$\overline{A_uB_u}$的数量 A_uB_u 称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的正射影或在向量 $\boldsymbol{u}$ 上的射影.

$$A_uB_u=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi=\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{u},$$

式中 φ 是$\overrightarrow{AB}$与轴 u 的夹角,$\varphi\in[0,\pi]$.在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$中,向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的坐标 x,y,z 是向量 $\boldsymbol{r}$ 分别在向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 上的射影.

向量在轴上的投影(projection of vector on an axis)　即"向量在轴上的射影".

射影向量(projection vector)　见"向量在轴上的射影".

向量的夹角(included angle between two vectors)　平面或空间中两非零向量间的夹角.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,自任意一点 O 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则由射线 OA 和 OB 构成的角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,记为$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,则$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$;若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向,则$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi$;若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,则$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in(0,\pi)$.在空间直角坐标系中,已知向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,那么这两向量的夹角$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$可由下式惟一确定:

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

零向量与任一向量的夹角不确定.

方向余弦(direction cosine)　用以确定向量的方向的量. 向量(或有向直线)与坐标轴正向或基向量的交角称为向量的方向角. 向量的方向角的余弦称为向量的方向余弦. 一个向量的方向可以用它的方向角或方向余弦来确定. 设向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的方向角为 α,β,γ,则:

$$\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

方向角(direction angle)　见"方向余弦".

外积(exterior product)　亦称向量积,或称矢积、叉乘. 三维向量空间的一种乘法运算的结果. 对于两个三维的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(也可以写成$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$)是一个三维向量,其模等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,这里 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的交角;其方向垂直上述平行四边形所在的平面,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系. 由此定义可得:

1. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

2. $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

4. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

注意结合律 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$一般不成立.

5. 若 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

其中 $\boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1)$是一组互相垂直的单位向量.

向量积(vector product)　即"外积".

矢积(vector product)　即"外积".

叉乘(cross product)　即"外积".

数量三重积(scalar triple product)　亦称混合积. 三个向量的一种乘法运算的结果. 对于空间的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,数量$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的数量三重积. 几何上,混合积的绝对值表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 若在平行六面体的同一顶点上的三条棱之间规定好一个顺序$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,则称这个平行六面体的定向为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,于是混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为这个定向平行六面体的有向体积. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0$ 时成右手系,$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$ 时成左手系. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ 时,三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 在空间直角坐标系里,设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别是

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),$$

则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

关于混合积有下列公式:

1. 轮换混合积的三个因子,混合积的值不变;交换任何两个因子,混合积变号,即

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\\&=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\\&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

2. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$. 因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积亦记为$(\boldsymbol{abc})$或$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

3. $$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{d}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix},\end{aligned}$$

(拉格朗日公式). 特别地,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

4. $$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}&\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}.$$

混合积(mixed product)　即"数量三重积".

向量三重积(vector triple product)　亦称三矢矢积. 三个向量一种乘法运算的结果. 对于三维空间的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,向量 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$称为向量三重积,有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

该式称为拉格朗日公式. 易证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$. 对于叉乘运算,结合律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 不成立. 但有雅可比恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\equiv\boldsymbol{0}.$$

三矢矢积(vector triple product)　即"向量三重积".

拉格朗日公式(Lagrange formula)　见"向量三重积".

空间直角坐标变换(transformation of rectangular coordinates in space)　一类重要的坐标变换. 设空间任意一点 M 在空间直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$的坐标为$(x,y,z)$,在新坐标系$\{O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$的坐标为$(x',y',z')$. 即有 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $\overrightarrow{O'M}=x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'+z'\boldsymbol{k}'$. 又设新原点 O' 在旧坐标系中的坐标为(h_1,h_2,h_3),新坐标系的基 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$ 在旧坐标系中的方向余弦为$(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$ $(i=1,2,3)$,即

$$\overrightarrow{OO'}=h_1\boldsymbol{i}+h_2\boldsymbol{j}+h_3\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_1+\boldsymbol{j}\cos\beta_1+\boldsymbol{k}\cos\gamma_1,$$

$$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_2+\boldsymbol{j}\cos\beta_2+\boldsymbol{k}\cos\gamma_2,$$

$$\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha_3+\boldsymbol{j}\cos\beta_3+\boldsymbol{k}\cos\gamma_3.$$

将$(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$改记为$(c_{1i}\ c_{2i}\ c_{3i})$ $(i=1,2,$

3)，则由$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$得

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + h_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + h_2, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + h_3. \end{cases}$$

这就是空间直角坐标变换公式. 其中的 9 个系数 c_{ij} 并不互相独立，由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$ 都是由互相正交的单位向量组成的标准正交基，方向余弦 c_{ij} 满足下列 6 个正交条件：

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + c_{3i}c_{3j} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

对应的系数矩阵(c_{ij})是正交矩阵，即$(c_{ij})^{\mathrm{T}}(c_{ij})=I$. 特别地，当$(c_{ij})=I$，即坐标变换公式为

$$x = x' + h_1, y = y' + h_2, z = z' + h_3.$$

此式称为坐标轴的平移公式，简称移轴公式. 而当$(h_1,h_2,h_3)=(0,0,0)$时，则坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z', \end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

此式称为坐标轴的旋转公式，简称转轴公式. 因新、旧坐标系皆为右手系，故 $\det(c_{ij})=1$.

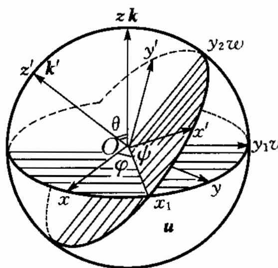
坐标轴的平移公式(parallel translation formula of coordinates axes)　见“空间直角坐标变换”.

坐标轴的旋转公式(rotation formula of coordinates axes)　见“空间直角坐标变换”.

移轴公式(formula of translation of axes)　坐标轴平移公式的简称.

转轴公式(rotation formula of coordinates axes)　坐标轴旋转公式的简称.

欧拉角(Euler angles)　决定空间旋转变换的三个特殊角. 在空间转轴变换公式中，九个方向余弦 c_{ij} 只有三个是独立的，欧拉(Euler,L.)曾经指出，空间的任一旋转变换最多只要依次作三个绕轴的旋转变换来完成，而每次绕轴旋转的旋转角，就构成了三个独立参数，通常称这三个旋转角为欧拉角. 设旧坐标系为 $Oxyz$ (即$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$)，新坐标系为 $Ox'y'z'$ (即$\{O;\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'\}$)，坐标面 Oxy 与 $Ox'y'$ 的交线的某一方向为正向(用单位向量 $\boldsymbol{u}$ 表示)，并将它取作 x_1 轴(如图).



第一次绕 z 轴转角 $\varphi=\angle(\boldsymbol{i},\boldsymbol{u})$(称为节线角，又称进动角)，使 x 轴与 x_1 轴重合，坐标系 $Oxyz$ 变成了 Ox_1y_1z，空间任一点 M 相对于这两个坐标系的坐标分别为(x,y,z)和(x_1,y_1,z_1)，则有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

第二次绕轴 x_1 旋转角 $\theta(=\angle(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$(称为倾角，又称章动角)，使 z 轴与 z' 轴重合，坐标系 Ox_1y_1z 变成了 Ox_1y_1z'. 设点 M 相对于 Ox_1y_2z' 的坐标为(x_2,y_2,z_2)，则有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

第三次绕轴 z' 旋转角 $\psi=\angle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{i}')$，使 x_1 轴与 x' 轴重合，坐标系 Ox_1y_2z' 变成了 $Ox'y'z'$. 设点 M 相对于 $Ox'y'z'$ 的坐标为(x',y',z')，则有

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

坐标系 $Oxyz$ 相继经过上述三次绕轴旋转而变成了 $Ox'y'z'$，三个角 φ,θ,ψ 就是欧拉角. 相应的转轴变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\cos\theta\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

将它与公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

比较，可由 9 个方向余弦 c_{ij} 来确定欧拉角 φ,θ,ψ 的值：

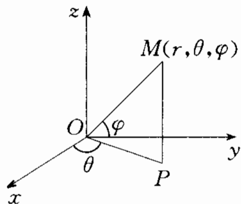
$$\cos\theta = c_{33}, \sin\varphi = \frac{c_{13}}{\sin\theta}, \cos\varphi = -\frac{c_{23}}{\sin\theta},$$

$$\sin\psi = \frac{c_{31}}{\sin\theta}, \cos\psi = \frac{c_{32}}{\sin\theta}.$$

空间转轴变换公式也可以通过找出标准正交基$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$与$(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')$间的关系而得到.

球坐标(spherical coordinates)　亦称球极坐标或空间极坐标. 一种空间坐标. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 的基础上，可按下列方式来确定任意点 M 的球坐标(r,θ,φ). 取从原点 O 到点 M 的距离作为 $r=$

OM，以 O 为中心 r 为半径作球面，以 xy 平面与此球面的交线作为球面的赤道，以 xz 平面与此球面的交线与正半 x 轴相交的半圆作为本初经线（即经度为 0 的经线），然后取点 M 在此球面上的经度和纬度分别作为 θ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 和 φ $(-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$. 或者说，$\theta$ 是向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 xy 平面上的投影 OP 与 x 轴的交角，φ 是 $\overrightarrow{OM}$ 与 xy 平面的交角（但都是有确定方向的有向角）. 这里 (θ,φ) 是球面坐标，亦称地球赤道坐标或地理坐标（如图），球坐标与直角坐标的关系是



$$x=r\cos\varphi\cos\theta,\ y=r\cos\varphi\sin\theta,\ z=r\sin\varphi.$$

三组坐标曲面族是：

$r=$ 常数，表示中心在原点的同心球面；

$\theta=$ 常数，表示以 z 轴为边界的半平面；

$\varphi=$ 常数，表示以原点为顶点 z 轴为轴的圆锥面.

z 轴上的点 θ 不能确定，对于排除 z 轴后的空间的点，在直角坐标和球坐标间有一一对应.

上述关系式之逆是

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta=\pm\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ (y>0\text{ 时取 }+,y<0\text{ 时取 }-), \\ \varphi=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases}$$

球极坐标(spherical polar coordinates)　即“球坐标”.

空间极坐标(polar coordinates in space)　即“球坐标”.

圆柱坐标(cylindrical coordinates)　一种空间坐标. 它是 xy 平面上的极坐标与竖坐标 z 联合而成的. 空间一点的圆柱坐标 (ρ,θ,z) 与笛卡儿直角坐标 (x,y,z) 的关系是：

$$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z,$$

式中 $\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi,-\infty<z<+\infty$. 三组坐标曲面族是：

$\rho=$ 常数，表示母线平行于 z 轴的圆柱面，准线是 xy 平面内以原点为中心，ρ 为半径的圆周；

$\theta=$ 常数，表示以 z 轴为边界的半平面；

$z=$ 常数，表示平行于 xy 坐标面的平面.

排除 θ 不能确定的 z 轴上的点后，空间中其余的点的直角坐标和圆柱坐标是一一对应的.

椭球坐标(ellipsoidal coordinates)　一种空间坐标. 对于共焦二次曲面族

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1\ (a>b>c>0),$$

如果把 x,y,z 看做已知数，而将 λ 看做未知数，它有三个根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，这就是点 (x,y,z) 的椭球坐标. 可以适当地选定 $\lambda_i(i=1,2,3)$ 的数值，使得

$$-\infty<\lambda_3<c<\lambda_2<b<\lambda_1<a.$$

当一点的椭球坐标已知时，它的直角坐标由下式决定：

$$x^2=\frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-c)},$$

$$y^2=\frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-c)(b-a)},$$

$$z^2=\frac{(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3)}{(c-a)(c-b)}.$$

空间对称点的坐标(coordinates of symmetric points in space)　一组空间点坐标. 指刻画空间对称点的位置关系的一组坐标. 它是讨论空间曲线或曲面的对称性的基础. 具体坐标如下：

1. 在空间仿射坐标系中，任一点 $M(x,y,z)$ 关于原点的对称点的坐标是 $(-x,-y,-z)$；

2. 在空间直角坐标系中，任一点 $M(x,y,z)$，
关于 x 轴的对称点的坐标是 $(x,-y,-z)$，
关于 y 轴的对称点的坐标是 $(-x,y,-z)$，
关于 z 轴的对称点的坐标是 $(-x,-y,z)$，
关于 xy 平面的对称点的坐标是 $(x,y,-z)$，
关于 yz 平面的对称点的坐标是 $(-x,y,z)$，
关于 xz 平面的对称点的坐标是 $(x,-y,z)$.

平面与空间直线

一次曲面(first-degree surface)　曲面的一种. 指方程是一次的曲面. 在空间仿射坐标系中，三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形称为一次曲面. 一次曲面都是平面. 每个平面的方程都是一次方程.

平面的方位向量(azimuthal vectors of a plane)　确定平面位置的重要向量. 即与平面平行的两个不共线的向量. 从平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 可以直接写出平面的两个方位向量. 方程中至少有一个一次项的系数不是 0，例如，在 $C\neq0$ 时，两个方位向量是 $(-C,0,A)$ 和 $(0,-C,B)$.

平面的参数方程(parametric equation of a plane)　平面方程的一种形式. 在空间仿射坐标系中，过定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 平行的平面 π 是惟一确定的. 任意一点 $M(x,y,z)$ 在平面 π 上的充分必要条件是

$$\overrightarrow{M_0M}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}\ (u,v\in\mathrm{R}),$$

即

$$\begin{cases} x = a_1 u + b_1 v + x_0 \\ y = a_2 u + b_2 v + y_0 \quad (u, v \in \mathrm{R}). \\ z = a_3 u + b_3 v + z_0 \end{cases}$$

此式称为平面的参数方程，其中 u，v 是参数.

平面的点位式方程(point direction form equation of a plane)　平面方程的一种形式.在空间仿射坐标系中，过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 平行的平面的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

此式称为平面的点位式方程.

平面的三点式方程(three points form equation of a plane)　平面方程的一种形式.空间不共线的三点确定一个平面.在空间仿射坐标系中，过三点 $M_i(x_i, y_i, z_i)(i=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

此式称为平面的三点式方程.

平面的截距式方程(intercept form equation of a plane)　平面方程的一种形式.在空间仿射坐标系中，已知平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a，b，c，其中 $abc \neq 0$，即平面通过三点 $M_1(a,0,0)$，$M_2(0,b,0)$，$M_3(0,0,c)$，则方程

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

称为平面的截距式方程.

平面的一般方程(general equation of a plane)　亦称平面的普遍方程.平面方程的一种形式.在空间仿射坐标系中，三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般方程.当方程中不含常数项时，即 $D=0$，它所表示的平面经过坐标原点.当方程中一次项系数有一个等于零，例如 $C=0$，它所表示的平面平行于 z 轴.如果还有 $D=0$，平面通过 z 轴.当方程中一次项系数有两个等于零，例如 $B=C=0$，它所表示的平面平行于 yz 坐标面.如果还有 $D=0$，平面就与 yz 坐标面重合.当方程中一次项系数全不为零，则平面与三个坐标轴都相交，在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为：

$$-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}.$$

平面的普遍方程(general equation of a plane)　即"平面的一般方程".

平面的法线(normal line of a plane)　垂直于平面的直线.在空间直角坐标系中，过坐标原点且与平面垂直的直线称为平面的法线.当平面不过原点 O 时，设垂足为 N，规定向量 $\overrightarrow{ON}$ 的方向为法线的正方向；当平面过原点 O 时，规定法线的正向与坐标轴正向的夹角(称为方向角) α，β，γ 满足 $\cos\gamma>0$；若 $\cos\gamma=0$，则 $\cos\beta>0$；若 $\cos\gamma=\cos\beta=0$，则 $\cos\gamma=1$.有时为了方便，当平面过原点时对平面的法线的方向不作规定.

平面的法向量(normal vector of a plane)　确定平面位置的重要向量.指与平面垂直的非零向量.一个平面的法向量可有无限多个，但单位法向量有且仅有两个.例如在空间直角坐标系中平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\lambda(A,B,C)(\lambda\neq 0)$，而它的单位法向量为

$$\pm\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是平面的方位向量，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是它的一个法向量.

平面的点法式方程(point normal form equation of a plane)　平面方程的一种形式.在空间直角坐标系中，给定一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和平面 π 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则此点 $M(x,y,z)$ 在平面 π 上的充分必要条件是

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$$

即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.此式称为平面的点法式方程.由 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$ 知 A，B，C 不全为零.

平面的法式方程(normal form equation of a plane)　平面方程的一种形式.在空间直角坐标系中，任一平面 π

$$Ax+By+Cz+D=0$$

所对应的向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 垂直于该平面.如果向量 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量，且 $D\leqslant 0$，那么此方程称为平面的法式方程.通常将平面的法式方程写成

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

式中 α，β，γ 是平面的法线的方向角，p 是原点到此平面的距离，$p\geqslant 0$.法式方程的向量形式为

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OM}-p=0,$$

式中 M 是平面上任意一点.

点到平面的距离(distance between a point and a plane)　刻画点和平面位置关系的一个数.在空间直角坐标系中，点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 d 可用从点 P 到平面上任意点 $M(x,y,z)$ 的向量 $\overrightarrow{PM}$ 在平面的法线上的射影(即在单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 上的射影)的绝对值表出.因此

$$d=|\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}_0|$$

$$= \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0))|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由于 $Ax+By+Cz+D=0$，即 $Ax+By+Cz=-D$，故有

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

平面划分空间(cutting space by plane)　几何学的基本概念.平面将其所在空间分割为两部分.在空间仿射坐标系中，一个平面 π：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

将以空间任意不在平面 π 上的两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为端点的线段 P_1P_2 分成比为

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}\text{ (分母不为 0)}$$

的两段.当 $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ 与 $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ 异号，即 $\lambda>0$ 时，平面 π 与线段 P_1P_2 相交，点 P_1,P_2 在平面 π 的异侧.当 $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ 与 $Ax_2+By_2+Cz_2+D$ 同号，即 $\lambda<0$ 时，平面 π 与线段 P_1P_2 不相交，点 P_1,P_2 在平面 π 的同侧.因此，平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$ 将空间分为两个半空间，向量 (A,B,C) 所指的一侧的点的坐标满足不等式 $Ax+By+Cz+D>0$，另一侧满足

$$Ax+By+Cz+D<0.$$

点到平面的离差(deviation between a point and a plane)　刻画点与平面间位置关系的一个数.这个数是点与平面间的带有正负号的距离.当点在平面的法线正向所指的一侧时，离差为正，当点在平面的另一侧时，离差为负.在空间直角坐标系中，点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 的离差为 $\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p$.若所给平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到它的离差为

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

式中±号的取法是：当 $D\neq 0$ 时，取与 D 异号的；当 $D=0,C\neq 0$ 时，取与 C 同号的；当 $C=D=0,B\neq 0$ 时，取与 B 同号的；当 $D=C=B=0$ 时，取与 A 同号的.

两平面的交角(angle between two intersecting planes)　刻画相交二平面位置关系的一个数.在空间直角坐标系中，两平面：

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

相交所成二面角用 $\angle(\pi_1,\pi_2)$ 来表示.两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 与 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 的交角设为 $\theta=\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)$，则有 $\angle(\pi_1,\pi_2)=\theta$ 或 $\pi-\theta$，故

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\pm\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$$

$$=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

平面 π_1 与 π_2 垂直的充分必要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

两平面的位置关系(positional relation of two planes)　空间解析几何研究的基本问题之一.在空间仿射坐标系中，给定两平面：

$$\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

它们的相关位置有平行(包括重合)和相交两种情形：

1. 两平面 π_1 与 π_2 平行(包括重合)的充分必要条件是 $A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2$，即向量 (A_1,B_1,C_1) 与 (A_2,B_2,C_2) 共线.特别地，重合的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

2. 两平面 π_1 与 π_2 相交的充分必要条件是

$$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2,$$

即向量 (A_1,B_1,C_1) 与 (A_2,B_2,C_2) 不共线(参见本卷《立体几何》同名条).

三平面的位置关系(positional relation of three planes)　空间解析几何研究的基本问题之一.设三个平面 $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\ (i=1,2,3)$ 没有互相重合的情形.它们的相关位置可有下列四种情况.先设

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}.$$

1. $\Delta\neq 0$，三平面相交于一点.

2. $\Delta=0$，但 $A_i:B_i:C_i\neq A_j:B_j:C_j\ (i\neq j,i,j=1,2,3)$ 每两个平面都相交，又分两种情形：

1) 三平面有公共点，三平面相交于一条直线.

2) 三平面无公共点，三条交线互相平行而不相交.

3. $\Delta=0$，且 $A_i:B_i:C_i=A_j:B_j:C_j\ (i\neq j,i,j=1,2,3)$ 中有且仅有一个成立，则有两平面平行且都与第三个平面相交.

4. $\Delta=0$ 且

$$A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2=A_3:B_3:C_3,$$

三平面互相平行(参见本卷《立体几何》同名条).

平面束(plane pencil)　一组有特殊位置关系的平面的集合.即有一条公共直线的所有平面的集合.由平面束中两个平面：

$$\pi_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

所确定的平面束的方程为 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$

$+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，式中 λ,μ 是不全为零的参数. 平行平面束实际上只用其中一个平面的方程即可确定（参见本卷《立体几何》同名条）.

平面把（bundle of planes） 亦称平面丛. 一组有特殊位置关系的平面的集合. 指通过一个定点的所有平面的集合. 这个定点称为平面把的中心. 以点 (x_0,y_0,z_0) 为中心的平面把的方程是

$$\lambda(x-x_0)+\mu(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0,$$

式中 λ,μ,γ 是不同时为零的参数. 通过相交于一点的三平面（参见"三平面的位置关系".）

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\ (i=1,2,3)$$

的平面把的方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,$$

式中 λ,μ,γ 是不同时为零的参数（参见本卷《立体几何》同名条）.

直线的方向向量（direction vector of a straight line） 确定直线位置的重要向量. 即与直线平行的非零向量. 它的分量称为直线的方向数. 若 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 是某直线的方向向量，则 v_1,v_2,v_3 就是该直线的方向数. 与它成比例的数组 $kv_1,kv_2,kv_3(k\neq0)$ 都是该直线的方向数. 在直角坐标系下，单位方向向量

$$\pm\frac{(v_1,v_2,v_3)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}=\pm(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

称为直线的方向余弦.

直线的方向数（direction numbers of a straight line） 见"直线的方向向量".

直线的方向余弦（direction cosine of a straight line） 见"直线的方向向量".

空间直线的参数方程（parameter equation of straight line in space） 空间直线方程的一种. 在空间仿射坐标系 $Oxyz$ 中，对于过定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且平行于非零向量（即其方向向量）$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 的直线，任意点 $M(x,y,z)$ 在此直线上的充分必要条件是 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_0}+t\boldsymbol{v}(t\in\mathrm{R})$，即

$$\begin{cases}x=x_0+tv_1,\\ y=y_0+tv_2,\ (t\in\mathrm{R}),\\ z=z_0+tv_3,\end{cases}$$

式中 t 为参数，此式称为空间直线的参数方程. 在空间直角坐标系中，若 $|\boldsymbol{v}|=1$，则参数方程可写作

$$\begin{cases}x=x_0+s\cos\alpha,\\ y=y_0+s\cos\beta,\\ z=z_0+s\cos\gamma,\end{cases}$$

式中参数 s 表示点 M_0 到点 M 的有向距离，α,β,γ 是直线的方向角.

空间直线的标准方程（canonical equation of straight lines in space） 空间直线方程的一种形式. 在空间仿射坐标系中，由直线的参数方程消去参数得

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}.$$

此式称为直线的标准方程或对称式方程，式中 (x_0,y_0,z_0) 是直线上一定点，v_1,v_2,v_3 是直线的方向数，因此又称它为点向式方程. 为了方便，约定分母为零时，相应的分子也为零.

空间直线的对称式方程（symmetry form equation of straight lines in space） 见"空间直线的标准方程".

空间直线的点向式方程（point direction form equation of straight lines in space） 见"空间直线的标准方程".

空间直线的两点式方程（two-point form equation of straight lines in space） 空间直线方程的一种形式. 指由两点所确定的直线方程. 在空间仿射坐标系 $Oxyz$ 中，由不同的两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 确定的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 是直线 M_1M_2 的方向向量. 因此直线 M_1M_2 有参数方程（参见"空间直线的参数方程"）

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t,\ (t\in\mathrm{R}).\\ z=z_1+(z_2-z_1)t,\end{cases}\qquad(1)$$

(1)式亦可消去参数改写成

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

它们分别是直线的两点式方程的参数形式和标准方程形式. 满足(1)式的任意点 $M(x,y,z)$，当且仅当 $t\in[0,1]$ 时，此点属于线段 M_1M_2. 因此，只要限制 $t\in[0,1]$，(1)式就成为线段 M_1M_2 的参数方程.

直线的参数方程（parameter equation of a line） 由参数所确定的直线方程. 见"空间直线的两点式方程". 由两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 决定的线段 M_1M_2 的参数方程是

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t,\ t\in[0,1].\\ z=z_1+(z_2-z_1)t,\end{cases}$$

空间直线的一般方程（general equation of straight lines in space） 空间直线方程的一种形式. 即任何两个相交平面确定一条直线. 在仿射坐标系中，方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

称为空间直线的一般方程. 式中

$$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2.$$

$$\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}$$

是该直线的方向数.

空间直线的射影式方程(projective form equation of straight lines in space)　空间直线方程的一种形式.通过一直线的平面有无数多个,选取其中与坐标轴平行的两个平面,它们的方程构成的方程组称为该直线的射影式方程.例如

$$\begin{cases} x = pz + x_0, \\ y = qz + y_0 \end{cases}$$

就是射影式方程.由它易化为点向式

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z}{1},$$

它表示过点$(x_0, y_0, 0)$,方向数为 $p, q, 1$ 的直线.直线的一般方程用消元法易化为射影式,可以方便地化为点向式.

空间两直线的位置关系(positional relation of two straight lines in space)　空间解析几何研究的基本问题之一.在空间仿射坐标系中,给定直线 l_1:$\{M_1; \boldsymbol{v}_1\}$和 l_2:$\{M_2; \boldsymbol{v}_2\}$.它们的位置关系如下:

1. 当 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 共线时,两直线平行,且当$\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{v}_1$共线时,两直线重合.

2. 当 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共线时,若 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$共面,则两直线相交;若 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$不共面,两直线异面.

在直角坐标的情形,当 $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$ 时,两直线垂直(参见本卷《立体几何》同名条).

直线与平面的位置关系(positional relation between a straight line and a plane)　空间解析几何研究的基本问题之一.在空间仿射坐标系中,给定直线 l:

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

和平面 π:$Ax + By + Cz + D = 0$.直线 l 的方向向量是(X, Y, Z),平面 π 的方位向量当 $C \neq 0$ 时是$(-C, 0, A)$和$(0, -C, B)$.它们的位置关系如下:

1. l 与 π 平行的充分必要条件是上述三个向量共面,因而

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ -C & 0 & A \\ 0 & -C & B \end{vmatrix} = 0,$$

即 $AX + BY + CZ = 0$. l 在 π 上,除此条件外尚有点(x_0, y_0, z_0)在 π 上,因而 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

2. l 与 π 相交即不平行的充分必要条件是

$$AX + BY + CY \neq 0.$$

3. 在直角坐标的情形,l 垂直于 π,l 的方向向量与 π 的法向量(A, B, C)平行,当且仅当

$$A : X = B : Y = C : Z.$$

(参见本卷《立体几何》同名条).

空间两直线的夹角(angle between two intersecting lines in space)　刻画空间二直线相关位置的一个数.在空间直角坐标系中,设两直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$,则两直线的夹角 $\theta = \angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$或 $\pi - \angle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$的余弦为

$$\cos\theta = \pm \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}.$$

参见本卷《立体几何》中的“异面直线所成的角”.

直线与平面的交角(angle between a straight line and a plane)　刻画直线与平面相交情况的一个数.在空间直角坐标系中,设直线的方向向量为 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$,则直线与平面的交角

$$\theta = \left|\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}) \pm \frac{\pi}{2}\right| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

故有

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|} = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

(参见本卷《立体几何》同名条).

点到直线的距离(distance from a point to a line)　刻画点和直线位置关系的一个数.在空间直角坐标系中,点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$到直线$\{M_1; \boldsymbol{v}\}$的距离

$$d = \frac{|\boldsymbol{v} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

异面直线间的距离(distance between skew lines)　刻画异面直线相关位置的一个数.在空间直角坐标系中,两异面直线$\{M_1; \boldsymbol{v}_1\}\{M_2; \boldsymbol{v}_2\}$间的距离

$$d = \frac{|(\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2|}.$$

(参见本卷《立体几何》中的“异面直线的公垂线”).

直线把(bundle of lines)　亦称直线丛.空间满足某些条件的直线的集合.指过空间一定点的所有直线的集合.定点称为直线把的中心.以点(x_0, y_0, z_0)为把的中心的直线把的方程是

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3},$$

式中 v_1, v_2, v_3 是不全为零的参数(参见本卷《立体几何》中的“直线丛”).

二次曲面的一般理论

曲面的方程(equation of surface)　空间解析几何的重要概念,是用解析法研究曲面的基础.曲面可以看做是由空间中适合一定条件的点构成的.在建立了空间直角坐标系以后,若坐标适合三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 的点(x, y, z)的集合是某曲面 Σ,则称方程 $F(x, y, z) = 0$ 是曲面 Σ 的方程,而称曲面 Σ

是这个方程的曲面或图形. 因此,若说方程 $F(x,y,z)=0$ 是某曲面 Σ 的方程,必须具备以下两点:

1. 坐标适合方程 $F(x,y,z)=0$ 的点都在曲面 Σ 上.

2. 坐标不适合方程 $F(x,y,z)=0$ 的点都不在曲面 Σ 上,即曲面 Σ 上所有点的坐标都适合方程 $F(x,y,z)=0$.

在这个曲面方程的概念中,并没有对方程加以限制. 解析几何中研究的曲面方程,常是代数方程或初等超越方程. 有时一个方程所表示的曲面不含任何点,例如 $x^2+y^2+z^2+1=0$,也称这种曲面为零曲面或虚曲面;有时方程的图形退化为一条直线或若干个孤立点,例如 $(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)=0$. 从函数观点看,三元方程 $F(x,y,z)=0$ 是隐函数形式,所以又称为隐式方程或普通方程. 曲面的方程还可以写成参数方程的形式.

零曲面(zero surface)　见"曲面的方程".

虚曲面(imaginary surface)　见"曲面的方程".

隐式方程(implicit equation)　见"曲面的方程".

普通方程(general equation)　见"曲面的方程".

曲面的参数方程(parametric equation of a surface)　曲面方程中常用的一种形式. 在空间坐标系下,如果曲面 Σ 上任意一点的坐标分量 x,y,z 都是变数 u,v 的函数,即

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v),\ (u,v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

而且对于区域 D 内 (u,v) 的值,由上式确定的点都在曲面 Σ 上,则将上式称为曲面的参数方程,其中 u,v 为参数. 在空间仿射坐标系下,也将曲面的参数方程写成向量形式:$\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{e}_1+y(u,v)\boldsymbol{e}_2+z(u,v)\boldsymbol{e}_3$ 或 $\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. 曲面 Σ 就是平面区域 D 到空间的映射 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的象. 而参数方程又称为曲面 Σ 的参数表示,(u,v) 称为曲面 Σ 的参数或曲纹坐标.

曲面的参数表示(parametric representation of a surface)　即"曲面的参数方程".

曲面的参数(parametric of a surface)　见"曲面的参数方程".

空间曲线的一般方程(general equation of space curve)　空间曲线方程的一种形式. 空间中的曲线可以看成是两个不同曲面的交线,因此,它由两个已知曲面的方程所确定. 设 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$ 是两个不同曲面的方程,并且这个曲面的交线是某曲线 Γ,则方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

称为空间曲线 Γ 的一般方程. 显然,方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ \lambda F_1(x,y,z)+\mu F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

也是曲线 Γ 的方程,式中 $\lambda,\mu(\mu\neq0)$ 为任意实数. 因此,曲线的一般方程不惟一.

空间曲线的参数方程(parametric equation of space curve)　空间曲线方程的一种形式. 指由参数表示的曲线方程. 在空间直角坐标系下,方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ (t \in I) \\ z = z(t), \end{cases}$$

中的 x,y,z 都是 t 的函数,它们的公共定义域是某个区间 I. 如果对于区间 I 中的每一个值 t,由上式确定的以 (x,y,z) 为坐标的点在某曲线 Γ 上,则将上式称为曲线 Γ 的参数方程,t 称为参数. 在空间仿射坐标系下,也可以将曲线 Γ 的参数方程写成向量形式:$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. 空间曲线 Γ 就是区间 I 到三维空间中的映射的象.

二次曲面(quadric surface)　空间解析几何系统研究的一类曲面. 指方程为二次的曲面. 在空间仿射坐标系下,三元二次方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

所表示的曲面 Σ 就是二次曲面. 为了书写简便,常将二次曲面方程的左端记为 $F(x,y,z)$,将二次项部分记为 $\Phi(x,y,z)$,并引进以下记号

$$F_i(x,y,z)=a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z+a_{i4},$$

其中 $i=1,2,3,4$,则有

$$F=xF_1+yF_2+zF_3+F_4,$$

也可以将方程(1)改写成如下矩阵乘积的形式

$$[x\ y\ z\ 1]\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}=0,$$

式中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,3,4)$. 对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为二次曲面 Σ 的矩阵,它完全决定了二次曲面,所以也常将方程为(1)的曲面 Σ 简记为二次曲面 $\Sigma(a_{ij})$. 还将 $\Phi(x,y,z)$ 的系数所排成的矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

称为 $\Phi(x,y,z)$ 的矩阵.

1. 二次曲面与任何平面的交线都是二次曲线.

2. 一定存在着这样的转轴变换(参见"主轴变换")

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', & (c_{ij})^{\mathrm{T}}(c_{ij}) = E, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z', & \det(c_{ij}) = 1, \end{cases}$$

可将二次曲面的方程(1)化简为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0. \qquad (2)$$

这相当于存在正交矩阵 $C=(c_{ij})$,使

$$C^{\mathrm{T}}A^*C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{记 } \boldsymbol{c}_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ c_{3i} \end{pmatrix},$$

其中 $i=1,2,3$,即 $A^*\boldsymbol{c}_i=\lambda_i\boldsymbol{c}_i$, $\lambda_i\neq 0$,式中 λ_i 为二次曲面的特征方程的根,$\boldsymbol{c}_i$ 为特征向量,它的方向为二次曲面的主方向.

3. 二次曲面包含 17 类曲面,详见“二次曲面的分类”(参见本卷《高等几何》中的“二阶曲面”).

二次曲面的矩阵(matrix of a quadric surface) 见“二次曲面”.

退化二次曲面(degenerate quadric surface) 一类特殊的二次曲面. 二次曲面矩阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $I_4=\det A=0$ 的二次曲面(参见本卷《高等几何》中的“退化的二阶曲面”). 否则称为非退化二次曲面.

二次曲面与直线的位置关系(positional relation between a line and a quadric surface) 空间解析几何研究的基本问题之一. 它对于研究二次曲面具有重要的作用. 过定点 (x_0,y_0,z_0) 方向为 $v_1:v_2:v_3$ 的直线

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t, \\ y = y_0 + v_2 t, \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$$

与二次曲面 $\sum(a_{ij})$ 的交点由方程

$$\Phi(v_1,v_2,v_3)t^2 + 2Rt + F(x_0,y_0,z_0) = 0$$

的根来确定. 这里 $\Phi(v_1,v_2,v_3)=a_{11}v_1^2+a_{22}v_2^2+a_{33}v_3^2+2a_{12}v_1v_2+2a_{13}v_1v_3+2a_{23}v_2v_3$, $R=v_1F_1(x_0,y_0,z_0)+v_2F_2(x_0,y_0,z_0)+v_3F_3(x_0,y_0,z_0)$. Φ,F,R 的意义参见“二次曲面”. 当 $\Phi(v_1,v_2,v_3)\neq 0$ 时,根据 $R^2-\Phi F\gtreqless 0$,知直线 l 与二次曲面 $\sum$ 有两个不同的交点(相交)、相重合的交点(相切)或有两个共轭虚交点(相离,这时两交点的坐标是共轭虚数,它们的中点坐标是实数). 当 $\Phi(v_1,v_2,v_3)=0$, $R\neq 0$ 时,直线 l 与二次曲面 $\sum$ 有一个交点. 当 $\Phi(v_1,v_2,v_3)=R=0$, $F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 时,直线 l 是二次曲面 $\sum$ 的渐近线. 当 $\Phi(v_1,v_2,v_3)=R=0$, $F(x_0,y_0,z_0)=0$,直线 l 是二次曲面 $\sum$ 的母线.

二次曲面的奇点(singular point of a quadric surface) 二次曲面上的特殊点. 对于二次曲面 $F(x,y,z)=0$,若存在一点 (x_0,y_0,z_0) 满足条件

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0, \\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0, \\ a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0, \\ a_{41}x_0+a_{42}y_0+a_{43}z_0+a_{44}=0, \end{cases}$$

则称它为二次曲面的奇异点,简称奇点. 二次曲面上的非奇点称为二次曲面的正常点(参见本卷《高等几何》中的“二阶曲面的奇异点”). 例如,锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

的顶点(0,0,0)是它的奇点.

二次曲面的正常点(regular point of a quadric surface) 见“二次曲面的奇点”.

二次曲面的切平面(tangent plane of a quadric surface) 刻画二次曲面形状的一个重要平面. 二次曲面在正常点处的所有切线构成一个平面称为二次曲面在该点处的切平面,这一点称为切点. 过二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 上一正常点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面的方程为 $(x-x_0)F_1(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\cdot F_2(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_3(x_0,y_0,z_0)=0$,即 $a_{11}x_0x+a_{22}y_0y+a_{33}z_0z+a_{12}(x_0y+xy_0)+a_{13}(x_0z+xz_0)+a_{23}(y_0z+yz_0)+a_{14}(x+x_0)+a_{24}(y+y_0)+a_{34}(z+z_0)+a_{44}=0$. 二次曲面在奇点的切平面不确定.

曲面的法线(normal line of a surface) 研究曲面形状的一条重要直线. 垂直于切平面的直线. 通过曲面 $F(x,y,z)=0$ 的正常点,且垂直于过这点的切平面的直线称为曲面在这一点的法线. 设正常点的坐标为 (x_0,y_0,z_0),则通过这点的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{F_1(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_2(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_3(x_0,y_0,z_0)},$$

式中 $F_i(x_0,y_0,z_0)=a_{i1}x_0+a_{i2}y_0+a_{i3}z_0+a_{i4}$,
其中 $i=1,2,3$.

二次曲面的中心(center of a quadric surface) 研究二次曲面类型的一个重要的点. 通过空间任一点作二次曲面的弦,若该弦被 C 点所平分,则称点 C 为二次曲面的中心. 点 $C(x_0,y_0,z_0)$ 为二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 的中心的充分必要条件是

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0) \equiv a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0, \\ F_2(x_0,y_0,z_0) \equiv a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0, \\ F_3(x_0,y_0,z_0) \equiv a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0. \end{cases}$$

二次曲面的中心方程组(equations of center of a quadric surface) 见“二次曲面的中心”.

二次曲面的渐近方向(asymptotic direction of a quadric surface) 研究二次曲面的重要概念. 设二次曲面的方程 $F(x,y,z)=0$ 中的二次项部分为 $\Phi(x,y,z)$,满足条件 $\Phi(v_1,v_2,v_3)=0$ 的方向 $v_1:v_2:v_3$ 称为二次曲面的渐近方向,否则称为非渐近方向. 如二次锥面的所有母线的方向都是它的渐近方向.

二次曲面的非渐近方向(nonasymptotic direc-

tion of a quadric surface) 见“二次曲面的渐近方向”.

二次曲面的渐近锥面(asymptotic conical surface of a quadric surface) 刻画二次曲面形状的重要锥面.通过二次曲面的中心且方向为渐近方向的直线称为二次曲面的渐近线.所有渐近线构成一个二次锥面,称为二次曲面的渐近锥面.设(x_0,y_0,z_0)是二次曲面$F(x,y,z)=0$的中心,则它的渐近锥面为$\Phi(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$,即

$$a_{11}(x-x_0)^2+a_{22}(y-y_0)^2+a_{33}(z-z_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+2a_{13}(x-x_0)(z-z_0)+2a_{23}(y-y_0)(z-z_0)=0.$$

双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

的渐近锥面为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

二次曲面的渐近线(asymptotic lines of a quadric surface) 见“二次曲面的渐近锥面”.

二次曲面的切锥面(tangent conical surface of a quadric surface) 刻画二次曲面形状的重要锥面.过二次曲面外一点(x_0,y_0,z_0)与二次曲面$F(x,y,z)=0$相切的所有切线构成一个锥面,这个锥面(可以是虚锥面)称为二次曲面$F(x,y,z)=0$的切锥面,其方程是

$$[(x-x_0)F_1(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_3(x_0,y_0,z_0)]^2-\Phi(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot F(x_0,y_0,z_0)=0.$$

当点(x_0,y_0,z_0)是二次曲面$F(x,y,z)=0$的中心时,$F_1(x_0,y_0,z_0)=F_2(x_0,y_0,z_0)=F_3(x_0,y_0,z_0)=0$.这时切锥面方程化为$\Phi(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$,即切锥面就是二次曲面的渐近锥面.

中心二次曲面(central quadric surface) 亦称有心二次曲面.二次曲面的一种.指有惟一的中心的二次曲面.记

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

当$I_3\neq 0$时,二次曲面有惟一的中心,称为中心二次曲面.当$I_3=0$时,二次曲面称为非中心二次曲面.由二次曲面的中心方程组无解或有无数组解又可将它分为无心二次曲面、线心二次曲面(中心构成一条直线)和面心二次曲面(中心构成一个平面).

有心二次曲面(central quadric surfaces) 即“中心二次曲面”.

非中心二次曲面(noncentral quadric surfaces) 见“中心二次曲面”.

无心二次曲面(centerless quadric surfaces) 见“中心二次曲面”.

线心二次曲面(line-central quadric surfaces) 见“中心二次曲面”.

面心二次曲面(plane-centred quadric surfaces) 见“中心二次曲面”.

二次曲面的径面(diametral plane of quadric surfaces) 与二次曲面的仿射性质有关的概念.二次曲面的任一族平行弦的中点必在同一个平面上.这个平面称为共轭于平行弦的(直)径面,平行弦的方向称为这个径面的共轭方向.在仿射坐标系下,二次曲面$F(x,y,z)=0$与方向$v_1:v_2:v_3$共轭的径面方程为

$$v_1F_1(x,y,z)+v_2F_2(x,y,z)+v_3F_3(x,y,z)=0,$$

亦即$(a_{11}v_1+a_{12}v_2+a_{13}v_3)x+(a_{12}v_1+a_{22}v_2+a_{23}v_3)y+(a_{13}v_1+a_{23}v_2+a_{33}v_3)z+a_{14}v_1+a_{24}v_2+a_{34}v_3=0$.如果二次曲面有中心,那么它一定在任何一个径面上.因此,线心二次曲面的任何径面通过它的中心线,面心二次曲面的任何径面与它的中心平面重合.在径面的方程中,若

$$\begin{cases} a_{11}v_1+a_{12}v_2+a_{13}v_3=0, \\ a_{12}v_1+a_{22}v_2+a_{23}v_3=0, \\ a_{13}v_1+a_{23}v_2+a_{33}v_3=0, \end{cases}$$

则方程不表示任何平面.满足上面这个方程组的$v_1:v_2:v_3$称为二次曲面的奇异方向,简称奇向.二次曲面有奇异方向的充分必要条件是$I_3=0$.与(非奇异的)渐近方向共轭的径面必与这个渐近方向平行.非中心二次曲面的任何径面必与二次曲面的奇异方向平行.

径面的共轭方向(conjugate direction of diametral plane) 见“二次曲面的径面”.

二次曲面的奇异方向(singular direction of a quadric surface) 见“二次曲面的径面”.

二次曲面的共轭方向(conjugate direction of a quadric surface) 研究二次曲面的重要概念.对于二次曲面$\sum(a_{ij})$,给定方向$v_1:v_2:v_3$,满足等式

$$(a_{11}v_1+a_{12}v_2+a_{13}v_3)u_1+(a_{12}v_1+a_{22}v_2+a_{23}v_3)u_2+(a_{13}v_1+a_{23}v_2+a_{33}v_3)u_3=0$$

的方向$u_1:u_2:u_3$称为与方向$v_1:v_2:v_3$共轭的方向.若方向$u_1:u_2:u_3$共轭于方向$v_1:v_2:v_3$,则方向$v_1:v_2:v_3$也共轭于方向$u_1:u_2:u_3$.与非奇异的方向$v_1:v_2:v_3$共轭的径面平行于共轭方向$u_1:u_2:u_3$,渐近方向是与自身共轭的方向.奇异方向共轭于任意方向.

二次曲面的主径面(principal diametral plane of quadric surface) 与曲面的度量性质有关的概念.对化简二次曲面的方程具有重要作用.如果二次曲面的径面垂直于它所共轭的方向,那么这个径面

称为二次曲面的主径面. 二次曲面关于它的主径面对称. 主径面的方程参见"二次曲面的主方向".

二次曲面的主方向(principal direction of quadric surface) 为确定主径面而引入的概念. 二次曲面的主径面的共轭方向(即垂直于主径面的方向),或者二次曲面的奇向. 在空间直角坐标系下,设 $v_1:v_2:v_3$ 是二次曲面 $\sum(a_{ij})$ 的非奇主方向,则与它共轭的主径面的法方向平行于该主方向,即有

$$\begin{cases}a_{11}v_1+a_{12}v_2+a_{13}v_3=\lambda v_1,\\ a_{12}v_1+a_{22}v_2+a_{23}v_3=\lambda v_2,\\ a_{13}v_1+a_{23}v_2+a_{33}v_3=\lambda v_3.\end{cases}$$

该方程组所确定的非零向量 (v_1,v_2,v_3) 称为特征向量,特征向量的方向就是主方向. 方程组中的 λ 是特征方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

的根. 求出与非零的特征根 λ 所对应的主方向 $v_1:v_2:v_3$,代入径面的方程,就得到主径面的方程

$$\lambda(v_1x+v_2y+v_3z)+v_1a_{14}+v_2a_{24}+v_3a_{34}=0.$$

当特征根 $\lambda=0$ 时,所对应的主方向为二次曲面的奇向,与此主方向共轭的径面不存在.

二次曲面的特征多项式(characteristic polynomial of a quadric surface) 研究二次曲面类型的重要多项式. 是确定二次曲面主方向的特征根的多项式. 二次曲面方程中的二次项系数矩阵 $A^*=(a_{ij})$ 所对应的多项式

$$\begin{aligned}D(\lambda)&=|A^*-\lambda E|\\ &=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}\\ &=-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3\end{aligned}$$

称为二次曲面的特征多项式.

二次曲面的特征根(characteristic root of a quadric surface) 二次曲面的重要概念. 二次曲面方程中的二次项系数矩阵 A^* 所对应的方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即 $\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$ 称为二次曲面的特征方程. 它的根称为二次曲面的特征根. 式中

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

二次曲面的三个特征根都是实数,且至少有一个不为零. 因此,二次曲面至少有一个主径面. 两个相异的特征根对应的主方向互相垂直又互相共轭. 相重的特征根对应的主方向垂直于另一个单根对应的主方向的所有方向. 若特征根是三重根,则任一方向都是主方向. 因此,二次曲面总存在互相正交的三个主方向.

二次曲面的特征方程(characteristic equation of a quadric surface) 见"二次曲面的特征根".

二次曲面的不变量(invariant of a quadric surface) 研究二次曲面的几何形态的几种特征量. 它们深刻地揭示了曲面与方程的关系. 设二次曲面方程左端的三元二次多项式为

$$F(x,y,z)=(x\ y\ z\ 1)\ A(x\ y\ z\ 1)^{\mathrm{T}}.$$

空间任意直角坐标变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & h_1\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & h_2\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & h_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ 1\end{pmatrix},$$

记为 $X=CX'$. 式中 (c_{1i},c_{2i},c_{3i}) $(i=1,2,3)$ 是第 i 个新坐标轴的单位方向向量. 该变换将 $F(x,y,z)$ 变为 $F'(x',y',z')=(x'\ y'\ z'\ 1)\ A'(x'\ y'\ z'\ 1)^{\mathrm{T}}$,即将二次曲面的矩阵 $A=(a_{ij})$ 变为矩阵 $A'=(a'_{ij})=C^{\mathrm{T}}AC$. 由系数 a_{ij} 所组成的某个函数 f 与由系数 a'_{ij} 所组成的相同的函数,其函数值总相等,即无论直角坐标变换如何选择,总有

$$f(a'_{11},a'_{12},\cdots,a'_{44})=f(a_{11},a_{12},\cdots,a_{44}),$$

则称函数 f 为二次曲面的一个正交不变量,简称不变量. 如果函数 f 的值,只是经过转轴变换不变,那么称它为二次曲面的一个正交半不变量,简称半不变量. 二次曲面的特征多项式

$$\begin{aligned}D(\lambda)&=|A^*-\lambda E|\\ &=-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3,\end{aligned}$$

经直角坐标变换是不变的,又 $\det A'=\det A=I_4$. 式中 I_1,I_2,I_3(其意义参见"二次曲面的特征根")及

$$I_4=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}$$

称为二次曲面的基本不变量. 由它们所组成的任一代数式(例如特征根)也都是二次曲面的不变量. 由二次曲面方程的系数 a_{ij} 所对应的 λ 的多项式

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}\\ &=-a_{44}\lambda^3+K_1\lambda^2-K_2\lambda+K_3\end{aligned}$$

经过空间转轴变换也不改变其值，因此 a_{44}, K_1, K_2 都是二次曲面的半不变量. 其中

$$K_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

且 $K_3=I_4$. 它们分别是由 I_1, I_2 的式子，在其右边和下边"镶上"一次项系数和常数项所组成的. 而曲面的方程依赖于坐标系的选择，但由方程的系数所确定的这些不变量和半不变量与坐标系的位置变化无关，它们反映了曲面本身的形状、大小等几何量，更深刻地刻画了方程与图形的关系. 利用不变量来化简方程，对方程所表示的曲面进行分类和判别都是十分方便的.

二次曲面的正交不变量(orthogonal invariant of a quadric surface)　见"二次曲面的不变量".

二次曲面的基本不变量(basic invariant of a quadric surface)　见"二次曲面的不变量".

二次曲面的正交半不变量(orthogonal semi-invariant of a quadric surface)　见"二次曲面的不变量".

二次曲面的分类(classification of quadric surfaces)　空间解析几何研究的基本问题之一. 通过空间直角坐标变换，二次曲面的方程总可以化简为如下面的分类表所示的 17 种标准方程之一. 运用不变量和半不变量，还可以直接判别三元二次方程所表示的是何种曲面. 这 17 种曲面中，除重合二平面外，其余每一种类中又有无数多个不全等的曲面. 这是关于二次曲面的度量分类. 对二次曲面进行仿射分类，就只有 17 个二次曲面(也有分为 15 个仿射类的，而将虚椭球面、虚椭圆柱面和平行二虚平面算作同一个"零曲面"，即空集). 它们的标准方程分别为：

1. $x^2+y^2+z^2=1$　(椭球面).
2. $x^2+y^2+z^2=-1$　(虚椭球面).
3. $x^2+y^2+z^2=0$　(虚二次锥面或点).
4. $x^2+y^2-z^2=1$　(单叶双曲面).
5. $x^2+y^2-z^2=-1$　(双叶双曲面).
6. $x^2+y^2-z^2=0$　(二次锥面).
7. $x^2+y^2=2z$　(椭圆抛物面).
8. $x^2+y^2=1$　(椭圆柱面).
9. $x^2+y^2=-1$　(虚椭圆柱面).
10. $x^2+y^2=0$　(相交于一条实直线的二虚平面).
11. $x^2-y^2=2z$　(双曲抛物面).
12. $x^2-y^2=1$　(双曲柱面).
13. $x^2-y^2=0$　(相交二平面).
14. $x^2=2y$　(抛物柱面).
15. $x^2=1$　(平行二平面).
16. $x^2=-1$　(平行二虚平面).
17. $x^2=0$　(重合二平面).

二次曲面的分类与判别表

型别	类别		名称	标准方程
$I_3\neq0$ 中心二次曲面	$I_2>0$ 且 $I_1I_3>0$	$I_4\neq0$	1. 椭球面 $I_4<0$ 2. 虚椭球面 $I_4>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$
		$I_4=0$	3. 虚二次锥面(一个实点)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
	$I_2\leqslant0$ 或 $I_1I_3\leqslant0$	$I_4\neq0$	4. 单叶双曲面 $I_4>0$ 5. 双叶双曲面 $I_4<0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$
		$I_4=0$	6. 二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
$I_3=0$ 非中心二次曲面	$I_2>0$	$I_4\neq0$	7. 椭圆抛物面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$
		$I_4=0$ 且 $K_2\neq0$	8. 椭圆柱面 $I_1K_2<0$ 9. 虚椭圆柱面 $I_1K_2>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$
		$I_4=0$ $K_2=0$	10. 相交二虚平面(一条直线)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
	$I_2<0$	$I_4\neq0$	11. 双曲抛物面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$
		$I_4=0$ $K_2\neq0$	12. 双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
		$I_4=0$ $K_2=0$	13. 相交二平面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
	$I_2=0$ 且 $I_4=0$	$K_2\neq0$	14. 抛物柱面	$x^2-2py=0$
		$K_2=0$	15. 平行二平面 $K_1<0$ 16. 平行二虚平面 $K_1>0$ 17. 重合二平面 $K_1=0$	$x^2-a^2=0$ $x^2+a^2=0$ $x^2=0$

注：此表中 I_1, I_2, I_3, I_4 是二次曲面的不变量. K_1, K_2 是半不变量.

主轴变换(transformation of principal axis)　用于化简二次曲面方程的一种转轴变换. 选取与二次曲面的互相正交的三个主方向作为新坐标轴的方

向，这种由旧直角坐标系到新直角坐标系的转轴变换称为主轴变换. 设主轴变换为

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z', \end{cases}$$

即
$$(x\ y\ z) = (x'\ y'\ z')\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

式中向量 $\boldsymbol{c}_i = (c_{1i},\ c_{2i},\ c_{3i})$ $(i=1,2,3)$ 的方向就是主方向（参见"二次曲面的主方向"），它满足 $A^* \boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}})$，则二次曲面的方程中二次项部分

$$\Phi(x,y,z) = (x\ y\ z)A^*(x\ y\ z)^{\mathrm{T}}$$

经主轴变换可化简为

$$\Phi(x,y,z) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

式中 $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3$ 是特征根.

二次曲面方程的化简（simplification of the equation of quadric surface） 研究二次曲面类型的一种手段. 二次曲面的方程通过主轴变换可化简为 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + a_{44} = 0$，式中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是特征根. 再运用不变量和半不变量，就各种情况分别通过坐标变换（可用配方法），而将方程化简为下表所示的五种类型：

型别			坐标变换后的标准方程
$I_3\neq0$ 中心型	$I_4\begin{cases}\neq0\\=0\end{cases}$		1. $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+\frac{I_4}{I_3}=0$
$I_3=0$ 非中心型	$I_2\neq0$	$I_4\neq0$	2. 无心型一：$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2\pm2\sqrt{\frac{-I_4}{I_2}}z=0$
		$I_4=0$	3. 线心型：$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{K_2}{I_2}=0$
	$I_2=0$ 且 $I_4=0$	$K_2\neq0$	4. 无心型二：$\lambda_1x^2\pm2\sqrt{\frac{-K_2}{I_2}}y=0$
		$K_2=0$	5. 面心型：$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$

注：表中 I_4 是二次曲面的不变量，K_1, K_2 是半不变量. 表中这些方程，它们的系数是用不变量表达的（当 $I_4=I_3=0$ 时，K_2 是不变量），称为规范方程或简化方程. 从表中还可知，当 $I_3=I_2=0$ 时，必有

$$I_4=0.$$

二次曲面的规范方程（normalized equation of a quadric surface） 见"二次曲面方程的化简".

二次曲面的简化方程（reduced equation of a quadric surface） 即"二次曲面的规范方程".

曲面与空间曲线

曲面（surface） 空间几何的基本概念之一. 指空间满足某种条件的点的轨迹. 曲面也可以认为是曲线按照一定条件移动形成的轨迹，这种朴素的看法对于在解析几何中寻求曲面的方程有方便之处. 为了深刻地揭示曲面的本质属性，近代拓扑学的观点认为，将一段柔软的可伸长的金属丝（拉直了就是线段的直观模型）经过拓扑变形（可逆的连续映射，其逆映射也连续）就变成了空间的一简单曲线弧. 类似地，将一块橡皮薄膜（紧绷在一平面闭曲线上便形成平面上的初等区域）经过拓扑变形（可逆的连续映射，其逆映射也连续）就变成空间一简单曲面片. 更复杂的曲线、曲面可分别看做是由有限个简单曲线弧、简单曲面片适当拼接而成的. 有这样一种抽象定义，曲线是一维的连续统，曲面是二维的连续统.

曲面的分类（classification of surfaces） 空间解析几何研究的基本问题之一. 指曲面按其方程所分成的各种类型. 曲面的方程可以因坐标系的不同而有不同的形式. 但是，在空间仿射坐标系（包括空间直角坐标系）下，由于仿射坐标变换和它的逆变换都是一次的，曲面的方程 $f(x,y,z)=0$ 经仿射变换可以变为

$$f(c_{11}x'+c_{12}y'+c_{13}z'+h_1, c_{21}x'+c_{22}y' + c_{23}z'+h_2, c_{31}x'+c_{32}y'+c_{33}z'+h_3)=0,$$

于是得到关于 x', y', z' 的方程 $g(x',y',z')=0$. 当 $f(x,y,z)$ 是代数式或超越式时，$g(x',y',z')$ 仍然是代数式或超越式，而且代数方程可化简为整式方程. 可见曲面的方程的代数性或超越性，以及整式方程的次数都不因仿射坐标系选取的不同而改变，这些都是曲面固有的不变性质. 因此，在空间仿射坐标系下，曲面可以按其方程进行分类. 曲面的方程若为 n 次整式方程，它所表示的曲面就称为 n 次曲面；若为代数方程，则它表示的曲面称为代数曲面，非代数曲面称为超越曲面.

***n* 次曲面**（n-degree surface） 见"曲面的分类".

代数曲面（algebraic surface） 见"曲面的分类".

超越曲面（transcendental surface） 见"曲面的分类".

垂足曲面（pedal surface） 曲面的一种类型. 亦称菲涅耳弹性曲面. 从椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的中心到它的切平面作垂线，垂足的轨迹是四次曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$. 该曲面称为菲

涅耳弹性曲面或垂足曲面. 菲涅耳(Fresnel, A. J.)在研究光波衍射的规律时所建立的波动曲面理论中给出了垂足曲面的概念.

菲涅耳弹性曲面(Fresnel elastic surface)　即"垂足曲面".

柱面(cylindrical surface)　一种特殊曲面. 指平行于某定方向 $\boldsymbol{v}$ 且与定曲线 Γ 相交的所有直线构成的曲面. 曲线 Γ 称为它的准线或导线,构成柱面的每一条直线称为它的母线. 柱面被它的准线及母线方向完全确定,但准线并不是惟一的,与柱面的所有母线都相交的任何一条曲线皆可以取作该柱面的准线. 在空间仿射坐标系 $Oxyz$ 中,若柱面的母线方向为 $v_1:v_2:v_3$,准线 Γ 的方程为

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

则过准线上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的母线方程为

$$x=x_0+v_1t,\ y=y_0+v_2t,\ z=z_0+v_3t.$$

因此,柱面的方程可由方程组

$$\begin{cases}F_1(x-v_1t,y-v_2t,z-v_3t)=0,\\F_2(x-v_1t,y-v_2t,z-v_3t)=0\end{cases}$$

消去参数 t 而得到. 特别地,若柱面的母线平行于 z 轴,准线是 xy 坐标面内的平面曲线 $f(x,y)=0$,则此柱面的方程为 $f(x,y)=0$. 换句话说,在空间直角坐标系中,缺一个变元的方程 $f(x,y)=0$, $g(y,z)=0$ 或 $h(x,z)=0$ 分别表示母线平行于 z 轴、x 轴或 y 轴的柱面. 若准线 Γ 的参数方程为

$$x=f(t),y=g(t),z=h(t),$$

母线的方向为 $v_1:v_2:v_3$,则柱面的参数方程为

$$\begin{cases}x=f(t)+v_1u,\\y=g(t)+v_2u,\\z=h(t)+v_3u.\end{cases}$$

柱面的准线(directrix of a cylindrical surface)　见"柱面".

柱面的导线(derived line of a cylindrical surface)　见"柱面".

柱面的母线(generating line of cylindrical surface)　见"柱面".

投射柱面(projecting cylinder)　柱面的一种. 过曲线上各点作平行于某一方向的直线,所有这些直线构成的柱面,称为该曲线沿某一方向的投射柱面. 在空间直角坐标系下,沿某一坐标轴的方向,曲线的投射柱面的方程中,缺一个变数,研究空间曲线常用这类二元方程. 例如,对于空间曲线

$$\begin{cases}2x^2+y^2-4z=4y,\\x^2+3y^2+8z=12y,\end{cases}$$

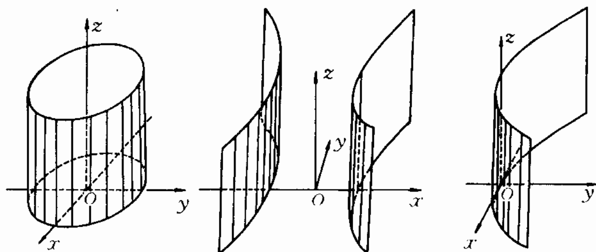
分别消去两个方程中的 y,z 得曲线的投射柱面方程: $x^2-4z=0$, $x^2+y^2=4y$. 从而知道所给曲线是圆柱面 $x^2+(y-2)^2=4$ 与抛物柱面 $x^2=4z$ 的交线. 这时容易将曲线的普通方程化为参数方程

$$\boldsymbol{r}=(2\cos\theta,2+2\sin\theta,\cos^2\theta).$$

二次柱面(quadric cylinder surface)　一类特殊曲面. 指方程是二次的柱面. 在空间直角坐标系中,方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ x^2=2py$$

的图形分别称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面(如图),统称二次柱面. 它们的母线平行于 z 轴,准线是



在 Oxy 平面上的椭圆、双曲线、抛物线.

椭圆柱面(elliptic cylinder surface)　见"二次柱面".

双曲柱面(hyperbolic cylindrical surface)　见"二次柱面".

抛物柱面(parabolic cylindrical surface)　见"二次柱面".

锥面(conical surface)　一种特殊曲面. 指以顶点作为对称中心的曲面. 由曲线 Γ 的各点与不在 Γ 上的定点 V 连结的直线所构成的曲面. 点 V 称为锥面的顶点. 曲线 Γ 称为锥面的准线或导线,构成锥面的每一根直线称为母线. 在空间仿射坐标系 $Oxyz$ 中,设锥面的准线 Γ 的方程为

$$\begin{cases}F_1(X,Y,Z)=0,\\F_2(X,Y,Z)=0,\end{cases}\tag{1}$$

那么,通过顶点 $V(x_0,y_0,z_0)$ 和准线上任意一点 (X,Y,Z) 的直线(锥面的母线)的方程是

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{Y-y_0}=\frac{z-z_0}{Z-z_0}=\frac{1}{t}.\tag{2}$$

由(1),(2)消去 X,Y,Z 即得锥面的普通方程. 在空间仿射坐标系中,三元的齐次方程 $F(x,y,z)=0$(对于任意正实数 t,有 $F(tx,ty,tz)=t^mF(x,y,z)$),它所表示的曲面(包含原点)一定是以原点为顶点的锥面. 反之顶点位于原点的锥面可以用 x,y,z 的齐次方程表示. 顶点位于 (x_0,y_0,z_0) 的锥面可以用关于 $x-x_0,y-y_0,z-z_0$ 的齐次方程表示. 若锥面的准线方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(u)$,顶点 $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$,则锥面的向量式方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+v\boldsymbol{f}(u)$.

锥面的顶点(vertex of a conical surface)　见"锥面".

锥面的准线(directrix of a conical surface)　见“锥面”.

锥面的母线(generating line of a conical surface)　见“锥面”.

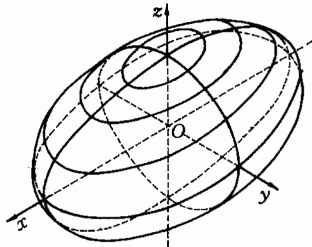
二次锥面(quadric conical surface)　一种特殊的二次曲面. 指方程是二次的锥面. 在空间直角坐标系下,关于 $x-a, y-b, z-c$ 的齐次二次方程所表示的曲面是以(a,b,c)为顶点的二次锥面. 例如,方程 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$ 就表示以原点为顶点的二次锥面,它与平面 $z=1$ 的交线一般是二次曲线,可以作为这锥面的准线.

球面(sphere)　见本卷《立体几何》同名条. 球面是三主轴相等的椭球面. 其方程参见“椭球面”.

椭球面(ellipsoid)　亦称椭圆面. 一种重要的二次曲面. 在空间直角坐标系中,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所确定的曲面称为椭球面,式中 a,b,c 是正的常数. 椭球面关于三个坐标面、三条坐标轴和坐标原点都对称. 两两垂直的三个对称平面和三条对称轴分别称为椭球面的主径面和主轴.



椭球面与主轴的六个交点$(\pm a,0,0)$,$(0,\pm b,0)$,$(0,0,\pm c)$称为椭球面的顶点. 三条主轴上以两个顶点为端点的线段按长短依次称为长轴、中轴和短轴. 三轴长度互不相等的椭球面称为三轴椭球面. 两轴长度相等的椭球面称为旋转椭球面,它又分为长球面($a>b=c$)和扁球面($a=b>c$). 三轴长度相等的椭球面就是球面. 椭球面上与任一主径面平行的截口曲线是一族相似的椭圆(离心率相同). 椭球面的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi\cos\theta, \\ y=b\cos\varphi\sin\theta, \\ z=c\sin\varphi, \end{cases}$$

式中参数 $\theta\in(-\pi,\pi]$,$\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$.

椭圆面(surface of an ellipse)　即“椭球面”.

椭球面的主径面(principal diametral plane of a ellipsoid)　见“椭球面”.

椭球面的主轴(principal axis of a ellipsoid)　见“椭球面”.

椭球面的顶点(vertex of a ellipsoid)　见“椭球面”.

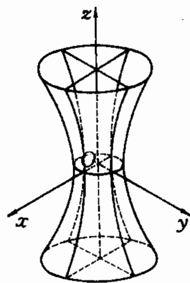
三轴椭球面(three-axes ellipsoid)　见“椭球面”.

旋转椭球面(revolution ellipsoid)　见“椭球面”.

单叶双曲面(hyperboloid of one sheet)　一种重要的二次曲面. 在空间直角坐标系中,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

所确定的曲面称为单叶双曲面,式中 a,b,c 是正的常数. 特别当 $a=b$ 时,称为旋转单叶双曲面. 单叶双曲面关于三个坐标平面、三条坐标轴和坐标原点都对称. 两两垂直的三个对称平面和三条对称轴分别称为单叶双曲面的主径面



和主轴. 单叶双曲面与主轴有四个交点$(\pm a,0,0)$和$(0,\pm b,0)$称为单叶双曲面的顶点. 与 Oxy 坐标面的交线是椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0, \end{cases}$$

称为单叶双曲面的腰椭圆或咽喉椭圆. 单叶双曲面上与腰椭圆平行的截口是一族相似的椭圆. 腰椭圆是这族椭圆中最小的. 单叶双曲面上有两族直母线,同一族的任意两条直母线总异面,异族的两条直母线总共面. 经过单叶双曲面上任意一点,在两族中各有一条直母线. 同一族的任意三条直母线不平行于同一个平面,与任意三条两两异面且不平行同一平面的直线皆相交的所有直线构成一个单叶双曲面. 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

的两族直母线的方程是

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \mu\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} \lambda'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu'\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \mu'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda'\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

式中 λ,μ 及 λ',μ' 是不同时为零的任意一对实数. 单叶双曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sec u\cos v, \\ y=b\sec u\sin v, \\ z=c\tan u. \end{cases}$$

旋转单叶双曲面(hyperboloid of revolution of one sheet)　见“单叶双曲面”.

单叶双曲面的主径面(principal diametral plane of hyperboloid of one sheet)　见“单叶双曲面”.

单叶双曲面的主轴(principal axis of hyperboloid of one sheet)　见“单叶双曲面”.

单叶双曲面的顶点(vertex of hyperboloid of one sheet)　见"单叶双曲面".

单叶双曲面的腰椭圆(central ellipse of hyperboloid of one sheet)　见"单叶双曲面".

双叶双曲面(hyperboloid of two sheets)　一种重要的二次曲面.在空间直角坐标系中,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

所确定的曲面称为双叶双曲面,式中 a,b,c 是正的常数.特别当 $a=b$ 时,称为旋转双叶双曲面.双叶双曲面关于三个坐标平面、三条坐标轴以及坐标原点都对称,两两垂直的三个对称平面和三条对称轴分别称为双叶双曲面的主径面和主轴,双叶双曲面与主轴有两个交点 $(0,0,\pm c)$,称为双叶双曲面的顶点.双叶双曲面的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\tan u\cos v,\\ y=b\tan u\sin v,\\ z=c\sec u.\end{cases}$$

旋转双叶双曲面(hyperboloid of revolution of two sheets)　见"双叶双曲面".

双叶双曲面的主径面(principal diametral plane of hyperboloid of two sheets)　见"双叶双曲面".

双叶双曲面的主轴(principal axis of hyperboloid of two sheets)　见"双叶双曲面".

双叶双曲面的顶点(vertex of hyperboloid of two sheet)　见"双叶双曲面".

双曲面(hyperboloid)　单叶双曲面和双叶双曲面的统称.

双曲面的渐近锥面(asymptotic conical surface of hyperboloid)　刻画双曲面形状的锥面.由经过双曲面中心的双曲面的渐近线所组成的锥面.双曲面族

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=K$$

(参数 $K\neq0$)有共同的渐近锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

蒙日球面(Monge sphere)　与中心二次曲面有关的一个球面.中心二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 的三个两两垂直的切平面的交点轨迹称为蒙日球面.其方程为

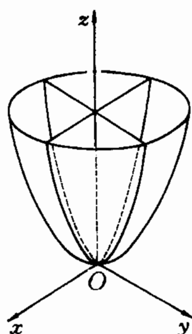
$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

蒙日(Monge,G.)于 1802 年,在巴黎多科工艺学校学报上发表的论文中给出了这个轨迹.

椭圆抛物面(elliptic paraboloid)　一种重要的二次曲面.在空间直角坐标系中,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

所确定的曲面,式中 a,b 是正的常数.特别当 $a=b$ 时,称为旋转抛物面.它常用于微波天线的反射曲面和军事探照灯、汽车前灯的反光镜面.椭圆抛物面关于两个坐标面 Oxy,Oyz 都对称,关于 z 轴也对称.分别称它们为椭圆抛物面的主径面和主轴.与某一主径面平行的截口是全等的抛物线.因此可以把椭圆抛物面看做是平移抛物线,使它的顶点始终位于另一条与它开口方向相同且不共面的抛物线上而产生的.椭圆抛物面的参数方程为



$$x=a(u+v),\ y=b(u-v),\ z=u^2+v^2$$

或 $x=au,\ y=bv,\ z=\dfrac{u^2+v^2}{2}.$

旋转抛物面(paraboloid of revolution)　见"椭圆抛物面".

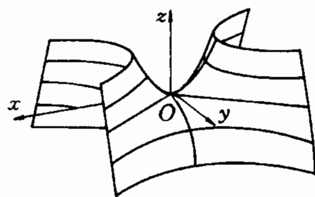
椭圆抛物面的主径面(principal diametral plane of elliptic paraboloid)　见"椭圆抛物面".

椭圆抛物面的主轴(principal axis of elliptic paraboloid)　见"椭圆抛物面".

双曲抛物面(hyperbolic paraboloid)　亦称马鞍面.一种重要的二次曲面.在空间直角坐标系中,由方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

所确定的曲面,称为双曲抛物面.式中 a,b 是正的常数.曲面关于坐标面 Oxy,Oyz 都对称,关于 z 轴也对称,分别称它们为双曲抛物面的主径面和主轴.与某一主径面平行的截口是全等的抛物线.因此,可以把双曲抛物面看做是平移抛物线,使它的顶点始终位于另一条与它开口方向相反且不共面的抛物线上而产生的.双曲抛物面上有两族直母线,同一族的任意两条直母线总异面.异族的两条直母线总相交.经过双曲抛物面上任意一点,在两族中各有一条直母线.同一族的所有直母线都平行于同一个平面.与任意三条两两异面且平行于同一平面的直线皆相交的所有直线构成一个双曲抛物



面.双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

的两族直母线的方程是

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\mu,\\ \mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z,\end{cases}$$

式中 λ,μ 为任意实数.互相垂直的直母线的交点位于平面 $z=(b^2-a^2)/2$ 内.双曲抛物面的参数方程为

$$x=a(u+v),\quad y=b(u-v),\quad z=2uv.$$

马鞍面(hyperbolic paraboloid)　即“双曲抛物面”.

双曲抛物面的主径面(principal diametral plane of hyperbolic paraboloid)　见“双曲抛物面”.

双曲抛物面的主轴(principal axis of hyperbolic paraboloid)　见“双曲抛物面”.

抛物面(paraboloid)　一类重要的二次曲面.即椭圆抛物面与双曲抛物面的统称.

共焦二次曲面族(family of confocal quadric surface)　一个有重要意义的二次曲面族.在空间直角坐标系中,由方程

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1$$

表示的一族有心二次曲面称为共焦二次曲面族,其中 $a>b>c>0$,λ 为参数.当 $\lambda\in(-\infty,c)$时,表示椭球面;当 $\lambda\in(c,b)$时,表示单叶双曲面;当 $\lambda\in(b,a)$时,表示双叶双曲面.作为极限情况的椭圆

$$\frac{x^2}{a-c}+\frac{y^2}{b-c}=1,\quad z=0(\lambda\to c)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{a-b}-\frac{z^2}{b-c}=1,\quad y=0(\lambda\to b)$$

称为这族二次曲面的焦点二次曲线(焦椭圆和焦双曲线).共焦二次曲面族构成正交系.这就是说:过空间各点$(x,y,z)(\neq 0)$必有族中的三个曲面,它们分别是单叶双曲面,双叶双曲面和椭球面.而且它们在这点两两正交(参见“椭球坐标”).

焦点二次曲线(focal conic)　见“共焦二次曲面族”.

旋转曲面(surface of revolution)　一种由旋转而产生的曲面.一平面曲线绕与它共面的直线旋转一周所产生的曲面称为旋转曲面.曲线称为旋转曲面的母线.直线称为旋转轴,或简称轴.旋转曲面被以轴为边界的每个半平面所截得的截线称为经线(或子午线).垂直于旋转轴的每个平面与旋转曲面的交线称为纬线(或纬圆).经线亦可作为旋转曲面的母线.在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,通常取旋转轴作为 z 轴.设这时旋转曲面与 xz 平面相交的经线在平面坐标系 Oxz 中的方程是 $F(x,z)=0$,则旋转曲面的方程就是

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

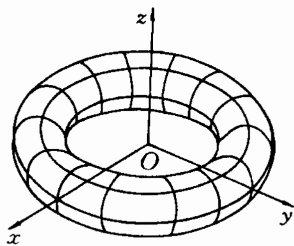
旋转曲面的母线(generating line of surface of revolution)　见“旋转曲面”.

旋转轴(axis of revolution)　见“旋转曲面”.

纬圆(parallel circles)　旋转曲面上的一组圆.指旋转曲面的纬线.见“旋转曲面”.

子午线(meridian)　旋转曲面的经线.见“旋转曲面”.参见本卷《球面几何》同名条.

圆环面(torus)　简称环面,旋转曲面的一种.一个圆 C 以它所在的平面上不与其相交的直线为轴旋转而成的旋转曲面.圆 C 上的点绕轴旋转时生成的圆称为环面的平行圆或纬圆.圆 C 绕轴旋转时的每一位置圆称为环面的子午圆或经圆.圆 C 的中心画出的圆称为环面的基本圆.取旋转轴为 z 轴建立空间直角坐标系,让 x 轴通过圆心,设圆 C 的方程为



$$\begin{cases}(x-c)^2+z^2=r^2,\\ y=0,\end{cases}$$

则圆环面的参数方程为

$$\begin{cases}x=(c+r\cos\theta)\cos\varphi,\\ y=(c+r\cos\theta)\sin\varphi,\\ z=r\sin\theta,\end{cases}$$

普通方程为

$$(x^2+y^2+z^2+c^2-r^2)^2=4c^2(x^2+y^2).$$

圆环面的表面积 $S=4\pi^2rc$.圆环面围成的体积

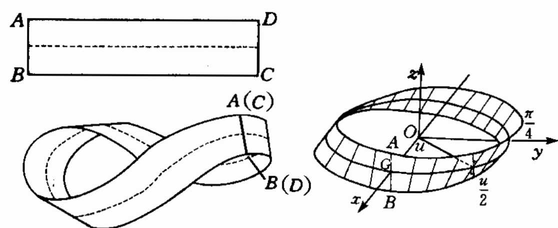
$$V=2\pi^2r^2c.$$

环面(torus)　圆环面的简称.

圆环面的平行圆(parallel circles of torus)　见“圆环面”.

圆环面的基本圆(toroidal fundamental circles)　见“圆环面”.

默比乌斯带(Möbius strip)　最早发现的单侧(有界的)曲面.这个曲面是将长方形 $ABCD$ 的对边 AB 与 CD 扭转粘合(A 与 C 重合,B 与 D 重合)而得到的.如图所示,默比乌斯带也可以看做是将 xOz 坐标面上的线段 $AB(x=a,-b<z<b)$绕 z 轴旋转,同时让线段 AB 绕中点 G 旋转,使得当线段 OG



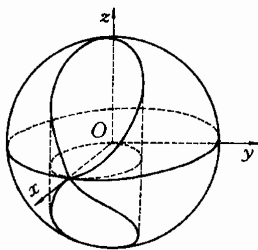
转动了角 u 时，AB 绕中点 G 转动角 $u/2$. 这样当 G 绕 z 轴运动一周时，AB 颠倒了位置，从而画出了默比乌斯带. 其参数方程为

$$\begin{cases} x=\left(a+v\sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u \\ y=\left(a+v\sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u & (0\leqslant u\leqslant 2\pi), \\ z=v\cos\dfrac{u}{2} & (-b\leqslant v\leqslant b). \end{cases}$$

该曲面是默比乌斯(Möbius, A. F.)于 1858 年提出的，故名默比乌斯带.

维维亚尼曲线(Viviani curve)　一种特殊曲线. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2-ax=0$ 的交线. 它的参数方程可写作

$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos^2\theta, a\cos\theta\sin\theta, a\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$.



是由球面上经度与纬度相等或成相反数的点组成的. 维维亚尼(Viviani, V.)在整理和修复佛罗伦萨图书馆所藏的东方学者对阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))所著《圆锥曲线论》第 5 卷的评注时，于 1692 年正式提出了佛罗伦萨之迷：求一个教堂的半球形屋顶的面积，在屋顶的四面挖去相同的圆孔形窗户，此即球面与两个柱面的交线，这个问题曾经引起过许多数学家如约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann I)、沃利斯(Wallis, J.)和洛必达(L'Hospital, G.-F.-A. de)的重视，特别是早在 1689 年，莱布尼茨(Leibniz, G. W.)还从德国到意大利去会见维维亚尼，并用积分法给出此问题的解法.

圆形截线(circular section)　一种特殊截线. 若存在一族平行平面，它们与二次曲面的交线为圆，则称这些交线为圆形截线. 这族平面中若有与曲面相切的，则切点就是二次曲面的圆点. 例如，椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>b>c>0)$$

与两个平面

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2=\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2$$

的交线是两个圆

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)x^2=\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)z^2, \\ x^2+y^2+z^2=b^2.\end{cases}$$

所以，三轴椭球面存在两族平行的圆形截线，有四个圆点. 长球面和扁球面仅有两个圆点，球面上每一点都是圆点. 又如单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>b>0)$$

与两个平面

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2=\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)z^2$$

的交线是圆；双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1(a>b>0)$$

与两个平面

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2=\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)z^2$$

平行的截口也是圆. 因此，它们有且仅有两族平行的圆形截线，双叶双曲面上有四个圆点，单叶双曲面上没有圆点，而当 $a=b$ 时，旋转双曲面上只有一族平行的圆形截线. 再如椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z(设\ a>b>0)$$

与两个平面

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2=\frac{1}{a^2}z^2$$

的交线也是圆，可见它有两族平行的圆形截线，有两个圆点. 而当 $a=b$ 时，旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz$ 上仅有一族平行的圆形截线和一个圆点.

撰　稿　马振江　王汇淳　王琳静　戈静明　左铨如　吕德正　刘增贤　苗济华　贾　遂　徐源富　谢文泉
审　阅　刘增贤　郭卫中　谢文泉　裘光明

初 等 数 论

初等数论(elementary number theory)　数论的基础部分,常限于用初等数学的方法,而不借助于其他数学工具,去研究整数性质.它主要包括:整除理论、不定方程、同余式和连分数等.

早在公元前3世纪的古希腊时代,欧几里得(Euclid)所著《几何原本》一书中就记载了对素数无限性的证明、整数的因数分解、求两个正整数最大公因数的辗转相除法、关于完满数的一个著名定理等.此外,还有埃拉托斯特尼筛法,阿基米德(Archimedes)和丢番图(Diophantus)对不定方程的研究等.在数论发展史上,费马(Fermat,P. de)、高斯(Gauss,C. F.)和狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)等都做出了贡献.

中国古代在初等数论方面也有过光辉的成就,例如勾股定理、孙子定理(国外称为中国剩余定理)与圆周率的计算结果.数论也是中国近代发展得最早的数学分支之一,从20世纪30年代开始,在解析数论、丢番图方程、一致分布等方面都有过贡献.华罗庚在三角和估计与堆垒素数论方面的研究,陈景润对哥德巴赫猜想的研究,都走在数论研究的前沿.在初等数论中,常采用算术推导方法来论证数论命题.往往首先根据一些感性知识,提出某个数学猜想,然后予以证明.若这个猜想为真,即成为数论中的定理;若这个猜想不成立,即被否定.

数论中的猜想都是关于判断某个整数性质的命题,意义常常是浅显易懂的,但其证明却往往非常困难,需要高深的数学工具.例如,哥德巴赫猜想、费马猜想等,具有初中数学知识的读者,都能明白其意义,但是,这些问题却非常难解,几百年来,经过不少数学家的努力都尚未彻底解决.尽管如此,数学家们在这方面的努力不是徒劳的,他们在努力证明猜想的过程中,引入了许多新的数学思想,创造了许多新的方法和概念,发展成新的理论,从而推动了数论以至整个数学科学向前发展.例如,筛法已成为概率统计和组合论的重要方法;研究费马猜想引入的理想数概念已渗入到现代代数、几何和泛函分析等广大的数学领域.另一方面,其他各数学分支的研究成果也促进着数论的发展,法尔廷斯(Faltings,G.)利用代数几何的成就证明了莫德尔(Mordell,L. J.)提出的莫德尔猜想,从而使费马猜想的研究工作前进了一大步.1995年,怀尔斯(Wiles,A.)终于完满地证明了费马猜想.

初等数论是思维的体操,能锻炼人们的抽象思维能力和逻辑思维能力,随着科学技术的发展,在当今计算机时代和信息社会,在计算方法、密码学、组合数学、通信工程、离散控制系统等许多领域都有广泛的应用.所以,初等数论不仅是数学工作者,而且也是许多从事应用和实际工作的工程技术人员所不可缺少的数学知识.

整数的整除性

整除(divisibility)　初等数论的基本概念之一.设a,b为整数,$b\neq0$,如果存在整数c,使得$a=bc$成立,则称b能整除a,记为$b|a$;否则,称b不能整除a,记为$b\nmid a$.当b能整除a时,称b是a的因数(约数或因子),a称为b的倍数.当b是a的因数,且满足$1<b<|a|$时,又称b是a的真因数(或称真约数、真因子).对于任何整数a,都有$(\pm1)|a$,$(\pm a)|a$,即±1,$\pm a$是a的因数.称±1和$\pm a$是a的平凡因数,或称a的当然因数.整除的概念是初等数论的起源与核心内容(参见本卷《算术》中的“带余除法”).

因数(factor)　见“整除”.

约数(divisor)　见“整除”.

因子(factor)　见“整除”.

倍数(multiple)　见“整除”.

真因数(proper factor)　见“整除”.

真约数(proper divisor)　见“整除”.

真因子(proper factor)　见“整除”.

整除的性质(properties of exact division)　关于整除的基本性质,是整除理论的重要内容之一.设a,b,c,d,m,n都是整数,且$a\neq0$,由整除的定义出发,数的整除有如下一些性质:

1. 若$a|b$,则$|a|\,\Big|\,|b|$,从而每个非零整数的因子只有有限多个.
2. 若$a|b$,则$ca|cb$.
3. 若$a|b$,则$a|bc$.
4. 若$a|b$,则$|a|\leqslant|b|$.
5. 若$a|b,c|d$,则$ac|bd$.
6. 若$a|b,b|c$,则$a|c$.
7. 若$a|b,b|a$,则$a=\pm b$.
8. 若$a|b$,且$b\neq0$,则$b/a|b$.
9. 若$a|b,a|c$,则$a|(bm+cn)$.
10. 若$a|b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$,则

$$a\,\Big|\,\sum_{i=1}^{n}(\pm b_i).$$

非负最小剩余(nonnegative least residue) 数论的基本概念之一.设 a,b 是两个整数,其中 $b>0$,则存在两个惟一的整数 q 及 r,使得 $a=bq+r(0\leqslant r<b)$成立.称 q 为 a 被 b 除的不完全商;称 r 为 a 被 b 除的余数,也称 r 为非负最小剩余,记为 $\langle a\rangle_b=r$. 常设 $b>0$. 在不致引起混淆的情况下,$\langle a\rangle_b$ 中的 b 常略去不写. 非负最小剩余有下面的性质(各式中 a_1,a_2,b 都是整数,且 $b>0$,b 略去未写):

1. 两个整数和的非负最小剩余,等于这两个整数各自的非负最小剩余的和的非负最小剩余,即

$$\langle a_1+a_2\rangle=\langle\langle a_1\rangle+\langle a_2\rangle\rangle.$$

2. 两个整数差的非负最小剩余,等于这两个整数各自的非负最小剩余的差的非负最小剩余,即

$$\langle a_1-a_2\rangle=\langle\langle a_1\rangle-\langle a_2\rangle\rangle.$$

3. 两个整数积的非负最小剩余,等于这两个整数各自的非负最小剩余的积的非负最小剩余,即

$$\langle a_1a_2\rangle=\langle\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle\rangle.$$

公因数(common factor) 亦称公约数. 初等数论的基本概念之一. 指能同时整除几个整数的数. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数($n\geqslant 2$),如果正整数 d 是它们中每一个数的因数,即$d\mid a_i(i=1,2,\cdots,n)$,那么 d 就称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公因数. 因为任一个 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$的因数只有有限个,所以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公因数也只有有限个.

最大公因数(greatest common factor) 亦称最大公约数. 一种特殊的公因数. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数($n\geqslant 2$),其公因数中最大的 d 称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数. 最大公因数通常用圆括号表示,记为 $d=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 最大公因数有以下性质:

1. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数,是这组数的其他公因数的倍数.

2. $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=((a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}),a_n)$.

3. 存在整数 s,t,使得$(a,b)=as+bt$ 成立.

4. 如果 a,b 都是大于 1 的正整数,它们的标准分解式分别为 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$. 式中 $p_1<p_2<\cdots<p_s$ 是素数,$\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,s)$为非负整数,则 $(a,b)=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_s^{e_s}$. 式中 $e_i=\min(\alpha_i,\beta_i)$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 这个性质可以推广到有限个正整数的最大公因数的情形.

5. 等式$(a+kb,b)=(a,b)$对于任何整数 a,b,k 成立.

求一组正整数的最大公因数的方法一般有以下三种:

1. 根据上面性质 4 分别写出被求各数的标准分解式,将各分解式中公有的素因数写出,每一素因数都取它在各分解式中的最低次幂,把这些素因数的幂相乘,即得最大公因数.

2. 竖式法. 在可整除所有数的条件下把从小到大的素数依次作除数去除(有时,同一个素数可以除若干次),直到被除数互素时为止,这时将所有除数相乘的积就是最大公因数.

3. 辗转相除法(参见“辗转相除法”). 正整数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公因数还有下面两种记法:G.C.D$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$;G.C.F$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

素数(prime number) 亦称质数. 一类重要的正整数. 指不存在真因数的大于 1 的自然数. 例如 2,3,5,7,11,…就是素数. 在素数中只有惟一的一个偶素数 2,其他都是奇素数. 有真因数的自然数称为复合数,简称合数. 根据以上定义,全体自然数可以分为三类:

1. 1,只有自然数 1 为它的因数.

2. 素数,只有 1 和它本身为因数.

3. 合数,除有 1 和它本身为因数外,还有异于 1 和本身的真因数.

素数有如下一些性质:

1. 如果 a 是一个大于 1 的整数,则 a 的大于 1 的最小因数一定是素数.

2. 每一个复合数 n 至少有一个素因数

$$q\leqslant\sqrt{n}.$$

3. 若 p 是一素数,a 是任一个整数,则 $p\mid a$ 或 $(a,p)=1$,二者必居其一.

4. 设 p 是素数,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$是整数,若

$$p\,\Big|\,\prod_{i=1}^{n}a_i,$$

则 p 至少能整除某一个 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$.

5. 如果 2^m+1 是素数,那么 $m=2^n$. 形如 $F_n=2^{2^n}+1$ 的数称为费马数.

6. 如果 a^p-1 是素数,那么 $a=2$,且 p 为素数. 形如 $M_p=2^p-1$ 的数称为梅森数,当 M_p 是素数时称为梅森素数.

欧几里得(Euclid)在他的《几何原本》中就已证明,素数有无穷多个. 但至今不能写出任意大的素数来,亦找不到一个表达素数的通项公式. 1992 年 3 月,英国数学家在原子能技术研究机构哈韦尔实验所,借助超级计算机得到梅森素数 $M_{756\,839}=2^{756\,839}-1$,这是个有 227 832 位数字的素数.

质数(prime number) 即“素数”.

合数(composite number) 见“素数”.

偶数(even number) 亦称双数. 一类重要的整数. 能被 2 整除的整数称为偶数. 设 n 为整数,偶数用 $2n$ 表示,偶数的和、差、积都是偶数. 2 是惟一的偶素数,其余的偶数都是合数. 任何一个非零正偶数 n,总可以表示为 $n=2^k\times m$,这里 m 是正奇数,k 是非零正整数. 0 是特殊的偶数,它不能表成 $2^k\times m$ 的

形式.任何偶数的平方总能被4整除.

双数(double number) 即"偶数".

偶素数(even prime number) 见"偶数".

奇数(odd number) 亦称单数.一类重要的整数.即不能被2整除的整数.奇数常表示为$2n+1$或$2n-1$,其中n是整数.奇数有下列性质:

1.一个整数的个位数字是奇数,则这个数必为奇数.其逆亦真.

2.两个奇数的和或差必为偶数.

3.两个奇数的乘积仍为奇数.

4.一个奇数与一个偶数的和或差必为奇数.

5.一个奇数与一个偶数的乘积必为偶数.

6.当n为奇数,且$n\geqslant 3$时,$8\mid n^2-1$总能成立.

7.对任意的正整数n,总有:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1), \qquad (1)$$

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \cdots + (n^2 + n - 1). \qquad (2)$$

上面的(1)式说明:任何一个整数n的完全平方数都可表为从数1起的n个连续奇数的和;(2)式说明:任何一个正整数n的完全立方数,都可表为首项为n^2-n+1和末项为n^2+n-1的n个连续奇数的和.

单数(odd number) 即"奇数".

互素(relatively prime) 初等数论的基本概念之一.若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$,则称$a_1,a_2,\cdots,a_n$互素.整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$互素的充分必要条件是:存在整数$t_1,t_2,\cdots,t_n$,使$a_1t_1+a_2t_2+\cdots+a_nt_n=1$.

被2(或5)整除的判别(divisible criterion by 2 (or 5)) 整除的常用判别方法之一.一个整数能被2(或5)整除的充分必要条件是:该数的末位数字能被2(或5)整除.

被3整除的判别(divisible criterion by 3) 整除的常用判别方法之一.一个整数能被3整除的充分必要条件是:该数的各个数位上的数字之和能被3整除.

被11整除的判别(divisible criterion by 11) 整除的常用判别方法之一.一个整数能被11整除的充分必要条件是:该数的奇位上的数字和与偶位上的数字和之差能被11整除.

被7,11,13整除的判别(divisible criterion by 7 or 11 or 13) 整除的常用判别方法之一.一个整数能被7或11或13整除的充分必要条件是:该数的末三位数字所组成的数与其余数字所组成的数之差的绝对值能被7或11或13整除.对很大的数可连续用此法判别,直到最后不超过三位数时为止.

整除的弃尾判别法(divisible criterion for casting out the last digit) 一种整除判别法.适用于与10互素的所有整数.设有正整数$A=10u+v$,b与k互素,于是有:

1.若$b\mid(10k-1)$,则$b\mid A\Leftrightarrow b\mid(u+vk)$.

2.若$b\mid(10k+1)$,则$b\mid A\Leftrightarrow b\mid(u-vk)$.

例如$b=21$,$21\mid(10\times2+1)$,对于$A=882=10\times88+2$,由$21\mid(88-2\times2)$,即$21\mid84$,得$21\mid882$.自然地,称此种判别法为整除的弃尾判别法.

由互素可知,对于与10互素的b,一定存在整数s,t,使得$bs+10t=1$,从而,取k为t或$-t$,即有$b\mid(10k-1)$或$b\mid(10k+1)$,并且b与k互素.特别地,对于异于2,5的素数p,能应用此种判别法.50以内的素数的有关情况,列表如下:

p	k	
3	1	$3\times(-3)+10\times1=1;3\mid(10\times1-1)$
7	2	$7\times3-10\times2=1;7\mid(10\times2+1)$
11	1	$11\times1-10\times1=1;11\mid(10\times1+1)$
13	4	$13\times(-3)+10\times4=1;13\mid(10\times4-1)$
17	5	$17\times3-10\times5=1;17\mid(10\times5+1)$
19	2	$19\times(-1)+10\times2=1;19\mid(10\times2-1)$
23	7	$23\times(-3)+10\times7=1;23\mid(10\times7-1)$
29	3	$29\times(-1)+10\times3=1;29\mid(10\times3-1)$
31	3	$31\times1-10\times3=1;31\mid(10\times3+1)$
37	11	$37\times3-10\times11=1;37\mid(10\times11+1)$
41	4	$41\times1-10\times4=1;41\mid(10\times4+1)$
43	13	$43\times(-3)+10\times13=1;43\mid(10\times13-1)$
47	14	$47\times3-10\times14=1;47\mid(10\times14+1)$

由表得出:对于$p=3$,可以用"弃尾加尾"的口诀来刻画;对于$p=11$,可以用"弃尾减尾"的口诀来刻画;除$p=37,43,47$之外,对于50以内的素数,用弃尾判别法很方便.实际上,对于素数p,若限定$0<k<p/2$,则相应的k是惟一确定的.进而,可以由p的结构来确定k,不必像上面那样用辗转相除法来确定k,有关情况如下表:

p	k	
$10u+1$	u	$p\mid(10k+1)$
$10u+3$	$3u+1$	$p\mid(10k-1)$
$10u+7$	$3u+2$	$p\mid(10k+1)$
$10u+9$	$u+1$	$p\mid(10k-1)$

对于素数$p=67=10\times6+7$,$u=6$,由上表$k=3u+2=20$,$67\mid(10\times20+1)$,若$A=74\ 437=10\times7443+7$,则由$7443-7\times20=7303$,$7303=10\times730+3$,

$730-3\times20=670$ 得，$67|74437$.

弃尾判别法可以发展为更一般的弃末尾 m 位判别法. 对于与 10 互素的任意整数 b，仿照上面的做法，能够具体地设计出弃末尾 m 位判别法. 当 $m=2$ 时，50 以内的素数的情况如下表：

p	k	
3	1	$3\times(-33)+10^2\times1=1;3\mid(10^2\times1-1)$
7	3	$7\times43-10^2\times3=1;7\mid(10^2\times3+1)$
11	1	$11\times(-9)+10^2\times1=1;11\mid(10^2\times1-1)$
13	3	$13\times(-23)+10^2\times3=1;13\mid(10^2\times3-1)$
17	8	$17\times(-47)+10^2\times8=1;17\mid(10^2\times8-1)$
19	4	$19\times(-21)+10^2\times4=1;19\mid(10^2\times4-1)$
23	3	$23\times(-13)+10^2\times3=1;23\mid(10^2\times3-1)$
29	9	$29\times(-31)+10^2\times9=1;29\mid(10^2\times9-1)$
31	9	$31\times(-29)+10^2\times9=1;31\mid(10^2\times9-1)$
37	10	$37\times(-27)+10^2\times10=1;37\mid(10^2\times10-1)$
41	16	$41\times(-39)+10^2\times16=1;41\mid(10^2\times16-1)$
43	3	$43\times7-10^2\times3=1;43\mid(10^2\times3+1)$
47	8	$47\times(-17)+10^2\times8=1;47\mid(10^2\times8-1)$

同样地，可由素数 p 自身结构来确定 k. 例如，取 $m=2$，对于素数 $p=67$，求得 $67\times3-10^2\times2=1$，所以，取 $k=2$，$67\mid(10^2k+1)$，当正整数 $A=74437=10^2\times744+37$时，由 $744-37\times2=670$ 及 $67\mid670$ 得 $67|74437$.

整除的弃末尾 *m* 位判别法(divisible criterion for casting out the last m digits)　见“整除的弃尾判别法”.

整除的分段判别法(divisible criterion with piecewise)　一种整除判别法. 适用于与 10 互素的所有整数. 设有 n 位正整数 $A=a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$，从个位 a_1 开始，由右向左每 h 位分为一段，当 $h\nmid n$ 时，最左边的一段不足 h 位，也视为一段，记 $H_1=a_h\cdots a_2a_1$，$H_2=a_{2h}\cdots a_{h+2}a_{h+1}$，$H_3=a_{3h}\cdots a_{2h+2}a_{2h+1}$，…，于是有：

1. 若 $10^h=lb+1$，则 $b\mid A\Leftrightarrow b\mid(H_1+H_2+H_3+\cdots)$.

2. 若 $10^h=l_1b-1$，则 $b\mid A\Leftrightarrow b\mid((H_1+H_3+\cdots)-(H_2+H_4+\cdots))$.

由 $10=3\times3+1$，得 $3\mid A\Leftrightarrow3\mid(a_1+a_2+\cdots+a_n)$；由 $10=1\times9+1$，得 $9\mid A\Leftrightarrow9\mid(a_1+a_2+\cdots+a_n)$；由 $11=1\times11-1$，得 $11\mid A\Leftrightarrow11\mid((a_1+a_3+\cdots)-(a_2+a_4+\cdots))$，这是三种常见的判别法. 当 $b=21$ 时，由 $10^6=47619\times21+1$，得

$21\mid A\Leftrightarrow21\mid(a_6a_5a_4a_3a_2a_1+a_{12}a_{11}a_{10}a_9a_8a_7+\cdots)$，

由此得出 $21\mid9000012$. 自然地，称此种判别法为整除的分段判别法.

由欧拉定理，对于与 10 互素的 b，上面的 h 一定存在. h 的求法：用 b 对 $10,10^2,\cdots$进行试除，当余数为 1 或 -1 时，即得到 h. 特别地，对于异于 2,5 的素数 p，能应用此种判别法. 50 以内的素数的有关情况，列表如下，其中同余式的模为 p(省略).

p	h	
3	1	$10\equiv1;10=3\times3+1$
7	3	$10^3\equiv-1;10^3=143\times7-1$
11	1	$10\equiv-1;10=1\times11-1$
11	2	$10^2\equiv1;10^2=9\times11+1$
13	3	$10^3\equiv-1;10^3=77\times13-1$
17	8	$10^8\equiv-1;10^8=5882353\times17-1$
19	9	$10^9\equiv-1;10^9=52631579\times19-1$
23	11	$10^{11}\equiv-1;10^{11}=4347826087\times23-1$
29	14	$10^{14}\equiv-1$;略
31	15	$10^{15}\equiv1$;略
37	6	$10^6\equiv1;10^6=27027\times37+1$
41	5	$10^5\equiv1;10^5=2439\times41+1$
43	21	$10^{21}\equiv1$;略
47	23	$10^{23}\equiv-1$;略

被素数整除的割尾判别法(divisible truncated criterion by prime number)　整除的常用判别法之一. 指判断某正整数能否被不小于 7 的素数整除的方法. 以 $a=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$ 表示被检验的数，$p=\overline{p_k\cdots p_0}$是不小于 7 的素数，这个方法就是将判断“是否 $p\mid a$”换成判断“是否 $p\mid a'$”，此处 $a'=\overline{a_n\cdots a_1}+sa_0$，而 s 则是这样来确定的：若 $p_0=1$，则 $s=-(p-1)/10$；若 $p_0=3$，则 $s=(3p+1)/10$；若 $p_0=7$，则 $s=-(3p-1)/10$；若 $p_0=9$，则 $s=(p+1)/10$.

舍九法(rule for casting out the nines)　亦称弃九法. 一种检验整数计算结果是否正确的方法. 它只能用来判定“结果是错误的”. 通常，用它不能判定“结果正确”. 设将整数 $a=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$ 与 $b=\overline{b_mb_{m-1}\cdots b_1b_0}$相乘，相加，或相减后得到的结果是 $ab=c=\overline{c_lc_{l-1}\cdots c_1c_0}$，$a+b=e=\overline{e_ke_{k-1}\cdots e_1e_0}$或 $a-b$

$=\overline{d_rd_{r-1}\cdots d_1d_0}$，那么如果$(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0)(b_m+b_{m-1}+\cdots+b_0)$与$(c_l+c_{l-1}+\cdots+c_1+c_0)$被 9 除的余数不相等，则 $ab=c$ 一定是错误结果. 同样地，由$(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0)+(b_m+b_{m-1}+\cdots+b_0)$与$(e_k+e_{k-1}+\cdots+e_0)$被 9 除的余数不相等，可知 $a+b=e$ 是错的. 对减法结果也可同样检验. 在进行上述检验时，若有某些位的数码是 9，就可以把它删掉，不参加运算.

弃九法(rule for casting out the nines)　即"舍九法".

算术基本定理(fundamental theorem of arithmetic)　亦称整数惟一分解定理. 数论的重要定理之一. 该定理断言：任何一个大于 1 的整数 n 都可以分解成若干个素因数的连乘积，如果不计各个素因数的顺序，那么这种分解是惟一的. 即若 $n>1$，则有

$$n=p_1p_2\cdots p_m, \tag{1}$$

$p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_m$ 皆素数. 上式常简记为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}, \tag{2}$$

其中，$p_1<p_2<\cdots<p_k$ 皆素数，$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,k)$皆正整数. (2) 式称为 n 的标准分解式，又称为质因数分解式、素数幂分解式等. 若(2)式成立，则 n 的任一正因数 d 都可表成

$$d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k} \tag{3}$$

的形式，其中 $\alpha_i\geqslant\beta_i\geqslant0\ (i=1,2,\cdots,k)$. 利用标准分解式(可查素数幂分解表)容易写出任二正整数的最大公因数. 即若有 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}, n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$，其中 $\alpha_i\geqslant0,\beta_i\geqslant0\ (i=1,2,\cdots,k)$，则$(m,n)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$，这里 $r_i=\min(\alpha_i,\beta_i)\ (i=1,2,\cdots,k)$. 把一个给定的充分大的整数分解成它的标准分解式，不仅具有理论意义，而且具有实际应用价值，但这是一个十分困难的工作. 即使借助于电子计算机也要花费惊人的时间. 算术基本定理早在欧几里得(Euclid)的《几何原本》第 9 卷命题 20 中已有陈述. 1801 年，高斯(Gauss，C. F.)又重新提出，并给出证明.

整数惟一分解定理(unique decomposition theorem of integers)　即"算术基本定理".

质因数分解式(prime factor factorization)　见"算术基本定理".

n 的标准分解式(standard factorization of n)　见"算术基本定理".

素数幂分解式(prime power factorization)　见"算术基本定理".

埃拉托斯特尼筛法(Eratosthenes sieve method)　简称埃氏筛法. 最早的一种造素数表的方法. 设有正整数 N，可按下列方法求出一切不超过 N 的素数. 将不超过 N 的一切正整数按大小顺序排列，首先划去 1，第一个留下的是素数 2：1̲，2，3，4，5，6，7，8，9，10，…，N. 其次，从 2 起划去 2 的一切倍数：1̲，2，3，4̸，5，6̸，7，8̸，9，1̸0̸，…，N，第一个留下的是素数 3，然后从 3 起划去 3 的一切倍数：1̲，2，3，4̸，5，6̸，7，8̸，9̸，1̸0̸，…，N. 如此进行，所划去的都是合数，最后留下的总是素数，用这种方法可逐一地把素数找出来，就好像用筛子筛出素数一样. 此法是埃拉托斯特尼(Eratosthenes)最先给出的.

辗转相除法(Euclid algorithm)　亦称欧几里得算法. 一种著名的算法. 它是数论和代数学中求两数(或两式)的最大公约数(或最高公因式)的重要方法，它的理论基础是带余除法. 对任意两个整数 a，$b>0$，重复应用带余除法，得到：

$$\begin{aligned}
&a=bq_1+r_1, 0<r_1<b,\\
&b=r_1q_2+r_2, 0<r_2<r_1,\\
&r_1=r_2q_3+r_3, 0<r_3<r_2,\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n, 0<r_n<r_{n-1},\\
&r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1}, r_{n+1}=0,
\end{aligned}$$

于是$(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=\cdots=(r_{n-1},r_n)=r_n$. 利用这一系列等式可以求出整数 s,t，使得$(a,b)=as+bt$成立. 辗转相除法早在欧几里得(Euclid)的《几何原本》第 9 卷命题 1 中已有陈述(参见本卷《高等代数》同名条).

欧几里得算法(Euclidean algorithm)　即"辗转相除法".

公倍数(common multiple)　初等数论的基本概念之一. 指能被几个数同时整除的数. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数$(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，如果 m 是这 n 个数的公共倍数，即 $a_i\mid m\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 m 称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数. 一组正整数的公倍数有无穷多个.

最小公倍数(least common multiple)　一种特殊的公倍数. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数$(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，它们的公倍数有无穷多个，其中最小的正的公倍数 m，称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数. 最小公倍数通常用方括号表示，记为 $m=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$. 最小公倍数有以下性质：

1. $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数 m，是这组数的其他所有公倍数的真因数.

2. $[a_1,a_2,\cdots,a_n]=[[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}],a_n]$.

3. 在一组正整数中，若最大的那个正整数恰是其余各数的倍数，则该数即为这组数的最小公倍数.

4. 如果一组正整数两两互素，则这组数的乘积就是它们的最小公倍数.

5. 若 a,b 都是正整数，则有 $ab=(a,b)[a,b]$，即两个正整数的乘积等于它们的最大公因数与最小公倍数的乘积，当$(a,b)=1$ 时，有 $ab=[a,b]$.

6. 若 a,b 都是大于 1 的正整数，它们的标准分

解式为 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$，式中 $p_1<p_2<\cdots<p_s$ 是素数，$\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,s)$是非负整数，则 $[a,b]=p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_s^{f_s}$，式中 $f_i=\max(\alpha_i,\beta_i)$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 这一性质可以推广到有限个正整数的最小公倍数的情形. 正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数还可记为$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，L. C. M$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$等.

补因数(complementary factor)　一个数的一组特殊的因数. 设 N,a,b 都是整数，且 $N=ab$，若 a，b 都是 N 的真因数，则称 a,b 关于整数 N 互为补因数. 素数 p 只有平凡因数 p 和 1，不存在真因数，所以素数无补因数. 若 $N=n^2$ 为平方数(n 为整数)，则 n 和它自身关于 N 互为补因数，即是说平方数有相同的补因数.

因数个数的奇偶性(parity of factor numbers)　初等数论的基本概念之一. 即判定一个自然数的因数个数为奇或偶的方法. 设 n 是自然数，$d(n)$表示 n 的不同正因数的个数. 若 $n=ab$，且 a 与 b 是 n 的不同的正因数，则当 $a<\sqrt{n}$ 时，必有 $b>\sqrt{n}$，即 n 的因数中小于 $\sqrt{n}$ 与大于 $\sqrt{n}$ 的正因数总是成对出现的，惟有在 n 是完全平方数时，其因数 $\sqrt{n}$ 是单个的. 结论是：正整数 n 的正因数的个数 $d(n)$为奇数的充分必要条件是：n 是一个完全平方数.

完满数(perfect number)　亦称完美数或完全数. 一种著名的正整数. 当且仅当一个正整数等于除它自身以外的各个正因数之和时，称该数为完满数. n 是完满数的充分必要条件是其正因数和 $\sigma(n)=2n$. 例如 $\sigma(6)=1+2+3+6=12=2\times6$，所以 6 是完满数，它是最小的一个完满数. 公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派曾根据 $\sigma(n)$的值是大于 $2n$、等于 $2n$、小于 $2n$，依次称 n 为丰数(富裕数)、完满数(完美数)、亏数(不足数). 如

$$\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=28,$$
$$\sigma(28)=1+2+4+7+14+28=56,$$
$$\sigma(8)=1+2+4+8=15,$$

因此，12 是丰数，28 是完满数，8 是亏数. 欧几里得(Euclid)的《几何原本》第 9 卷中给出了一个关于完满数的定理，即：若 2^n-1 是素数，那么 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是完满数. 书中证明了：p 和 2^p-1 均为素数时，$2^{p-1}(2^p-1)$是一个偶完满数. 自然数中前 5 个完满数是 6，28，496，8 128，33 550 336. 在古希腊时人们只知道前 4 个完满数. 他们把这些数赋以神秘的色彩，认为这些数反映了宇宙的和谐，只有这些数才是完美的. 在欧几里得 2000 年后，欧拉(Euler，L.)证明了每一个偶完满数 n 都具有欧几里得指出的形状，即 $n=2^{p-1}(2^p-1)$，式中 p 和 2^p-1 均为素数. 1911 年，迪克森(Dickson，L. E.)给出了这个结论的一个简短证明. 由此可见，偶完满数与梅森数 $M_p=2^p-1$ 有着密切的关系. 是否有无数多个偶完满数的问题，归结为是否有无数多个梅森素数的问题，这是数论中尚未解决的问题. 1992 年 3 月，英国数学家在原子能技术研究机构哈韦尔实验所，借助超级计算机得到完满数 $N=2^{756839-1}(2^{756839}-1)$. 这个完满数共有 455 663 位数字. 偶完满数有下面两个性质：

1. 偶完满数必有 $2^{p-1}(2^p-1)$的形式，且 p 和 2^p-1 是素数.

2. 偶完满数的个位数字必定是 6 或 8.

是否存在奇完满数，也是数论中一个著名难题. 人们现在知道的完满数都是偶完满数，还没有找到一个奇完满数，但这并不能说明奇完满数不存在. 1973 年，哈吉斯(Hagis，P.)已证明，要找奇完满数只能在大于 10^{50}的数中去找. 当然，这并不意味着可以找到. 欧拉曾证明过，如果存在奇完满数，它必有 $p^{4a+1}Q^2$ 的形式，式中 p 为奇素数，a,Q 为整数.

近代已将完满数的概念推广到多倍完满数. 对自然数 n，若有 $\sigma(n)=kn(k\geqslant3,k\in\mathbf{N}_+)$，则称 n 为 k 倍完满数. 如 $\sigma(120)=360$，$\sigma(672)=3\times672$，因此 120，672 都是 3 倍完满数. 在 1993 年以前，人们发现了约 700 个多倍完满数，其中最大的为 8 倍完满数. 1994 年，海伦尼乌斯(Helenius)用他编制的计算机程序得到了大批多倍完满数，使已知的多倍完满数骤增至 1228 个. 其中位数最多的是一个有 588 位的 9 倍完满数. 现在已知 3 倍完满数 6 个；4 倍的 36 个；5 倍的 65 个……；8 倍的 400 多个. 还未找到 10 倍以上的完满数，也不知道是否有无穷多个多倍完满数.

完美数(perfect number)　即“完满数”.

完全数(perfect number)　即“完满数”.

多倍完满数(multifold perfect number)　见“完满数”.

丰数(abundant number)　亦称富裕数. 见“完满数”.

亏数(deficient number)　亦称不足数. 见“完满数”.

几乎完满数(almost perfect number)　亦称几乎完美数. 一类丰数. 它是最小丰数，即 $\sigma(n)=2n+1$ 的正整数 n. 即 n 是它的所有真因数的和：$n=\sigma(n)-(1+n)$. 然而，至今还未找到任何一个几乎完满数. 和几乎完满数相对应的是最大亏数，就是使$\sigma(n)=2n-1$ 的正整数 n，容易验证，2 的一切正整数次幂都是这一类数.

几乎完美数(almost perfect number)　即“几乎完满数”.

半完满数(semiperfect number)　几乎完满数

的一种推广.若一个自然数 n 等于它的某些真因子的和,则称 n 为半完满数.例如 $n=12$ 是半完满数,因为 $12=6+4+2$.半完满数不可能是亏数.任何几乎完满数都是半完满数.由于丰数多半是半完满数,例外的情形极为少见,所以丰数中不是半完满数的数被称为怪数.前三个怪数是 70,836 和 4030,但至今尚未发现任何奇数的怪数,爱尔特希(Erdös,P.)曾悬赏求出第一个奇数怪数或者最先证明不存在奇数怪数的人.爱尔特希已经证明有无限多个怪数,并且怪数的序列具有正的施尼雷尔曼密度.这表明了,用怪数来筛自然数,这个筛子要比素数及其他密度为零的序列要密.

怪数(freak number) 见“半完满数”.

过剩数(remainder number) 与完满数有关的一类数.若对自然数 m,n,能满足 $m<n$ 时,都有

$$\frac{\sigma(m)}{m}<\frac{\sigma(n)}{n},$$

就称 n 为过剩数,此处 $\sigma(n)$ 是 n 的所有正因数之和.如果称 $\sigma(n)/n$ 是 n 的相对因数和,则过剩数的相对因数和大于比它小的自然数的相对因数和.例如

$$\frac{\sigma(1)}{1},\ \frac{\sigma(2)}{2},\ \frac{\sigma(3)}{3},\ \frac{\sigma(4)}{4},\ \frac{\sigma(5)}{5}$$

分别为

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{4}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{6}{5},$$

都小于 $\sigma(6)/6=2$,故 6 是过剩数.过剩数这一概念是爱尔特希(Erdös,P.)和阿劳格鲁(Alaoglu,L.)于 1944 年提出的,并由爱尔特希证明了存在无限多的过剩数.

实用数(practical number) 与完满数有关的一类数.设 n 为自然数,如果任何不大于 n 的自然数 k 都是 n 的某些不同的真因数(这里把 1 视为真因数)的和,则称自然数 n 为实用数.容易验证,不大于 6 的任一个自然数,都是 6 中某些不同因数的和(如 $6=1+2+3$;$5=2+3$;…).所以 6 是实用数.可以证明,所有的偶完满数都是实用数.事实上,对于所有的 $n=2,3,4,\cdots$,不论 2^n-1 是否为素数,$2^{n-1}(2^n-1)$都是实用数.因此,实用数有无穷多个.

梅森数(Mersenne numbers) 一种著名的正整数.指形如 2^p-1(p 为素数)的数,记为 M_p.p 为素数是 $M_p=2^p-1$ 为素数的必要条件,但不是充分条件.如果梅森数是素数,则称为梅森素数.迄至 1992 年已发现的梅森素数有 31 个(见附表:“已知的梅森素数及其证明年代”).关于梅森数有下面性质:

1.设 p 是奇素数,素数 $q\mid M_p$,则 q 形如

$$q=2kp+1.$$

2.设 $p=4n+3$ 是一个素数,则 $2p+1=8n+7$ 是一个素数的充分必要条件是 $2p+1\mid M_p$.由此推出 $23\mid M_{11}$,$47\mid M_{23}$,$167\mid M_{83}$等.

3.设 $p\neq q$,则$(M_p,M_q)=M_{(p,q)}=1$.

1640 年,梅森(Mersenne,M.)在一次给友人的信中提出,可能发现了一个构成部分素数的公式 $M_p=2^p-1$(p 为素数),当 $p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$ 时,M_p 都是素数,但并非 p 为素数时 M_p 都是素数,如 $M_{11}=2^{11}-1=2047=23\times89$ 就不是素数.后人发现 $2^{67}-1$ 和 $2^{257}-1$ 也不是素数.他猜想当 p 为更大的素数时,M_p 中可能还有其他的素数,这成为当时数学界的难题,曾在 1644 年的理科杂志《物理数学随感》中两个地方讨论到他提出的这个问题.1878 年,吕卡(Lucas,F.-È.-A.)给出了一个判断 M_p 是否为素数的方法:若有 $\Delta>0$,使勒让德符号

$$\left(\frac{\Delta}{M_p}\right)=-1,$$

且在二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$中有一个单位数 ε 适合 $N(\varepsilon)=-1$,则 M_p 为素数的充分必要条件是

$$\varepsilon^{2^{p-1}}+\bar{\varepsilon}^{2^{p-1}}\equiv0(\bmod M_p),$$

式中 $\bar{\varepsilon}$ 为 ε 的共轭数.后人用此法证明 M_{61},M_{89},M_{107},M_{127}是素数.1930 年,莱默(Lehmer,D. H.)改进吕卡的结果,得到判别法则:设 p 是一个奇素数,定义序列 $L_0=4,\cdots,L_{n+1}=\langle L_n^2-2\rangle_{2^p-1}(n\geqslant0)$,当且仅当 $L_{p-2}=0$ 时,2^p-1 是素数.对于大的 M_p,一般都用这个方法在计算机上进行计算,以判断其是否素数.梅森数与偶完满数密切相关,求偶完满数等价于求梅森数中的素数.因为 2^p-1 这个可构造性的数大大缩小了探寻的范围,现在所知道的大素数都是梅森数.这也是研究梅森数的意义之一.是否有无穷多个 p 使 M_p 为素数,是数论中尚未解决的问题.还有一个未曾解决的猜想是:M_p 无平方因子.1967 年,沃伦(Warren,L. J.)证明了若素数 q 满足 $q^2\mid M_p$,则 $2^{q-1}\equiv1(\bmod q^2)$.1981 年,莱默证明了当 $q<6\cdot10^9$,除素数 $q=1093$ 和 $q=3511$ 外,同余式 $2^{q-1}\equiv1(\bmod q^2)$没有其他的解.表中 $p\geqslant521$ 以后的 M_p 值都是利用电子计算机算出的.1979 年 4 月,美国劳伦斯·利莫费尔实验室的斯洛温斯基(Slowinski,D.)等使用电子计算机 Cray-1 证实了 $2^{44497}-1$ 是素数.这是上表中列出的第 27 个梅森素数.四年后,他们又用 Cray-1 型计算机运算了 5 782 秒后,证实了 $2^{86243}-1$ 是素数.表中第 30 个梅森素数为 $2^{216091}-1$ 的计算,是美国得克萨斯州休斯敦的切夫隆地球科学公司在测试一台超级计算机 Crayx-MP 时发现的.他们用这台计算机运算了 3 个多小时.表中最后一个梅森素数 $2^{756839}-1$,是 1992 年 3

月25日，英国数学家在原子能技术研究机构哈韦尔实验所用超级电子计算机得到的.

已知的梅森素数及其证明年代

序号	p 值	2^p-1	证明年代
1	2	3	古代
2	3	7	古代
3	5	31	古代
4	7	127	古代
5	13	8191	1461
6	17	131071	1588
7	19	524287	1598
8	31	2147483647	1772
9	61	19位	1883
10	89	27位	1911
11	107	33位	1914
12	127	39位	1914
13	521	157位	1952
14	607	183位	1952
15	1279	386位	1952
16	2203	664位	1952
17	2281	687位	1952
18	3217	969位	1957
19	4253	1281位	1961
20	4432	1332位	1961
21	9689	2917位	1963
22	9941	2993位	1963
23	11213	3376位	1963
24	19937	6002位	1971
25	21701	6533位	1978
26	23209	6987位	1979
27	44497	13395位	1979
28?	86243	25962位	1983
29?	123049	39751位	1983
30?	216091	65050位	1985
31?	756839	227832位	1992

到1992年已证实了后四个梅森素数，但并没有确定 $44497<p<756839$ 中，还有没有其他的梅森素数，因此，这后四个梅森素数，只能算作人们已知的第28，29，30，31个，还未能确定它们是否是从小到大的顺序排列的第28，29，30，31个梅森素数. 表中对这四个序号旁记了"?"号. 其实，在1988年已有人利用一台超级计算机 NEC SX－2 发现一个 $p=110503$ 的梅森素数.

梅森素数(Mersenne prime number)　见"梅森数".

吕卡检验法(Lucas test)　见"梅森数".

费马数(Fermat numbers)　一种著名的正整数. 指形如 $2^{2^n}+1(n\geqslant 0)$ 的数. 记为 $F_n=2^{2^n}+1$. 当费马数 F_n 为素数时，称为费马素数. 1640年，费马(Fermat, P. de)发现前5个形如 $2^{2^n}+1$ 的数3，5，17，257，65537全是素数，就猜想数列 $\{F_n\}$ 中的数全为素数. 1732年，欧拉(Euler, L.)发现 $F_5=641\times 6700417$，断定费马的猜想不真. 到20世纪90年代为止，只知道以上5个费马素数，另外还证明了在 $5\leqslant n\leqslant 1945$ 中，至少有48个 n 所对应的 F_n 是合数：

1. 当 $n=5,6,7$ 时，得到 F_n 的标准分解式.

2. 当 $n=8,9,10,11,12,13,15,16,18,19,21,23,25,26,27,30,32,36,38,39,42,52,55,58,63,73,77,81,117,125,144,150,207,226,228,250,267,268,284,316,452,556,744,1945$ 时，只知道 F_n 的部分素因数.

3. 当 $n=14$ 时，只知道 F_{14} 是合数，但是它的任何素因数都不知道.

此外，当 $n=17,20,22,24,\cdots$ 时，还不知道 F_n 是素数还是复合数，其证明方法通常用的是吕卡定理和佩宾检验法. 在费马数列中是否有无数多个费马素数，或是有无数多个费马合数，都是尚未解决的问题. 还有一个未解决的猜想：费马数无平方因数.

费马数有如下性质：

1. 当整数 $k>0$ 时，有 $(F_n,F_{n+k})=1$.

2. 设 $n>0$，F_n 是素数的充分必要条件是

$$3^{(F_n-1)/2}\equiv -1\pmod{F_n}.$$

3. 设 $n>1$，F_n 的每一个素因数形如

$$t\cdot 2^{n+2}+1, t>0.$$

费马数与正 n 边形的几何作图问题有密切的关系. 1801年，高斯(Gauss, C. F.)证明了，当 $n=2^m(m\geqslant 2)$ 或 $n=2^k\cdot F_{n_1}\cdot F_{n_2}\cdot F_{n_3}\cdot\cdots\cdot F_{n_s}(0\leqslant n_1<n_2<n_3<\cdots<n_s,s\geqslant 1,k\geqslant 0)$，$F_{n_i}(i=1,2,3,\cdots,s)$ 都是费马素数时，正 n 边形可用圆规和直尺来作图. 近年来，费马数在数字信号处理中得到应用. 又费马数在数论变换中有用.

费马素数(Fermat prime number)　见"费马数".

佩宾检验法(Pepin test)　吕卡检验法的一种

改进.检验费马数是素数或合数的方法.费马数 $F_n=2^{2^n}+1$ 是素数的充分必要条件是

$$F_n \mid (3^{2^{(2^n-1)}}+1).$$

例如 F_{1945} 是一个 580 多位的大整数,要直接判定它是素数或是合数很困难,通过证明

$$F_{1945} \nmid (3^{2^{(2^{1945}-1)}}+1)$$

来判定就比较容易.

吕卡定理(Lucas theorem) 初等数论的一个重要定理.该定理断言:F_n 的每一个因子都是形如 $2^{n+2}k+1(k\in \mathrm{N})$ 的数.即 F_n 的因子都是下列算术数列的某些项:$1\cdot 2^{n+2}+1, 2\cdot 2^{n+2}+1, 3\cdot 2^{n+2}+1, \cdots$ 1957 年,鲁宾孙(Robinson, R. M.)发现

$$(5\cdot 2^{1945+2}+1) \mid F_{1945}.$$

这样,既证明了 F_{1945} 是合数,又给出了 F_{1945} 的一个正因数.

亲和数(amicable number) 亦称互完数.一类著名的正整数.它与完满数有密切关系.如果正整数 m 的小于自身的因数之和等于 n,而 n 的小于自身的因数之和又等于 m,则称 m,n 为一对亲和数.即亲和数是 $\sigma(n)-n=m$ 和 $\sigma(m)-m=n$ 同时成立的两个数 m,n.例如:

$$\sigma(220)-220=(1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110+220)-220=284;$$

$$\sigma(284)-284=(1+2+4+71+142+284)-284=220.$$

所以 220 和 284 是亲和数.这对亲和数是毕达哥拉斯(Pythagoras)提出来的.第二对亲和数 17296 和 18416 是 1636 年费马(Fermat, P. de)提出来的.第三对亲和数 9363584 和 9437056 是 1638 年笛卡儿(Descartes, R.)发现的.1750 年,欧拉(Euler, L.)比较系统地研究了亲和数后,提出了 61 对亲和数.有一对较小的亲和数 1184 与 1210,在 1866 年才被发现.已知的一对最大的亲和数是:

$$m=3^4\cdot 5\cdot 11\cdot 5281^{19}\cdot 29\cdot 89(2\cdot 1291\cdot 5281^{19}-1),$$

$$n=3^4\cdot 5\cdot 11\cdot 5281^{19}(2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 1291\cdot 5281^{19}-1).$$

它们各是 152 位的数.亲和数的性质有:

1. m,n 是亲和数的充分必要条件是

$$\sigma(m)=\sigma(n)=m+n.$$

2. 若 m,n 为亲和数,则

$$\sum_{d\mid m} d=\sum_{d\mid n} d=m+n$$

及

$$\left(\sum_{d\mid m}\frac{1}{d}\right)^{-1}+\left(\sum_{d\mid n}\frac{1}{d}\right)^{-1}=1.$$

3. 若 m,n 是亲和数,则 m,n 都不是素数.

4. 若 p^c 是一对亲和数中之一个数,则有

$$\sigma(p^c)=\sigma\left(\frac{p^c-1}{p-1}\right).$$

5. p^2 决不会是一对亲和数中之一数.

求亲和数有如下公式:设 A,B 互为亲和数,则 $A=2^{n+1}d$;$B=2^{n+1}bc$.式中 n 为自然数,而 b,c,d 之值为 $b=3\times 2^n-1, c=6\times 2^n-1, d=18\times 2^{2n}-1$,且 b,c,d 同为素数.

互完数(amicable number) 即"亲和数".

形数(figurate number) 亦称拟形数、垛积数.一种与图形有关的数.古希腊毕达哥拉斯学派在研究数论时非常注意形与数的关系.形数便是数与形相结合的一种概念.他们用点子排成三角形、正方形、五边形……(图 1).每个图形的点数分别称为三角形数、四边形数、五边形数……除三角形数外,其余的统称多角形数(简称多角数).即满足递推关系

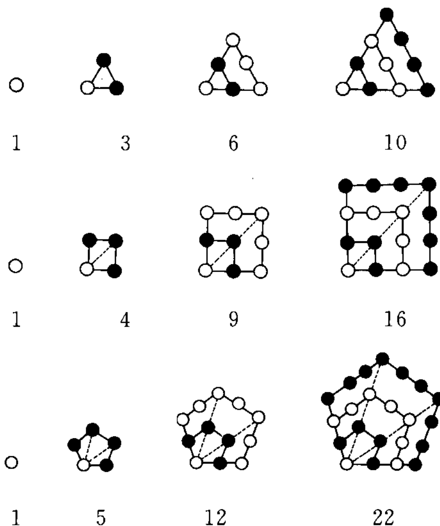
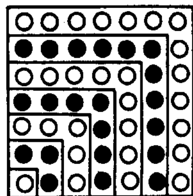
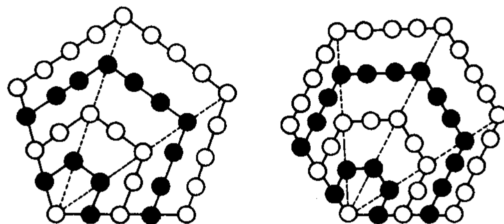


图 1


图 2


图 3

$$a_1=1, a_{n+1}-a_n=(m-2)n+1 \quad (m,n\in N, m>2)$$

的数列 $\{a_n\}$ 中的数.$\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{2}[(m-2)n^2-(m-4)n] \ (n\in N).$$

序号	边数	中间参数	阶数 r									
	n	$s=n-2$	1	2	3	4	5	6	7	8	…	r
三角数	3	1	1	3	6	10	15	21	28	36	…	$r(r+1)/2$
四角数	4	2	1	4	9	16	25	36	49	64	…	r^2
五角数	5	3	1	5	12	22	35	51	70	92	…	$r(3r-1)/2$
六角数	6	4	1	6	15	28	45	66	91	120	…	$r(2r-1)$
七角数	7	5	1	7	18	34	55	81	112	148	…	$r(5r-3)/2$
八角数	8	6	1	8	21	40	65	96	133	176	…	$r(3r-2)$
九角数	9	7	1	9	24	46	75	111	154	204	…	$r(7r-5)/2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n角数	n	$n-2$	1	n	$3(n-1)$	$2(3n-4)$	$5(2n-3)$	$3(5n-8)$	$7(3n-5)$	$4(7n-12)$	⋮	$\left(\frac{r}{2}\right)[(r-1)n-2(r-2)]$*

*在用 r,s 表达时，这个等式应是 $p_n^r=r(rs-s+2)/2$，其中 $s=n-2$

当 $m=3,4,5,\cdots$ 时，按图形每边点数递增排列分别得到：

三角数数列$\{1,3,6,10,15,21,\cdots\}$；

四角数数列$\{1,4,9,16,25,36,\cdots\}$；

五角数数列$\{1,5,12,22,35,51,\cdots\}$；

…………

一般地，当 $m>k$ 时，可得 k 角形数的数列为 $1,k,3(k-1),2(3k-4),5(2k-3),3(5k-8),\cdots$ 从图 2 可看出，从 1 开始连续奇数之和是一个平方数：$1+3+5+7+9+11+13=7^2$，做出平方数 n^2 后，再镶上一个磬折形(亦称曲尺形、拐尺形 gnomon，此字来自伊奥尼亚学派)的边，其中点数是 $2n+1$，就得出下一个平方数：

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

形数 $2n+1$ 称为磬折形数，又称曲尺形数、拐尺形数等. 用点子排出五角数和六角数，每边点数为 n(图 3)，相应的磬折形(推广)数是 $3n-2$ 和 $4n-3$. 对三角数来说，磬折形(推广，只是一条边，对 n 阶三角数，边中点数是 $n+1$)数是 $n+1$. 将磬折形数按所对应的多角数种类及多角数每边点数排列起来形成磬折形数数列. 三角数、四角数、五角数、六角数……的磬折形(推广)数数列是：$\{2,3,4,5,\cdots\}$，$\{3,5,7,9,\cdots\}$，$\{4,7,10,13,\cdots\}$，$\{5,9,13,17,\cdots\}$，…，即分别由 $2,3,4,5,\cdots$ 开始，以 $1,2,3,4,\cdots$ 为公差的等差数列. n 角数所对应的磬折形(推广)数数列是 $\{(n-1),(n-1)+s,(n-1)+2s,\cdots\}$，其中 $s=n-2$，因此，可计算出 n 角数的第 r 个数 p_n^r，人们称 r 为阶数. 上表是计算结果及公式. 古希腊人已得出有关多角形数的一些定理(由几何方法证明)：

1. 任一平方数都是二相继三角形数之和，即

$$n^2=\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{2}n(n+1).$$

2. 从 1 开始，任意 n 个从 1 开始的奇数之和是完全平方数，即 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

3. 一个五角形数可表为同阶四角形数与前一阶三角形数之和：$p_5^r=p_4^r+p_3^{r-1}$.

4. 首项为 $a_1=1$，公差为 $d=k(k=1,2,3,\cdots)$ 的等差数列$\{a_n\}$是 $k+2$ 角形数的导出数列，称为 k 阶多角形数的导数列. 导数列的公差为 $1,2,3,\cdots$，可分别导出三角数数列、四角数数列、五角数数列……导数列的公差为 k 时，可导出 $k+2$ 角形数.

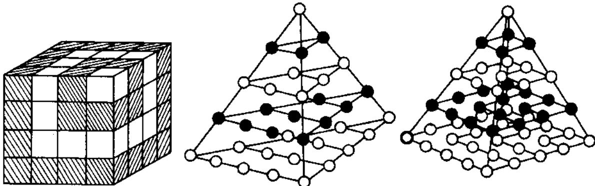
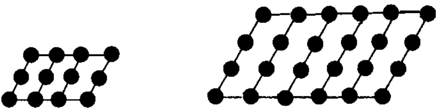


图 4



$n(n+1)$　　　$n(n+2)$

图 5

1636 年，费马(Fermat, P. de)提出：每一正整数可以用 m 个 m 阶多角形数之和来表示，但未给出证明；1798 年，勒让德(Legendre, A.-M.)证明了 $m=3$ 的情形；1772 年，拉格朗日(Lagrange, J.-L.)证明了 $m=4$ 的情形；1813 年，柯西(Cauchy, A.-L.)证明了一般情形.

除了多角数外，毕达哥拉斯学派还研究了立方数、棱锥数(图 4)及形如$n(n+m)(m\geqslant 1)$的长方数(图 5)，并发现立方数与三角数有联系：从 1 开始的连续 r 个立方数之和必等于第 r 个三角数的平方. 即

$$1^3+2^3+\cdots+r^3=[r(r+1)/2]^2=(1+2+\cdots+r)^2.$$

拟形数(figurate number)　见“形数”.

垛积数(stacks number)　见“形数”.

磬折形(gnomon)　见“形数”.

磬折形数(gnomonnumber)　见“形数”.

磬折形(推广)数数列(series of gnomonic number extended)　见“形数”.

多角形数的导数列(derivative row of polygonal numbers)　见“形数”.

(k 阶)多角数的导数列(derivative row of polygonal numbers (of k-th order))　见“形数”.

立方数(cubic number)　见“形数”.

棱锥数(pyramidal number)　见“形数”.

长方数(oblong number)　见“形数”.

三角形数(triangular numbers)　简称三角数. 常见的形数之一. 指满足递推关系

$$a_1=1, a_{n+1}-a_n=n+1(n\geqslant 1)$$

的数列$\{a_n\}$中的数. 数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1).$$

当 $n=1,2,3,\cdots$时，可得三角形数：1，3，6，…. 古希腊的毕达哥拉斯学派在数论方面非常注意数与图形的关系，曾经研究过三角形数. 他们把整数看成沙粒、小石块，排成图形如图 1，并称之为三角形数之图. 又如图 2，在$\triangle ABC$ 的顶角 A 两边 AB，AC 的延长线上，分别截 AB，AC 的 2 倍，3 倍，4 倍……所得各分点依次为 $B_1,B_2,\cdots,B_i,\cdots$；$C_1,C_2,\cdots,C_i,\cdots$，并将相应的分点连结成诸三角形 AB_1C_1，AB_2C_2，…，AB_iC_i，…，皆与原三角形 ABC 相似，再在 B_iC_i 边上加上 i 个($i+1$ 等分)点，此图称为三角形数之形. 图 2 中的点 A 所含的点数 1，称为第一个三角形数；$\triangle ABC$ 中所含点数 3，称为第二个三角形数……$\triangle AB_iC_i$ 中所含点数$(i+2)(i+3)/2$ 称为第 $i+2$ 个三角形数.

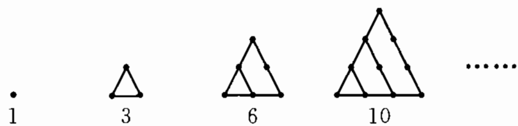


图1

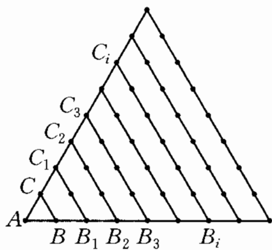


图2

三角数(triangular numbers)　三角形数的简称.

四角形数(quadrangular numbers)　亦称正方形数，或称平方数. 常见的形数之一. 指满足递推关系 $a_1=1, a_{n+1}-a_n=2n+1(n\geqslant 1)$的数列$\{a_n\}$中的数. $\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2$. 当 $n=1,2,3,4,5,6,\cdots$时，可得四角形数：1，4，9，16，25，36，…，古希腊的毕达哥拉斯学派曾经研究过四角形数，并把上面的图 1 称为四角形数之图. 又，在如图 2□$ABCD$ 的边 AB，AD 的延长线上，分别截 AB，AD 的 2 倍，3 倍，4 倍……所得各分点依次为 $B_1,B_2,\cdots,B_i,\cdots$ 和 $D_1,D_2,\cdots,D_i,\cdots$，作诸正方形 $AB_1C_1D_1$，$AB_2C_2D_2$，…，$AB_iC_iD_i$，…，并在 B_iC_i 和 C_iD_i 边内各加上 i 个($i+1$ 等分)点，此图称为四角形数之形. 图 2 中的点 A 所含的点数 1，称为第一个四角形数；正方形 $ABCD$ 所含的点数 4，称为第二个四角形数……正方形 $AB_iC_iD_i$ 内所含点数$(i+2)^2$，称为第 $i+2$ 个四角形数. 由此可几何地证明下面两个定理：

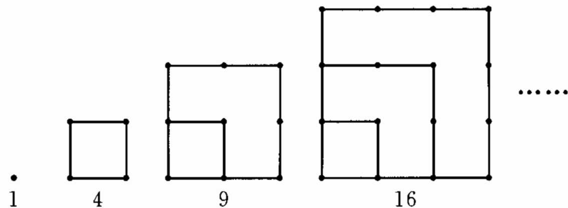


图1

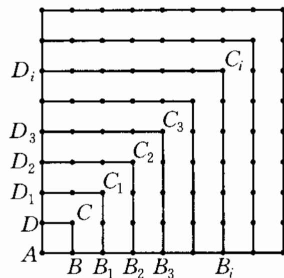


图2

1. 任何一个正方形数都是两个相继的三角形数之和，即

$$S_n=n^2=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}(n-1)n.$$

2. 从 1 开始，任何 n 个相继的奇数之和是完全平方数，即 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

正方形数(quadrangular numbers)　即“四角形数”.

平方数(square number)　即“四角形数”.

五角形数(pentagonal number)　简称五角数. 常见的形数之一. 指满足递推关系

$$a_1=1, a_{n+1}-a_n=3n+1$$

的数列$\{a_n\}$中的数. $\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{2}(3n^2-n)=\frac{1}{2}n(3n-1).$$

当 $n=1,2,3,4,5,6,7,\cdots$时，可得五角形数：1，5，12，22，35，51，70，…，古希腊的毕达哥拉斯学派曾经研究过五角形数，并把下面的图 1 称为五角形数之图. 又，

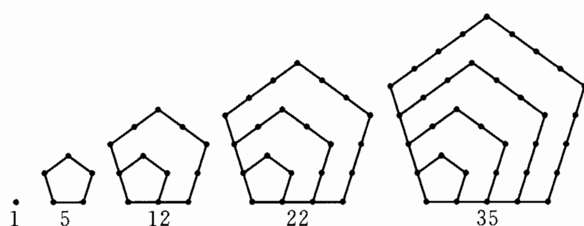


图1

如图 2,从⬠$ABCDE$ 的顶角 A 出发,在 AB,AC,AD,AE 的延长线上,分别截取它们的 2 倍,3 倍,4 倍……所得各分点依次为 $B_1,B_2,\cdots,B_i,\cdots$;$C_1,C_2,\cdots,C_i,\cdots$;$D_1,D_2,\cdots,D_i,\cdots$;$E_1,E_2,\cdots,E_i,\cdots$ 连结相应各分点得诸五边形 $AB_1C_1D_1E_1$,$AB_2C_2D_2E_2$,$\cdots$,$AB_iC_iD_iE_i$,$\cdots$,并在 B_iC_i,C_iD_i,D_iE_i 各边内加上 i 个($i+1$ 等分)点,此图称为五角形数之形.图 2 中的点 A 所含的点数 1,称为第一个五角形数;五边形 $ABCDE$ 中所含点数 5,称为第二个五角形数……五边形 $AB_iC_iD_iE_i$ 中所含点数$(i+2)(3i+5)/2$,称为第 $i+2$ 个五角形数.由此可几何地证明下面定理:第 n 个五边形数等于第$(n+1)$个三角形数的 3 倍加上 n,即

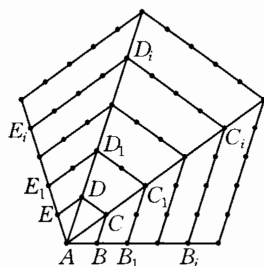


图2

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}.$$

五角数(pentagonal number)　五角形数的简称.

抽屉原理(drawer principle)　亦称鸽舍原理或狄利克雷原理.数学的重要原理之一.可表述为:假如有 $n+1$(或更多)个物体装入 n 个盒子里,那么一定有某个盒子至少装有两个物体.抽屉原理还可表述为:

1.把 m 个元素按照任一确定的方式分成 n 个集合,如果 $m=nq+r$,$0<r<n<m$,那么其中至少有一个集合里的元素要多于 q 个;如果 $m=nq$,那么至少有一个集合里的元素不少于 q 个.

2.把无穷多个元素,按照任一确定的方式分成有限个集合,那么其中至少有一个集合里含有无限个元素.

3.平面上有 n 个面块,面积分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,把它们放进一个面积为 A 的区域里,如果

$$\sum_{i=1}^{n}A_i>A,$$

则 n 个面块中至少有两个要重叠一部分,亦即 A 中存在同时被这 n 个面块中至少两个覆盖的点;如果

$$\sum_{i=1}^{n}A_i<A,$$

则 A 中至少有一个点不被 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任何一个覆盖.

上面对抽屉原理的第 3 条表述,又称为重叠原理.抽屉原理在数论和组合理论中有许多应用,它常用于证明离散情形的一些结论,但重叠原理常用于连续情形的结论.对抽屉原理的应用,有如下一些结论:

1.在不超过 $2n$ 的任意 $n+1$ 个正整数中,至少有一个被另一个整除.即若 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}\leqslant 2n$,则有 $1\leqslant i<j\leqslant n+1$,使得 $a_i|a_j$.

2.若正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的某种排列,$2\nmid n$,则乘积$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$是偶数.

3.设 $1\leqslant m<n$,联立方程组

$$\begin{cases}L_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ L_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ L_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}$$

其中 $a_{jk}(j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n)$为整数,存在解向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq\mathbf{0}$,且满足

$$|x_k|\leqslant(A_1,A_2,\cdots,A_m)^{\frac{m}{n-m}}\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

这里 $A_j=|a_{j_1}|+|a_{j_2}|+\cdots+|a_{j_n}|(j=1,2,\cdots,m)$.

上面第一个结论是 1935 年爱尔特希(Erdös,P.)提出,并由莱默(Lehmer,D. H.)证明的.抽屉原理由狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)于 19 世纪最先提出并应用.

鸽舍原理(pigeonhole principle)　即"抽屉原理".

狄利克雷原理(Dirichlet principle)　即"抽屉原理".

同　余　式

同余(congruence)　数论的基本概念之一.设 m 是给定的一个正整数,a,b 是整数,若满足 $m|(a-b)$,则称 a 与 b 对模 m 同余,记为 $a\equiv b(\bmod m)$,或记为 $a\equiv b(m)$.这个式子称为模 m 的同余式.若 $m\nmid(a-b)$,则称 a,b 对模 m 不同余,记为 $a\not\equiv b(\bmod m)$,或记为 $a\not\equiv b(m)$.同余概念又常表达为:

1.$a=b+km(k\in\mathbf{Z})$.

2.a 和 b 被 m 除时有相同的余数.

同余式的记号由高斯(Gauss,C. F.)于 1800 年首创,发表在他的数论专著《算术研究》之中.

同余式(congruence)　见"同余".

同余的基本性质(fundamental properties of congruences)　同余理论的重要内容之一.关于同余的基本性质,可分为如下三类:

1. 同余是一种等价关系，即具有自反性、对称性和传递性.

2. 同余有四个与等式相类似的性质：

1）如果 a_1,b_1,a_2,b_2 都是整数，而 m 是正整数，则当 $a_1\equiv b_1(\bmod m)$，$a_2\equiv b_2(\bmod m)$都成立时，有 $a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2(\bmod m)$.

2）如果 a_1,b_1,a_2,b_2 都是整数，而 m 是正整数，则当 $a_1\equiv b_1(\bmod m)$，$a_2\equiv b_2(\bmod m)$都成立时，有 $a_1a_2\equiv b_1b_2(\bmod m)$.

3）如果 a,b,c 都是整数，而 m 是正整数，则当 $a+b\equiv c(\bmod m)$时，有 $a\equiv c-b(\bmod m)$.

4）如果 a,b,c,d 都是整数，而 m 是正整数，则当 $c\equiv d(\bmod m)$，$(c,m)=1$ 时，$ac\equiv bd(\bmod m)$与 $a\equiv b(\bmod m)$等价. 一般地，若 $A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k}$，$B_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k}$，$\alpha_i$，$x_i$，$y_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$都是整数，m,k 都是正整数，则当

$$A_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}\equiv B_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}(\bmod m),\ x_i\equiv y_i(\bmod m),$$

$1\leqslant i\leqslant k$ 时，有

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k} A_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k} \equiv \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k} B_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k}y_1^{\alpha_1}y_2^{\alpha_2}\cdots y_k^{\alpha_k}(\bmod m).$$

特别地，若 a_i,b_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$和 x,y 都是整数，且 $a_i\equiv b_i$ $(\bmod m)$，$x\equiv y(\bmod m)$，则有

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \equiv b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y_1+b_0(\bmod m).$$

3. 同余有五个与等式不相似的性质：

1）如果 a,b 都是整数，而 k,m 是正整数，则当 $a\equiv b(\bmod m)$成立时，有 $ak\equiv bk(\bmod mk)$.

2）如果 a,b 都是整数，d,m 是正整数，d 是 a,b 及 m 的任一公因数，则当 $a\equiv b(\bmod m)$成立时，有 $a/d\equiv b/d(\bmod m/d)$.

3）如果 a,b 都是整数，d,m 是正整数，且 $d|m$，则当 $a\equiv b(\bmod m)$成立时，有 $a\equiv b(\bmod d)$.

4）如果 a,b 都是整数，m_i 是正整数，则 $a\equiv b(\bmod m_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$时，有

$$a\equiv b(\bmod [m_1,m_2,\cdots,m_i]).$$

5）如果 a,b 都是整数，而 d,m 是正整数，则当 $a\equiv b(\bmod m)$成立时，有$(a,m)=(b,m)$，若 d 能整除 m 及 a,b 中的一个，则 d 必能整除 a,b 中的另一个.

剩余类(residue class)　亦称同余类. 数论的基本概念之一. 指全体整数按照对一个正整数的同余关系而分成的类. 设 m 是给定的正整数，以 $C_r(r=0,1,\cdots,m-1)$表示所有形如 $qm+r$ 的整数组成的集合，其中 $q=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则 $C_0,C_1,\cdots,C_{m-1}$称为模 m 的剩余类. 模 m 的剩余类具有性质：

1. 每一个整数恰包含在某一个类 C_j 里$(0\leqslant j\leqslant m-1)$.

2. 两个整数 x,y 属于同一类的充分必要条件是 $x\equiv y(\bmod m)$.

全体整数可分为 m 个互不相交的模 m 的剩余类，这样的 m 个集 $C_0,C_1,\cdots,C_r,\cdots,C_{m-1}$的具体分类是：$C_r=\{r\}$类：$\cdots,-2m+r,-m+r,r,m+r,2m+r,\cdots,lm+r,\cdots(0\leqslant r\leqslant m-1)$. 如果某个剩余类中的数和模 m 是互素的，则称该剩余数为 m 的一个互素剩余类，或称模 m 的缩同余类. 显然，在剩余类 $C_r(0\leqslant r\leqslant m-1)$中，只要有一个整数与 m 互素，其余的整数均与 m 互素. 全体与 m 互素的整数可以分为 $\varphi(m)$个互不相交的模 m 的互素剩余类 C_r，这里 $\varphi(m)$是欧拉函数，$C_r(0\leqslant r\leqslant m-1,(r,m)=1)$由所有形如 $lm+r(l=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的整数组成. 剩余类这个概念在抽象代数里有应用，如群论中的陪集、环论中的剩余类环等理论都是在此基础上建立的. 模 m 的剩余类之间可以定义运算. 在任给的模 m 的两个剩余类 C_i,C_j 中各取一代表 i,j，并且记 $i+j$ 或 $i\cdot j$，所在的剩余类为 $C_{\langle i+j\rangle}$ 或 $C_{\langle i\cdot j\rangle}$，则 $C_{\langle i+j\rangle}$ 或 $C_{\langle i\cdot j\rangle}$仅与 C_i,C_j 有关，而与所选择之代表无关，故可定义 C_i,C_j 之间的加法$\oplus$和乘法$\odot$为 $C_i\oplus C_j=C_{\langle i+j\rangle}$，$C_i\odot C_j=C_{\langle i\cdot j\rangle}$，$C_0,C_1,\cdots,C_{m-1}$对上述加法和乘法成环，称为模 m 剩余类环，记为 $\mathbf{Z}_m$. 在模 m 剩余类之间定义的这些运算和整数运算一样，满足通常的那些结合律、交换律与分配律. 模 m 的剩余类环给出了有限环的例子.

同余类(congruence class)　即“剩余类”.

互素剩余类(coprime classes of residues)　见“剩余类”.

缩同余类(reduced congruence class)　见“剩余类”.

完全剩余系(complete system of residues)　简称完系. 数论的基本概念之一. 它是由剩余类产生的一组数. 在模 m 的剩余类 $C_0,C_1,\cdots,C_{m-1}$中各取一数 $a_j\in C_j(j=0,1,\cdots,m-1)$，此 m 个数 $a_0,a_1,\cdots,a_{m-1}$称为模 m 的一组完全剩余系. m 个整数构成模 m 的一组完全剩余系的充分必要条件是它们对模 m 两两不同余. 模 m 的完全剩余系有无穷多组. 例如，下列序列：

$0,1,2,\cdots,m-1$；

$0,m+1,\cdots,am+a,\cdots,(m-1)m+m-1$；

$0,-m+1,\cdots,(-1)^am+a,\cdots,$
$(-1)^{m-1}m+m-1$

都是模 m 的完全剩余系. 当 m 是偶数时，序列

$$-\frac{m}{2},-\frac{m}{2}+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{m}{2}-1$$

与 $-\frac{m}{2}+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{m}{2}-1,\frac{m}{2}$

都是模 m 的完全剩余系；当 m 是奇数时，序列

$$-\frac{m-1}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{m-1}{2}$$

是模 m 的完全剩余系.完全剩余系的一般形式为 $a_r=q_rm+r,0\leqslant r\leqslant m-1$.当 $q_r=0$ 时,得到 $0,1,2,\cdots,m-1$ 称为模 m 的最小非负完全剩余系,简称最小非负完系.当 $[m/2]>r\geqslant 0$ 时,取 $q_r=0$;当 $m-1\geqslant r\geqslant[m/2]$ 时,取 $q_r=-1$,这样得到的完系称为模 m 的绝对最小完全剩余系,简称绝对最小完系.当 m 为偶数或奇数时,其绝对最小完系分别为

$$-\frac{m}{2},-\frac{m}{2}+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{m}{2}-1$$

及 $$-\frac{m-1}{2},\cdots,-1,0,1,\cdots,\frac{m-1}{2}.$$

完全剩余系有如下性质:

1.设 m 是正整数,$(a,m)=1$,b 是任意整数,若 x 通过模 m 的一个完全剩余系,则 $ax+b$ 也通过模 m 的完全剩余系.

2.若 $(m_1,m_2)=1$,x_1,x_2 分别通过模 m_1,m_2 的完全剩余系时,$m_2x_1+m_1x_2$ 通过模 m_1m_2 的完全剩余系.

3.若 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 为两两互素的正整数,$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 分别通过模 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的完全剩余系,则 $M_1x_1+M_2x_2+\cdots+M_kx_k$ 通过模 $m=m_1m_2\cdots m_k$ 的完全剩余系,其中 $m=m_iM_i\ (i=1,2,\cdots,k)$.

4.若 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 为正整数,$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 分别通过模 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的完全剩余系,则 $x_1+m_1x_2+m_1m_2x_3+\cdots+m_1m_2\cdots m_{k-1}x_k$ 通过模 $m_1m_2\cdots m_k$ 的完全剩余系.

5.设 m 是正整数,a 为整数,x 通过模 m 的完全剩余系,则当 $m|a$ 时,

$$\sum_x \mathrm{e}^{2\pi i\frac{ax}{m}}=m;$$

当 $m\nmid a$ 时,

$$\sum_x \mathrm{e}^{2\pi i\frac{ax}{m}}=0.$$

完系(complete system of residues) 见"完全剩余系".

最小非负完全剩余系(least nonnegative complete system of residues) 见"完全剩余系".

绝对最小完全剩余系(absolute least complete system of residues) 见"完全剩余系".

简化剩余系(reduced residue system) 亦称缩系.一种特殊的完全剩余系.在模 m 的每个互素剩余类 $C_r(0\leqslant r\leqslant m-1,(r,m)=1)$ 中任取一数 a_r,则所有的数 $a_r(0\leqslant r\leqslant m-1,(r,m)=1)$ 所组成的集,称为模 m 的一个简化(互素)剩余系.有无穷多个简化剩余系,其一般形式为 $a_r=q_rm+r,0\leqslant r\leqslant m-1$,$q_r$ 可任意选取,$q_r=0$ 是最常用的取法,这时 $a_r=r$,$(r,m)=1,0\leqslant r\leqslant m-1$.当 $m=p$ 为素数时,最重要的简化剩余系为:$1,2,\cdots,p-1$.模 m 的简化剩余系由 $\varphi(m)$ 个整数组成,且任意 $\varphi(m)$ 个整数组成模 m 的一组简化剩余系的充分必要条件是这些数与 m 互素,并对模 m 两两不同余.

简化剩余系有下列性质:

1.设 m 为自然数,k,l 为任意整数,$(k,m)=1$,则当 x 通过 m 的简化剩余系时,$kx+lm$ 亦通过模 m 的一组简化剩余系.例如 x 与 $m-x$ 同时通过模 m 的简化剩余系.

2.设 m_1,m_2 为自然数,$(m_1,m_2)=1$,则当 x,y 分别通过模 m_1,m_2 的简化剩余系时,m_2x+m_1y 通过模 $m=m_1m_2$ 的简化剩余系.

3.设 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 是 k 个两两互素的自然数,$x_1,x_2,\cdots,x_k$ 分别通过模 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的简化剩余系,则 $M_1x_1+M_2x_2+\cdots+M_kx_k$ 通过 $m=m_1m_2\cdots m_k$ 的简化剩余系,其中 $m=m_iM_i\ (i=1,2,\cdots,k)$.

4.若 m 是大于 1 的正整数,a 为整数,$(a,m)=1$,x 通过模 m 的简化剩余系,则

$$\sum_x\left\{\frac{ax}{m}\right\}=\frac{1}{2}\varphi(m).$$

缩同余类的概念在近世代数中有应用.若 A 是模 m 的缩同余类,把满足 $Ax=C_1$ 的惟一的缩同余类 x 表示成 A^{-1},则 $Ax=B$ 的惟一解可记为 $x=BA^{-1}=A^{-1}B$(或写成 B/A),即只有模 m 的缩同余类才能作分母,于是在模 m 的缩同余类之间可以定义除法运算.特别地,当 m 为素数 p 时,除了 C_0 之外,其他 $p-1$ 个同余类都是缩同余类.因此,加减乘除四则运算在模 p 同余类集合中都是可以进行的(当然 C_0 不能作分母),这样的集合称为"域".模 p 的 p 个缩同余类构成了有限域.这为近世代数提供了有限域的实例.

缩系(reduced residue system) 即"简化剩余系".

整数的剩余表示(integral residue representation) 对整数的一种刻画.以两两互素的 k 个正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 分别为模,则任一整数 x 对模 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的剩余表示为序列 $(\langle x\rangle_{m_1},\langle x\rangle_{m_2},\cdots,\langle x\rangle_{m_k})$(其中 $\langle x\rangle_m$ 表示 x 被 m 除所得的余数),记为 $x\leftrightarrow(\langle x\rangle_{m_1},\langle x\rangle_{m_2},\cdots,\langle x\rangle_{m_k})$.一个数的剩余表示是惟一的,但其逆是多值的,即是说可以有许多数具有相同的剩余表示.例如,设 $m_1=2,m_2=3,m_3=5$,则 22 的剩余表示为 $(0,1,2)$,并且形如 $30t+22(t\in\mathbf{Z})$ 的整数,其剩余表示均为 $(0,1,2)$.两个整数 x,x' 对模 $m_1,m_2,\cdots,m_k((m_i,m_j)=1,0<i<j\leqslant k)$ 的剩余表示相同的充分必要条件是 $x\equiv x'\pmod M$,这里 $M=m_1,m_2,\cdots,m_k$.设 x 和 y 的剩余表示分别为

$(\langle x\rangle_{m_1},\langle x\rangle_{m_2},\cdots,\langle x\rangle_{m_k})$ 和 $(\langle y\rangle_{m_1},\langle y\rangle_{m_2},\cdots,\langle y\rangle_{m_k})$，则整数的剩余表示有以下两个重要性质：

1. $\langle x\pm y\rangle_M$ 的剩余表示为 $(\langle\langle x\rangle_{m_1}\pm\langle y\rangle_{m_1}\rangle_{m_1},\langle\langle x\rangle_{m_2}\pm\langle y\rangle_{m_2}\rangle_{m_2},\cdots,\langle\langle x\rangle_{m_k}\pm\langle y\rangle_{m_k}\rangle_{m_k})$.

2. $\langle x\cdot y\rangle_M$ 的剩余表示为 $(\langle\langle x\rangle_{m_1}\langle y\rangle_{m_1}\rangle_{m_1},\langle\langle x\rangle_{m_2}\langle y\rangle_{m_2}\rangle_{m_2},\cdots,\langle\langle x\rangle_{m_k}\langle y\rangle_{m_k}\rangle_{m_k})$.

整数的剩余表示理论在计算机技术中有应用.

逐步淘汰原则(successive sweep principle) 亦称容斥原理. 数学的重要原理之一. 设有 n 件事物，其中，N_1 件有性质 a_1，N_2 件有性质 a_2，…，N_n 件有性质 a_n；N_{ij} 件兼有性质 a_i 及 $a_j(i,j=1,2,\cdots,n)$，N_{ijk} 件兼有性质 a_i,a_j 及 $a_k(i,j,k=1,2,\cdots,n)$，…，$N_{12\cdots n}$ 件兼有性质 $a_1,a_2,\cdots$ 及 a_n，则此 n 件事物中没有任何性质 a_i 的件数为

$$n-\sum_{i=1}^{n}N_i+\sum_{i<j}N_{ij}-\cdots+(-1)^nN_{12\cdots n}.$$

在数论中，常常遇到一些计数问题，这些计数问题归结到计算有限集 S 中不属于某些指定子集的元素的数. 例如：

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个非负实数，则

$$\max(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i<j}\min(\alpha_i\alpha_j)+\sum_{i<j<k}\min(\alpha_i\alpha_j\alpha_k)-\cdots+(-1)^n\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

2. 设 n 是正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_N$ 是 N 个两两互素的正整数，则满足 $0<k\leqslant n,a_i\nmid n(i=1,2,\cdots,N)$ 的整数 k 的个数等于

$$n-\sum_{1\leqslant i\leqslant N}\left[\frac{n}{a_i}\right]+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N}\left[\frac{n}{a_ia_j}\right]-\cdots+(-1)^n\left[\frac{n}{a_1a_2\cdots a_N}\right].$$

容斥原理(including-excluding principle) 即“逐步淘汰原则”.

模系数记数法(modular coefficient notation) 与剩余表示有关的概念. 若以两两互素的 k 个正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 分别为模，则整数 $x(0\leqslant x<M,M=m_1m_2\cdots m_k)$ 的剩余表示 $(\langle x\rangle_{m_1},\langle x\rangle_{m_2},\cdots,\langle x\rangle_{m_k})$ 称为 x 的模系数记数法. 由于限定 $0\leqslant x<M=m_1m_2\cdots m_k$，不同的整数 x 对于模 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的剩余表示也是不同的. 若知道了整数 x 的模系数记数法 $(\langle x\rangle_{m_1},\langle x\rangle_{m_2},\cdots,\langle x\rangle_{m_k})$，用孙子定理即可惟一地定出 x. 设 Z 表整数集，$\mathsf{Z}_l=\{0,1,\cdots,l-1\}$ 表示 l 的最小非负剩余组成的集合，且 $m_1>0,\cdots,m_k>0,(m_i,m_j)=1,0<i<j\leqslant k,0\leqslant x<m_1m_2\cdots m_k$，则集合 $S=\{x\mid 0\leqslant x<m_1m_2\cdots m_k\}$ 与集合 $S_1=\{(a_1,a_2,\cdots,a_k)\mid a_j\in\mathsf{Z}_{m_j},j=1,2,\cdots,k\}$ 之间存在一一对应. 设 $0\leqslant x<M,0\leqslant y<M$，则 x 的模系数记数法有下列性质：

1. $\langle x\pm y\rangle_M$ 的模系数记数法为 $(\langle\langle x\rangle_{m_1}\pm\langle y\rangle_{m_1}\rangle_{m_1},\langle\langle x\rangle_{m_2}\pm\langle y\rangle_{m_2}\rangle_{m_2},\cdots,\langle\langle x\rangle_{m_k}\pm\langle y\rangle_{m_k}\rangle_{m_k})$.

2. $\langle x\cdot y\rangle_M$ 的模系数记数法为 $(\langle\langle x\rangle_{m_1}\langle y\rangle_{m_1}\rangle_{m_1},\langle\langle x\rangle_{m_2}\langle y\rangle_{m_2}\rangle_{m_2},\cdots,\langle\langle x\rangle_{m_k}\langle y\rangle_{m_k}\rangle_{m_k})$.

下面举例说明使用模系数记数法进行加法和乘法运算带来的方便. 例如，对模 3,4,5,11. $x=209\leftrightarrow(2,1,4,0)$，$y=135\leftrightarrow(0,3,0,3)$.

1) 进行加法运算：

$$\begin{array}{rcr} 209 & & (2,1,4,0)\\ +135 & & (0,3,0,3)\\ \hline \langle 344\rangle_{660} & \longleftrightarrow & (2,0,4,3)\end{array}$$

2) 进行乘法运算：

$$\begin{array}{rcr} 209 & & \\ \times\ 135 & & \\ \hline 1045 & & \\ 627\ & & (2,1,4,0)\\ 209\ \ & & (0,3,0,3)\\ \hline \langle 28215\rangle_{660} & \longleftrightarrow & (0,3,0,0)\end{array}$$

从上例中看出，这里乘法和加法无须进位，特别是乘法无需进位，这对计算机的制造和使用将带来很多的方便. 用模系数记数法，Z_M 中的数对模 M 的运算，可以分别通过 Z_{m_j} 中的数对模 $M_j(j=1,2,\cdots,k)$ 的运算来完成.

欧拉定理(Euler theorem) 数论的重要定理之一. 设 m,a 都是整数，且 $m\geqslant 2$ 及 $(a,m)=1$，$\varphi(m)$ 是欧拉函数，它表示小于 m 且与 m 互素的正整数个数，则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$. 由此定理可以直接得出：若 $(a,m)=1$，则同余方程 $ax\equiv b\pmod m$ 的解为 $x\equiv a^{\varphi(m)-1}b\pmod m$. 例如，解同余方程 $24x\equiv 7\pmod{59}$. 因 59 为素数，$\varphi(59)=58$，所以方程的解为 $x\equiv 24^{57}\cdot 7\equiv 47\pmod{59}$. 这是一个用简化剩余系证明的定理. 1736 年，欧拉(Euler, L.)证明了费马定理后，又于 1760 年提出并证明了此定理. 当 m 为素数 p 时，因 $\varphi(p)=p-1$，即得费马定理. 所以，欧拉定理是费马定理的推广.

费马小定理(Fermat small theorem) 简称费马定理. 初等数论的重要定理之一. 该定理断言：若 p 为素数，$(a,p)=1$，则 $a^{p-1}\equiv 1\pmod p$. 该定理是数论中欧拉定理的一个特殊情况，因为在欧拉定理中当 p 是素数时，$\varphi(p)=p-1$，就得到费马定理. 费马定理也可叙述成：设 p 为素数，则对于每个整数 a 都有 $a^p\equiv a\pmod p$. 此定理由费马(Fermat, P. de)在 1640 年 10 月 18 日给德·贝西(de Bessie, F. B.)的信中给出的，但未作证明，欧拉(Euler, L.)于 1736 年发表了第一个关于费马定理的证明. 1801 年，高斯(Gauss, C. F.)在他的数论专著《算术研究》中用同余式的方法，简捷地证明了这个定理. 此定理在数论发展史上有重要地位，它是研究二次同余式的关键，还有许多其他的应用. 它被称为费马小定理，是为了有别于费马大定理.

威尔逊定理(Wilson theorem) 数论的重要定理之一.该定理断言:如果 p 为素数,那么 $(p-1)!\equiv-1(\mathrm{mod}\,p)$.该定理的逆命题也是正确的,从而有:大于1的自然数 n 为素数的充分必要条件为

$$(n-1)!\equiv-1(\mathrm{mod}\,n). \tag{1}$$

虽然(1)式是判别一个自然数 n 是否为素数的充分必要条件,但对于大整数,计算起来困难是很大的.例如,当 n 是一个3位数的自然数时,$(n-1)!+1$ 就是一个超过100位的数.所以,这个素数的判定定理并无实际应用价值.威尔逊定理实际并非威尔逊(Wilson,J.)最先提出,亦非他给出过证明,只是他曾猜想这个命题是正确的,并就此事写信给他的老师华林(Waring,E.).华林于1770年在他著的《代数沉思录》中未加证明就发表了此命题,并称是威尔逊提出的.实际上莱布尼茨(Leibniz,G.W.)早在1682年就发表了这个猜想,但未能给出证明.拉格朗日(Lagrange,J.-L.)在1771年给出了这一命题的证明.虽是这样,习惯上仍称为威尔逊定理.

数论倒数(number-theoretic reciprocal) 亦称算术倒数.与同余有关的一个基本概念.设 m 为模,a 为任意整数,且 $(a,m)=1$.若有整数 a' 能满足同余式 $a'a\equiv1(\mathrm{mod}\,m)$,则称 a' 是 $a(\mathrm{mod}\,m)$ 的数论倒数,或逆元.例如,设整数 $a=2,m=3$,且 $(2,3)=1$,当 $a'=2$ 时,有 $a'a\equiv2\cdot2=4\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$,则 $a'=2$ 就是整数 $2(\mathrm{mod}\,3)$ 的数论倒数.整数 a 存在数论倒数 $a'(\mathrm{mod}\,m)$ 的充分必要条件是 $(a,m)=1$.数论倒数常用于求解同余式组.例如,使用孙子定理求解同余式组 $x\equiv b_1(\mathrm{mod}\,m_1),x\equiv b_2(\mathrm{mod}\,m_2),\cdots,x\equiv b_k(\mathrm{mod}\,m_k)$ 时,此同余式组的正整数解为

$$x\equiv b_1M_1'M_1+b_2M_2'M_2+\cdots+b_kM_k'M_k(\mathrm{mod}\,M),$$

这里 M_i' 就是满足同余式 $M_i'M_i\equiv1(\mathrm{mod}\,m_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 关于 $M_i(\mathrm{mod}\,m_i)$ 的数论倒数.式中 $M=m_1m_2\cdots m_k=m_1M_1=m_2M_2=\cdots=m_kM_k$. $M_i=M/m_i$,且 $(M_i,m_i)=1$.

算术倒数(arithmetic reciprocal) 即"数论倒数".

同余方程(congruence equation) 初等数论的重要概念之一.指含有未知数的同余式.如果 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是整数,m 是模,且 $a_n\not\equiv0(\mathrm{mod}\,m)$,则

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv0(\mathrm{mod}\,m) \tag{1}$$

称为模 m 的 n 次同余方程.如果整数 x_0 满足 $f(x_0)\equiv0(\mathrm{mod}\,m)$,则 $x\equiv x_0(\mathrm{mod}\,m)$ 称为同余方程(1)的解,这时同余类 $[x_0]=\{km+x_0,k\in\mathbf{Z}\}$ 都是方程(1)的解.当且仅当 $f(x_0)\equiv0(\mathrm{mod}\,m)$,$f(x_1)\equiv0(\mathrm{mod}\,m)$,且 $x_0\not\equiv x_1(\mathrm{mod}\,m)$ 时,称 $x=[x_0]$ 和 $x=[x_1]$ 是不同的解.式中 $[x_1]=\{km+x_1,k\in\mathbf{Z}\}$.求解高次 $(n\geqslant3)$ 同余方程,无一般的方法.

同余方程的解(solutions of congruence equations) 与同余方程有关的一个概念.指满足同余方程的未知数的值.设 $f(x)$ 为一整系数多项式,则同余方程

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv0(\mathrm{mod}\,m) \tag{1}$$

的所有对模 m 不同余的解的个数,称为同余方程(1)的解的个数,记为 $\rho(f,m)$.要求同余方程(1)的解,只要把模 m 的一组完全剩余系 $0,1,\cdots,m-1$ 逐个代入(1)中进行验算,总可以判定完全剩余系中那些整数是方程(1)的解.但当 m 是个大整数时,计算量往往太大.有时为了减轻计算的工作量,可以取绝对值最小的完全剩余系 $-(m-1)/2,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,(m-1)/2$ 逐个代入验算.当模 m 为合数时,有定理:

1. 设 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为其标准分解式,则同余方程 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\,m)$ 与同余方程组 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\,p_1^{\alpha_1})$; $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\,p_2^{\alpha_2})$; $\cdots$; $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\,p_s^{\alpha_s})$ 是等价的.

2. 同余方程 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\,p^{\alpha})$ 的解一定是同余方程 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$ 的解,反之不一定成立(参见"同余方程").

一次同余方程(linear congruence) 亦称线性同余方程.一类简单的同余方程.指未知数仅出现一次幂的同余方程.若 a,b 都是整数,m 是正整数,当 $a\not\equiv0(\mathrm{mod}\,m)$ 时,把 $ax\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 称为模 m 的一元一次同余方程,简称一次同余方程.关于其解法和性质有下述定理:

1. 设 $(a,m)=1$, $m>0$,则同余式 $ax\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ 恰有一个解 $x\equiv ba^{\varphi(m)-1}(\mathrm{mod}\,m)$.

2. 设 $(a,m)=d$, $m>0$,则同余式 $ax\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ 有解的充分必要条件是 $d|b$,此时恰有 d 个解.

根据以上两个定理,同余方程 $ax\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$ 在 $a\neq0$ 且 $(a,m)|b$ 的条件下,必有 (a,m) 个关于模 m 互不同余的解.又根据最大公约数的性质,必有二整数 x,y,能使 $ax+my=(a,m)$.由于 $(a,m)|b$,所以有 $x_0=bx/(a,m),y_0=by/(a,m)$,使 $ax_0+my_0=b$,由此即可得到原方程的 (a,m) 个关于模 m 互不同余的解为 $x=x_0+mt/(a,m),t=0,1,2,\cdots,(a,m)-1$.

线性同余方程(linear congruence equation) 即"一次同余方程".

一次同余方程组(system of linear congruence equations) 一类简单的同余方程组.指形如

$$x\equiv b_i(\mathrm{mod}\,m_i)\quad(i=1,2,\cdots,k) \tag{1}$$

的同余方程构成的组.$k=2$ 是最简单的一次同余方

程组，即

$$\begin{cases} x \equiv b_1 (\bmod m_1), \\ x \equiv b_2 (\bmod m_2). \end{cases} \quad (2)$$

在同余方程组(2)中，设$(m_1,m_2)=d, M=m_1m_2$. 若$d \nmid (b_2-b_1)$，则同余方程组(2)无解. 若$d \mid (b_2-b_1)$，则方程(2)对模M有解. 设解为$x \equiv x_0 (\bmod M)$，则$x_0 = b_1+m_1t_0$，t_0为$m_1t \equiv b_2-b_1 (\bmod m_2)$的任一解. 关于一般同余方程组(1)的解法(参见"孙子定理").

孙子定理(Chinese remainder theorem)　亦称中国剩余定理. 中国古代关于求解一次同余方程组的著名定理. 如果正整数$m_1, m_2, \cdots, m_k$是两两互素的，即$(m_i,m_j)=1 \ (i \neq j; 1 \leqslant i, j \leqslant k)$，且$b_1, b_2, \cdots, b_k$是任意整数，则同余方程组

$$x \equiv b_i (\bmod m_i) \quad (i=1,2,\cdots,k) \quad (1)$$

可解，且这个同余方程组的全部解是模$M=m_1m_2\cdots m_k$的一个同余类. 同余方程组(1)的解可表示为

$$x \equiv b_1M_1'M_1+b_2M_2'M_2+\cdots+b_kM_k'M_k (\bmod M), \quad (2)$$

式中$M_k=M/m_k$，而M_k'是M_k关于模m_k的数论倒数，即M_k'是满足$M_k'M_k \equiv 1 (\bmod m_k)$的正数. 在中国古算书《孙子算经》的下卷中已记有下面的"物不知数问题"：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？答曰：二十三. 用同余记号译为今文，即求解下面同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv 2 (\bmod 3), \\ x \equiv 3 (\bmod 5), \\ x \equiv 2 (\bmod 7). \end{cases} \quad (3)$$

书中给出了解法，其解法还能推广到任意n个两两互素的自然数的同余方程组的情形. 秦九韶在他的著作《数书九章》中提出了同余方程组$M_ix \equiv 1 (\bmod m_i) (1 \leqslant i \leqslant k)$的解法，并称之为"大衍求一术". 程大位在他所著《直指算法统宗》(共17卷)中把方程组(3)的解法概括为下面的口诀：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝.
七子团圆月正半，除百零五便得知.

其中，前三句中的70，21和15(月正半)分别就是(2)式中的$M_1'M_1, M_2'M_2$和$M_3'M_3$，所以"物不知数问题"的一个解是

$$x \equiv 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 2 \cdot 15 = 233 (\bmod 105).$$

口诀最后一句中的105即现在的记号$(\bmod 105)$，亦即与233相差105的任意倍数的数都是问题的解. 其最小正整数解为$x \equiv 23 (\bmod 105)$. 孙子定理在数论中的应用是广泛的，其方法的原则也反映在插入理论、代数理论及算子理论(泛函分析)之中. 例如，关于同余方程$f(x) \equiv 0 (\bmod m)$解的个数问题，应用孙子定理可得出下面结果：设$m=m_1m_2$，$(m_1,m_2)=1$，同余方程$f(x) \equiv 0 (\bmod m)$解的个数记为$\rho(f,m)$，则有$\rho(f,m)=\rho(f,m_1) \cdot \rho(f,m_2)$，即解的个数为$m$的可乘函数.

中国剩余定理(Chinese remainder theorem)　即"孙子定理".

大衍求一术(Chinese remainder theorem)　见"孙子定理".

覆盖同余式组(cover congruence system)一类特殊的一次同余方程组. 如果每一个整数都至少满足同余式组

$$x \equiv a_1 (\bmod n_1), x \equiv a_2 (\bmod n_2), \cdots, x \equiv a_k (\bmod n_k),$$
$$(1<n_1<n_2<\cdots<n_k, 0 \leqslant a_i<n_i, i=1,2,\cdots,k) \quad (1)$$

中的一个，那么就称(1)为一组覆盖同余式组. 如果每一个整数满足(1)中一个且仅满足一个同余式，则称(1)为一组不相交的覆盖同余式组. 因为每一个整数至少满足同余式组

$$x \equiv 0 (\bmod 2), x \equiv 0 (\bmod 3), x \equiv 1 (\bmod 4),$$
$$x \equiv 5 (\bmod 6), x \equiv 7 (\bmod 12) \quad (2)$$

中的一个，所以，(2)即为一组覆盖同余式组. 利用电子计算机已经证明了，对$2 \leqslant n_1 \leqslant 20$，均存在覆盖同余式组. 有关覆盖同余式组的下面两个著名猜想尚未获得证明：

1. 对任给的$n_1>1$，都存在覆盖同余式组.
2. 如果(1)是一组覆盖同余式组，则有
$$2 \mid [n_1, n_2, \cdots, n_k].$$

覆盖同余式组有下面性质：

1. 如果(1)是一组覆盖同余式组，则有
$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j} > 1.$$

此性质是爱尔特希(Erdös, P.)首先提出猜想，以后才给出证明的.

2. 如果(1)是一组不相交的覆盖同余式组，则有：

1) $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i}=1$.
2) $(n_i,n_j) \neq 1, 1 \leqslant i<j \leqslant k$.
3) 不可能有$1<n_1<n_2<\cdots<n_k$.

连　分　数

连分数(continued fraction)　一种特殊形式的分数. 它是求解不定方程的重要工具. 设$\{b_n\}(n=0,1,\cdots,m)$，$\{c_n\}(n=1,2,\cdots,m)$是数域F中的元素所组成的有限序列，形如下面形式的分数

$$b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cdots_{\ddots} \cdots+\cfrac{c_{m-1}}{b_{m-1}+\cfrac{c_m}{b_m}}}}$$

称为有限连分数. 只要在简化时没有出现零为除数，它通常表示数域 F 中的一个元素，常简记为：

$$b_0+\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}}+\frac{c_m}{b_m};$$

$$b_0+\frac{c_1|}{|b_1}+\frac{c_2|}{|b_2}+\cdots+\frac{c_{m-1}|}{|b_{m-1}}+\frac{c_m|}{|b_m};$$

$$b_0\dot{+}\frac{c_1}{b_1}\dot{+}\frac{c_2}{b_2}\dot{+}\cdots\dot{+}\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}}\dot{+}\frac{c_m}{b_m};$$

$$\left[b_0,\frac{c_1}{b_1},\frac{c_2}{b_2},\cdots,\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}},\frac{c_m}{b_m}\right]$$

等形式. 或更简便地记为

$$b_0+\left[\frac{c_n}{b_n}\right]_{n=1}^{m}.$$

若 $\{b_n\}(n=0,1,\cdots)$，$\{c_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为两个无限序列，则称

$$b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cdots\cfrac{\cdots}{\cdots+\cfrac{c_n}{b_n+\cdots}}}}$$

为无限连分数. 和有限连分数的情况一样，也可简记为

$$b_0+\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_n}{b_n}+\cdots;$$

$$b_0+\left[\frac{c_n}{b_n}\right]_{n=1}^{\infty}.$$

在无限连分数中，

$$k_n=b_0+\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_n}{b_n},k_0=b_0$$

称为第 n 个渐近分数，b_0 称为始项，$b_n,c_n(n\geqslant1)$ 分别称为部分分母及部分分子. 当 F 为实数域或复数域，而且元素序列 $\{k_n\}$ 收敛时，则此无限连分数为收敛的，$\{k_n\}$ 的极限值称为无限连分数的值. 在有限或无限连分数中，如果所有的 $c_n(n\geqslant1)$ 全都等于 1，b_0 为整数，$b_n(n\geqslant1)$ 全都为正整数时，则称为正则连分数，或称简单连分数，并用 $[b_0,b_1,\cdots,b_n]$ 表示有限或无限正则连分数的 n 级近似值. 一般而言，一个有限正则连分数表示一个有理数，而一个无限正则连分数表示一个无理数. 如果 $[b_0,b_1,\cdots,b_n]$ 是有限连分数，则称它的项数为 $n+1$. 对于给定的任意实数 ω，以符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，令

$$\omega=b_0+\frac{1}{\omega_1},b_0=[\omega],$$

$$\omega_n=b_n+\frac{1}{\omega_{n+1}},b_n=[\omega_n]\quad(n=1,2,\cdots).$$

利用此方法就可将 ω 展开成一个正则连分数

$$\omega=b_0+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_n}+\cdots.$$

如果 ω 是无理数，则其正则连分数展开式是惟一确定的. 如果 ω 是有理数，则此展开式将在有限步后 $(\omega_m=b_m)$ 结束，得到

$$\omega=b_0+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_m}.$$

若将上式中的 b_m 以 $(b_m-1)+1/1$ 来代换，则得到有理数 ω 的另一种正则连分数的表示式，即有理数的正则连分数表示式不是惟一的. 无限正则连分数的例子有：由朗伯(Lambert，J. H.)得出的

$$\frac{e^{2/p}+1}{e^{2/p}-1}=p+\frac{1}{3p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)p}+\cdots,$$

式中 p 为自然数. 由欧拉(Euler，L.)得出的

$$e=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\cdots$$
$$+\frac{1}{1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{1}+\cdots.$$

由于近代计算数学的需要，还可将正则连分数中的 $b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots$ 取成以 x 为元的多项式. 此时 $b_i=b_i(x)=a_{i1}x^{n_i}+a_{i2}x^{n_i-1}+\cdots+a_{in_i}(i=0,1,2,\cdots)$. 也将上述形式的连分数分别称为无限连分数与有限连分数，它在近代计算数学中常和某些微分方程或差分方程有关，和某些与递推关系有关的函数构造的应用相联系. 连分数早就在初等数论中运用，阿耶波多第一(Āryabhata Ⅰ)就曾用连分数求一次不定方程 $ax\pm by=c(a,b$ 互质，且 a,b,c 为正整数)所有的整数解. 他用欧几里得(Euclid)的辗转相除法，把方程的系数 a,b 表成连分数，即

$$\frac{a}{b}=a_0+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n},$$

设
$$\frac{p}{q}=a_0+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}},$$

推得 $aq-bp=\pm1$，取 $aq-bp=1$，把不定方程化为 $ax-by=aq-bp$，最后得 $x=q+bt,y=p+at(t\in\mathrm{Z})$，从而求得不定方程的整数解. 沃利斯(Wallis，J.)在 1655 年出版的著作《无穷算术》中，第一次引入了连分数这一数学名词. 1685 年，他又指出如何使用连分数去得到某些无理数的好的逼近. 在对圆周率 π 的研究中，沃利斯和布龙克尔(Brouncker，W.)将 $\pi/4$ 表为连分数

$$\frac{\pi}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+\frac{25}{2}+\frac{49}{2}+\cdots.$$

正则连分数(regular continued fraction)　见“连分数”.

简单连分数(simple continued fraction)　见“连分数”.

有限连分数(finite continued fraction)　见“连分数”.

无限连分数(infinite continued fraction)　见“连分数”.

正则连分数的渐近分数(asymptotic fraction of regular continued fraction) 对正则连分数的一种刻画. 即正则连分数的一类近似分数. 在正则连分数 $[b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots]$ 中取

$$[b_0]=\frac{b_0}{1},$$

$$[b_0,b_1]=\frac{b_0b_1+1}{b_1},$$

$$[b_0,b_1,b_2]=\frac{b_0b_1b_2+b_0+b_2}{b_1b_2+1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$[b_0,b_1,\cdots,b_n]=\frac{b_np_{n-1}+p_{n-2}}{b_nq_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{p_n}{q_n}.$$

其中 $p_n,q_n\in\mathbf{Z}$, 且 $(p_n,q_n)=1$. p_n/q_n 称为正则连分数 $[b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots]$ 的第 n 个渐近分数. 设既约分数

$$\frac{p_n}{q_n}=b_0+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_n}\quad(n\geqslant 0),$$

令 $p_{-2}=0,p_{-1}=1,q_{-2}=1,q_{-1}=0$, 得递推关系式:

$$p_n=b_np_{n-1}+p_{n-2},q_n=b_nq_{n-1}+q_{n-2}\quad(n\geqslant 0).$$

由此推出

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n+1}\quad(n\geqslant -1).$$

任何正则连分数总表示一个实数 ω, 当 ω 为无理数时, 在两个渐近分数 p_{n-2}/q_{n-2} 和 p_n/q_n 中间插入的分数

$$\frac{p_n^{(k)}}{q_n^{(k)}}=\frac{p_{n-2}+kp_{n-1}}{q_{n-2}+kq_{n-1}}\quad(k=1,2,\cdots,b_n-1)$$

均称为中间渐近分数, 而原来的渐近分数称为主渐近分数. 渐近分数尚有如下性质:

1. 当 $k\geqslant 3$ 时, $q_k\geqslant q_{k-1}+1$, 因而对任何 k 有 $q_k\geqslant k-1$, 且

$$\frac{p_{2(k-1)}}{q_{2(k-1)}}>\frac{p_{2k}}{q_{2k}},\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}>\frac{p_{2k-3}}{q_{2k-3}},\frac{p_{2k}}{q_{2k}}>\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}.$$

2. 设 $[b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots]$ 是无限正则连分数. 若 $k\to\infty$ 时 p_k/q_k 有极限, 则有

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_5}{q_5}<\frac{p_7}{q_7}<\frac{p_9}{q_9}<\cdots$$
$$<[b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots]<\cdots$$
$$<\frac{p_{10}}{q_{10}}<\frac{p_8}{q_8}<\frac{p_6}{q_6}<\frac{p_4}{q_4}<\frac{p_2}{q_2}.$$

称此极限为连分数 $[b_0,b_1,\cdots,b_n,\cdots]$ 的值. 设分数 p/q 具有下述性质: 对于任何其他分数 p'/q', $q'\leqslant q$, 必有 $|\omega-p/q|<|\omega-p'/q'|$, 则 p/q 称为 ω 的最佳逼近分数. ω 的最佳逼近分数一定是它的主渐近分数或中间渐近分数 $p_n^{(k)}/q_n^{(k)}$, 且 $k>b_n/2$ 或 $k=b_n/2$, $q_n>q_{n-1}\omega_n$ (ω_n 的意义参见"连分数"). 渐近分数满足关系式

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}.$$

因此, 数列 $\{p_{2n}/q_{2n}\}$, $\{p_{2n+1}/q_{2n+1}\}$ 分别是单调递增和单调递减的. 关于渐近分数的逼近有下列关系式:

$$\left|\omega-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{q_{n+1}q_n}<\frac{1}{q_n^2};$$

$$\left|\omega-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|\omega-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|;$$

$$\omega=\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=b_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}.$$

关于渐近逼近的程度, 还有下面结果:

1. 对于任意的 ω, 使得

$$\left|\omega-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2}$$

成立的 n 有无限多个. 如果 $\lambda>\sqrt{5}$, 则存在 ω, 使得

$$\left|\omega-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{\lambda q_n^2}$$

只对有限个 n 成立.

2. 相邻的两个渐近分数至少有一个满足不等式

$$\left|\omega-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{2q_n^2}.$$

3. 相邻的三个渐近分数至少有一个满足不等式

$$\left|\omega-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2}.$$

1572 年, 邦贝利(Bombelli, R.)在他所著的《代数学》一书中, 第一个使用了渐近分数逼近无理数的方法, 他成功地应用了连分数逼近无理数 $\sqrt{2}$. 设 $\sqrt{2}=1+1/y$, 则 $y=\sqrt{2}+1$, 所以 $y=2+\sqrt{2}-1=2+1/y$, 从而有

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{y}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$$
$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,$$

因此 $\sqrt{2}$ 可用数列

$$1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

来逐次逼近.

中间渐近分数(intermediate asymptotic fraction) 见"正则连分数的渐近分数".

主渐近分数(principal asymptotic fraction) 见"正则连分数的渐近分数".

最佳逼近分数(best approximations fraction) 见"正则连分数的渐近分数".

有理数的连分数表示(representation of rational number by continued fraction) 对有理数的一种刻画. 即将有理数表示成正则连分数. 每一个有理数都能表示成两个不同形式的有限连分数, 其中一

个的项数是奇数，另一个的项数是偶数．设 a/b 是有理数，其中 a 为整数，b 为正整数．若 $b|a$，则可设 $a/b=c$，c 为整数，并可表示为 $a/b=[c]$．若 $b\nmid a$，则 a/b 是有理分数，其中 a 为整数，b 为大于 1 的正整数，由辗转相除法得：

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b},0<\frac{r_1}{b}<1;$$

$$\frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1},0<\frac{r_2}{r_1}<1;$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_n+\frac{r_n}{r_{n-1}},$$

式中 $b,r_1,r_2,\cdots$ 都是正整数，且 $b>r_1>r_2>r_3>\cdots$，所以，最后一定有一个正整数 r_n，使得

$$\frac{r_n}{r_{n-1}}=q_{n+1},r_{n-2}>r_{n-1}>r_n$$

成立，其中 q_1 是非负整数，$q_n(n\geqslant 2)$ 是正整数．于是有理分数 a/b 可表成有限连分数

$$\frac{a}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{}{q_n+\cfrac{1}{q_{n+1}}}}}=[q_1,q_2,\cdots,q_{n+1}],$$

或表成下面形式的有限连分数

$$\frac{a}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_{n+1}-1+\cfrac{1}{1}}}}=[q_1,q_2,\cdots,q_{n+1}-1,1].$$

阿耶波多第一（Āryabhata Ⅰ）及婆罗摩笈多（Brahmagupta）在求不定方程 $ax+by=c$（$(a,b)=1$，且 a,b,c 为正整数）的整数解时，应用辗转相除法，最先把 a/b 表示成有限简单连分数，即

$$\frac{a}{b}=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}.$$

并设 $$\frac{p}{q}=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}},$$

易证 $aq-bp=\pm 1$，取 $aq-bp=1$，那么可把方程 $ax+by=1$ 变为 $ax+by=aq-bp$，从而有

$$\frac{x-q}{b}=\frac{y-p}{a}=t$$

得 $x=q+bt,y=p+at$（t 为整数），即可求得方程的全部整数解．

无理数的连分数表示（representation of irrational number by continued fraction）　对无理数的一种刻画．即将无理数表示成正则连分数．每个无理数 α 只能有一个无限连分数表示式，它的渐近分数序列收敛于 α．项数无限的连分数都是从无理数产生的．设 α 是一个无理数，用 α 的整数部分$[\alpha]$和小数部分$\{\alpha\}$表示，有 $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\},0<\{\alpha\}<1$．令$[\alpha]=a_1$ 和 $\alpha_1=1/\{\alpha\}>1$，则有

$$\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1},$$

又令$[\alpha_1]=a_2$ 和 $\alpha_2=1/\{\alpha_1\}>1$，其中 α_1 是无理数，且 $0<\{\alpha_1\}<1$，则有

$$\alpha_1=a_2+\frac{1}{\alpha_2}\cdots$$

令$[\alpha_{k-1}]=a_k$ 和 $\alpha_k=1/\{\alpha_{k-1}\}>1$，则

$$\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\alpha_2}}=\cdots$$

$$=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{}{a_k+\cfrac{1}{\alpha_k}}}}$$

$$=[a_1,a_2,\cdots,a_k,\alpha_k].$$

并有　$$\alpha=\frac{\alpha_1 a_1+1}{\alpha_1},\alpha=\frac{\alpha_k p_k+p_{k-1}}{\alpha_k q_k+q_{k-1}}\quad(k=2,3,\cdots)$$

及　$$\alpha=\frac{p_k}{q_k}+\frac{(-1)^{k-1}\delta_k}{q_kq_{k+1}}\text{或}\ \alpha=\frac{p_k}{q_k}+\frac{(-1)^{k-1}\delta_k'}{q_k^2},$$

其中 $0<\delta_k<1,0<\delta_k'<1$．世界上最先使用无理数的连分数表示法的是邦贝利（Bombelli，R.）（参见“正则连分数的渐近分数”）．

实数的连分数表示（representation of real number by continued fraction）　对实数的一种刻画．有理数的连分数表示和无理数的连分数表示共同组成实数的连分数表示．

实数的有理逼近（rational approximation of real number）　对实数的一种刻画．指实数为无理数时的有理逼近．给定无理数 α，若 p_k/q_k 是 α 的第 k 个渐近分数，则在分母小于等于 q_k 的一切有理数中，p_k/q_k 是 α 最好的有理近似值，即若 $0<q\leqslant q_k$，则对于任意 p 都有

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$

这一性质在求实数的有理近似值中有广泛的应用．例如，求 $1+\sqrt{5}$ 精确到小数点后五位的有理近似值．由计算知 $1+\sqrt{5}=[3,4,\dot{4}]$，因此 $q_1=1$，$q_2=13,q_3=17,q_4=72,q_5=305,q_6=1292;p_1=3$，$p_2=13,p_3=55,p_4=233,p_5=987$，于是

$$\left|1+\sqrt{5}-\frac{987}{305}\right|<\frac{1}{305\times 1292}<\frac{1}{10^5},$$

故 $987/305\approx 3.23606$ 即为所求．

循环连分数（recurring continued fraction）　亦

称周期连分数. 一类特殊的连分数. 指其数字出现周期变化的连分数. 对一个无限简单连分数$[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots]$,若能找到两个整数$s\geqslant 0,t>0$,使得

$$a_{s+i}=a_{s+kt+i}\quad(i=1,2,\cdots,t;k=0,1,2,\cdots).$$

成立,则这个无限简单连分数称为循环连分数,并简记为

$$[a_1,a_2,\cdots,a_s,\dot{a}_{s+1},\cdots,\dot{a}_{s+t}],$$

或记为

$$[a_1,a_2,\cdots,a_s,\overline{a_{s+1},\cdots,a_{s+t}}].$$

当$s=0$时,称为纯循环连分数;当$s\geqslant 1$时,称为混循环连分数. 将$[a_{s+1},\cdots,a_{s+t}]$称为循环节或循环周期. 关于循环连分数有下面定理:

1. 无理数α的连分数为循环连分数的充分必要条件是α为二次无理数,即α是方程$ax^2+bx+c=0$的根($a,b,c\in\mathbf{Q},b^2-4ac$为非平方的正数).

2. 无理数α可用纯循环连分数表示的充分必要条件是α为二次无理数,并且它所满足的二次方程的另一根在0与-1之间.

3. 无理数α为非平方数的有理数的平方根的充分必要条件是α的连分数具有$[a_1,\dot{a}_2,\cdots,a_{k-2},2\dot{a}_1]$($a_{k-v}=a_v$)的形式.

周期连分数(periodic continued fraction) 即"循环连分数".

纯循环连分数(pure recurring continued fraction) 见"循环连分数".

混循环连分数(mixed recurring continued fraction) 见"循环连分数".

二次无理数(quadratic irrational number) 一类特殊的无理数. 指满足整系数二次方程的无理数. 这个方程的另一个解称为这个无理数的共轭数. 称这两个二次无理数互为共轭数. 二次无理数有下面性质:

1. 每个纯循环连分数对应着一个大于1的二次无理数,它的共轭数是大于-1的负数;反之亦然.

2. 二次无理数的连分数都是循环的;反之亦然.

1770年,柏林出版了欧拉(Euler,L.)的数论专著《代数指南》,书中附有拉格朗日(Lagrange,J.-L.)的《数论随笔》,并称上面的性质2为关于二次无理数的拉格朗日定理.

丢番图逼近(Diophantine approximation) 数论的一个分支. 研究函数的一类问题与方法. 早期指估计整数变量的函数的上、下界问题. 若$f(x)$为任意的已知函数,$x\in\mathbf{Z}$或x为某数域中的整数值,则估计$|f(x)|$上、下界的问题称为丢番图逼近. 在近代数学中丢番图逼近的含义更为广泛,已成为研究自变量取整数值时函数值的界限或分布状态的一个数论分支名称. 格的几何学,有理数逼近,连分数理论,一致分布,以及解析方法、三角级数和狄利克雷抽屉原理,都是丢番图逼近的有力工具. 丢番图逼近在超越数、不定方程及代数曲线理论中得到了重要的应用. 丢番图逼近这一概念最先是由闵科夫斯基(Minkowski,H.)在1907年所发表的专著《丢番图逼近》中首次提出的.

法里数列(Farey progression) 数论中的重要数列之一. 它是由0与1之间的诸既约分数,按递增顺序排列组成的. 设n为正整数,其分子和分母均小于等于n,且按分数值的大小从0排到1,所得的

$$1+\sum_{m=1}^{n}\varphi(m)$$

个数组成的数列,称为n阶法里数列,记为F_n. 例如,5阶法里数列F_5由

$$1+\sum_{m=1}^{5}\varphi(m)=1+1+1+2+2+4=11$$

个数组成:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}.$$

n阶法里数列有下述性质:

1. 设a/b和c/d是F_n中的相邻项,且

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d},$$

则$b+d\geqslant n+1$和$bc-ad=1$. 其逆亦真.

2. 设a/b和c/d是F_n中的相邻项,且$a/b<c/d$,则由它们构成的分数$(a+c)/(b+d)$称为这相邻两项的中项,且满足

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d},$$

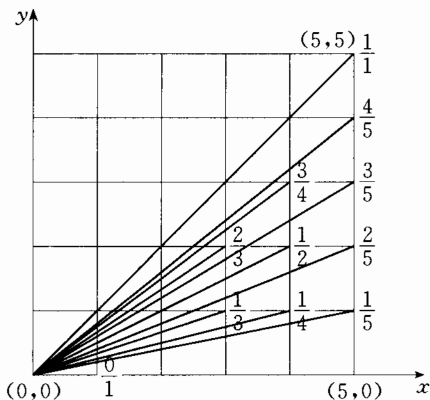
并称$(a+c)/(b+d)$是a/b和c/d的加成分数. 在F_n中插入那些分母为$n+1$的中项,就得到F_{n+1}. 若$a/b,c/d,e/f$是F_n中的相邻三项,且

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<\frac{e}{f},$$

则区间

$$\left[\frac{a+c}{b+d},\frac{c+e}{d+f}\right]$$

称为c/d的法里弧.



3. 任给一个无理数 θ，$0<\theta<1$，设 r 是任一正整数，则存在正整数 n，使得 F_n 中有两个相邻有理数 $a/b, c/d$ 满足 $a/b<\theta<c/d, b>r, d>r$.

4. F_n 还有一个重要的几何性质. 在直角坐标系中，以 $(0,0)$，$(n,0)$ 及 (n,n) 为顶点的直角三角形中，画出从原点 $(0,0)$ 到这个三角形内部和边界上的各个格点的线段，这些线段的斜率以严格递增顺序排列，正好组成一个 n 阶法里数列. 例如 F_5：

$$\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}.$$

如图所示. 法里数列在研究无理数的有理逼近中有应用，1891 年，赫尔维茨(Hurwitz, A.)曾利用法里数列证明他的关于无理数的有理逼近定理. 此数列是法里(Farey, J.)于 1816 年最先提出的.

法里弧(Farey arc) 见“法里数列”.

数 论 函 数

数论函数(number-theoretic function) 亦称算术函数. 一类重要的函数. 指定义在正整数集上的实值或复值函数. 更一般地，也可把数论函数看做是在某一整数集上定义的函数，例如

$$d(n)=\sum_{d|n}1.$$

算术函数(arithmetic function) 即“数论函数”.

整数部分函数(integer part function) 亦称高斯函数. 一种特殊的数论函数. 整数部分函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，读作 x 的整数部分. 此定义说明 $[x]$ 是满足 $x-1<[x]\leqslant x$ 的惟一整数.

整数部分函数 $[x]$ 有以下重要性质：

1. 若 $x\geqslant y$，则 $[x]\geqslant[y]$.

2. $[x]\leqslant x<[x]+1$.

3. 若 n 为自然数，则 $\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]$.

4. 若 n 为整数，则 $[n+x]=n+[x]$.

5. 若 n 为自然数，则 $\sum_{k=0}^{n-1}\left[a+\frac{k}{n}\right]=[na]$.

6. 当 x 为整数时，$[-x]=-[x]$，
当 x 为非整数时，$[-x]=-[x]-1$.

7. $[2x]+[2y]\geqslant[x]+[x+y]+[y]$.

8. $[x]-[y]=[x-y]$ 或 $[x-y]+1$，且
$[x-y]\leqslant[x]-[y]\leqslant[x-y]+1$.

9. $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

10. 素数 p 在乘积 $n!$ 中的最高次幂为

$$p(n!)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^m}\right],$$

式中 $p^m\leqslant n<p^{m+1}$.

高斯函数(Gauss function) 即“整数部分函数”.

小数部分函数(decimal part function) 亦称分数部分函数. 一种特殊的数论函数. x 的小数部分记为 $\{x\}$，或记为 $\langle x\rangle$，读作 x 的小数部分(或分数部分). 小数部分函数被定义为

$$\{x\}=x-[x].$$

$\{x\}$ 只能是 0 或正的纯小数，即 $\{x\}$ 满足 $0\leqslant\{x\}<1$.

小数部分函数 $\{x\}$ 有以下性质：

1. 若 n 为整数，则 $\{n+x\}=\{x\}$.

2. $\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}$.

3. $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y] & (\{x\}+\{y\}<1),\\ [x]+[y]+1 & (\{x\}+\{y\}\geqslant 1).\end{cases}$

4. n 为自然数，则 $\sum_{k=0}^{n-1}\{k/n\}=(n-1)/2$.

分数部分函数(fraction part function) 即“小数部分函数”.

除数函数(divisor function) 亦称因数个数函数. 重要的数论函数之一. 除数函数 $d(n)$ 表示正整数 n 的正因数个数，即

$$d(n)=\sum_{d|n}1.$$

符号 $\sum_{d|n}$ 表示和式中的 d 经过 n 的所有因数，函数 $d(n)$ 称为除数函数. 如 $d(1)=1, d(2)=2, d(3)=2, d(4)=3$. 函数 $d(n)$ 是一个积性函数，但非完全积性函数. 设自然数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ (对所有 i，有 $\alpha_i\geqslant 1$，且当 $i\neq j$ 时，$p_i\neq p_j$)，则

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

对任意正整数 m, n，有 $d(mn)\leqslant d(m)d(n)$.

因数个数函数(factor single function) 即“除数函数”.

因数和函数(factor sum function) 亦称除数和函数. 重要的数论函数之一. 指正整数 n 的所有正因数之和. 因数和函数被定义为

$$\sigma(n)=\sum_{d|n}d,$$

例如 $\sigma(24)=1+2+3+4+6+8+12+24=60$.

如果自然数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则

$$\sigma(n)=\sum_{d|n}d=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

因数和函数是积性函数，但不是完全积性函数.

除数和函数(divisor sum function) 即“因数和函数”.

广义因数和函数(generalized factor sum function) 亦称广义除数和函数. 重要的数论函数之一. n 是正整数，而 α 是非负整数的函数，则

$$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha.$$

符号 $\sum_{d|n}$ 表示和式中的 d 经过 n 的所有因数，函数

$\sigma_\alpha(n)$称为广义因数和函数. 函数$\sigma_\alpha(n)$是一个积性函数,但不是完全积性函数. 设自然数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则

$$\sigma_\alpha(n)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{k}\dfrac{p_i^{\alpha(\alpha_i+1)}-1}{p_i^\alpha-1} & (\alpha\neq 0),\\ \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1) & (\alpha=0).\end{cases}$$

当 $\alpha=0$ 时,函数 $\sigma_\alpha(n)$为除数函数 $d(n)$,即

$$\sigma_0(n)=d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

当 $\alpha=1$ 时,函数 $\sigma_\alpha(n)$为因数和函数 $\sigma(n)$,即

$$\sigma(n)=\sum_{d|n}d.$$

广义除数和函数(generalized divisor sum function) 即"广义因数和函数".

素因数个数函数(prime factor numbers function) 一种特殊的数论函数. 素因数个数函数 $\Omega(n)$表示正整数 n 的所有素因数的个数(按重数计算). 设 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则 $\Omega(n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$. 并规定 $\Omega(1)=0$.

素因数个数函数 $\Omega(n)$有如下性质:

1. $\Omega(n)$不是积性函数.

2. $\sum\limits_{n\leqslant x}\Omega(n)=x\ln\ln x+c_1x+o(x)$,其中 c_1 为正常数.

3. $\sum\limits_{n\leqslant x}\Omega^2(n)=x(\ln\ln x)^2+c_2x\ln\ln x+o(x)$,其中 c_2 是正常数.

4. $\sum\limits_{n\leqslant x}(\Omega(n)-\ln\ln x)^2=x\ln\ln x+o(x)$.

5. 任给 $\varepsilon>0$,则在区间$[1,x]$中,使得

$$|\Omega(n)-\ln\ln n|>(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

的 n 的个数为 $o(x)$,$x\to\infty$.

相异素因数个数函数(different prime factor numbers function) 一种特殊的数论函数. 相异素因数个数函数 $\omega(n)$表示正整数 n 的所有不同素因数的个数. 设 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则 $\omega(n)=k$. 当 $n=1$ 时,规定 $\omega(1)=0$.

相异素因数个数函数 $\omega(n)$有以下性质:

1. $\omega(n)$不是积性函数.

2. $\sum\limits_{n\leqslant x}\omega(n)=x\ln\ln x+c_1x+o(x)$

(c_1 为正常数).

3. $\sum\limits_{n\leqslant x}\omega^2(n)=x(\ln\ln x)^2+o(x\ln\ln x)$.

4. $\sum\limits_{n\leqslant x}(\omega(n)-\ln\ln x)^2=o(x\ln\ln x)$.

5. 任给 $\varepsilon>0$,则在区间$[1,x]$中,使得

$$|\omega(n)-\ln\ln x|>(\ln\ln n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

的素数的个数为 $o(x)$,$x\to\infty$(此即哈代-拉马努金定理).

6. $\sum\limits_{d|n}\mu^2(d)=2^{\omega(n)}$ 及

$$\sum_{t|n}\mu(t)d(t)=(-1)^{\omega(n)}.$$

欧拉函数(Euler function) 重要的数论函数之一. 欧拉函数 $\varphi(n)$表示所有不超过正整数 n,且与 n 互素的正整数的个数. 如 $\varphi(2)=1$,$\varphi(3)=2$,$\varphi(4)=2$,$\varphi(5)=4$ 等. 为了计算的需要,还规定 $\varphi(1)=1$. 如果自然数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1),$$

或 $$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

特别地,当 p 为素数时,有

$$\varphi(p)=p-1,\quad \varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1).$$

欧拉函数有如下性质:

1. 欧拉函数 $\varphi(n)$是积性函数,但不是完全积性函数.

2. 如果$(m,n)=d$,则 $\varphi(mn)=\dfrac{d\cdot\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(d)}$.

3. 如果整数 $n\geqslant1$,则 $n=\sum\limits_{d|n}\varphi(d)$.

4. 如果整数 $n\geqslant1$,则 $\varphi(n)=n\sum\limits_{d|n}\dfrac{\mu(d)}{d}$.

5. 如果整数 $n\geqslant1$,则

$$\Phi(n)=\sum_{m\leqslant n}\varphi(m)=\frac{3n^2}{\pi^2}+O(n\ln n).$$

1760 年,欧拉(Euler,L.)提出了关于表示所有不大于 n 且与 n 互素的正整数个数的问题. 10 年后的 1770 年,柏林出版社出版了欧拉的数论专著《代数指南》(Anleitung zur algebra),此命题被收入该书中. 1801 年,高斯(Gauss,C. F.)在他的《算术研究》一书中证明了

$$\sum_{d|n}\varphi(d)=n,$$

并将 $\varphi(n)$命名为欧拉函数. 关于欧拉函数,1932 年,莱默(Lehmer,D. H.)提出猜想:不存在复合数 n,使得$\varphi(n)\mid(n-1)$. 这个猜想至今尚未解决.

默比乌斯函数(Möbius function) 重要的数论函数之一. 默比乌斯函数 $\mu(n)$定义为:

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & (n=1);\\ (-1)^r & (n\text{ 是 }r\text{ 个不同素数的乘积});\\ 0 & (n\text{ 能被一素数的平方整除}).\end{cases}$$

默比乌斯函数有如下性质:

1. 当 p 为素数时,则有 $\mu(p)=-1$.

2. $\mu(n)$是积性函数,但不是完全积性函数. 且当 $f(n)$为可乘函数,$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为其标准分解式时,有

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=(1-f(p_1))(1-f(p_2))\cdots(1-f(p_k)).$$

3. 若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式，则有

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}0 & (n>1),\\ 1 & (n=1);\end{cases}$$

并有

$$\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right) & (n>1),\\ 1 & (n=1).\end{cases}$$

4. 若 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 是任意 n 个正整数，$f(\delta_1)$，$f(\delta_2),\cdots,f(\delta_n)$是任意 n 个复数，

$$S'=\sum_{\delta_i=1}f(\delta_i),S_d=\sum_{d|\delta_i}f(\delta_i),$$

其中 $\sum\limits_{\delta_i=1}$ 表示对等于1的一切 δ_i 求和，$\sum\limits_{d|\delta_i}$ 表示对给定的 d 且为 d 的倍数的一切 δ_i 求和，则

$$S'=\sum_{k=1}^{r}\mu(d_k)S_{d_k},$$

其中 $d_1,d_2,\cdots,d_r$ 是至少能整除一个 δ_i $(i=1,2,\cdots,r)$的一切正整数.

5. 当 $x\geqslant1$ 时，$\left|\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\right|\leqslant1$.

6. 当 $x\to\infty$时，有 $M(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\mu(n)=O(x)$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}$.

8. 若 $x\geqslant1$，则有 $\sum\limits_{n\leqslant x}|\mu(n)|=\frac{6}{\pi^2}x+O(\sqrt{x})$.

9. 若 $x\geqslant1$，则有 $\sum\limits_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]=1$.

默比乌斯变换(Möbius transformation)　简称默氏变换. 数论中的一种重要变换. 若数论函数$f(n)$和$g(n)$适合

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)=\sum_{d|n}g\left(\frac{n}{d}\right),$$

则称 $f(n)$为 $g(n)$的默比乌斯变换，而称 $g(n)$为 $f(n)$的默比乌斯逆变换. 例如

$$d(n)=\sum_{d|n}1=\sum_{d|n}\mu(d),$$

$d(n)$是 $\mu(n)$的默氏变换，而 $\mu(n)$是 $d(n)$的默氏逆变换.

$$I(n)=\sum_{d|n}\mu(d)=\left[\frac{1}{n}\right],$$

$I(n)$是 $\mu(n)$的默氏变换，而 $\mu(n)$则是 $I(n)$的默氏逆变换.

$$\ln n=\sum_{d|n}\Lambda(d),$$

$\ln n$是曼戈尔特函数 $\Lambda(n)$的默氏变换，而 $\Lambda(n)$是 $\ln n$ 的默氏逆变换.

$$\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\ln\frac{n}{d}=\sum_{d|n}-\mu(d)\ln d,$$

$\Lambda(n)$又是$-\mu(n)\ln n$ 的默氏变换.

默比乌斯变换有下列基本性质：

1. $f(n)$的默氏变换及逆变换是惟一存在的.

2. 当 $f(n)$是积性函数时，其默氏变换及逆变换都是积性函数.

3. 若 $g(n)$及 $g_1(n)$各为 $f(n)$及 $f_1(n)$的默氏变换，则

$$\sum_{d|n}g(d)f_1\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}f(d)g_1\left(\frac{n}{d}\right).$$

4. $f(n)$的默氏变换的默氏变换为

$$\sum_{d_1|n}f(d_1)d\left(\frac{n}{d_1}\right).$$

常用的默比乌斯变换如下表：

$g(n)=\sum\limits_{d\mid n}f(d)$	$f(n)=\sum\limits_{d\mid n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$
$g(n)$	$f(n)$
$\mu(n)$	$\mu(n)d(n)$
$\begin{cases}1 & (n=1)\\ 0 & (n\neq1)\end{cases}$	$\mu(n)$
1	$\begin{cases}1 & (n=1)\\ 0 & (n\neq1)\end{cases}$
$d(n)$	1
$\varphi(n)$	$\varphi(n)\prod\limits_{p\mid n}\frac{p-2}{p-1}$
n	$\varphi(n)$
$\sum\limits_{d\mid n}d$	n
n^{λ}	$\sum\limits_{\substack{(d,n)=1\\ d\leqslant n}}d^{\lambda}$
$\sum\limits_{d\mid n}d^{\lambda}$	n^{λ}
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}\prod\limits_{p\mid n}(1-p)$
$\ln n$	$\Lambda(n)$
$\Lambda(n)$	$-\mu(n)\ln n$

狄利克雷乘积(Dirichlet product)　亦称卷积. 数论函数的重要运算之一. 设 $f(n)$和 $g(n)$是两个数论函数，则

$$h(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

称为 $f(n)$与 $g(n)$的狄利克雷乘积，记为 $h=f*g$. 设 $U(n)\equiv1$，

$$I(n)=\left[\frac{1}{n}\right]=\begin{cases}1 & (n=1),\\ 0 & (n>1).\end{cases}$$

及 $\mu(n)$为默比乌斯函数，则 $\mu*U=I$，亦即

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & (n=1),\\ 0 & (n>1).\end{cases}$$

狄利克雷乘积有以下基本性质：

1. 满足结合律. 设 f,g,h 为任意三个数论函数,则 $(f*g)*h=f*(g*h)$.

2. 满足交换律. 设 f,g 为任意二个数论函数,则 $f*g=g*f$.

3. 对于所有的数论函数 $f(n)$,均有 $f(n)*I(n)=I(n)*f(n)=f(n)$,故 $I(n)$ 在狄利克雷乘积中有单位元的作用,简称 $I(n)$ 为单位数论函数,或称 $I(n)$ 为卷积单位元.

4. 若 $f(n)$, $g(n)$ 均为积性函数,则 $f*g$ 亦为积性函数. 反之,若 $g(n)$ 与 $(f*g)(n)$ 都是积性函数,则 $f(n)$ 亦为积性函数. 特别地,当 $F=f*\mu$ 为积性函数时, $f(n)$ 亦为积性函数.

5. 若 $g(n)$ 是完全积性函数,且 $h=f*g$,则 $f=h*\mu g$,即若

$$h(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

则
$$f(n)=\sum_{d|n}h(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

常用的狄利克雷乘积有:

1. $\mu*U=I$,即 $\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & (n=1),\\ 0 & (n>1).\end{cases}$

2. $\varphi*U=N$,其中 $N(n)=n$,即 $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.

3. $\mu*N=\varphi$,其中 $N(n)=n$,即

$$\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=\sum_{d|n}\mathrm{d}\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\varphi(n).$$

4. $\Lambda(n)*U=\ln n$,即 $\sum_{d|n}\Lambda(d)=\ln n$.

5. $(\ln n)*\mu(n)=\Lambda(n)$,即

$$\sum_{d|n}\mu(d)\ln\frac{n}{d}=\Lambda(n).$$

狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)的学术成果遍布数学各个分支,尤以数论和位势论而著名. 在他1863年出版的《数论讲义》中,首次引入数论函数的积运算.

卷积(convolution) 即"狄利克雷乘积".

卷积单位元(convolution unit element) 见"狄利克雷乘积".

单位数论函数(unit number-theoretic function) 见"狄利克雷乘积".

狄利克雷逆(Dirichlet inverse) 数论函数的重要运算之一. 即狄利克雷乘积的逆运算. 设 $f(n)$ 为数论函数,若存在数论函数 $g(n)$,使得 $f*g=I$,则称 $g(n)$ 为 $f(n)$ 的狄利克雷逆,或简称逆,记为 $f^{-1}(n)=g(n)$. 例如, $\mu*U=I$,故 $U(n)$ 的逆 $\mu^{-1}(n)=U(n)\equiv 1$. 反之, $U(n)\equiv 1$ 的逆 $U^{-1}(n)=\mu(n)$. 从定义及交换律可知,若 g 为 f 的逆,则 f 亦为 g 的逆,即若 $g=f^{-1}$,则 $f=g^{-1}$. 狄利克雷逆有下述性质:

1. 若数论函数 $f(n)$ 满足 $f(1)\neq 0$,则存在惟一的逆 $f^{-1}(n)$,且满足

$$f^{-1}(1)=1/f(1),$$
$$f^{-1}(n)=\frac{-1}{f(1)}\sum_{\substack{d|n\\ d<n}}f\left(\frac{n}{d}\right)f^{-1}(d)\quad(n>1).$$

故知积性函数 f 必有逆 f^{-1},且 f^{-1} 仍为积性函数.

2. 若数论函数 $f(n)$, $g(n)$ 满足 $f(1)\neq 0$, $g(1)\neq 0$,则 $(f*g)^{-1}=f^{-1}*g^{-1}$.

3. 若 $f(n)$ 为积性函数,则 $f(n)$ 为完全积性函数的充分必要条件是 $f^{-1}(n)=\mu(n)f(n)$. 特别地,当 $g(n)$ 为完全积性函数,且 $h=f*g$ 时,有 $f=h*\mu g$.

重要的狄利克雷逆有:

1. 设 $\sigma_\lambda(n)=\sum_{d|n}d^\lambda$,则

$$\sigma_\lambda^{-1}(n)=\sum_{d|n}d^\lambda\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

特别地,当 $\lambda=0$ 或 1 时,得到

$$d^{-1}(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

及
$$\sigma^{-1}(n)=\sum_{d|n}d\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

2. 设 $\varphi(n)$ 为欧拉函数,则 $\varphi^{-1}(n)=\sum_{d|n}d\mu(d)$.

3. 默比乌斯函数 $\mu(n)$ 的逆 $\mu^{-1}(n)=U(n)\equiv 1$.

4. 刘维尔函数 $\lambda(n)$ 的逆 $\lambda^{-1}(n)=\mu(n)\lambda(n)$.

5. 设 $g(n)=\lambda*U=\begin{cases}1 & (n=k^2),\\ 0 & (n\neq k^2),\end{cases}$

则
$$g^{-1}(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\lambda(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

广义狄利克雷乘积(generalized Dirichlet product) 狄利克雷乘积的一种推广. 设 $f(n)$ 为数论函数, $H(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上定义的实函数,称

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)H\left(\frac{x}{n}\right)$$

为 f 与 H 的广义狄利克雷乘积. 记为 $(f\circ H)(x)$. 当 x 为整数, $(f\circ H)(x)=(f*H)(x)$.

广义狄利克雷乘积有如下性质:

1. 若 f,g 为数论函数, $H(x)$ 是定义在开区间 $(0,+\infty)$ 上的实函数,则 $f\circ(g\circ H)=(f*g)\circ H$. 特别地,令 $f=g=U(n)$,

$$H(x)=U(x)=\begin{cases}0 & (0<x<1),\\ 1 & (x\geqslant 1)\end{cases}$$

时,得
$$\sum_{n\leqslant x}d(n)=\sum_{n\leqslant x}\left[\frac{x}{n}\right].$$

2. 若 f 存在 f^{-1},则

$$G(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n)H\left(\frac{x}{n}\right)$$

等价于
$$H(x)=\sum_{n\leqslant x}f^{-1}(n)G\left(\frac{x}{n}\right).$$

特别地,当 $f(n)$ 为完全积性函数时,

$$G(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n)H\left(\frac{x}{n}\right),$$
$$H(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)f(n)G\left(\frac{x}{n}\right).$$

3. 设 $h=f*g$，$H(x)=\sum_{n\leqslant x}h(n)$，
$$F(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n),G(x)=\sum_{n\leqslant x}g(n),$$
则 $H(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n)G\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant x}g(n)F\left(\frac{x}{n}\right).$
特别地，当 $n\geqslant 1$ 时，
$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]=1.$$

4. 设 $h=f*g$，$H(x)=\sum_{n\leqslant x}h(n)$，
$$F(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n),G(x)=\sum_{n\leqslant x}g(n),$$
且正整数 a,b 满足 $ab=x$，则
$$H(x)=\sum_{n\leqslant x}f(n)G\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\leqslant x}g(n)F\left(\frac{x}{n}\right)-F(a)F(b).$$

广义狄利克雷乘积有下述应用性结论：

1. $\sum_{n\leqslant x}d(n)=x\ln x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x})$ $(x\geqslant 1)$，式中 γ 为欧拉常数.

2. $\sum_{n\leqslant x}\sigma(n)=\frac{1}{12}\pi^2x^2+O(x\ln x)$ $(x\geqslant 2)$.

3. $\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\ln x)$ $(x\geqslant 1)$.

4. $Q(x)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ m^2\nmid n}}1=\frac{6}{\pi^2}x+O(\sqrt{x})$
$(x\geqslant 1,m>1)$，

其中 $Q(x)$ 表示不超过 x 的无平方的因子的个数.

曼戈尔特函数(Mangoldt function)　重要的数论函数之一.曼戈尔特函数 $\Lambda(n)$ 定义为：
$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p & (n=p^m,m\geqslant 1,p\text{ 是素数}),\\ 0 & (n\neq p^m).\end{cases}$$
如 $\Lambda(1)=0$，$\Lambda(2)=\ln 2$，$\Lambda(3)=\ln 3$，$\Lambda(4)=\ln 2$ 等.

曼戈尔特函数有如下性质：

1. $\Lambda(n)$ 不是积性函数.

2. $\Lambda(n)=\sum_{d\mid n}\mu(n)\ln\frac{n}{d}$.

3. $\sum_{d\mid n}\Lambda(d)=\ln n$.

4. $\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=O(x)$，$\sum_{n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\ln x+O(1)$.

5. 设 $\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p$，$\Psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$，则
$$\sum_{n\leqslant x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right]=\sum_{n\leqslant x}\ln n,$$
且当 $x\to\infty$ 时，$\Psi(x)\sim x$，$\theta(x)\sim x$ 并与 $\pi(x)\sim x/\ln x$ 相互等价.

6. 参见“塞尔伯格渐近公式”.

曼戈尔特函数是由曼戈尔特(Mangoldt，H. C. F. von)于 1897 年研究素数论时提出的.

积性函数(multiplicative function)　亦称可乘函数.重要的数论函数之一.如果数论函数 $f(n)$ 不恒为 0，且当 $(m,n)=1$ 时，$f(mn)=f(m)f(n)$，则称函数 $f(n)$ 为积性函数.如果一个积性函数，对任意正整数 m,n 恒有 $f(mn)=f(m)f(n)$，则称 $f(n)$ 为完全(或绝对)积性函数.例如，$\sigma(n)$，$d(n)$ 是积性函数，但不是完全积性函数；n^λ，$I(n)$ 是完全积性函数.

积性函数有以下性质：

1. 若 f,g 为积性(或完全积性)函数，则 fg 及 $f/g(g\neq 0)$ 亦为积性(或完全积性)函数.

2. 设 $f(n)$ 为积性函数，则必有 $f(1)=1$，且当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是标准分解式时，$f(n)=f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2})\cdots f(p_s^{\alpha_s})$.

3. $f(n)$ 为完全积性函数的充分必要条件是对任意的 p 及 $k\geqslant 1$，恒有 $f(p^k)=f^k(p)$.

4. 积性函数 $f(n)$ 的默比乌斯变换
$$F(n)=\sum_{d\mid n}f(d)$$
亦为积性函数，并有
$$F(n)=\sum_{d\mid n}f(d)=\prod_{p^\alpha\parallel n}(1+f(p)+\cdots+f(p^\alpha)),$$
式中 $p^\alpha\parallel n$ 表示 $p^\alpha\mid n$，但 $p^{\alpha+1}\nmid n$.

5. 若 $g(n)$，$h(n)$ 都是积性函数，则
$$f(n)=\sum_{d\mid n}g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d\mid n}g\left(\frac{n}{d}\right)h(d)$$
也是积性函数.

6. 若 $f(n)$ 是积性函数，则
$$\sum_{d\mid n}\mu(d)f(d)=\prod_{p\mid n}(1-f(p)),$$
式中 p 取 n 的不同素因子.

7. 若 $f(n)$ 是积性函数，则
$$f((m,n))f([m,n])=f(m)f(n).$$

可乘函数(multiplicative function)　即“积性函数”.

完全积性函数(completely multiplicative function)　见“积性函数”.

绝对积性函数(absolute multiplicative function)　见“积性函数”.

刘维尔函数(Liouville function)　重要的数论函数之一.设 $\Omega(n)$ 表示正整数 n 的全部素因子的个数(要计算重数)，则数论函数 $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$ 称为刘维尔函数.如 $\lambda(1)=1$，$\lambda(2)=-1$，$\lambda(3)=-1$，$\lambda(4)=1$ 等.

刘维尔函数有下列性质：

1. 刘维尔函数是积性函数.

2. $\mu(n)=\sum_{d^2|n}\mu(d)\lambda\left(\frac{n}{d^2}\right)$.

3. $\sum_{k=1}^{[x]}\lambda(k)\left[\frac{x}{k}\right]=[\sqrt{x}],x\geqslant 1$.

4. 设 $L(x)=\sum_{n\leqslant x}\lambda(n)$,则

$L(x)=O(x)(x\to\infty)$,并与

$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=O(x)\ (x\to\infty)$

等价.

5. 当 $n=k^2$ 时, $\sum_{d|n}\lambda(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=1$.

当 $n\neq k^2$ 时, $\sum_{d|n}\lambda(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=0$.

刘维尔(Liouville,J.)于 1836 年创刊《纯粹与应用数学杂志》,并任该杂志主编,他的许多数学论文均发表于此刊物.该函数即在此期刊一篇论文中被首次定义.

塞尔伯格渐近公式(Selberg asymptotic formula) 素数论中的重要公式.设 $x\geqslant 1$,且

$$\Psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\ln n,$$

则塞尔伯格渐近公式为

$$\Psi(x)\ln x+\sum_{n\leqslant x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)\ln n=2x\ln x+O(x)$$

或 $\sum_{n\leqslant x}\ln^2 n+\sum_{mn\leqslant x}\ln m\ln n=2x\ln x+O(x)$.

此公式是塞尔伯格(Selberg,A.)将曼戈尔特函数通过默比乌斯反演公式而导出,塞氏还巧妙地运用部分求和法由此公式导出 $\theta(x)\sim x$,首次成功地不用函数论方法而证明了素数定理.此公式载于塞氏的论文《等差数列的素数定理的初等证明》中.

吕卡序列(Lucas sequence) 判定大素数的重要工具.设整系数一元二次方程 $x^2-Px+Q=0$,$(P,Q)=1$ 的两根为 α,β,则序列

$$u_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\quad(n=0,1,\cdots)\qquad(1)$$

和 $$v_n=\alpha^n+\beta^n\quad(n=0,1,\cdots)\qquad(2)$$

称为吕卡序列.这类序列在大整数的分解和解不定方程等方面都有用.从定义可知序列(1)和(2)分别为以下整数序列:

$$u_{n+2}=Pu_{n+1}-Qu_n,u_0=0,u_1=1\qquad(3)$$

和 $$v_{n+2}=Pv_{n+1}-Qv_n,v_0=2,v_1=P,\qquad(4)$$

序列(3)和(4)称为循环序列.序列 u_n 和 v_n 还满足以下诸关系式:

$u_{2n}=u_nv_n$;

$v_n^2-(\alpha-\beta)^2u_n^2=4Q^n$;

$2u_{m+n}=u_mv_n+u_nv_m$;

$2v_{m+n}=Du_mu_n+v_mv_n,D=P^2-4Q$;

$u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}=Q^{n-1}$.

设素数 $p\nmid 2Q$,若 u_l 是序列 $u_1,u_2,\cdots$ 中能被 p 整除的足标最小的数,则 $p|u_n$ 的充分必要条件是 $l|n$.应用二次剩余理论,吕卡序列在大整数的分解中有极重要的用途.设 u_n 是一个吕卡序列,若 q 是一个奇素数,且 $q\nmid Q,D=P^2-4Q$,则

$$q|u_{q-\left(\frac{D}{q}\right)},$$

其中 $\left(\frac{D}{q}\right)$ 是勒让德符号,利用这个结果就较易得到某些大整数的一个素因子.例如,取 $P=4,Q=1$,利用吕卡序列 $v_0=2,v_1=4,v_{n+2}=4v_{n+1}-v_n$. 1930 年,莱默(Lehmer,D. H.)给出了判别梅森数 2^q-1 是否为素数的一个有效方法:设 q 是一个奇素数,定义序列 $L_0=4,L_{n+1}=\langle L_n^2-2\rangle_{2^q-1}$,此处 $\langle x\rangle_m$ 表示 x 对模 m 的剩余,则 2^q-1 是素数的充分必要条件是 $L_{q-2}=0$.上述方法称为莱默判别法.举例说明如下:为了确定梅森数 $M_7=2^7-1=127$ 是否素数?设 $L_0=4$,并通过公式 $L_{n+1}=\langle L_n^2-2\rangle_{2^7-1}$ 计算 $L_i(i=0,1,2,\cdots,5)$ 之值,得序列:

$L_1=\langle L_0^2-2\rangle_{127}=\langle 4^2-2\rangle_{127}=\langle 14\rangle_{127}=14$,

$L_2=\langle L_1^2-2\rangle_{127}=\langle 14^2-2\rangle_{127}=\langle 194\rangle_{127}=67$,

$L_3=\langle L_2^2-2\rangle_{127}=\langle 67^2-2\rangle_{127}=\langle 4\ 487\rangle_{127}=42$,

$L_4=\langle L_3^2-2\rangle_{127}=\langle 42^2-2\rangle_{127}$

$=\langle 1\ 762\rangle_{127}=111$,

$L_5=\langle L_4^2-2\rangle_{127}=\langle 111^2-2\rangle_{127}$

$=\langle 12\ 319\rangle_{127}=0$.

由于 $L_{q-2}=L_{7-2}=L_5=0$,故知 M_7 是素数.本例似乎并未显示出莱默判别法的优越性,但在判定很大的梅森数时,如判定 687 位数字的梅森数 $M_{2281}=2^{2281}-1$ 是否为素数时,即可显示其重要作用,虽然 M_{2281} 判定的计算量很大,但使用电子计算机来完成将是不困难的.事实上人们后来知道的那些更大的梅森素数,都是通过高速电子计算机采用此法来完成的.

莱默判别法(Lehmer test) 见"吕卡序列".

陷门单向函数(trap-door unilateral function) 一种重要的数论函数.指满足下列条件的数论函数 $f(n)$:

1. 对 $f(n)$ 的定义域中的每一个 n,均存在逆函数 $f^{-1}(l)$,使得 $f^{-1}[f(n)]=f[f^{-1}(n)]=n$.

2. $f(n)$ 与 $f^{-1}(l)$ 都容易计算.

3. 仅根据已知的计算 $f(n)$ 的算法,去找出计算 $f^{-1}(l)$ 的容易算法是很困难的.

陷门单向函数在密钥码理论中占有十分重要的地位.传统的密钥码,是收发双方都有相同的加密密钥和相同的解密密钥,致使整个保密系统密钥数量很大,难于分配和管理,易于失密. 1976 年,由迪费(Diffie,W.)和海尔曼(Hellman)提出了上述陷门单向函数作为公开密钥码的理论基础,将传统密钥体

制改为公开密钥体制. 其特点是将加密密钥和解密密钥分开,加密密钥可以公开,而解密密钥严格保密. 例如,某个部门,下设 $A,B,C,\cdots$若干机构,规定各机构的陷门单向函数分别为 $f_A(n),f_B(n),f_C(n),\cdots$,各函数的算法作为各部门的加密编码方法予以公开,而诸对应的逆函数 $f_A^{-1}(l),f_B^{-1}(l),f_C^{-1}(l),\cdots$的容易算法则是保密的. 这样,部门中任一机构,都可给其中任一机构发保密信,如 B 向 A 发保密信的明文为 n,代入 A 所公开的陷门单向函数 $f_A(n)$,得$f_A(n)=m$,m 即为密文,由于只有 A 部门知道$f_A^{-1}(m)$的容易算法,因此,A 可由 $f_A^{-1}(m)=f_A^{-1}(f_A(n))=n$ 而脱密. 此外,陷门单向函数还可用于部门内的各成员彼此发签名密信. 假设 B 向 A 发签名信,则 B 先用 $f_B^{-1}(l)$对明文 n 加密,得 $f_B^{-1}(n)=m$,再用 $f_A(n)$对 m 加密得$f_A(m)=t$. A 收到 t 后,由 $f_A^{-1}(t)=m$ 得 $f_B(m)=f_B(f_B^{-1}(n))=n$,即可读到 B 发出的原信了. 因为只有 B 才能发这样双重加密信,所以 B 的签名是无法伪造的.

1977 年,里凡斯特(Rivest)首先找到了一类便于应用的陷门单向函数. 设 $m=pq$,p,q 为奇素数,若正整数 s 满足$(s,p-1)=(s,q-1)=1$,则可使$f(n)=\langle n^s\rangle_m$是闭区间$[1,m-1]$上的陷门单向函数. 通常称 RSA 体制. 例如,可设 p,q 分别为 64 位和 65 位的素数,则 $m=pq$ 是一个 130 位的数,取 $s=9\ 007$,编码方法是将需要加密的拼音文字首先译成一个数 n. 如果 $n\geqslant m$,可将 n 分段为 $n_i\ (i=1,2,\cdots)$,且 $0<n_i<m$. 用电子计算机计算$\langle n_i^{9007}\rangle_m$ 只需几秒钟的时间,但是,欲分解这个 130 位的大数,几乎是不可能的. 这就是陷门单向函数用于公开密钥码的一个实例.

高 次 剩 余

二次剩余(quadratic residue)　亦称平方剩余. 与二次同余式有关的重要概念. 设 m 是大于 1 的整数,如果二次同余式

$$x^2\equiv n(\bmod\ m),(m,n)=1 \qquad (1)$$

有解,则称 n 为模 m 的二次剩余;如果无解,则称 n 为模 m 的二次非剩余(或平方非剩余). 二次剩余有如下性质:

1. 设 p 为素数,则模 p 的缩系 $1,2,\cdots,p-1$ 中,有$(p-1)/2$ 个模 p 的二次剩余和$(p-1)/2$ 个模 p 的二次非剩余,且序列 $1,\langle 2^2\rangle_p,\cdots,\langle((p-1)/2)^2\rangle_p$ 即为模 p 缩系中的全部二次剩余.

2. 设 p 为素数,n 为整数,则 n 为模 p 的二次剩余的充分必要条件是 $n^{(p-1)/2}\equiv 1(\bmod p)$;而 n 为模 p 的二次非剩余的充分必要条件是

$$n^{(p-1)/2}\equiv -1(\bmod p).$$

3. 设 p 为素数,则模 p 的两个二次剩余之积仍为模 p 的二次剩余;模 p 的两个二次非剩余之积亦为模 p 的二次剩余;模 p 的一个二次剩余和一个二次非剩余之积为模 p 的二次非剩余.

平方剩余(quadratic residue)　即“二次剩余”.

二次非剩余(quadratic non-residue)　见“二次剩余”.

平方非剩余(quadratic non-residue)　见“二次剩余”.

勒让德符号(Legendre symbol)　数论中的重要工具. 若 p 为奇素数,a 为整数,称符号$\left(\frac{a}{p}\right)$为 a 关于 p 的勒让德符号,其值规定如下:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1\ (p\nmid a,\text{且}\langle a\rangle_p\text{是二次剩余});\\ -1\ (p\nmid a,\text{且}\langle a\rangle_p\text{是二次非剩余});\\ 0\ (p\mid a).\end{cases}$$

勒让德符号具有以下性质:

1. $a_1\equiv a_2(\bmod p)$,且 $p\nmid a_1$ 和 $p\nmid a_2$ 时,有

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)=\left(\frac{a_2}{p}\right).$$

2. 若 $p\nmid a$,有$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p)$,此即欧拉判别准则.

3. 若 $p\nmid a$,有$\left(\frac{a^2}{p}\right)=1$.

4. $\left(\frac{1}{p}\right)=1,\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

5. 若 $p\nmid a_i(i=1,2,\cdots,k)$,则

$$\left(\frac{a_1a_2\cdots a_k}{p}\right)=\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{a_k}{p}\right),$$

即$\left(\frac{a}{p}\right)$为积性函数.

勒让德(Legendre,A.-M.)于 1798 年发表的专著《关于数论的研究》中,系统地整理了数论研究的成果,书中创用了符号$\left(\frac{a}{p}\right)$,对于计算 a 是否为模 p 的二次剩余带来很大方便.

欧拉判别准则(Euler criterion)　亦称欧拉判别条件. 判别二次剩余的重要准则之一. 其准则为:设 p 是奇素数,a 是整数,$p\nmid a$,则

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}(\bmod p).$$

其等价命题是:若 a 是二次剩余,则

$$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(\bmod p);$$

若 a 是二次非剩余,则

$$a^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\bmod p).$$

由判别准则可以推知:

1. 当 $p\nmid a$ 及 $p\nmid b$ 时,

$$\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right).$$

2. 若 p 为奇素数，则

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=\begin{cases}1 & (p\equiv1(\mathrm{mod}\,4)),\\ -1 & (p\equiv3(\mathrm{mod}\,4)).\end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=\begin{cases}1 & (p\equiv1\text{ 或 }7(\mathrm{mod}\,8)),\\ -1 & (p\equiv3\text{ 或 }5(\mathrm{mod}\,8)).\end{cases}$$

此判别准则最先见于欧拉(Euler，L.)有关数论的论文中，后收入欧拉的数论专著《代数指南》.

欧拉判别条件(Euler criterion condition)　即"欧拉判别准则".

高斯判别准则(Gauss criterion)　亦称高斯引理. 判别二次剩余的重要准则之一. 其准则为：设 p 为奇素数，n 为整数，$(p,n)=1$，且 $(p-1)/2$ 个整数

$$\langle n\rangle_p,\langle 2n\rangle_p,\cdots,\left\langle\frac{(p-1)n}{2}\right\rangle_p$$

中的 m 个大于 $p/2$，则

$$\left(\frac{n}{p}\right)=(-1)^m.$$

应用高斯判别准则还可推得

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

这是判定二次剩余的一个重要结论. 设 p 是一个奇素数，如果 $(p-1)/2$ 个整数 $r_1,r_2,\cdots,r_{(p-1)/2}$ 使得 $p-1$ 个整数 $\pm r_1,\pm r_2,\cdots,\pm r_{(p-1)/2}$ 是模 p 的一组简化系，则有下述结果：设 $p\nmid n,r_1,r_2,\cdots,r_{(p-1)/2}$ 满足上述条件，记

$$nr_i\equiv(-1)^{e_i}r_{i'}(\mathrm{mod}\,p)$$

$$\left(i=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2},1\leqslant i'\leqslant\frac{p-1}{2}\right),$$

则

$$\left(\frac{n}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{(p-1)/2}e_i}.$$

这是高斯引理的一个推广. 高斯判别准则是由高斯(Gauss，C. F.)提出并给予证明的，发表在他 1801 年所著的《算术研究》中.

高斯引理(Gauss lemma)　即"高斯判别准则".

二次互反律(quadratic reciprocity law)　数论发展史上占有中心位置的重要工具. 该定律断言：对 $(p,q)=1$ 的奇素数 p,q，有

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

这个定律反映出 p 与 q 之间的二次剩余关系. 当且仅当 $p\equiv q\equiv3(\mathrm{mod}\,4)$ 时，

$$\left(\frac{q}{p}\right)=-\left(\frac{p}{q}\right);$$

当 $p\equiv1$ 或 $q\equiv1(\mathrm{mod}\,4)$ 中至少有一个成立时，

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right).$$

二次互反律可以用来决定：

1. p 为素数时，整数 n 是否为模 p 的二次剩余.

2. 对整数 n，有哪些素数 p 能使 n 是模 p 的二次剩余.

1772 年，欧拉(Euler，L.)开始对二次互反律进行探讨，并在 1783 年的一篇论文中用五条定理对二次互反律给出了清楚的叙述. 遗憾的是他一直未能给出此定理的证明. 1785 年，勒让德(Legendre，A.-M.)重新发现这个定律，并予以证明，但证明不够完整. 1790 年，他提出把二次互反律表示为：当 p,q 是不同的奇素数时，

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

因而二次互反律亦称为二次剩余的勒让德符号的互反律. 二次互反律在初等数论中占有极重要的地位，因而引起数学家的广泛重视. 迪克森(Dickson，L. E.)说："它是数论中最重要的工具，并且在数论发展史上占有中心位置". 高斯(Gauss，C. F.)称它为数论中的黄金定律. 1796 年，高斯 19 岁时首次严格地证明了二次互反律，后来他又用完全归纳法证明了这个结论，并载入他的数论名著《算术研究》中. 高斯先后给出此定律 7 种以上的证法，其中有个证明是用高斯引理证得的. 他称这定律为数论之酵母，还相继引出了双二次互反律和三次互反律，以及与此相联系的双二次和三次剩余理论. 为了使三次和双二次剩余理论优美而简洁，高斯又发展了复整数和复整数论.

雅可比符号(Jacobi symbol)　勒让德符号的推广. 设 m 是大于 1 的奇数，且 m 的素因数分解式为 $m=p_1p_2\cdots p_k$(式中因数可以相同)，如果 $(a,m)=1$，则定义

$$\left(\frac{a}{m}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a}{p_i}\right)$$

为雅可比符号. m 是素数的雅可比符号即勒让德符号. 有的书上定义雅可比符号时，未要求 $(a,m)=1$，但规定：如果 $(a,m)>1$，则 $\left(\frac{a}{m}\right)=0$.

雅可比符号具有下列性质：

1. 设 m 为正奇数，则

$$\left(\frac{1}{m}\right)=1;\left(\frac{-1}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}.$$

2. 设 m,m_1 为正奇数：

1) 若 $n\equiv n_1(\mathrm{mod}\,m)$ 和 $(n,m)=1$，则

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{n_1}{m}\right);$$

2) 若 $(n,m)=(n,m_1)=1$，则

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m_1}\right)=\left(\frac{n}{mm_1}\right);$$

3) 若 $(n,m)=(n_1,m)=1$，则

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n_1}{m}\right)=\left(\frac{nn_1}{m}\right).$$

3. 设 m 为正奇数，则

$$\left(\frac{2}{m}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

4. 若 m,n 均为正奇数，则

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

5. 若 $(n,m)=(n_1,m)=1$，则：

1) $\left(\frac{n_1^2}{m}\right)=1$.

2) $\left(\frac{nn_1^2}{m}\right)=\left(\frac{n}{m}\right)$.

6. 若 $(n_1,m)=(n_2,m)=\cdots=(n_k,m)=1$，则

$$\left(\frac{n_1n_2\cdots n_k}{m}\right)=\left(\frac{n_1}{m}\right)\left(\frac{n_2}{m}\right)\cdots\left(\frac{n_k}{m}\right).$$

雅可比符号具有与勒让德符号相同的计算法则，当 m 为正奇数时，无需把 m 分解成素因数的乘积，计算起来更方便. 在计算勒让德符号时，必须时刻注意其分母是否素数，而雅可比符号的计算只需分母为正奇数，还可免去分解因数之劳. 如

$$\begin{aligned}\left(\frac{383}{443}\right)&=-\left(\frac{443}{383}\right)=-\left(\frac{60}{383}\right)=-\left(\frac{2^2}{383}\right)\left(\frac{15}{383}\right)\\&=-\left(\frac{15}{383}\right)=\left(\frac{383}{15}\right)=\left(\frac{8}{15}\right)=\left(\frac{2}{15}\right)=1.\end{aligned}$$

雅可比符号首次出现于雅可比(Jacobi, C. G. J.)在研究数论的二次互反律时于 1827 年发表的论文中.

二元周期序列(binary period sequence)　一种特殊的序列. 即只取两个非 0 数值的周期序列. 设序列为

$$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,\tag{1}$$

若存在正整数 t，使

$$a_{n+t}=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots),\tag{2}$$

成立，则称序列(1)为二元周期序列. 并称满足(2)式的最小正整数 t 为序列(1)的周期. 如果有正整数 l，使 $a_{n+l}=a_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则 $t|l$. 设序列(1)的周期为 t，记

$$C(l)=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}a_ka_{k+l}\quad(0\leqslant l\leqslant t-1),\tag{3}$$

则称 $C(0)=1$ 为序列(1)的自相关主值，称 $C(l)$ $(1\leqslant l\leqslant t-1)$为序列(1)的自相关非主值. 若定义

$$C=\max_{1\leqslant l\leqslant t-1}|C(l)|,$$

如果 C 很小，则称序列(1)是自相关良好的序列. 取值为 ±1 的自相关良好的周期序列，在数字通信中有重要应用. 设 p 为奇素数，且定义序列(1)中的

$$a_n=\begin{cases}\left(\frac{n}{p}\right) & (p\nmid n),\\ l & (p|n),\end{cases}\tag{4}$$

则有 $C\leqslant 3/p$. 按照(4)定义的序列称为二次剩余序列. 当 p 较大时，它也是一个自相关良好的序列.

自相关主值(autocorrelation principal value)　见“二元周期序列”.

自相关良好序列(autocorrelation well-ordered sequence)　见“二元周期序列”.

二次剩余序列(quadratic residue sequence)　见“二元周期序列”.

二次同余式(quadratic congruence)　亦称二次同余方程. 一类同余方程. 它是关于未知数的二次多项式的同余方程. 设正整数 $m>1$，且 $a\not\equiv0\pmod m$，则称形如

$$ax^2+bx+c\equiv0\pmod m\tag{1}$$

的同余式为二次同余式的一般形式，简称模 m 的二次同余式. 此外，称形如

$$x^2\equiv a\pmod m\tag{2}$$

的同余式为最简二次同余式，或称最简二次同余方程. 满足同余式(1)或(2)的 x 值，分别称为二次同余式(1)或(2)的解，亦称二次同余式的根. 若 x_0 为其一解，则 x_0+mt $(t\in\mathbf{Z})$均为其解，即是说若 x_0 适合同余式(1)或(2)，则 x_0 所代表的剩余类中的每一个数皆能适合(1)式或(2)式. 但常指该类中的最小正整数为其解. 故方程(1)或(2)的解的个数，系指不同剩余类中的能适合(1)式或(2)式的解之个数. 二次同余式不一定都有解，如果有解时，其解的个数参见“二次同余式的解数”.

二次同余方程(quadratic congruence equation)　即“二次同余式”.

最简二次同余式(simplest quadratic congruence)　见“二次同余式”.

二次同余式的解数(solution numbers of a quadratic congruence)　对二次同余式的一种刻画. 即二次同余方程解的个数的判定：设 p 为素数，$p\nmid n$，且 $l>0$，二次同余式

$$x^2\equiv n\pmod{p^l}\tag{1}$$

在 $p>2$ 时，解的个数为 $1+\left(\frac{n}{p}\right)$.

在 $p=2$ 时，解的个数有下面三种情形：

1. $l=1$，有一个解.

2. $l=2$，当 $n\equiv1\pmod 4$时有二解，$n\equiv3\pmod 4$时无解.

3. $l>2$，当 $n\equiv1\pmod 8$时有四解，$n\not\equiv1\pmod 8$时无解.

模 p 最简二次同余式的解法(solution of the simplest quadratic congruence to modulus p)　二次同余方程的解法之一. 设 p 为奇素数，且 $p\nmid n$，则二次同余式

$$x^2\equiv n\pmod p\tag{1}$$

的解法概述如下：

1. 在方程(1)中，若 $p=2$，求解是容易的. 当 p 为不太大的奇素数时，可用观察法求解. 勒让德符号

$$\left(\frac{n}{p}\right)=-1$$

时，(1)式无解；

$$\left(\frac{n}{p}\right)=1$$

时，(1)式有二解. 因 p 不太大，可将 $x=1,2,\cdots,(p-1)/2$ 依次代入，适合方程(1)的 $x_i(i=1,2,\cdots,(p-1)/2)$ 即为它的一个解，$p-x_i(i=1,2,\cdots,(p-1)/2)$ 为另一解.

2. 在方程(1)中，$\left(\frac{n}{p}\right)=1$ 时，方程有解，但素数 p 较大时，有如下结论：

1) 当 $p\equiv 3(\bmod 4)$ 时，方程(1)的解为 $\pm n^{(p+1)/4}$.

2) 当 $p\equiv 5(\bmod 8)$，$n^{(p-1)/4}\equiv 1(\bmod p)$ 时，方程(1)的解为 $\pm n^{(p+3)/8}$；当 $p\equiv 5(\bmod 8)$，$n^{(p-1)/4}\equiv -1(\bmod p)$ 时，方程(1)的解为

$$\pm[(p-1)/2]!\cdot n^{(p+3)/8}.$$

3. 在方程(1)中，若 $\left(\frac{n}{p}\right)=1$，且

$$p\equiv 1(\bmod 8),\left(\frac{N}{p}\right)=-1,$$

则同余式(1)的解为

$$\pm n^{\frac{h+1}{2}}N^{S_k},$$

其中，h 满足 $p=2^k h+1, 2\nmid h, S_k\geqslant 0$ 是整数.

模 p 一般二次同余方程的解法(general solution of quadratic congruence equations to modulus p) 二次同余方程的解法之一. 若 p 为素数，且 $a\not\equiv 0(\bmod p)$ 时，解二次同余方程

$$ax^2+bx+c\equiv 0(\bmod p) \tag{1}$$

的基本方法，是将二次同余方程(1)化为

$$y^2\equiv n(\bmod p) \tag{2}$$

的形式来求解. 由于 $(a,p)=1$，必存在 a'，使 $a'a\equiv 1(\bmod p)$. a' 乘以(1)式两边，得到

$$x^2+a'bx+a'c\equiv 0(\bmod p). \tag{3}$$

方程(3)与方程(1)有相同的解. 若(3)式中的 $a'b$ 为偶数，可通过配方得

$$\left(x+\frac{a'b}{2}\right)^2\equiv\left(\frac{a'b}{2}\right)^2-a'c(\bmod p). \tag{4}$$

若(3)式中的 $a'b$ 为奇数，可通过 $a'b\pm p$ 的方法把(3)式的一次项系数化为偶数后再配方. 令

$$y=x+\frac{a'b}{2}, n=\left(\frac{a'b}{2}\right)^2-a'c, \tag{5}$$

代入(4)式，即得形如(2)式的最简二次同余式. 所以，当模 p 为素数时，均可将一般形式的二次同余方程化为最简二次同余式来求解(参见“模 p 最简二次同余式的解法”).

模 m 最简二次同余式的解法(solution of the simplest quadratic congruence to modulus m) 二次同余方程的解法之一. 设 m 为任意正整数，在二次同余式

$$x^2\equiv n(\bmod m) \tag{1}$$

中，设 m 的素数幂分解式为 $m=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_l^{e_l}$，则(1)式的任一解都满足同余式组 $x^2\equiv n(\bmod p_k^{e_k})(k=1,2,\cdots,l)$. 由孙子定理可把问题归结为求二次同余式

$$x^2\equiv n(\bmod p^e) \tag{2}$$

的解. 这样同余式(1)的解最终可由 $x^2\equiv n(\bmod p)$ 的解而求出. 其解法概述如下：

1. 设 p 为偶素数，n 为奇数，$e\geqslant 1$，则同余式(2)变为

$$x^2\equiv n(\bmod 2^e). \tag{3}$$

其解法为：

1) 当 $e=1$ 时，方程(3)的解为 $x\equiv 1(\bmod 2)$.

2) 当 $e=2$ 时，方程(3)有解的充分必要条件为 $n\equiv 1(\bmod 4)$. 当此条件成立时，方程(3)的解为 $x\equiv\pm 1(\bmod 4)$(即所有奇数).

3) 当 $e\geqslant 3$ 时，方程(3)有解的充分必要条件是 $n\equiv 1(\bmod 8)$. 若此条件成立时，设 a_0 是方程(3)的一个特解，则方程(3)有 4 个解

$$x\equiv\pm a_0, \pm(a_0+2^{e-1})(\bmod 2^e).$$

2. 设 p 为奇素数，$e\geqslant 1, p\nmid n$，则当 $\left(\frac{n}{p}\right)=-1$ 时，同余式(2)无解；当 $\left(\frac{n}{p}\right)=1$ 时，设 a 是 $x^2\equiv n(\bmod p)$ 的一个特解，则同余式(2)的全部解为

$$x\equiv\pm PQ^{-1}(\bmod p^e),$$

其中

$$P=\frac{1}{2}[(a+\sqrt{n})^e+(a-\sqrt{n})^e]\in\mathbf{Z},$$

$$Q=\frac{1}{2\sqrt{n}}[(a+\sqrt{n})^e-(a-\sqrt{n})^e]\in\mathbf{Z}.$$

而 Q^{-1} 是满足 $QQ^{-1}\equiv 1(\bmod p^e)$ 的整数.

3. 若 $m=p^e q^l$，p,q 为素数，则二次同余式(1)与同余式组

$$x^2\equiv n(\bmod p^e) \text{ 和 } x^2\equiv n(\bmod q^l) \tag{4}$$

同解. 按上述方法求出同余式组(4)的诸解后，再由孙子定理得出同余式(1)的全部解.

模 m 一般二次同余方程的解法(general solution of quadratic congruence equations to modulus m) 二次同余方程的解法之一. 设 m 的素数幂分解式为 $m=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_l^{e_l}$，则一般二次同余方程

$$ax^2+bx+c\equiv 0(\bmod m) \tag{1}$$

的任一解都能满足下述同余方程组

$$ax^2+bx+c\equiv 0(\bmod p_k^{e_k})\ (k=1,2,\cdots,l). \tag{2}$$

解同余方程

$$ax^2+bx+c\equiv 0(\bmod p^e) \tag{3}$$

可从同余方程

$$ax^2+bx+c\equiv 0(\bmod p) \quad (4)$$

开始，先求出(4)的解，并利用这些解逐步求出对模 $p^2,p^3,\cdots,p^e$ 的解，再应用孙子定理，即可由方程组(2)的解求出方程(1)的解. 并非所有形如(1)的同余方程都有解. 如果有解，则均可由上述方法求出其全部解.

两平方数之和(sum of two squares)　与华林问题有关的一个数论问题. 若对自然数 n，存在整数 x,y，使 $n=x^2+y^2$，则称 n 可表为两平方数之和. 如果 $(x,y)=1$，则称 n 能本原地表成二个平方数之和，如果 $n=x^2+y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 和 $n=a^2+b^2(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$ 能推出 $a=x,b=y$ 或 $a=y,b=x$，则称表法惟一.

关于表两平方数和的问题有以下定理：

1. 若 $n\equiv 3(\bmod 4)$，则 $n=x^2+y^2$ 不可能.

2. 若 n 可表为两平方数之和，则对任一整数 k，k^2n 亦可表为两平方数之和.

3. n 不能表为两平方数之和的充分必要条件是 n 的标准分解式中有一个素因数与 3 同余(mod 4)，且它的方次为奇数.

4. 若 n_1,n_2 均可表为两平方数之和，则其积 n_1n_2 亦可表为两平方数之和.

5. 每个与 1 同余(mod 4)的素数均可表为两个数的平方和，且表法惟一.

6. 如果 $n=n_1^2n_2$，n 为正整数，n_2 无平方因数，则 n 能表成两整数的平方和的充分必要条件是 n_2 没有形如 $4m+3$(m 为非负整数)的因数.

7. 若 n 为自然数，则 n^2+1 的每一个素因数都能表成两个平方数的和.

8. 设 p 是 m 的一个奇素因数，p 能表成两个平方数的和，m 能本原地表成两个平方数的和，则 m/p 也能本原地表成两个平方数的和.

9. 设 $p\equiv 1(\bmod 4)$，$(k,p)=1$，

$$s(k)=\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x(x^2+k)}{p}\right),$$

则有 $p=(s(r)/2)^2+(s(u)/2)^2$，其中

$$\left(\frac{r}{p}\right)=1,\left(\frac{u}{p}\right)=-1.$$

把一个自然数表成两平方数之和是数论中的一个古老问题，远在公元 3 世纪末期，丢番图(Diophantus)通过研究毕达哥拉斯三元数组后，已经知道如何把某些自然数表为二平方数之和，也知道形如 $4m+3$ 的自然数不能表成二平方数之和. 丢番图将这些研究写入了他早已失传的《衍论》中，这些内容可从后人对该书的评注中见到. 丢番图的研究停留在算术阶段，缺乏数论的特色. 1640 年 12 月 25 日，费马(Fermat,P. de)给梅森(Mersenne,M.)的信中最先提出了形如 $4n+1$ 的素数可以表成两个平方数的和. 1754 年，欧拉(Euler,L.)首次证明了它，还证明了表达式的惟一性.

四平方数和定理(theorem on the sum of four squares)　亦称拉格朗日四平方数和定理. 四平方数和问题是著名的数论问题. 由拉格朗日(Lagrange,J.-L.)最终解决，从而有上面的定理名字. 该定理断言：每个正整数均可表为四个整数的平方和(其中有些整数可以为零).

关于表四平方数和的问题有以下结论：

1. 两个四平方数之和的乘积仍是四平方数之和. 对此只要证明下列恒等式：设 a,b,c,d,r,s,t,u 都是整数，则

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+d^2)(r^2+s^2+t^2+u^2)\\&=(ar+bs+ct+du)^2+(as-br+cu-dt)^2\\&\quad+(at-bu-cr+ds)^2+(au+bt-cs-dr)^2.\end{aligned}$$

此恒等式的证明很容易，但是发现它却不那么容易. 欧拉(Euler,L.)从 1730 年首次研究这一问题开始，到 1743 年发现这个恒等式时，经过了 13 年的时间.

2. 若 p 是奇素数，且 $0\leqslant x<p/2$，$0\leqslant y<p/2$，则 $1+x^2+y^2\equiv 0(\bmod p)$ 必有一组解.

3. 对每个奇素数 p，必存在一个奇数 m，$m<p$，使方程 $mp=x^2+y^2+z^2+w^2$ 有解.

4. 若 m 和 p 都是奇数，$1<m<p$，且 $mp=x^2+y^2+z^2+w^2$，则存在正整数 n，$n<m$，使 $np=a^2+b^2+c^2+d^2$，其中 a,b,c,d 均为整数.

四平方数之和问题是华林问题的起始命题. 1770 年，华林(Waring,E.)曾提出，每一个整数是 4 个平方数之和，9 个立方数之和，19 个 4 次方数之和等. 但命题“每一个正整数均可表为 4 个整数的平方和”并非华林最先发现. 对此命题的研究有悠久的历史，远在公元 3 世纪末，丢番图(Diophantus)就已经知道每个正整数可表为四个平方数之和，不过他从未将此结论作为定理明确地叙述出来. 梅齐利亚克(Meziriac,C. G. B. de)于 1621 年出版了附有拉丁译文和注释的丢番图《算术》的希腊文本. 书中对四平方数和问题给出了从 1 到 325 的数字验证，说明此命题是正确的，但他未能给出严格的证明. 费马(Fermat,P. de)就是在这种版本的丢番图《算术》书上写了他的许多著名的页边注，他在对此命题的页边注中说，他能够用他的递降法对此命题作出证明，然而照例地又未提供证明的任何细节. 从他对此命题的有关著作来看，费马的证明是欠完整的. 笛卡儿(Descartes,R.)也说过这一定理无疑是正确的，但要找出证明“实在太难了，以至我不敢动手去找”. 1730 年，欧拉开始研究此问题. 到 1743 年，他给出结论：“两个四平方数之和的乘积仍为四平方数之和”，使本定理的证明向前跨了一大步. 直到 1770 年，拉格朗日(Lagrange,J.-L.)才作出了一个证明. 其证明方法基本上是以欧拉的探讨线索为依据的.

拉格朗日四平方数和定理(Lagrange theorem on sums of four squares) 即“四平方数和定理”.

高次剩余(residue of higher degree) 亦称k次剩余.二次剩余的推广.当$k>1$的情形,设$k>1$,$m>1$,二项同余式$x^k\equiv a(\bmod m)$,$(a,m)=1$如果有解,则a称为模m的k次剩余,否则称a为模m的k次非剩余.若m的标准分解式为$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,则$a$是模$m$的$k$次剩余的充分必要条件是$a$为每一个模$p_i^{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,s)$的$k$次剩余.如果$a$是模$p^\alpha$的$k$次剩余,$a\equiv b(\bmod p^\alpha)$,则$b$也是模$p^\alpha$的$k$次剩余,因此,一般所指$k$次剩余的个数时,是指对$p^\alpha$不同余的个数.关于高次剩余有如下一些结论:

1.若p是一个奇素数,$\alpha>0$,则有$\varphi(p^\alpha)/(\varphi(p^\alpha),k)$个模$p^\alpha$的$k$次剩余.特别地,当$\alpha=1$时,有$(p-1)/(p-1,k)$个模$p$的$k$次剩余.

2.若p是一个奇素数,$p\nmid k$,则对所有的α,当a是模p的k次剩余时,$x^k\equiv a(\bmod p^\alpha)$恰有$(p-1,k)$个解;$a$是模$p$的$k$次非剩余时,则无解.

3.若p为一个奇素数,$(k,\varphi(p^\alpha))=d$,则a是p^α的k次剩余的充分必要条件是a为p^α的d次剩余.当$d=k$时,把模p^α的k次剩余称为真k次剩余.当$d<k$时,把模p^α的k次剩余称为非真k次剩余.

***k*次剩余**(residue of degree-k) 即“高次剩余”.

***k*次非剩余**(non-residue of degree-k) 见“高次剩余”.

真*k*次剩余(proper residue of degree-k) 见“高次剩余”.

非真*k*次剩余(non-proper residue of degree-k) 见“高次剩余”.

高次同余方程(congruence equation of higher degree) 一类同余方程.它是关于未知数的$n(n>1)$次多项式的同余方程.设整数$m>1$,$n>0$,整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$a_n\not\equiv 0(\bmod m)$,同余式

$$f(x)\equiv 0(\bmod m) \qquad (1)$$

称为n次同余方程,式中n称为方程(1)的次数,当$n>1$时,(1)称为高次同余方程.如果x_0满足$f(x_0)\equiv 0(\bmod m)$,则$x\equiv x_0(\bmod m)$称为同余方程(1)的解,不同的解是指对模m互不同余的解.当同余方程(1)的首项系数$a_n>1$时,总可以用a_n的数论倒数a_n'(即$a_n'a_n\equiv 1(\bmod m)$)去乘方程(1)的各项,将首项系数化为1,因此,研究高次同余方程时,常设$a_n=1$.若模m的标准分解式为$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,则方程(1)和下面方程组

$$f(x)\equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i}) \quad (1\leqslant i\leqslant s) \qquad (2)$$

等价,且方程(1)的解数为方程组(2)中各个方程的解数之积.所以,讨论方程(1)的解法,都可转化为研究首项系数为1,模为素数p^α的高次同余方程的解法问题.

***n*次同余方程**(n-th-degree congruence equation) 见“高次同余方程”.

素数模的高次同余方程(congruence equation of higher degree to a prime modulus) 一类高次同余方程.它的模为素数.指当p为素数,且$n\geqslant 1$,

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

为整系数多项式时的同余方程

$$f(x)\equiv 0(\bmod p). \qquad (1)$$

以$\mathscr{T}_pf$表示mod p的多项式$f(x)$的次数n.设x_0为同余方程(1)的解,则

$$f(x)\equiv_x(x-x_0)g(x)\ (\bmod p), \qquad (2)$$

其中$g(x)$为$n-1$次多项式(参见“恒等同余”).反之亦然.若$f(x)\equiv_x(x-x_0)^\alpha g(x)(\bmod p)$,其中$g(x_0)\not\equiv 0(\bmod p)$,则称$x_0$为同余方程(1)的$\alpha$重解.对高次同余方程有以下重要定理:

1.设$\mathscr{T}_pf=n$,$f(x)$对模p的标准多项式为

$$f(x)\equiv_x(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}g(x)(\bmod p),$$

其中$x_i(1\leqslant i\leqslant k)$对模$p$两两不同余,$g(x)$为二次以上的模$p$的不可约多项式之积,$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\mathscr{T}_pg=n$.因此(1)式的所有按重数计算的解数$\leqslant\mathscr{T}_pf=n$.由此得$f(x)\not\equiv_x 0(\bmod p)$,同余方程(1)模$p$不同余的解数$\rho(p,f)\leqslant\min(p,\mathscr{T}_pf)$及

$$x^{p-1}-1\equiv_x(x-1)(x-2)\cdots(x-(p-1))(\bmod p).$$

2.设$\mathscr{T}_pf=n$,若$f(x)=(x^p-x)q(x)+r(x)$,$\mathscr{T}_pr<p$,则(1)式与$r(x)\equiv 0(\bmod p)$等价.由此可得,同余方程(1)有p个不同余的解与$x^p-x\mid f(x)(\bmod p)$等价,亦与$r(x)\equiv_x 0(\bmod p)$等价.

3.若$f(x)\not\equiv_x 0(\bmod p)$,则$\rho(p,f)=\mathscr{T}_pf$与$f(x)\mid x^p-x(\bmod p)$等价.

素数乘方模的高次同余方程(congruence equation of higher degree to a prime power modulus) 一类高次同余方程.它的模为素数乘方.指当p为素数,$n\geqslant 1$,$a>1$,且

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

为整系数多项式时的同余方程

$$f(x)\equiv 0(\bmod p^{\alpha-1}).$$

设ξ为同余方程$f(x)\equiv 0(\bmod p^{\alpha-1})$的一个解,则同余方程$f(x)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$所有满足条件$x\equiv\xi(\bmod p^{\alpha-1})$,且对模$p^\alpha$两两不同余的解的个数为:

1.若$f'(\xi)\not\equiv 0(\bmod p)$,则方程有一个解,$x\equiv\xi+kp^{\alpha-1}(\bmod p^\alpha)(kf'(\xi)\equiv -f(\xi)/p^{\alpha-1}(\bmod p))$.

2.若$f'(\xi)\equiv 0\ (\bmod p)$,且$f(\xi)\not\equiv 0(\bmod p^\alpha)$,

则同余方程无解.

3. 若 $f'(\xi)\equiv 0(\bmod p)$，且 $f(\xi)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$，则同余方程有 p 个解

$$x\equiv \xi + kp^{\alpha-1}(\bmod p^\alpha)\quad (k=0,1,2,\cdots,p-1).$$

以上结论给出了求以素数幂为模的高次同余方程的解法：从 $f(x)\equiv 0(\bmod p)$ 开始解起，依次解 $f(x)\equiv 0(\bmod p^2)$，…，直解到 $f(x)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$. 由此还可得到：若 $f(x)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$ 与 $f'(x)\equiv 0(\bmod p)$ 无公共解，则对任意 α，$f(x)\equiv 0(\bmod p^\alpha)$ 的解数与 $f(x)\equiv 0(\bmod p)$ 的解数相同，即 $\rho(f,p^\alpha)=\rho(f,p)$.

k 次剩余符号(residue sign of degree-k)　绝对最小剩余的推广. 设 $k>1$，p 是一个奇素数，$k|(p-1)$，$q=(p-1)/k$，则称符号

$$\left(\frac{n}{p}\right)_k\equiv n^q(\bmod p)$$

为模 p 的 k 次剩余符号，它表示 n^q 对模 p 的绝对最小剩余. 符号 $\left(\frac{n}{p}\right)_k$ 有下述性质：

1. $p|n$ 时，$\left(\frac{n}{p}\right)_k=0$.

2. 若 $n\equiv n_1(\bmod p)$，则 $\left(\frac{n}{p}\right)_k=\left(\frac{n_1}{p}\right)_k$.

3. 对任意整数 n_1,n_2，有

$$\left(\frac{n_1n_2}{p}\right)_k\equiv\left(\frac{n_1}{p}\right)_k\left(\frac{n_2}{p}\right)_k(\bmod p).$$

4. 若 $\operatorname{ind}_g n\equiv a(\bmod k)$，$0\leqslant a<k$，则

$$\left(\frac{n}{p}\right)_k=g^{aq}\ (\bmod p).$$

5. n 是模 p 的 k 次剩余的充分必要条件是

$$\left(\frac{n}{p}\right)_k=1.$$

6. 设 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，则

$$\left(\frac{n}{p}\right)_k\equiv\left(\frac{p_1}{p}\right)_k^{\alpha_1},\left(\frac{p_2}{p}\right)_k^{\alpha_2},\cdots,\left(\frac{p_s}{p}\right)_k^{\alpha_s}(\bmod p),$$

若 $n<p$，那么只要对每一个小于 p 的素数 p_j，$\left(\frac{p_j}{p}\right)_k$ 的值都知道，$\left(\frac{n}{p}\right)_k$ 之值也就可求了.

原根和指数

整数的阶(order of a integer)　亦称整数的次数. 与同余式有关的一个重要概念. 若整数 $m>1$，且 $(a,m)=1$，则称满足同余式 $a^d\equiv 1(\bmod m)$ 的最小正整数 d 为整数 a 对模 m 的阶. 并称 a 是属于阶 $d(\bmod m)$ 的，记为 $d=\delta_m(a)$. 为便于运算，当 $(a,m)>1$ 时，规定 $\delta_m(a)=0$. 例如，2 对模 7 的阶为 3，记为 $\delta_7(2)=3$；2 对模 11 的阶为 10，记为 $\delta_{11}(2)=10$.

整数的阶有如下性质：

1. 若 $a\equiv b(\bmod m)$，则 $\delta_m(a)=\delta_m(b)$.

2. 若 $(a,m)=1$，则：

1) $a^k\equiv 1(\bmod m)$ 与 $\delta_m(a)|k$ 等价.

2) $\delta_m(a)|\varphi(m)$.

3) $a^{k_1}\equiv a^{k_2}(\bmod m)$ 与 $\delta_m(a)|k_1-k_2$ 等价.

4) $a^0,a^1,\cdots,a^{\delta_m(a)-1}$ 对模 m 两两不同余.

5) $\delta_m(a^c)=\delta_m(a)/(\delta_m(a),c)$.

3. 若 $\lambda|\delta_m(a)$，则 $\delta_m(a^\lambda)=\delta_m(a)/\lambda$.

4. 若 $(c,\delta_m(a))=1$，则 $\delta_m(a^c)=\delta_m(a)$.

5. 对任意的 a,b 一定存在 c，使得

$$\delta_m(c)=[\delta_m(a),\delta_m(b)].$$

6. 若 $(\delta_m(a),\delta_m(b))=1$，则

$$\delta_m(ab)=\delta_m(a)\delta_m(b).$$

7. 若 $(m_1,m_2)=1$，则：

1) $\delta_{m_1m_2}(a)=[\delta_{m_1}(a),\delta_{m_2}(a)]$.

2) 对于任意的 a_1,a_2 必存在 a，使得

$$\delta_{m_1m_2}(a)=[\delta_{m_1}(a_1),\delta_{m_2}(a_2)].$$

整数的次数(degree of the integer)　即"整数的阶".

整数的阶的求法(method finding the order of a integer)　对整数的阶的一种刻画. 指计算整数的阶的方法. 设 a 和 m 都是整数，$(a,m)=1$，$m>0$. 若 a 对模 m 的阶为 α，则因为 $\alpha|\varphi(m)$，且 $\varphi(m)$ 的诸因数为 $d_1,d_2,\cdots,d_s$，所以可通过计算 $a^{d_1},a^{d_2},\cdots,a^{d_s}$ 对模 m 的剩余而求出阶 α. 下面给出计算阶的方法：

1. 如果整数 m 的标准分解式为 $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则整数 a 对模 m 的阶等于 a 对 $p_i^{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,k)$ 的诸阶的最小公倍数.

2. 设 p 为素数，若 a 对模 p^α 的阶为 f_α，则 $f_{\alpha+1}=f_\alpha$ 或 $f_{\alpha+1}=pf_\alpha$；又若 $p^\beta|a^{f_2}-1$，而 $p^{\beta+1}\nmid a^{f_2}-1$，则

$$f_\alpha=\begin{cases}f_2 & (2\leqslant\alpha\leqslant\beta),\\ p^{\alpha-\beta}f_2 & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

原根(primitive root)　与整数的阶有关的一个重要概念. 设 m 为正整数，$(g,m)=1$，如果整数 g 对 m 的阶为 $\varphi(m)$，则称 g 是模 m 的一个原根. 例如 3 为模 7 的原根. 并非所有的正整数都有原根.

正整数的原根有如下一些性质：

1. 对每个素数 p，均存在模 p 的原根，且原根的个数为 $\varphi(p-1)$.

2. 设 p 为奇素数，$\alpha\geqslant 2$，若 g 是 p^α 的原根，则 g 一定为 $p^{\alpha-1}$ 的原根.

3. 设 g 为 p 的原根，则一定存在整数 t_0，使得 $g+t_0p$ 是所有 $p^\alpha(\alpha\geqslant 1)$ 的原根.

4. 设 $\alpha\geqslant 1$，若 g 为 $p^\alpha(\alpha>2)$ 的原根，则 g 与 $g+p^\alpha$ 中的奇数是 $2p^\alpha$ 的原根.

5. 模 m 的原根存在的充分必要条件是 m 等于 $2,4,p^\alpha$ 或 $2p^\alpha$，其中 $\alpha\geqslant 1$，p 为奇素数.

6. 若整数 $m>1$，$\varphi(m)$ 的所有不同素因数是 q_1，q_2，…，q_k，$(g,m)=1$，则 g 是模 m 的原根的充分必要条件是

$$g^{\varphi(m)/q_i}\not\equiv 1(\bmod m)\ (i=1,2,\cdots,k).$$

7. 若模 m 有原根 g 存在，则 m 恰有 $\varphi(\varphi(m))$ 个对模 m 不同余的原根，它们由集合 $S=\{g^t|1\leqslant t\leqslant\varphi(m),(t,\varphi(m))=1\}$ 中的数给出.

8. 设 g 是模 m 的一个原根，若 d 通过模 $\varphi(m)$ 的最小非负完全剩余系，则 g^d 是通过模 m 的一个简化剩余系.

1785 年，勒让德(Legendre, A.-M.)在给出二次互反律的同时还给出了模 p 的原根的构造. 1801 年，高斯(Gauss, C. F.)在他所著《算术研究》中，证明正整数中只有 $2,4,p^n$ 和 $2p^n$ 才有原根. 用商环的单位群的语言讨论这些性质已是 20 世纪的事了.

原根的求法(method finding the primitive roots) 对原根的一种刻画. 即求原根的一种方法. 若 a 对模奇素数 p 的阶为 d，$d<\varphi(p)$，则 $a^1,a^2,\cdots,a^d$ 不是模 p 的原根. 因此要求 p 的原根，先列出模 p 的简化剩余系

$$1,2,\cdots,p-1. \tag{1}$$

首先取 $a=2$，求得 2 对模 p 的阶为 d，若 $d=p-1$，则 2 即为 p 的原根. 若 $d<p-1$，则在(1)中消去 $\langle 2\rangle_p,\langle 2^2\rangle_p,\cdots,\langle 2^d\rangle_p$ 各数. 在(1)中剩下的数中再取一数，重复以上方法，直到(1)中剩下 $\varphi(p-1)$ 个数，因为奇素数 p 恰有 $\varphi(p-1)$ 个原根，因此这 $\varphi(p-1)$ 个数都是 p 的原根. 上述求原根的方法称为消去法. 求一个不大的素数为模的原根，计算已经较繁. 计算一个大素数 p 为模的原根，目前还没有一个计算量较小的方法. 1927 年，阿廷(Artin, E.)猜测：如果一个正整数 a 非平方数，则存在无穷多个素数 p 以 a 为原根. 特别地，猜想 2，3 等都是无限多个素数的原根. 这个猜想迄今仍未获得证明.

最小正原根问题(problem on the least positive primitive root) 一个重要的数论问题. 每一个奇素数 p 都有 $\varphi(p-1)$ 个原根，其中最小的那个正整数，称为最小正原根，记为 $g(p)$. 例如，2 是模 13 的最小正原根，记为 $g(13)=2$. 若 p 是各个不同的奇素数，那么模 p 的最小正原根 $g(p)$ 的上界是什么？这就是最小正原根问题. 根据实际计算得出的大量数据，人们猜想，当 p 充分大时，应有 $g(p)<kp^{\varepsilon}$，其中 ε 是一个任意小的正数，而 k 是与 p 无关的常数. 但是，这个猜测直到现在还没被证实. 华罗庚于 1942 年应用狄利克雷特征函数的概念及三角和的估值方法，在估计最小正原根的上界方面，得到了很好的结果，他证明了：$g(p)<2^r p^{1/2}$，其中 r 是 $\varphi(p)=p-1$ 的不同质因数的个数. 1959 年，王元证明了

$$g(p)=O(p^{1/4+\varepsilon}).$$

对模 m 的指数(index to modulus m) 亦称指标. 与原根有关的一个重要概念. 若整数 $m(>1)$ 有原根 g 存在，则对任一整数 a，$(a,m)=1$，有惟一的整数 r，$0\leqslant r\leqslant\varphi(m)-1$，使得 $g^r\equiv a(\bmod m)$ 成立. 此时称 r 是以 g 为底，a 对模 m 的指数，记为 $r=\mathrm{ind}_g a$. 在不易引起混淆的情况下，可将底数 g 略去不写，简记为 $r=\mathrm{ind}\,a$. 设 g 是 m 的原根，如果 $(a,m)=(b,m)=1$，则指数有下列类似对数的性质：

1. $\mathrm{ind}(ab)\equiv\mathrm{ind}\,a+\mathrm{ind}\,b(\bmod\varphi(m))$.
2. $\mathrm{ind}\,a^n\equiv n\,\mathrm{ind}\,a(\bmod\varphi(m))$，$n\geqslant 1$.
3. $\mathrm{ind}1=0$，$\mathrm{ind}\,g=1$.
4. $\mathrm{ind}(-1)=\varphi(m)/2$，$m>2$.
5. 若 h 也是 m 的一个原根，则：
   1) $\mathrm{ind}_g a\equiv\mathrm{ind}_h a\cdot\mathrm{ind}_g h(\bmod\varphi(m))$.
   2) $\mathrm{ind}_g h\cdot\mathrm{ind}_h g\equiv 1(\bmod\varphi(m))$.

还有一条不类似对数的性质：

6. 整数 a 对模 m 的阶为 $\delta_m(a)$，g 是模 m 的任意原根，则 $\delta_m(a)=\varphi(m)/(\mathrm{ind}_g a,\varphi(m))$.

简化剩余系的构造(construction of the reduced residue system) 对简化剩余系的一种刻画. 指用原根表达简化剩余系. 若 g 是模 m 的原根，则模 m 的简化剩余系可表为：$1,g,g^2,\cdots,g^{\varphi(m)-1}$. 在一般情况下，正整数 m 不一定存在原根.

关于简化剩余系的构造有如下定理：

1. 若 $m=p^{\alpha}$(素数 $p\geqslant 2$)存在原根 g，则模 m 的简化剩余系为：$g^0,g^1,g^2,\cdots,g^{\varphi(m)-1}$.

2. 若 $m=2^{\alpha}$，$\alpha\geqslant 3$，这时 m 无原根，则 5 和 3 对 2^{α} 的阶为 $2^{\alpha-2}$，且

$$\pm 5^0,\pm 5^1,\cdots,\pm 5^{2^{\alpha-2}-1}$$

及

$$\pm 3^0,\pm 3^1,\cdots,\pm 3^{2^{\alpha-2}-1}$$

均构成模 $m=2^{\alpha}$ 的一个简化剩余系.

3. 若正整数 m 的标准分解式为 $m=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$g_1,g_2,\cdots,g_s$ 分别为模 m 的原根，则对任给一组数 $(r_{-1},r_0,r_1,\cdots,r_s)$，$0\leqslant r_{-1}<c_{-1}$，$0\leqslant r_0<c_0$，…，$0\leqslant r_i<c_i=\varphi(p_i^{\alpha_i})$ $(1\leqslant i\leqslant s)$，一定存在数 a，$(a,m)=1$，使 a 对 2^{α_0} 的指数组(参见"指数组")为 (r_{-1},r_0)，对 $p_i^{\alpha_i}$ 的指数为 r_i，且当 $r_{-1},r_0,r_1,r_2,\cdots,r_s$ 分别通过 $c_{-1},c_0,c_1,c_2,\cdots,c_s$ 的完全剩余系时，a 通过模 m 的简化剩余系. 反之亦然.

对模 m 的指数组(index group to modulus m) 与指数有关的一个重要概念. 设 $\alpha=1$ 时，$c_{-1}=c_0=1$，$\alpha\geqslant 2$ 时，$c_{-1}=2$，$c_0=2^{\alpha-2}$. 对任一正整数 a，$(a,2)=1$，存在惟一的一对正整数 r_{-1},r_0，$0\leqslant r_{-1}<c_{-1}$，$0\leqslant r_0<c_0$，使得 $a\equiv(-1)^{r_{-1}}5^{r_0}(\bmod 2^{\alpha})$，则称数对 (r_{-1},r_0) 为以 -1，5 为底的 a 对模 2^{α} 的指数组，它有

以下性质：

1. $r_{-1} \equiv (a-1)/2 \pmod{c_{-1}}$.

2. 对任意的 r'_{-1}, r'_0, $(-1)^{r'_{-1}} 5^{r'_0} \equiv a \pmod{2^\alpha}$ 与 $r'_{-1} \equiv r_{-1} \pmod{c_{-1}}$, $r'_0 \equiv r_0 \pmod{c_0}$ 等价.

3. 若 $(a_1, a_2, 2) = 1$，则 $r_{-1}(a_1, a_2) \equiv r_{-1}(a_1) + r_{-1}(a_2) \pmod{c_1}$, $r_0(a_1, a_2) \equiv r_0(a_1) + r_0(a_2) \pmod{c_0}$. 设正整数 m 的标准分解式为 $m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$, $c_i = \varphi(p_i^{\alpha_i})$；$g_i$ 是模 $p_i^{\alpha_i}$ 的最小正原根 $(i=1,2,\cdots,s)$. 若 $a \equiv (-1)^{r_{-1}} 5^{r_0} \pmod{2^\alpha}$, $a \equiv g_i^{\alpha_i} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ $(i=1,2,\cdots,s)$，则称 $r_{-1}, r_0, r_1, \cdots, r_s$ 为 a 对模 m 的一般指数组，它也有与简化剩余系相类似的性质（参见“简化剩余系的构造”）.

用指数表解同余式(solving congruence with index table)　同余式的一种解法. 指利用指数表求解同余式的方法. 在求解高次同余式时，若有一张关于素数 p 的任一原根的最小指数表 $(\bmod p)$，将会带来很大的方便. 现分述如下：

1. 模 p 最小指数表的造法. 以原根 2 的最小指数表 $(\bmod 13)$ 为例. 先求出 $2^\alpha \pmod{13}$ $(\alpha = 0,1,2,\cdots,11)$ 的对应值排列如下：

$$\begin{matrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & 2^9 & 2^{10} & 2^{11} \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 6 & 12 & 11 & 9 & 5 & 10 & 7 \end{matrix}$$

将上面第 2 行的数依大小顺序列入下表中的 n 栏内，把对应的 2^α 中的 α 的值列入 $\mathrm{ind}_2 n$ 栏内，即可得到原根 2 的最小指数表 $(\bmod 13)$：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{ind}_2 n$	0	1	4	2	9	5	11	3	8	10	7	6

2. 用指数表解一次同余式. 一般是先将同余式两边取模 $p-1$ 的指数，通过查表，运算，得出一个形如 $\mathrm{ind}\, x \equiv a \pmod{p-1}$ 的式子，再反查同一指数表，即可得到同余式的解.

3. 用指数表解二项同余式. 设 m 有原根 g, $(a, m)=1$，二项同余式 $x^k \equiv a \pmod m$ 有解的充分必要条件是 $d = (k, \varphi(m)) \mid \mathrm{ind}_g a$. 如果此同余式有解，则恰有 d 个解. 模 m 的简化剩余系中恰有 $(\varphi(m))/d$ 个 k 次剩余.

4. 用指数表解幂同余式. 设 g 为 m 的一个原根，则称形如

$$a^x \equiv b \pmod m, \quad (b, m) = 1 \tag{1}$$

的式子为幂同余式，将 (1) 式两边取 g 为底 $(\bmod \varphi(m))$ 的指数，得 $x\,\mathrm{ind}_g a \equiv \mathrm{ind}_g b \pmod{\varphi(m)}$，故 (1) 有解的充分必要条件是 $(\varphi(m), \mathrm{ind}_g a) \mid \mathrm{ind}_g b$. 若 (1) 有解，恰有 $(\varphi(m), \mathrm{ind}_g a)$ 个解.

幂同余式(power congruence)　见“用指数表解同余式”.

二项同余方程(binomial congruence equation)　亦称二项同余式. 一类特殊的同余方程. 设整数 $k \geqslant 1$，正整数 m 的标准分解式为 $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$，而形如

$$x^k \equiv a \pmod m, \quad (a, m) = 1 \tag{1}$$

的同余式称为二项同余方程. 它等价于下面二项同余方程组

$$\begin{cases} x^k \equiv a \pmod{2^{\alpha_0}}, \\ x^k \equiv a \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^k \equiv a \pmod{p_s^{\alpha_s}}. \end{cases} \tag{2}$$

利用原根的最小指数表可以解出 (2) 中的每一个同余方程. 若 (1) 有解，则称 a 为模 m 的 k 次剩余；若 (1) 无解，则称 a 为模 m 的 k 次非剩余. a 是模 m 的 k 次剩余的充分必要条件是 a 为每一个模 $p_i^{\alpha_i}$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 的 k 次剩余. 因此，(1) 若有解，则根据孙子定理可归结为解形如

$$x^k \equiv a \pmod{p^\alpha} \tag{3}$$

的二项方程.

关于二项同余方程 (1) 的解有如下结论：

1. 设 $m > 1$，且有原根 g, $(a, m) = 1$, $k \geqslant 1$，则 (1) 有解的充分必要条件是 $(k, \varphi(m)) \mid \mathrm{ind}\, a$. 若有解，恰有 $(k, \varphi(m))$ 个解.

2. 设 $m > 1$, $k \geqslant 1$, $(a, m) = 1$，模 m 有原根，则 a 是模 m 的 k 次剩余的充分必要条件是

$$a^{\varphi(m)/(\varphi(m), k)} \equiv 1 \pmod m,$$

且模 m 的 k 次剩余的个数为 $\varphi(m)/(\varphi(m), k)$.

3. 若 $m = 2^\alpha$, $\alpha \geqslant 3$, $2 \nmid a$, $a \equiv (-1)^{r_{-1}} 5^{r_0} \pmod{2^\alpha}$，则二项同余方程 $x^k \equiv a \pmod{2^\alpha}$ 当 $2 \nmid k$ 时恰有一解；当 $2 \mid k$ 时有解的充分必要条件是 $r_{-1} = 0$，且 $(k, 2^{\alpha-2}) \mid r_0$，若有解，恰有 $2(k, 2^{\alpha-2})$ 个解.

二项同余式(binomial congruence expression)　即“二项同余方程”.

多项式的性质

模 p 的标准多项式(canonical polynomial to modulus p)　系数分别对模 p 取最小非负剩余所得的一种多项式. 对每一整系数多项式 $f(x)$，必存在惟一的多项式

$$\overline{f}(x) = \overline{a}_k x^k + \cdots + \overline{a}_1 x + \overline{a}_0,$$

满足 $0 < \overline{a}_k < p$, $0 \leqslant \overline{a}_i < p$ $(0 \leqslant i < k-1)$，使得 $f(x)$ 与 $\overline{f}(x)$ 恒等同余 $f(x)_x \equiv \overline{f}(x) \pmod p$. $\overline{f}(x)$ 称为 $f(x)$ 的对模 p 的标准多项式，k 称为 $f(x)$ 对模 p 的次数，它是 $f(x)$ 中的次数最高的、系数非 p 的倍数的项的次数，记为 $\partial_p f = k$. 由次数的定义可知，模 p 的 k 次标准多项式共有 $(p-1)p^k$ 个. 例如

$$f(x) = 12x^5 + 7x^3 + 2x + 3, \partial_3 f = 3, \partial_7 f = 5,$$

$f(x)$对模 3 的标准多项式则为 x^3+2x，而对模 7 的标准多项式为 $5x^5+2x+3$. 此外，若 $f(x)\equiv g(x)h(x) \pmod p$，则 $\partial_p f=\partial_p g+\partial_p h$. 任一多项式$f(x)$有且仅有 $p-1$ 个对模 p 互不同余的标准多项式与之相结合 mod p(参见"多项式模 p 的整除性")，且其中有一个首项系数为 1，由此推知首项系数为 1 且互不结合的 k 次标准多项式有 p^k 个.

多项式对模 p 的次数(polynomial degree to modulus p)　见"标准多项式".

恒等同余(identity congruence)　两个多项式之间的一种等价关系. 指相应系数都分别对模 p 同余的两个多项式. 设 $f(x)$，$g(x)$为整系数多项式，p 为素数，若多项式 $f(x)-g(x)$的所有系数均能被 p 整除，则称 $f(x)$与 $g(x)$对模 p 恒等同余，记为$f(x)\equiv_x g(x) \pmod p$或 $f(x)\equiv g(x) \pmod p$，或简记为 $f\equiv_x g(p)$，并称此关系式为模 p 的恒等同余式. 注意，对所有 x 均有 $f(x)\equiv g(x) \pmod p$，并不一定能推出 $f(x)\equiv_x g(x) \pmod p$. 例如 $x^p-x\equiv 0 \pmod p$ 和 $x^2+x\equiv 0 \pmod 2$ 对一切 x 均成立，但 $x^p-x \not\equiv_x 0 \pmod p$，$x^2+x\not\equiv_x 0 \pmod 2$. 反之，若 $f(x)\equiv_x g(x) \pmod p$，则必有 $f(x)\equiv g(x) \pmod p$对一切 x 成立. 恒等同余有下述性质：

1. $f(x)\equiv_x f(x) \pmod p$.
2. $f(x)\equiv_x g(x) \pmod p$的充分必要条件是 $g(x)\equiv_x f(x) \pmod p$.
3. 若 $f(x)\equiv_x g(x) \pmod p$，$g(x)\equiv_x h(x) \pmod p$，则 $f(x)\equiv_x h(x) \pmod p$.
4. 若 $f_1(x)\equiv_x g_1(x) \pmod p$，$f_2(x)\equiv_x g_2(x) \pmod p$，则 $f_1(x)\pm f_2(x)\equiv_x g_1(x)\pm g_2(x) \pmod p$，$f_1(x)f_2(x)\equiv_x g_1(x)g_2(x) \pmod p$，

特别重要的有$(f(x))^p\equiv_x f(x^p) \pmod p$.

恒等同余式(identity congruence expression)　见"恒等同余".

多项式模 p 的整除性(exact divisibility of a polynomial modulus p)　多项式整除性的一种推广. 设 $f(x)$及 $g(x)$为二多项式，$g(x)$对模 p 不恒为零，若有一多项式 $h(x)$，使

$$f(x)\equiv_x h(x)g(x) \pmod p,$$

则称对模 p，$g(x)$可整除 $f(x)$，并以

$$g(x)\mid f(x) \pmod p$$

表之. 例如，由于 $x^5+3x^4-4x^3+2\equiv_x(2x^2-3)(3x^3-x^2+1) \pmod 5$，故

$$2x^2-3\mid x^5+3x^4-4x^3+2 \pmod 5.$$

多项式模 p 的整除性有下述性质：

1. $f\mid f \pmod p$.
2. 若 $f\mid g \pmod p$，$g\mid h \pmod p$，则 $f\mid h \pmod p$.
3. 若 $f\mid g \pmod p$，$g\mid f \pmod p$，则有一整数 a，使$f(x)\equiv_x ag(x) \pmod p$，称此二多项式为互相结合 mod p. 任一多项式共有 $p-1$ 个标准多项式与之相结合 mod$p$，而其中有一个且仅有一个其首项系数为 1.
4. 任给两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，且 $g(x)\not\equiv_x 0 \pmod p$，则必有惟一的一对模 p 的标准多项式 $q(x)$ 及 $r(x)$，使 $f(x)\equiv_x q(x)g(x)+r(x)\cdot \pmod p$，其中 $r(x)\equiv_x 0 \pmod p$或 $\partial r<\partial g$(参见本卷《高等代数》中的"多项式的整除性").

模 p 的不可约多项式(irreducible polynomial to modulus p)　亦称模 p 的不可化多项式或模 p 的素多项式. 不可约多项式的一种推广. 若一多项式 $f(x)$，$\partial_p f=n$，不能分解为二个次数低于 n 的多项式之积，mod p，则此多项式称为对模 p 不可约多项式. 例如，当 $p=3$ 时，一次互不结合的多项式有 3 个，即 x，$x+1$，$x+2$，并且都不可约. 对模 p 的不可约多项式，原来一定不可约，反之则不然. 例如 $x^2+2\equiv_x(x+1)(x+2) \pmod 3$，但 x^2+2 却不可约.

模 p 的不可化多项式(irreducible polynomial to modulus p)　即"模 p 的不可约多项式".

模 p 的素多项式(prime polynomial to modulus p)　即"模 p 的不可约多项式".

多项式模 p 的分解定理(decomposition theorem of a polynomial modulus p)　多项式分解定理的一种推广. 多项式的分解定理可推广到模 p 的情形：任一多项式均可分解为模 p 的首项系数为 1 的标准不可约多项式的乘积，若不计因子之顺序，这种分解式是惟一的. 即

$$f(x)\equiv_x cq_1^{\alpha_1}(x)q_2^{\alpha_2}(x)\cdots q_s^{\alpha_s}(x) \pmod p,$$

且
$$\partial_p^o f=\alpha_1\partial_p^o q_1+\alpha_2\partial_p^o q_2+\cdots+\alpha_s\partial_p^o q_s,$$

其中 $q_i(x)(1\leqslant i\leqslant s)$是首项系数为 1 的两两不同余的标准不可约多项式(参见本卷《高等代数》中的"多项式的惟一因子分解定理").

整系数多项式(polynomial with integral coefficients)　数论中研究的一类多项式. 指系数都是整数的多项式. 若 $n>0$，$a_i(i=0,1,\cdots,n)$都是整数，则 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 称为整系数多项式. 所有的整系数多项式对加、减、乘运算是自封闭的. 如果一组整系数多项式适合以下条件时，就称这组整系数多项式构成一个理想集合：

1. 若 f，g 在此集合中，则 $f+g$ 亦在此集合中.
2. 若 f 在此集合中，而 g 为任一整系数多项式，则 fg 亦在此集合中.

关于理想集合，有下述希尔伯特定理：在一理想

集合 A 中，必有有限个整系数多项式 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，使得 A 中任一多项式 f 必可表为

$$f=g_1f_1+g_2f_2+\cdots+g_nf_n,$$

其中 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 也是整系数多项式.

重模同余式(congruence with respect to double modulus) 同余式的一种推广. 给定素数 p 和多项式 $\varphi(x)$，若 $f_1(x)-f_2(x)$ 为 $\varphi(x)$ 之倍式 mod p，则称 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 对重模 $p,\varphi(x)$ 同余，记为 $f_1(x)\equiv f_2(x)(\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x))$. 例如 $x^5+3x^4+x^2+4x+3\equiv 0(\operatorname{mod}\operatorname{d}5,2x^2-3)$.

重模同余式有下述性质：

1. 重模同余是一种等价关系，即具有自反性、对称性和传递性.

2. 若 $f(x)\equiv g(x),f_1(x)\equiv g_1(x)(\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x))$，则 $f(x)\pm f_1(x)\equiv g(x)\pm g_1(x)(\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x))$，$f(x)f_1(x)\equiv g(x)g_1(x)(\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x))$.

3. 设 $\varphi(x)$ 对 p 之次数为 n，任一多项式必与下列多项式 $a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$ $(0\leqslant a_i\leqslant p-1)$ 之一重模同余.

广义费马定理(generalized Fermat theorem) 费马定理的一种推广. 设 p 为素数，$\varphi(x)$ 为 n 次不可约多项式 mod p，则对任何一个非 $\varphi(x)$ 之倍式的多项式 $f(x)$，mod p，恒有

$$(f(x))^{p^n-1}\equiv 1(\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x)).$$

对任一多项式常有

$$(f(x))^{p^n}\equiv f(x)\ (\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x)). \qquad (1)$$

特别有

$$x^{p^n}\equiv x(\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x)), \qquad (2)$$

此即称为广义费马定理，实则把费马小定理从整数范围推广到整系数多项式的集合中而得到.

广义费马定理有下述推论：

1. 任何一个 n 次不可约多项式必能整除 $x^{p^n-1}-1$，mod p. 此性质可由广义费马定理直接推出.

2. 重模方程 $f(x)\equiv 0(\operatorname{mod}\operatorname{d}p,\varphi(x))$ 之根数不超过 $f(x)$ 的次数，这里 $f(x)$ 表整系数多项式.

3. $x^{p^n-1}-1$ 不能被一个次数高于 n 次的不可约多项式所整除 mod p.

4. 若 $\Psi(x)$ 为一个 l 次不可约多项式，mod p，且 $\Psi(x)\mid x^{p^n}-x(\operatorname{mod}p)$，则 $l\mid n$.

伯努利数(Bernoulli numbers) 一类重要的有理数. 指满足递推关系

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^kB_k(n\geqslant 2),B_0=1$$

的数 B_n. 一切伯努利数皆为有理数. 前面 12 个伯努利数为：

$$B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_3=0,$$

$$B_4=-\frac{1}{30},B_5=0,B_6=\frac{1}{42},B_7=0,$$

$$B_8=-\frac{1}{30},B_9=0,B_{10}=\frac{5}{66},B_{11}=0.$$

伯努利数有如下的性质：

1. $B_n=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\mathrm{C}_{n+1}^{j+1}\frac{n!}{(n+j)!}\cdot\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\mathrm{C}_j^kk^{n+j}$.

2. $B_n=\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\mathrm{C}_k^jj^n$.

3. 当 $k\geqslant 1$ 时，有 $B_{2k+1}=0$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}\ (k\geqslant 1)$.

5. $\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{|B_{2k}|}{\left(\frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\right)}\right\}=1$.

有理数域上的多项式(polynomial on rational number field) 一类重要的多项式. 指系数为有理数的多项式. 设 Q 表示有理数域，$a_i\in\mathrm{Q}$ $(i=0,1,\cdots,n,n>0)$，且 $a_n\neq 0$，则

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为有理数域 Q 上的 n 次多项式. 如果选取适当的(一般选取诸分数 a_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 的分母的最小公倍数)整数 c 乘 $f(x)$，总可使 $cf(x)$ 成为整系数多项式. 显然，$f(x)$ 和 $cf(x)$ 在 Q 上同为可约或同为不可约. 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能够分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积. 即是说，在整数环 Z 上不可约的整系数多项式，在有理数域 Q 上也不可约. 因此，关于有理数域上多项式的可约性问题，可以简化为讨论整系数多项式在整数环上的可约性问题(参见本卷《高等代数》中的“多项式的惟一因式分解定理”). 有理数域上的多项式，如果不计零次因式，因式分解是惟一的.

分圆多项式(cyclotomic polynomial) 一类重要的整系数多项式. 即以 1 的本原单位根为根的多项式. 设 $\eta=\mathrm{e}^{2\pi i/n}$，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{\varphi(n)}$ 是 1 的 $\varphi(n)$ 个本原单位根. 以这些 n 次本原单位根为根的多项式

$$F_n(x)=\prod_{j=1}^{\varphi(n)}(x-\eta_j)$$

称为 n 级分圆多项式，简称分圆多项式. 设 η 是一个 n 次本原单位根，则

$$\eta,\eta^2,\eta^3,\cdots,\eta^n \qquad (1)$$

给出全体 n 次单位根. 设 $1\leqslant k\leqslant n,(k,n)=1$，则 η^k 是 n/d 次本原单位根. (1)中给出 $\varphi(n/d)$ 个 n/d 次本原单位根，即(1)中包含了全体 n/d 个$(d\mid n)$次本原单位根. 于是当 d 通过 n 的全部正因数时，就有

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} F_d(x). \qquad (2)$$

再由默比乌斯反演公式，可得

$$F_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}. \qquad (3)$$

分圆多项式有下述性质：

1. $F_n(x)$是首项系数为 1 的整系数多项式，而且在有理数域上不可约.

2. 设 $F_n(x)$表示一个分圆多项式，则：

1) p 是素数，$p|m$，$F_{mp^k}(x)=F_{mp}(x^{p^{k-1}})$.

2) p 是素数，$p\nmid m$，$F_{mp}(x)=\frac{F_m(x^p)}{F_m(x)}$.

3) $n\geqslant3$，$2\nmid n$，$F_{2n}(x)=F_n(-x)$.

4) $n\geqslant2$，$x^{\varphi(n)}F_n\left(\frac{1}{x}\right)=F_n(x)$.

分圆多项式在数字信号处理中有用.

素 数 分 布

产生素数的公式(formula of production of primes)　对素数的一些刻画.其值为素数的函数式.长期以来人们总想通过对素数分布规律的研究，寻找出一个比较理想的产生素数的公式，当然最好是能找到有关第 n 个素数 p_n 的公式.许多数学家为此付出了巨大的努力，有过一些结果，但都是局部性的，只能产生某一部分素数.现将 18 世纪以来，数学家们寻求产生素数的公式的情况概述如下：1772 年，欧拉(Euler,L.)给出一个二次三项式 $f(x)=x^2+x+41$，对于 80 个连续整数 $x=-40,-39,\cdots,-1,0,1,\cdots,38,39$，$f(x)$的值都是素数.此公式的等价命题可表述为：当 $x=0,1,\cdots,79$ 时，$f(x-40)=x^2-79x+1601$ 的 80 个函数值都是素数.这是由连续整数通过二次多项式只产生素数的最长纪录.1933 年，莱默(Lehmer,D.H.)证明了，如果 x^2+x+A，$A>41$，也像 x^2+x+41 那样，对所有 $x=0,1,2,\cdots,A-2$ 给出素数值，则 A 必须大于 $25\cdot10^7+1$. 1934年，又有人证明，即使在大素数范围内，这样的 A 最多也只有一个.20 世纪 60 年代末，又有人证明了这样的 A 是不存在的，但已经证明：对于任意整数 n，存在一个整系数多项式，当 $x=0,1,2,\cdots,n$ 时，多项式的值均为素数.但任何多项式 $f(x)$都不可能使每一个 x 都给出素数值.多项式之外有一些函数可以无限多次地给出素数值.1947 年，米尔斯(Mills,W.H.)证明了存在实数 θ_0，使得整数部分函数$[\theta_0^{3^n}]$对所有的 n ($n=1,2,3,\cdots$)都为素数.遗憾的是，这里 θ_0 的构造依赖于能否识别出任意大的素数.设想要是已能识别出任意大的素数，也就没有必要再去找那个产生素数的公式了.因此，只有当人们能用不依赖于寻找所有素数的某种方法来发现 θ_0 的值时，这个定理才能显示出它的重要性，现在还很难做到这一点.

贝特朗假设(Bertrand hypothesis)　关于素数分布的一个著名结论.对任一实数 $x\geqslant1$，在 x 及 $2x$ 之间必有一素数.此假设是贝特朗(Bertrand,J.L.F.)于 1846 年为证明置换群理论中的一个定理而作出的.1848 年即被切比雪夫(Чебышев,П.Л.)所证明.他引入函数

$$\theta(x) = \sum_{p<x} \ln p$$

和 $$\Psi(x) = \sum_{p^m<x} \ln p = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \cdots,$$

并证明

$$Ax + O(\sqrt{x}) < \theta(x) < \Psi(x) < \left(\frac{6}{5}\right)Ax + O(\sqrt{x}),$$

其中 $A=\ln 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}30^{-\frac{1}{30}}$，此猜测被证明后即称为贝特朗定理.关于 x 及 $2x$ 之间的素数问题，目前已经证明比贝特朗定理要好得多的结果：存在一个小于 1/2 的正常数 c，在 x 与 $x+x^c$ 之间必有素数存在，对于这样的 c，是否存在一个正的下界，是目前正在研究的难题之一.

贝特朗定理(Bertrand theorem)　见"贝特朗假设".

孪生素数(twin primes)　一类特殊的素数对.指 p 和 $p+2$ 都是素数.例如，(3,5)；(5,7)；(11,13)；$(10^9+7,10^9+9)$.已知的最大的一对孪生素数为 723 位数

$$1,159,142,985\cdot2^{2304}\pm1,$$

这是 1979 年，阿特金(Atkin,A.O.L.)和里克特(Rickert,N.W.)给出的.设 $Z(x)$表示不超过 x 的自然数中孪生素数的对数，例如，$Z(20)=4$，$Z(10^5)=1224$，$Z(10^6)=8164$，$Z(3.3\times10^7)=152892$ 等.从这些 $Z(x)$中可看出一个趋势，即 $x\to\infty$时，$Z(x)\to\infty$.孪生素数对是否有无穷多呢？这就是著名的孪生素数猜想.它是 1857 年由布尼亚可夫斯基(Буняковский,В.Я.)提出的一个猜想的特例，也是 1900 年，希尔伯特(Hilbert,D.)在国际数学家第二次会议上提出的 23 个著名问题中的第 8 问的一部分.此问题至今尚未解决.1922 年，哈代(Hardy,G.H.)与李特尔伍德(Littlewood,J.E.)对孪生素数猜想提出了一个重要的关系式

$$Z(x) = 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x(1+O(1))}{(\ln x)^2}, \qquad (1)$$

式中的常数取值为

$$C=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=0.660\,1\cdots$$

在这方面,已知的最好结果属于傅里(Foury,E.)和格鲁帕(Grupp,F.)

$$Z(x)\leqslant(6.908+\epsilon)C\frac{x}{\ln^2 x},$$

其中 ϵ 是大于 0 的任意实数.孪生素数猜想也是素数论的中心问题之一,设 a,b,c 为整数,考虑二元一次方程 $ax+by=c$ 存在素数解或存在无穷多组素数解的问题.取 $a=1,b=1,c\geqslant 6$ 即得哥德巴赫猜想;若取 $a=1,b=-1,c=2$ 即得孪生素数猜想.从筛法的角度看,哥德巴赫猜想与孪生素数猜想是姊妹问题,往往用同一方法可以得到两个问题相类似的结果.对孪生素数猜想的最好的结果是陈景润得出的:存在无穷多个素数 p,使 $p+2$ 为素因数个数不超过 2 的殆素数.

孪生素数这一概念可作如下两个拓广:

1.如果 p 是素数,而 $p+2$ 与 $p+6$ 也都是素数,则称$(p,p+2,p+6)$是一个三生素数组.例如(5,7,11);(11,13,17);(17,19,23);(101,103,107);(10 014 491,10 014 493,10 014 497).三生素数组是否也有无穷多呢?这就称为三生素数猜想,也是迄今尚未解决的问题.

2.更一般地,给定 $n>1$ 及 $n-1$ 个自然数 $l_1<l_2<\cdots<l_{n-1}$,且 p 为素数,若 $p+l_1,\cdots,p+l_{n-1}$ 也都是素数,则

$$(p,p+l_1,\cdots,p+l_{n-1})\qquad(2)$$

称为一个 n 生素数组.n 生素数组(2)有无穷多,称为 n 生素数猜想.孪生素数猜想和三生素数猜想,仅是 n 生素数猜想中的特例.

孪生素数猜想(twin primes conjecture)　见"孪生素数".

三生素数(tertiary primes)　见"孪生素数".

***n* 生素数**(twin primes)　见"孪生素数".

假素数(improper prime number)　亦称伪素数.一类特殊的合数.指满足 $n\mid(2^n-2)$的合数 n.例如 $n=341=11\cdot31$,$341\mid(2^{341}-2)$,所以 341 是假素数,也是已知的最小假素数.

假素数有以下性质:

1.假素数有无穷多个.

2.若 n 是一个奇假素数,则 2^n-1 是一个比 n 更大的奇假素数.

因此,从一个最小正的奇假素数出发,就可以得到无穷多个奇假素数.对于偶假素数问题,1950 年,莱默(Lehmer,D. H.)给出了第一个偶假素数为 161 038.1951 年,毕格尔(Beeger)又从理论上证明了偶假素数也有无穷多个,但具体求出一个偶假素数,还是十分困难的.假素数的命名,来源于费马定理的逆命题.由于费马定理是素数的判定定理,但费马定理的逆命题:"若 a 为一切整数,满足 $a^{n-1}\equiv1(\mathrm{mod}\ n)$的整数 n 为素数"是否成立呢?这个问题曾经引起过许多数学家的关注.远在 2500 年前,人们曾经断定其答案是肯定的.利用先进的现代计算工具已经证实,当 $1<n<300$ 时,凡能整除 2^n-2 的那些 n 都是素数,可是,当 n 的数值再增大,上述逆命题就不真了.

伪素数(improper prime number)　即"假素数".

超假素数(super-improper prime number)　一类特殊的假素数.若 n 为假素数(即合数 $n\mid(2^n-2)$),且 n 的所有因子 d 都能满足 $d\mid(2^d-2)$,则称 n 为超假素数.通过计算知 2 047 就是超假素数.一个整数 n 为超假素数的充分必要条件是 n 的每一个因子都是假素数.并非所有的假素数都是超假素数.例如,对假素数 $561=3\cdot11\cdot17$ 可以验证 $33\nmid(2^{33}-2)$,故 561 不是超假素数.1936 年,莱默(Lehmer,D. H.)证明了存在无穷多个假素数和超假素数,任何偶假素数都不可能是超假素数.

绝对假素数(absolute improper prime number)　亦称绝对伪素数.一类特殊的合数.指对一切整数 a,满足 $n\mid(a^n-a)$的合数 n.由定义知合数 n 应能整除 $2^n-2,3^n-3,4^n-4,\cdots$,即使 a 为负整数,$n\mid(a^n-a)$也能成立.从费马定理可以证明 561 能整除 $a^{561}-a$,又因 $561=3\cdot11\cdot17$,所以 561 是绝对假素数.已知的绝对假素数还有:2 821,10 585,15 841,至今还不知道是否存在无穷多的绝对假素数.

绝对伪素数(absolute improper prime number)　即"绝对假素数".

多项式表示素数问题(problem on representation of primes by polynomials)　一类特殊的多项式.关于产生素数的多项式问题.是否存在整系数多项式 $f(x)$,使对于每一个整数 x,$f(x)$都是素数呢?现在已经证明,不存在这样的多项式.但是,把整数 x 限定在某个范围内,使 $f(x)$的值为素数是可能的.例如,当 p 为素数时,多项式 $Q(n)=n^2-n+p$ 的素数分布问题就有极大的重要性.已知当 $0\leqslant n\leqslant 16$ 时,n^2-n+17 的值都是素数;当 $0\leqslant n\leqslant 40$ 时,n^2-n+41 的值也都是素数.因此,使人产生一个猜想:任给一个正整数 N,可否有一个素数 p,当 $0\leqslant n\leqslant N$ 时,使 $Q(n)$的值都是素数呢?现在此问题尚未解决.关于用 $Q(n)$表素数的问题,已得到的结果有:

1.设 p_e 为小于 $2\sqrt{p/3}$的最大素数,且当 $1\leqslant n\leqslant(p_e+1)/2$ 时,$Q(n)$为素数,则当 $1\leqslant n\leqslant p-1$ 时,$Q(n)$为素数.

2.若当 $1\leqslant n\leqslant p-1$ 时,$Q(n)$为素数,则 $4p-1$

亦为素数，且当 $1\leqslant n\leqslant (p-3)/2$ 时，$4(n^2+p)-1$ 亦为素数.

3. 当 $1\leqslant n\leqslant p-1$ 时，$Q(n)$ 均为素数的充分必要条件是 p 为 $4p-1$ 的二次剩余中的最小素数(参见"产生素数的公式").

切比雪夫函数(Chebyshev function)　重要的数论函数之一. 如果 $\Lambda(n)$ 表示曼戈尔特函数

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p & (n=p^m, m\geqslant 1, p\text{ 是素数}),\\ 0 & (n\neq p^m),\end{cases}$$

则下面函数

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p \tag{1}$$

和

$$\Psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$$

称为切比雪夫函数. 它是切比雪夫(Чебышев, П. Л.)为了证明素数定理而给出的，是重要的数论函数. 函数(1)与素数个数函数 $\pi(x)$ 有十分密切的联系. 事实上，素数定理

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}, (x\to\infty)$$

等价于 $\theta(x)\sim x$ 或 $\Psi(x)\sim x\,(x\to\infty)$，并且可由算术基本定理推出关于 $\Psi(x)$ 的一个重要性质，即

$$\sum_{n\leqslant x}\Psi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant x}\ln n. \tag{2}$$

(2)式使函数 $\Psi(x)$ 与对数函数建立了简单的联系，从而为证明素数定理和研究素数分布奠定了基础.

默滕斯公式(Mertens formula)　研究素数分布理论的基本工具. 设 p 为素数，$x\geqslant \mathrm{e}$，k，l 为正整数，且 $(k,l)=1$，$k\leqslant \ln^A x$(A 为任一正常数). 公式

$$\prod_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(k)}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{\varphi(k)}\left[\gamma+\ln\frac{\varphi(k)}{k}\right]}}{\ln^{\frac{1}{\varphi(k)}}x}\left\{1+O(\mathrm{e}^{-c\ln^{\frac{3}{5}}x})\right\}$$

称为默滕斯公式，其中 c 为正绝对常数，γ 是欧拉常数，且 O 中之常数与 x 无关. 公式的证明依赖于著名的贝特朗定理以及狄利克雷级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

的零点估计，公式证明的关键在于证明

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(k)}}\frac{1}{p}=\frac{1}{\varphi(k)}\ln\ln x+\frac{\gamma}{\varphi(k)}+\frac{1}{\varphi(k)}\ln\frac{\varphi(k)}{k}+c_1+O(\mathrm{e}^{-c_2\ln^{\frac{3}{5}}x}),$$

其中 $c_1<0$，$c_2>0$ 为固定常数. 特别地，有默滕斯公式

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\ln x}\left[1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right],$$

其证明依赖于公式

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+\gamma-\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{p}\frac{1}{mp^m}+O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

其中 γ 为欧拉常数. 此公式是 1884 年默滕斯(Mertens, F. C. J.)给出的.

素数个数函数(prime number function)　素数分布理论中最重要的数论函数. 研究素数在整个自然数列中的分布状况时，常用 $\pi(x)$ 表示不大于 x 的素数个数，称 $\pi(x)$ 为素数个数函数. 例如 $\pi(10)=4$，$\pi(100)=25$，$\pi(1000)=168$ 等. 设 $2=p_1<p_2<\cdots<p_r\leqslant\sqrt{x}$ 是不超过 $\sqrt{x}$ 的全体素数，则 $\pi(x)$ 有如下的表达式

$$\pi(x)=x+r-1-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{x}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{x}{p_ip_j}\right]-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{x}{p_ip_jp_k}\right]+\cdots+(-1)^r\left[\frac{x}{p_1p_2\cdots p_r}\right],$$

式中 $[\alpha]$ 表实数 α 的整数部分.

素数个数函数 $\pi(x)$ 有下述性质：

1. 素数有无穷多个，即

$$\lim_{x\to\infty}\pi(x)=\infty.$$

素数无穷的性质远在公元前 300 多年，已为欧几里得(Euclid)所证明.

2. 对 $x\geqslant 2$ 有 $\dfrac{x}{8\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant\dfrac{12x}{\ln x}$，是 1852 年切比雪夫(Чебышев, П. Л.)给出并证明的切比雪夫定理.

3. 设 $x\geqslant 4$，则有 $\pi(x)\geqslant x\ln\dfrac{2}{\ln x}$.

4. 素数的出现概率为 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\pi(x)/x=0$.

1962 年，罗塞(Rosser, J. B.)和施恩费尔德(Schoenfeld, L.)证明了不等式

$$\frac{x}{\ln x-\frac{3}{2}}<\pi(x)<\frac{x}{\ln x-\frac{1}{2}}$$

(其中 $x\geqslant 67$)和 $n\ln n<p_n<n(\ln n+\ln\ln n)\,(n\geqslant 6)$.

素数定理(prime number theorem)　数论中的重要定理之一. 指素数分布的中心定理. 用 $\pi(x)$ 表示不大于 x 的素数个数，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1.$$

为了帮助了解素数分布的规律，以及素数定理的来源，人们列出下列函数的值的表，以便观察比较.

$$\pi(x),\ \frac{x}{\ln x},\ \mathrm{li}\,x,\ \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}\,x},\ \frac{\pi(x)}{x}\text{ 与 }\frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

从下表中数字可以看出如下规律：

1. 当 $x\to\infty$ 时，$\pi(x)\to\infty$，即素数有无穷多.

2. 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{\pi(x)}{x}\to 0$，即几乎所有的自然数都是合数.

3. 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}\to 1$，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1.$$

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\mathrm{li}x$	$\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}x}$	$\frac{\pi(x)}{x}$	$\frac{\pi(x)\ln x}{x}$
1000	168	145	178	0.94	0.1680	1.1379
10000	1229	1086	1246	0.98	0.1229	1.1317
50000	5133	4621	5167	0.993	0.1026	1.1108
100000	9592	8686	9630	0.996	0.0959	1.1043
500000	41538	38103	41606	0.9983	0.0830	1.0902
1000000	78498	72382	78628	0.9983	0.0785	1.0849
2000000	148933	137848	149055	0.9991	0.0745	1.0804
5000000	348513	324149	348638	0.9996	0.0697	1.0752
10000000	664579	620417	664918	0.9994	0.0665	1.0712
20000000	1270607	1189676	1270905	0.9997	0.0635	1.0681
90000000	5216954	4913897	5217810	0.99983	0.0580	1.0617
100000000	5761455	5428613	5762209	0.99986	0.0576	1.0613
1000000000	50847478	48254630	50849235	0.99996	0.0508	1.0537

勒让德(Legendre,A.-M.)和高斯(Gauss,C.F.)于1830年前后即根据素数表猜测出此素数定理,但都未能给出证明. 1852年,切比雪夫(Чебышев,П. Л.)证明了存在两个正常数 c_1,c_2,使得不等式

$$c_1\cdot\frac{x}{\ln x}\leqslant\pi(x)\leqslant c_2\cdot\frac{x}{\ln x}$$

在 $x\geqslant 2$ 时成立;1896年,阿达马(Hadamard,J.(-S.))和瓦莱·普桑(Vallée-Poussin,C. de la)彼此独立地证明了素数定理. 他们的证明都使用了复变函数知识. 为了观察、寻求素数定理的误差项 $\pi(x)-\mathrm{li}x$ 的最佳估计,表中列出了

$$\mathrm{li}\,x=\lim_{\eta\to 0}\left(\int_0^{1-\eta}+\int_{1+\eta}^{x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

的部分值,可以看出它比 $x/\ln x$ 更接近 $\pi(x)$. 瓦莱·普桑于1900年证明了

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x=O(x\exp(-c\sqrt{\ln x})),$$

其中 c 为正常数. 1901年,科克(Koch,H. von)在黎曼猜测的基础上证明了

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x=O(\sqrt{x}\ln x).\qquad(1)$$

1914年,李特尔伍德(Littlewood,J. E.)证明了当 $x\to\infty$ 时,有 $\pi(x)-\mathrm{li}x=\Omega_{\pm}((\sqrt{x}\ln\ln\ln x)/\ln x)$. 误差项 $\pi(x)-\mathrm{li}x$ 的变化是极不规则的. 记号 $\Omega_{\pm}$ 的意义如下:如果 $f(x)$ 是 x 的实函数,且存在常数 $c>0$,有任意大的 x 使 $f(x)>c\varphi(x)$,则记为 $f(x)=\Omega_{+}(\varphi(x))$;如果有任意大的 x 使 $f(x)<-c\varphi(x)$,则记为 $f(x)=\Omega_{-}(\varphi(x))$,若这两种情形同时出现,则记为 $f(x)=\Omega_{\pm}(\varphi(x))$. 寻找素数定理的初等证明,即不用复变函数论或类似的工具的证明方法,是素数论中历时很久的难题之一. 直到1949年,塞尔伯格(Selberg,A.)和爱尔特希(Erdös,P.)各自独立地给出了初等证明,证明中除了极限与 $\ln x$,e^x 的性质之外,没有用到其他的分析知识,但证明过程很复杂. 证明是基于塞尔伯格恒等式:当 $x\geqslant 1$ 时,有

$$\theta(x)\ln x+\sum_{p\leqslant x}\theta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p=2x\ln x+O(x),$$

式中

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\ln p,$$

$\sum\limits_{p\leqslant x}$ 表示对所有不超过 x 的素数求和. 记号 O 的意义见本卷《数学分析》中的"记号 O 与 o". 1958年,维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)借助于他的三角和估计方法,得到

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x=O(x\exp(-c(\ln x)^{\frac{3}{5}-\varepsilon})),$$

其中 ε 为任意正数,c 是和 ε 有关的正常数. 这就是直至目前最好的结果. 但距离(1)式还相差很远. (1)式的成立也可反推到黎曼猜测的成立,也就是说(1)式和黎曼猜测是等价命题. 应该指出,素数论中许多著名问题的解决,往往可以归结为黎曼猜测的证明. 黎曼猜测在数论中实在是太重要了. 现在还远远不能证明比(1)式弱得多的结果,例如

$$\pi(x)-\mathrm{li}\,x=O(x^{1-\varepsilon}),$$

式中 ε 是某一正数(例如 $\varepsilon=10^{-10000}$),而与 O 有关的常数仅依赖于 ε.

算术数列中的素数定理(prime number theorem in arithmetic progression) 素数分布问题的重要定理之一. 指素数在算术数列中的分布情况. 设整数 $d\geqslant 3$,$1\leqslant a\leqslant d$,$(a,d)=1$,以 $\pi(x,d,a)$ 表首项为 a、公差为 d 的算术数列中不超过 x 的素数之个数,对于固定的 d 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x,d,a)\varphi(d)\ln x}{x}=1,$$

式中 $\varphi(d)$ 为欧拉函数. 1837年,狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)就证明了首项与公差互素的算术数列

中有无限多个素数，并估计出小于 N 的素数个数大约等于 $N/(\varphi(a)\ln N)$，其中 $\varphi(a)$ 为欧拉函数. 关于误差项估计，佩奇(Page, A.)于 1935 年和西格尔(Siegel, C. L.)、瓦尔菲施(Walfisz, A.)于 1936 年证明了：对任意正数 h，当 $3\leqslant d\leqslant(\ln x)^h$ 时，有

$$\pi(x,d,a)-\frac{1}{\varphi(d)}\mathrm{li}\,x=O(x\exp(-c\sqrt{\ln x})),$$

式中 c 为绝对正常数，记号 O 中所含的常数仅与 h 有关而与 d 无关. 1962 年，弗吉尔斯(Fogels, E.)证明了对任意正整数 ε，存在常数 $C_0(\varepsilon)$ 及 $C(\varepsilon)$，使得当 $x\geqslant d^{C_0(\varepsilon)}$ 时，有

$$\pi(x,d,a)>\frac{C(\varepsilon)x}{\varphi(d)d^{\varepsilon}\ln x}.$$

算术数列中的最小素数(least prime in an arithmetic progression)　素数分布的重要问题之一. 是研究首项为 $a(\geqslant 3)$、公差为 $b(1\leqslant b\leqslant a$，且 $(a,b)=1)$ 的算术数列中的最小素数 $p(a,b)$ 的上界估计问题. 乔拉(Chowla, S.)猜测数列 $\{an+b\}$，$n=0,1,2,\cdots$ 中的最小素数

$$p(a,b)=O(a^{1+\varepsilon}),$$

其中 ε 为任意小的正数. 1944 年，林尼克(Линник, Ю. В.)证明了：存在绝对常数 c，使得 $p(a,b)=O(a^c)$. 这个常数 c 称为林尼克常数. 1956 年，潘承洞指出常数 c 是可以计算的，并证明 $c\leqslant 5448$. 1979 年，陈景润证明了 $c\leqslant 17$.

广义素数定理(generalized prime number theorem)　素数定理的推广. 设整数 $n>1$，$P(n)$ 表 n 的最大素因子，$p(n)$ 表 n 的最小素因子，则有

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}\frac{p(n)}{P(n)}=(1+o(1))\pi(x). \qquad (1)$$

$$S(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{3x}{\ln^2 x}+o\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),x\to\infty. \qquad (2)$$

当 n 仅取素数时，

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{p(p)}{P(p)}=\sum_{p\leqslant x}1=\pi(x). \qquad (3)$$

所以，$S(x)$ 是 $\pi(x)$ 的一种推广. 而(1)表明 $S(x)$ 与 $\pi(x)$ 是等价的. (3)式则进一步求出了 $S(x)$ 的渐近公式. 但注意到对任意正整数 A，由于有

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x\ln^{-A}x)$$
$$=\frac{x}{\ln x}+\frac{x}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right),$$

因而 $S(x)$ 与 $\pi(x)$ 进一步的渐近公式是不同的. $S(x)$ 最好的结果是

$$S(x)=\frac{x}{\ln x}+\frac{3x}{\ln^2 x}+\frac{15x}{\ln^3 x}+o\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right)\quad(x\to\infty).$$

通过复杂的计算，还可以定出此渐近公式中的更低次项. 但是，是否存在一个函数 $f(x)$，使对任意的正整数 A，有 $S(x)=f(x)+O(x\ln^{-A}x)$，迄今尚未解决. 广义素数定理是 1982 年爱尔特希(Erdös, P.)提出和证明的.

哥德巴赫猜想(Goldbach conjecture)　数论中的一个著名问题. 1742 年，哥德巴赫(Goldbach, C.)在与欧拉(Euler, L.)的几次通信中，提到了几个关于素数之和的猜想. 在笛卡儿(Descartes, R.)的遗稿和华林(Waring, E.)1770 年的《代数沉思录》中也出现同类猜想. 后被综合称为哥德巴赫猜想的两个猜想：

1. 每个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和.

2. 每个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和.

一般地，人们把猜想 1 称为关于偶数的哥德巴赫猜想，把猜想 2 称为关于奇数的哥德巴赫猜想. 由于 $2n+1=2(n-1)+3$，所以，从猜想 1 的正确性就立即推出猜想 2 也是正确的. 但不能由猜想 2 的正确性推出猜想 1 也正确，所以猜想 2 只是猜想 1 的一个特例.

哥德巴赫猜想是希尔伯特(Hilbert, D.)于 1900 年在第二届国际数学家大会上，提出的 23 个著名问题中的第 8 个问题的一部分. 20 世纪 20 年代，哈代(Hardy, G. H.)与李特尔伍德(Littlewood, J. E.)提出了用圆法来研究猜想，从而做出了重大的推进. 1937 年，维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)用他自己创造的三角和方法证明了对足够大的奇数，猜想 2 是正确的. 所以，通常所说的哥德巴赫猜想是指猜想 1，即关于偶数的哥德巴赫猜想. 为避开直接证明猜想的困难，退一步先证明它的一种减弱的命题：每一个大偶数都是两个素因子个数不太多的数之和. 为简单起见，把"每一个大偶数可以表示为一个素因子个数不超过 a 个的数和一个素因子个数不超过 b 个的数之和"，这一命题记为 $(a+b)$，然后一步步地逼近，最后证明命题(1+1)，即哥德巴赫猜想是正确的. 这样来逐步逼近猜想的思路通常称为因子哥德巴赫问题. 1920 年，布龙(Brun, V.)首先用他的筛法证明了(9+9)是正确的；1924 年，拉德马赫(Rademacher, H.)证明了"7+7"；1932 年，埃斯特曼(Estermann, T.)证明了"6+6"；1938 年，布赫什塔布(Бухштаб, А. А.)证明了"5+5"，1940 年他又证明了"4+4"；1956 年和 1957 年，王元接连证明了"3+4"，"3+3"和"2+3". 这些成果越来越接近"1+1"，但有一个弱点是两个数中没有肯定一个可以是素数. 早在 1948 年，雷尼(Renyi, A.)另外设计了一种逼近的通路：他让一个数为素数，利用林尼克(Линник, Ю. В.)创造的"大筛法"研究 L 函数的零点分布，从而证明了 $(1+C)$ 正确，由于 C 是一个没有计算出来的很大的常数，所以这只是一个定性的结果. 1962 年，潘承洞首先证明了 $C=5$，即(1+5)成立，同年，王元和潘承洞又证明了(1+4)成立. 1965 年，布赫什塔布、维诺格拉多夫和邦别里

(Bombieri,E.)都证明了(1+3),邦别里的工作对大筛法做出了重要贡献,当时在国际数学界被认为是了不起的成就.继(1+3)之后,1966 年,陈景润宣布他证明了(1+2),并于 1973 年发表了他的全部证明,在国际数学界引起了强烈的反响,这就是陈氏定理.这也是迄今为止关于哥德巴赫猜想的最好结果,但是至今仍未证明哥德巴赫猜想的真伪.

研究哥德巴赫猜想的另一条途径是:若将正整数 n 表成 k 个素数的和 $n=p_1+p_2+\cdots+p_k$,则估计 k 的最小值问题称为弱型哥德巴赫问题.若能证明 $k=2$,就等于猜想成立.1930 年,开始沿这条途径研究.1935 年,罗曼诺夫(Романов,Н. П.)证明了 $k\leqslant 2208$;1936 年,兰道(Landau,E. G. H.)等三位数学家都证明了 $k\leqslant 71$;1937 年,里奇(Ricci)证明了 $k\leqslant 67$;1950 年,夏皮罗(Shapiro,M. S.)和瓦尔加(Varga)证明了 $k\leqslant 20$;1956 年,尹文霖证明了 $k\leqslant 18$;1980 年,陈景润证明了 $k\leqslant 15$,这是用较初等的方法得到的最好结果.1937 年,维诺格拉多夫曾用精深的复分析方法证明了,当 n 为足够大的偶数时,$k\leqslant 4$;当 n 为足够大的奇数时,$k\leqslant 3$(此即对足够大的奇数猜想 2 成立).1977 年,潘承彪给出了上面这个结论的一个简化的证明.

研究哥德巴赫猜想的又一途径是:设 x 充分大,将区间 $[1,x]$ 中的偶数分成两类,一类是能够表为两个奇素数之和的,称为哥德巴赫数,另一类是不能表为二奇素数之和,称为非哥德巴赫数.把所有不超过 x 的非哥德巴赫数所组成的集合及其个数均用 $E(x)$ 来表示,$E(x)$ 亦称为哥德巴赫数的例外集合.这样,关于偶数的哥德巴赫猜想就是要证明:当 $x\geqslant 4$ 时,$E(x)=2$.但是,要直接证明同样是困难的,因而首先粗略地估计 $E(x)$ 的阶,然后逐渐使之精密,让 $E(x)$ 相对于 x 的阶逐渐减小.早在 1938 年,华罗庚就利用圆法与三角和方法证明了 $E(x)=O(x\ln^{-c}x)$,其中 c 是任意正数.这在很大程度上说明哥德巴赫猜想是正确的.1975 年,蒙哥马利(Montgomery,D.)等又证明了 $E(x)=O(x^{1-\delta})$,这里 δ 为某一很小正数.1981 年,陈景润与潘承洞证明了 $\delta\geqslant 0.011$.1951 年,林尼克首先研究了如下的问题:找一个函数 $f(x)$,使对充分大的 x,区间 $[x,x+f(x)]$ 中必有哥德巴赫数存在.这其实就是估计相邻哥德巴赫数之差.显然,若能证明 $f(x)\equiv 2$,则也就解决了哥德巴赫猜想.这也是研究猜想的一个途径.林尼克在黎曼假设成立下证明了可取

$$f(x)=(\ln x)^{\frac{3}{5}+\varepsilon},$$

其中 ε 为任意小的正数.潘承洞不用黎曼假设证明了:当 ζ 函数的零点密度估计

$$N(\alpha,T)\ll T^{c_1(1-\alpha)}(\ln T)^{c_2},\ \frac{1}{2}\leqslant\alpha<1,\ T\geqslant 2$$

成立时,可取

$$f(x)=x^{1-\frac{2}{c_1}+\varepsilon}.$$

蒙哥马利则证明了当上述零点密度估计成立时,可以取

$$f(x)=x^{\left(1-\frac{2}{c_1}\right)\left(1-\frac{1}{c_1}\right)+\varepsilon},$$

其中 ε 为任意小的正整数.以上就是研究哥德巴赫猜想的主要途径和方法,但目前关于这个问题的最好结果仍然是陈氏定理.

因子哥德巴赫问题(factor Goldbach problem) 见“哥德巴赫猜想”.

弱型哥德巴赫问题(weak type Goldbach problem) 见“哥德巴赫猜想”.

哥德巴赫数(Goldbach number) 见“哥德巴赫猜想”.

华林问题(Waring problem) 见本卷《数学辞海》第二卷同名条.

塞尔伯格筛法(Selberg sieve) 在数论中有广泛应用的一个初等方法.设 A 是由有限个整数组成的集合(元素可以重复),P 是由无限个素数组成的集合(元素不能重复),以 $\overline{P}$ 表示所有不属于 P 的素数组成的集合.再设 $z\geqslant 2$ 是任意实数,并令

$$P(z)=\prod_{\substack{p<z\\ p\in P}}p,$$

函数

$$S(A;P,z)=\sum_{\substack{a\in A\\ (a,P(z))=1}}$$

称为筛函数,它表示集合 A 中没有小于 z 且属于 P 的素因子的元素的个数,亦即表示从集合 A 中筛去所有小于 z 且属于 P 的素因子的元素后所剩下的元素的个数.筛函数有下述性质:

1. $S(A;P,2)=|A|$ ($|A|$ 表示 A 中元素个数).

2. $S(A;P,z)\geqslant 0$.

3. $S(A;P,z_1)\geqslant S(A;P,z_2)$,$2\leqslant z_1\leqslant z_2$.

4. 对任意的 $2\leqslant\omega\leqslant z$,有

$$S(A;P,z)=S(A;P,\omega)-\sum_{\substack{\omega\leqslant p<z\\ p\in P}}S(A_p;P,p).$$

其更重要的性质是:

$$S(A;P,z)=\sum_{a\in A}\sum_{d|(a,P(z))}\mu(d)=\sum_{d|P(z)}\mu(d)|A_d|,$$

其中 $\mu(d)$ 为默比乌斯函数,A_d 表示 A 中所有能被 d 所整除的元素所组成的子集,并且筛函数 $S(A;P,z)$ 的估计与集合 A_d,$d|P(z)$ 有密切的关系.对于集合 A 及 P,适当选取正数 $X>1$ 及一个非负可乘函数 $\omega(d)$,$\mu(d)\neq 0$,$(d,\overline{P})=1$,并设

$$r_d=|Ad|-\frac{\omega(d)}{d}X,$$

及 $\omega(d)$ 满足条件:$0<\omega(p)/p\leqslant 1-L_1^{-1}$,$(p,\overline{P})=$

1，其中 L_1 为大于 1 的常数. 再设 $\xi\geqslant 2$，λ_d，$d\mid P(z)$ 是满足 $\lambda_1=1$，$\lambda_d=0(d\geqslant\xi)$ 的任意一组实数. 于是有

$$\begin{aligned}S(A;P,z)&\leqslant\sum_{a\in A}\Big(\sum_{d\mid(a,P(z))}\lambda_d\Big)^2\\&=\sum_{d_1,d_2\mid P(z)}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\Big(\sum_{\substack{a\in A\\ [d_1,d_2]\mid a}}1\Big)\\&=X\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,\end{aligned}$$

其中

$$\sum\nolimits_1=\sum_{d_1,d_2\mid P(z)}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\omega([d_1,d_2])/[d_1,d_2],$$

$$\sum\nolimits_2=\sum_{d_1,d_2\mid P(z)}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}r_{[d_1,d_2]}.$$

把 $X\sum_1$ 称为主项，$\sum_2$ 称为余项. 由于当 $d\geqslant\xi$ 时 $\lambda_d=0$，所以余项 $\sum_2$ 的项数不超过 ξ^2. 这样，通过对参数 ξ 的选择就可控制余项的阶，使其低于主项的阶而可以略去. 同时还可选择一组满足所述条件的 λ_d，使 $\sum_1$ 最小而得到一个尽可能好的上界估计. 这就是塞尔伯格的筛法. 筛法的基本问题是估计筛函数 $S(A;P,z)$ 的上界和正的下界.

筛法源于古希腊的埃拉托斯特尼（Eratosthenes），后经多次改进才形成今天的筛法. 1950 年，塞尔伯格（Selberg，A.）在其论文“等差数列的初等证明”（参见“塞尔伯格渐近公式”）中利用求二次型极值的方法对埃拉托斯特尼筛法作了重大改进. 由他的筛法可得到筛函数上界的估计. 若与布赫什塔布恒等式相结合就可得到筛函数的下界估计. 塞尔伯格筛法的重要应用如：1956 年，王元应用它证明了(3+4)；维诺格拉多夫（Виноградов，И. М.）证明了(2+3)；塞尔伯格证明了区间 $(A,A+N)$ 中素数个数不超过 $2N/\ln N+O(N\ln\ln N\ln^{-2}N)$，其中，$O$ 中常数与 A 无关；对固定常数 $0<\delta<1$，则证明了在算术级数 $kn+l(n=1,2,\cdots)$ 中不超过 x 的素数个数不大于

$$2x(\varphi(k)\ln x/k)^{-1}+O(x\ln\ln x\ln^{-2}x).$$

目前许多好结果，几乎都是利用加权形式的塞尔伯格筛法得到的.

筛函数(sieve function)　见“塞尔伯格筛法”.

密率(density)　数论中的一个重要概念. 是与哥德巴赫猜想及华林问题有关的概念. 给定整数的集合 A：$a=a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，其中 $a_n<a_{n+1}$，若用 $A(n)$ 表示 A 中不超过 $n(n\geqslant1)$ 的正整数的个数，即

$$A(n)=\sum_{\substack{1\leqslant a_k\leqslant n\\ a_k\in A}}1,$$

则 $0\leqslant A(n)\leqslant n$，而 $0\leqslant A(n)/n\leqslant1$. $A(n)/n(n=1,2,\cdots)$ 的下确界称为 A 的密率，记为 $d(A)$，即

$$d(A)=\inf_{n\geqslant1}\frac{A(n)}{n}.$$

例如，集合 $A=\{0,2,4,6,8,\cdots\}$ 的密率 $d(A)=1/2$，集合 $A=\{1,3,5,7,\cdots\}$ 的密率 $d(A)=1/2$；而集合 $A=\{0,1,2,3,4,5,\cdots\}$ 的密率 $d(A)=1$. 从密率的定义可得到它的一些简单性质：

1. 若集合 A 不包含 1（当 $a_1>1$）时，$d(A)=0$.

2. 若 $a_n=1+r(n-1)$（即 A 从 a_1 起，是以 1 为首项，r 为公差的等差数列），则 $d(A)=1/r$.

3. 每一个等比数列所成集合的密率是 0.

4. 所有完全平方数组成的集合，密率是 0.

5. 如果 $d(A)=0$，而 A 包含 1，则对任给的 $\varepsilon>0$，一定可找到 $N\geqslant1$，使得 $A(N)<\varepsilon N$.

6. 集合 A 包含自然数全体的充分必要条件是

$$d(A)=1.$$

7. 设 A,B 是两个数集，令 $A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$（数论中集合相加均按此定义），则 $d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)\cdot d(B)$. 更一般地有

$$d(A_1+A_2+\cdots+A_k)\geqslant1-\prod_{i=1}^{k}\{1-d(A_i)\}.$$

此即由施尼雷尔曼（Шнирельман，Л. Г.）于 1930 年引入的施尼雷尔曼不等式.

8. 若 $d(A)+d(B)\leqslant1$，则

$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)$. 一般地，当

$$\sum_{i=1}^{k}d(A_i)\leqslant1$$

时，有

$$d\Big(\sum_{i=1}^{k}A_i\Big)\geqslant\sum_{i=1}^{k}d(A_i).$$

这就是兰道不等式. 1931 年，兰道（Landau，E. G. H.）猜想有上述不等式成立，但直到 1942 年才由曼（Mann，H. B.）给出证明. 1954 年，凯皮尔曼（Kemperman）给出了一个新的简单的证明.（在《平面几何》中另有指祖冲之圆周率 $\pi=355/113$ 的同名条）.

自然数的基(basis of natural numbers)　数论中的基本概念之一. 数集 A 与其本身相加至一定次数 k 时，就包含自然数全体，A 称为自然数的一个基，此种 k 的最小者称为基的阶. 每一个正密率的集合都是自然数的基.

渐近密率(asymptotic density)　一个与密率近似的概念. 设 A 是非负整数集，$A(n)$ 表示 A 中不大于 n 的正整数的个数，则称

$$\delta^*(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$$

为 A 的渐近密率. 例如，若 A 是自然数集合，则由于 $A(n)/n=1$，故 $\delta^*(A)=1$；若 A 为由 0,2,4,6,8,⋯ 所成的集合，则 $\delta^*(A)=1/2$；一般地，若集合 A 是以 r（正整数）为公差的等差数列，则 $\delta^*(A)=1/r$；若集合 A 是由等比数列所组成，则其渐近密率为 0；所有完全平方数所成的集合，其渐近密率亦为 0（参

见“密率”).

本性分量(essential component)　一个与密率有关的概念.若有集合 B,对任何集合 A,其密率 $d(A)$ 满足 $0<d(A)<1$ 时,恒有 $d(A+B)>d(A)$,则称集合 B 为本性分量.若对任意集合 A,当其渐近密率 $\delta^*(A)$ 满足 $0<\delta^*(A)<1$ 时,恒有 $\delta^*(A+B)>\delta^*(A)$,则称集合 B 为渐近本性分量.显然,零属于任何本性分量 B,否则当 $0\notin A$ 时,$1\notin A+B$,因而 $d(A+B)=0$ 与定义矛盾.设 $Z=\{0,1,2,\cdots\}$,$Z^0=\{1,2,\cdots\}$ 及

$$kA=\sum_{i=1}^{k}A\ (k\in Z^0),$$

若 $Z\subset kB(0\leqslant k<\infty)$,但 $Z\not\subset lB,0\leqslant l<k$,则称 B 为 k 阶基.以 $A\sim B$ 表示集合 A 与 B 除有限个元素外彼此相同,反之记为 $A\nsim B$.若 $Z\sim kB,0\leqslant k<\infty$,但 $Z\nsim lB,0\leqslant l<k$,则称 B 为 k 阶渐近基.显然零属于任何基.

渐近本性分量(asymptotic essential component)　见“本性分量”.

k 阶基(basis of order-k)　见“本性分量”.

k 阶渐近基(asymptotic basis of order-k)　见“本性分量”.

斐波那契数列(Fibonacci progression)　一个著名的递推数列.定义在自然数集上的函数 F,若满足递推关系 $F_1=F_2=1$ 和 $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}(n\in\mathbf{N})$,则称 F 为斐波那契函数.由它的函数值按自然顺序排出的数列是:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…称为斐波那契数列.这个数列中的每一项,都称为斐波那契数.斐波那契数列的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

这数列的前 n 项和的公式为

$$S_n=\sum_{i=0}^{[n/2]}C_{n-i}^{i}(n=0,1,2,\cdots),$$

符号$[n/2]$为整数部分函数.F_n/F_{n+1}是黄金分割数$(\sqrt{5}-1)/2$的最佳渐近分数,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618034.$$

这是几何学中线段的中外比.它在造型艺术、建筑结构以及优选法中都有应用.特别是在单因数优选法中,可用任意两项足够大的相邻的斐波那契数之比来代替 0.618.这就产生了单因素优选法中的分数法.此外,斐波那契数列还有下列性质:

1. $F_n^2=F_{n-1}\cdot F_{n+1}\pm 1\ (n\geqslant 2)$.
2. $F_{m+n}^2-F_{m-n}^2=F_{2m}\cdot F_{2n}$.
3. 当 $m|n$ 时,$F_m|F_n$.

斐波那契(Fibonacci,L.)在他 1202 年所著,1228 年修订再版的《算法之书》一书中提出了一个著名的兔子问题.大意是:若有一对幼兔,第二个月长成年,第三个月开始每月产下一对幼兔;所生每对幼兔也在第二个月成年,第三个月开始每月产下一对幼兔;依此类推.假定每次产下的幼兔都是一雌一雄,也没有生病和死亡.这样得到的每月存栏的兔子对数,恰好是上述数列.斐波那契数列由此得名.在斐波那契数列中,只知道 11 个斐波那契数是素数:2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, 433494437, 2971215073.还不知道别的 F_n 是不是素数,更不知道数列 $F_n(n=1,2,\cdots)$中是否有无穷多个素数.此外,数列 $u_n(n=1,2,\cdots)$定义为 $u_1=1$,$u_2=3$,$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n(n=1,2,\cdots)$亦称斐波那契数列.$u_n$ 与 F_n 的差别仅在于它们初始值取得不同,即 $n=1,2$ 时的取值不同,以后的值都是由同样的递推公式得到的.在数列$\{u_n\}$中,只知道 16 个素数,其中最大的是

688846502588399.

至今还不知道在数列 $u_n(n=1,2,\cdots)$中是否有无穷多个素数.

斐波那契函数(Fibonacci function)　见“斐波那契数列”.

斐波那契数(Fibonacci numbers)　见“斐波那契数列”.

斐波那契数的性质(properties of Fibonacci numbers)　对斐波那契数的一种刻画.指斐波那契数所具有的重要关系.通常的斐波那契数 F_n 具有:

1. $(F_n,F_{n+1})=1$,即任意两个相邻的斐波那契数都是互素的.
2. $F_{m+n}=F_{m-n}F_n+F_mF_{n+1}$.
3. $F_m|F_{mn}$.
4. $(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$.
5. $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$.
6. $F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$.
7. $F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$.
8. $F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+F_{2n-1}-F_{2n}$
   $=-F_{2n-1}+1$.
9. $F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_n\cdot F_{n+1}$.
10. $F_{n+1}^2=F_nF_{n+2}+(-1)^n$.
11. $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$.
    $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-1$.

广义斐波那契序列(generalized Fibonacci sequence)　斐波那契数的推广.由递推关系

$$F_1^{(m)}=F_2^{(m)}=\cdots=F_{m-1}^{(m)}=0,F_m^{(m)}=1,$$

$$F_{m+n}^{(m)}=F_n^{(m)}+F_{n+1}^{(m)}+\cdots+F_{n+m+1}^{(m)},n\geqslant 1$$

所产生的序列,称为 m 级广义斐波那契序列,其通项表达式为

$$F_{(s+1)m+k}^{(m)}$$
$$=\sum_{n_1+2n_2+\cdots+mn_m=sm+k}\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_m)!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$$
$$=2^{k-s-1}\sum_{j=0}^{s}(-1)^j2^{(s-j)(m+1)}\times\left[\binom{(s-j)m+k}{j}+\binom{(s-j)m+k-1}{j-1}\right].$$

式中 $s=0,1,2,\cdots;k=1,2,\cdots,m$. 设 ω 为方程

$$x^m+x^{m-1}+\cdots+x-1=0\ (m\geqslant 2)$$

的惟一正根,则

$$\omega=\lim_{s\to\infty}\frac{F_{(s+1)m}^{(m)}}{F_{(s+1)m+1}^{(m)}}$$
$$=\lim_{s\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{s}(-1)^j2^{sm-j(m+1)-1}\left[\binom{(s-j)m}{j}+\binom{(s-j)m-1}{j-1}\right]}{\sum_{j=0}^{s}(-1)^j2^{sm-j(m+1)}\left[\binom{(s-j)m+1}{j}+\binom{(s-j)m}{j-1}\right]}.$$

不 定 方 程

不定方程(indeterminate equation)　亦称丢番图方程. 初等数论的基本概念和重要内容之一. 即未知数个数多于方程个数的方程或方程组,其解的取值范围常受某种限制,可以是整数环、有理数域,或某一代数数域 $Q(\theta)$ 上的代数整数环. 求解高于二次的不定方程是繁难的,迪克森(Dickson,L. E.)所著《数论史 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ》的第二卷中专论不定方程问题,长达 800 多页,其繁难复杂之程度可以想见.

中国古代(约公元 1 世纪)的《九章算术》中《方程》篇第十三题称为五户共井问题. 其题曰:今有五家共井,甲二绠(音 gěng. 汲水用的绳子)不足,如乙一绠;乙三绠不足,如丙一绠;丙四绠不足,如丁一绠;丁五绠不足,如戊一绠;戊六绠不足,如甲一绠. 如各得所不足一绠,皆逮. 问井深、绠长各几何?将这段文字表述为今天的方程组. 设甲、乙、丙、丁、戊绳长依次各为 v,w,x,y,z,井深为 a. 可得方程组

$$\begin{cases}2v+w=a,\\3w+x=a,\\4x+y=a,\\5y+z=a,\\6z+v=a.\end{cases}$$

此不定方程组的最小正整数解为

$$v=265,w=191,x=148,y=129,z=76,a=721.$$

中国南北朝时期北魏(386—534)张丘建所著的《张丘建算经》,全书三卷共 92 问,其最末一问为著名的百鸡问题:今有鸡翁一,直五钱,鸡母一,直三钱,鸡雏三,直一钱,凡百钱,买鸡百只. 问鸡翁、母、雏各几何?此问题可列成方程组:设鸡翁、母、雏的个数分别为 x,y,z,得方程组

$$\begin{cases}5x+3y+\frac{1}{3}z=100,\\x+y+z=100.\end{cases}$$

这也是不定方程问题,共有 3 组正整数解为 $(x,y,z)=(4,18,78),(8,11,81),(12,4,84)$. 可知中国是研究不定方程问题起源较早的国家.

在希腊,丢番图(Diophantus)研究了整系数不定方程的整数解,著有《算术》一书. 书中有 189 个不定方程问题,较完整地研究了不定方程的解法,故西方国家常称这类不定方程为丢番图方程. 但他解题的方法技巧性很强,很少给出一般性的方法. 不定方程的内容极其丰富,与数学的其他分支,如代数数论、代数几何、组合数学等都有密切的联系,许多数学家如费马(Fermat,P. de)、欧拉(Euler,L.)、高斯(Gauss,C. F.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、库默尔(Kummer,E. E.)、希尔伯特(Hilbert,D.)等都研究过不定方程,他们的研究更大地丰富了数论的内容.

近 40 年来,这个领域的研究又有更重要的进展. 1968 年,贝克(Baker,A.)运用丢番图逼近论的方法,给出了不定方程

$$H(x,y)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}y+\cdots+a_1xy^{n-1}+a_0y^n=c$$

的解的一个可计算的上界,还定出了另外许多类不定方程解的上界. 为此得到 1970 年的菲尔兹国际数学奖. 这一结果属于希尔伯特第 10 问题的特解. 所谓希尔伯特第 10 问题,是问能否判定任何整系数多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 有没有整数解. 此问题已于 1970 年由马尔贾尼什维利(Марджанишвили,K. K.)给出了否定的回答,这是数理逻辑研究中的一重大成果. 此外,还有一些数论中的猜想得到解决. 如爱尔特希(Erdös,P.)曾猜想不定方程

$$x^xy^y=z^z\ (x>1,y>1,z>1)$$

无整数解. 1940 年,柯召证明了在 $(x,y)=1$ 时,这一猜想是成立的. 同时给出在 $(x,y)>1$ 时含有一个参数的偶数解. 是否存在一组奇数解? 迄今尚未解决. 另外,安德森(Anderson,C.)猜想不定方程

$$x^xy^yz^z=w^w$$

没有 $x>1,y>1,z>1$ 的解. 1964 年,柯召和孙琦给出了此方程的无穷多组非平凡解,从而否定了这一猜想. 对于高次多元不定方程,迄今只有少数特例被人们解决,还有广阔的未知领域等待人们去探索.

一次不定方程(linear indeterminate equation)　亦称线性不定方程. 一类重要的不定方程. 指未知数多于一个的一次方程. 非零的 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,s)$,$s>1$,且 $n\in\mathbf{Z}$ 的方程

$$\sum_{i=1}^{s}a_ix_i=n.\qquad(1)$$

方程(1)有整数解的充分必要条件是

$$(a_1,a_2,\cdots,a_s)\mid n.$$

设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,s)$，$(a_1,a_2,\cdots,a_s)=1$，考虑方程(1)的非负整数解 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,s)$. 存在仅与 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 有关的数 $F_{a_1,\cdots,a_s}$，当 $n>F_{a_1,\cdots,a_s}$ 时，方程(1)有非负整数解. 令 $A(n)$ 为其解数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n^{s-1}}=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_s(s-1)!}.$$

求出 $F_{a_1,a_2,\cdots,a_s}$ 的最佳值 $g_{a_1,a_2,\cdots,a_s}$ 就是弗罗贝尼乌斯问题. 方程(1)的重要的特殊情形是当 $s=2$ 时的二元一次不定方程

$$a_1x_1+a_2x_2=n, \tag{2}$$

式中 a_1,a_2,n 是给定的整数，且 $a_1a_2\neq 0$. 方程(2)有整数解的充分必要条件是 $(a_1,a_2)\mid n$. 当(2)有解时，可用辗转相除法求出一组解. 设这组解为 x_1',x_2'，则(2)的全部整数解为

$$x_1=x_1'+\frac{a_2}{(a_1,a_2)}t,\ x_2=x_2'-\frac{a_1}{(a_1,a_2)}t, \tag{3}$$

式中 t 为任意整数，称(3)为方程(2)的通解. 特别地，当 $(a_1,a_2)=1$，$a_1>0$，$a_2>0$，且 $n>a_1a_2-a_1-a_2$ 时，(2)有非负整数解，其解的个数为 $[n/a_1a_2]$ 或 $[n/a_1a_2]+1$；当 $n\leqslant a_1a_2-a_1-a_2$ 时，无非负整数解. 这是西尔维斯特(Sylvester，J. J.)证明的结论. 当 $s=3$ 时，设 $(a,b,c)=1$，$(a,b)=d$，$a=da'$，$b=db'$，则不定方程

$$ax+by+cz=n \tag{4}$$

的通解可表为：

$$\begin{aligned}x&=x_0+b't_1-u_1ct_2,\\ y&=y_0-a't_1-u_2ct_2,\\ z&=z_0+dt_2,\end{aligned}$$

式中 x_0,y_0,z_0 是(4)的一组解，u_1,u_2 满足 $a'u_1+b'u_2=1$，t_1,t_2 为任意整数. 近几十年来，国内外均有不少数学工作者对 $s=3$ 的情形找到多种计算 g_{a_1,a_2,a_3} 的方法.

线性不定方程(linear indeterminate equation) 即“一次不定方程”.

弗罗贝尼乌斯问题(Frobenius problem) 关于一次不定方程的一个著名问题. 设 $n\geqslant 2$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正整数，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$. 再设 $x_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性型 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 不能表出的最大整数为 $g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，即对大于它的任意整数 m，存在整数 $x_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，使 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=m$. 研究 $g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的存在性及其解法，就是关于丢番图方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=c$ 的弗罗贝尼乌斯问题. 该问题不仅在不定方程理论上有重要意义，还在规划论、计算技术、合理下料、合理派工等方面都有实际应用. 对此问题，目前研究的结果为：当 $n=2$ 时，$g(a_1,a_2)=a_1a_2-a_1-a_2$(参见“一次不定方程”)；在 $n\geqslant 3$ 时，关于 $g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 尚无一般表示式，但在多种情形已有些不同的方法. 例如，当 $a_3>a_1a_2/(a_1,a_2)^2-(a_1+a_2)/(a_1+a_2)$ 时，可算得 $g(a_1,a_2,a_3)=a_1a_2/(a_1,a_2)+a_3(a_1,a_2)-a_1-a_2-a_3$. 由于 $g(a_1,a_2,a_3)=g(a_2,a_3,a_1)=g(a_3,a_1,a_2)$，上面条件及结果中的 a_1,a_2,a_3 可以轮换. 对于一般的 n 有

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant\sum_{i=2}^{n}a_id_{i-1}/d_i-\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

其中 $d_i=(a_1,a_2,\cdots,a_i)$ $(i=2,3,\cdots,n)$，$d_1=a_1$ $(d_n=1)$.

毕达哥拉斯三元数组(Pythagorean triple) 亦称勾股数组，又称商高数组. 一个著名的不定方程问题. 指三元二次不定方程的正整数解. 若正整数 x,y,z 能使 $x^2+y^2=z^2$ 成立，则 (x,y,z) 是一个毕达哥拉斯三元数组. 当 $(x,y,z)=1$ 时，则称 (x,y,z) 为本原毕达哥拉斯三元数组. 找出所有毕达哥拉斯三元数组就等同于求出不定方程

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

的所有正整数解. 本原毕达哥拉斯三元数组亦称为方程(1)的本原解，它有以下性质：

1. 若 (x,y,z) 是满足方程(1)的本原毕达哥拉斯三元数组，则 x,y 中有且仅有一数为偶数. 因此，z 必为奇数.

2. 若 (x,y,z) 是满足方程(1)的本原毕达哥拉斯三元数组，且设 x 为偶数，则存在正整数 m 和 n，$m>n$，$(m,n)=1$，$m\not\equiv n\pmod 2$，能使 $x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$ 成立.

3. 若 $x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$，则 (x,y,z) 是满足方程(1)的毕达哥拉斯三元数组. 如果还有 $m>n>0$，$(m,n)=1$ 和 $m\not\equiv n\pmod 2$，则 (x,y,z) 是本原毕达哥拉斯三元数组.

中国古代数学书《周髀算经》中记载了托古传闻商高答周公：“故折矩，以为勾广三，股修四，径隅五”. 说明至少在成书时已经知道方程(1)的一个特解. 毕达哥拉斯(Pythagoras)创立毕达哥拉斯学派，在数学方面给出了方程(1)的部分正整数解，后被欧几里得(Euclid)记入《几何原本》中，并把表达直角三角形三边关系的(1)式称为毕达哥拉斯定理. 费马(Fermat，P. de)从 1637 年开始对丢番图(Diophantus)的《算术》进行评注，导致他提出了在数论发展史上非常重要的 10 个问题，其中有 3 个与勾股数组有关的问题是：

1. 形如 $4n+1$ 的素数能够而且只能够以一种方式表达为两个平方数之和. 1749 年，欧拉(Euler，L.)已给出了证明. 近代有人把素数 $p=x^2+y^2$ 中的 x,y 具体表示为 $p=(s(r)/2)^2+(s(n)/2)^2$，其中 r，n 满足勒让德符号

$$\left(\frac{r}{p}\right)=1,\left(\frac{n}{p}\right)=-1,$$

并且 $$s(k)=\sum_{x=0}^{p-1}\left(\frac{x(x^2+k)}{p}\right).$$

2. 每一个正整数能够表成四个整数的平方和(参见第二卷《数论》中的“华林问题”).

3. 不定方程 $x^4+y^4=z^2$, $(x,y)=1$,没有 $xy\neq 0$ 的整数解.

还有一个与毕达哥拉斯三元数组有关的猜想:设 (x,y,z) 是满足不定方程(1)的毕达哥拉斯三元数组,$a,b,c\in \mathbf{Z}_+$,且满足 $x^a+y^b=z^c$,则 $a=b=c=2$.此猜想仍未彻底解决.

勾股数组(Pythagorean triple) 即“毕达哥拉斯三元数组”.

商高数组(Pythagorean triple) 即“毕达哥拉斯三元数组”.

本原毕达哥拉斯三元数组(primitive Pythagorean triple) 见“毕达哥拉斯三元数组”.

不定方程 $ax^2+by^2=cz^2$(indeterminate equation $ax^2+by^2=cz^2$) 一类常见的三元二次不定方程.指三元二次不定方程

$$ax^2+by^2=cz^2 \qquad (1)$$

此方程无常数项,有平凡解 $x=y=z=0$.若方程(1)的系数满足 $a>0,b>0,c>0,(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$,且 a,b,c 都无平方因子,则方程(1)有一组不全为零且 $(x,y,z)=1$ 的解 x,y,z 的充分必要条件是

$$\left(\frac{bc}{a}\right)=1,\left(\frac{ac}{b}\right)=1,\left(\frac{-ab}{c}\right)=1,$$

其中等式左边都是雅可比符号.以上结论是1785年勒让德(Legendre,A.-M.)证明的.1950年,霍尔斯(Holls,L.)运用代数数论证明了方程(1)的非零解满足 $|x|<\sqrt{bc}$, $|y|<\sqrt{ca}$, $|z|<\sqrt{ab}$.1969年,莫德尔(Mordell,L. J.)给出了霍尔斯结果的初等证明.不定方程(1)在组合数学的差集理论中有用.

佩尔方程(Pell equation) 一类重要的二次不定方程.指形如 $x^2-Dy^2=\pm 1$ 的方程.

1. 关于佩尔方程

$$x^2-Dy^2=1. \qquad (1)$$

无论 D 取什么值,$x=\pm 1,y=0$ 总满足此方程.人们把这类 x 或 y 中有一个为零的解,称为该方程的平凡解.当 $D\leqslant 0$ 时,方程(1)只有平凡解.若 D 为平方数时,取 $D=m^2$,则

$$1=x^2-Dy^2=x^2-m^2y^2 \\ =(x-my)(x+my).$$

两个整数之积要为1,只有两数均为1或均为-1,极易求得方程(1)的解.当 $D>0$,且为非平方的正整数时,关于佩尔方程(1)的解法有如下两个结论:

1) 若 D 是一个非平方的正整数,则方程(1)有无限多组整数解 x,y.设 $x_0^2-Dy_0^2=1,x_0>0,y_0>0$ 是所有 $x>0,y>0$ 的解中使 $x+y\sqrt{D}$ 最小的那组解(称为基本解),则方程(1)的全部解 x,y 由

$$x+y\sqrt{D}=\pm(x_0+y_0\sqrt{D})^n$$

表出,其中 n 是任意整数.

2) 设 ξ,η 是正整数,满足方程(1),且有

$$\xi>\frac{1}{2}\eta^2-1,$$

则 ξ,η 是(1)的基本解.

2. 关于佩尔方程

$$x^2-Dy^2=-1 \qquad (2)$$

的解法有下述3个结论:

1) 若 D 是一个非平方的正整数,则方程(2)有解,且设 $a^2-Db^2=-1,a>0,b>0$ 是所有 $x>0,y>0$ 的解中使 $x+y\sqrt{D}$ 最小的那组解(称为基本解),则方程(2)有无穷多组解,其全部解 x,y 由 $x+y\sqrt{D}=\pm(a+b\sqrt{D})^{2n+1}$ 表出,其中 n 是任意整数,且 $x_0+y_0\sqrt{D}=(a+b\sqrt{D})^2$.这里 x_0,y_0 是方程(1)的基本解,而 a,b 是方程(2)的基本解.

2) 若 $p\equiv 1 \pmod 4$ 是素数,则 $x^2-py^2=-1$ 有整数解 x,y,其全部解可由 $x+y\sqrt{p}=\pm(u+v\sqrt{p})^{2n+1}$ 表出,n 为任意整数,u,v 满足 $(x_0-1)/2=u^2$, $(x_0+1)/2=pv^2$,从而 $y_0=2uv,u>0,v>0$.

3) 若 p 是素数,$2p=r^2+s^2$, $r\equiv\pm 3 \pmod 8$, $s\equiv\pm 3 \pmod 8$,则不定方程 $x^2-2py^2=-1$ 无整数解 x,y.

佩尔方程应用较广.一般的二元二次方程如果有解,都可归结为解佩尔方程的问题,某些二元三次或四次的不定方程的求解也用到它.佩尔方程在实二次域理论中亦有应用.实二次域 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 的任一数均可表示为 $\alpha=(a+b\sqrt{D})/2$ (a,b 是有理数).此时 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 中存在一个单位数 η,使 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 的任一单位数皆可表为 $\pm\eta^n$,n 为整数,这时 η 称为域 $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ 的基本单位数.佩尔方程的名称,实为欧拉(Euler,L.)在一篇论文中的误称.事实上佩尔(Pell,J.)既未提出过此方程亦未作过任何论证.对于方程(1)的研究在希腊和印度有久远的历史.阿基米德(Archimedes)曾研究过 $D=4729494$ 的情形;费马(Fermat,P. de)在1657年2月的一封信中指出:方程(1)在 D 为非平方的正整数时有无穷多组解;沃利斯(Wallis,J.)在1657—1658年间证明了结论(1),并给出了方程(1)的解法;欧拉亦在1759年用 $\sqrt{D}$ 的连分数给出了方程(1)的一种解法;拉格朗日(Lagrange,J.-L.)于1766—1770年间,论证了方程(1)解的存在性,同时独立地给出了方程(1)

的全部解.对佩尔方程最小解上界的探索亦为重要.1918年,舒尔(Schur,I.)将方程(1)推广为 $x^2-Dy^2=4$,其中 $D\equiv 0$ 或 $1(\bmod 4)$.为探索其最小解,设 $\varepsilon=(u+v\sqrt{D})/2$,$u,v$ 为方程的解,舒尔证明了 $\ln\varepsilon<\sqrt{D}\ln D$;1942年,华罗庚证明了

$$\ln\varepsilon<\sqrt{D}\left(\frac{1}{2}\ln D+1\right);$$

1964年,王元证明了对任意 $\delta>0$,皆有常数 $C=C(\delta)$,当 $D<C(\delta)$时,有 $\ln\varepsilon<(1/4+\delta)\sqrt{D}\ln D$.

二次不定方程(quadratic indeterminate equation) 亦称二次丢番图方程.一类重要的不定方程.整系数的二元二次方程

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (1)$$

简称二次不定方程.其解法可分作下面两种情况进行:

1.当 $D=b^2-4ac=0$ 时,以 $4a$ 乘方程(1)后,经整理可得 $(2ax+by)^2+4adx+4aey+4af=0$.若令 $2ax+by=t$,代入上式整理后可得 $(t-d)^2=2(bd-2ae)y+d^2-4af$.由此得二次同余式 $(t+d)^2\equiv d^2-4af(\bmod 2(bd-2ae))$.先解此同余式求出 t,然后再求 x 和 y.

2.当 $D=b^2-4ac\neq 0$ 时,以 D^2 乘(1)式后,令 $Dx=X+2cd-be$,$Dy=Y+2ae-bd$,代入作线性变换,可把方程(1)化为较简单的二次不定方程

$$aX^2+bXY+cY^2=k. \quad (2)$$

再以 $2aX+bY=t$ 代入(2)式作一次变换,可化为

$$t^2-DY^2=4ak. \quad (3)$$

此即佩尔方程.若 D 为非平方数,在 $D<0$ 时,方程(3)只有有限组整数解;在 $D>0$ 时,如果 t_0,Y_0 是其解,且使 $(t_0+Y_0\sqrt{D})/2>1$ 为最小,则方程(3)的全部解 t_n,Y_n 均可由

$$\pm\left(\frac{t_0+Y_0\sqrt{D}}{2}\right)^n=\frac{t_n+Y_n\sqrt{D}}{2}$$

给出,n 为任意整数,t_0,Y_0 则可用连分数展开式来计算.

二次丢番图方程(quadratic Diophantine equation) 即"二次不定方程".

三元三次不定方程(ternary cubic indeterminate equation) 几个著名的三元三次不定方程.设 $f(x,y,z)$是一个整系数三元三次多项式,方程

$$f(x,y,z)=0 \quad (1)$$

称为三元三次不定方程.对方程(1)的解,迄今人们所知甚少.在三元三次不定方程中,最简单而且又是最重要的方程为

$$x^3+y^3+z^3=n, \quad (2)$$

其中 n 为整数.对某些 n,方程(2)有无穷多组整数解,而对另一些 n,方程(2)亦可能无整数解.例如:

1.当 $n=a^3$ 时,方程(2)有无数多组整数解,其解可表示为 $(x,y,z)=(t,-t,a)$ 或

$$(9at^4,3at-9at^4,a-9at^3),t\in\mathbb{Z}.$$

2.当 $n=2a^3$ 时,方程(2)也有无数多组整数解,可表示为

$$(x,y,z)=(a(1+6t^3),a(1-6t^3),-6at^2).$$

3.当 $n\equiv\pm 4(\bmod 9)$时,方程(2)无解.

对于方程(2),还有一些迄今尚未解决的问题.例如,已知当 $n=3$ 时,方程(2)有4个整数解为 $(x,y,z)=(1,1,1),(4,4,-5),(4,-5,4),(-5,4,4)$,尚不知道是否还有其他解.又如当 $n=30$ 时,方程(2)是否有解亦不知道.另外,对三元三次不定方程 $ax^3+ay^3+bz^3=bc^3$,$abc\neq 0$,已知在平凡解 $x+y=0,z=c$ 外,还有无穷多组整数解.不定方程中比较成熟的方法是处理两个变元的不定方程.三个变元以上的高次不定方程,常常是很困难的.例如,关于三元三次不定方程 $x^3+y^3+z^3=xyz$ 无 $xyz\neq 0$ 的整数解,曾经很长时间使数学家们束手无策.直到20世纪60年代,柯召(1960年)和卡塞尔斯(Cassels,J.W.S.)(1962年)才分别独立地证明了这个问题.同时解决了谢尔品斯基(Sierpiński,W.)认为是很难的一个猜想:不存在三个有理数,它们的和与积都能等于1,亦即不定方程 $x+y+z=xyz=1$ 不存在有理数解.

不定方程 $x^3+y^3+z^3+w^3=n$ (indeterminate equation $x^3+y^3+z^3+w^3=n$) 一个著名的四元三次不定方程.应用佩尔方程 $x^2-Dy^2=1$ 的方法与结果可以证明,如果不定方程

$$x^3+y^3+z^3+w^3=n \quad (1)$$

有一组解 $(x,y,z,w)=(a,b,c,d)$,使得 $(a+b)(c+d)>0$ 不是平方数,并且 $a\neq b$ 或 $c\neq d$,则方程(1)有无穷多组整数解.关于方程(1),有个猜想是:对于每一个整数 n,方程(1)都有整数解.已经证明对于任何 $n\not\equiv\pm 4(\bmod 9)$的整数此猜想都成立.迄今只证明了在 $n<1000$ 时,此猜想成立.

不定方程 $x^2+7=2^n$ (indeterminate equation $x^2+7=2^n$) 一类著名的不定方程.指形如

$$x^2+7=2^n \quad (1)$$

的不定方程,其中整数 $n\geqslant 3$.1913年,拉马努金(Ramanujan,S.A.)就发现方程(1)的5组正整数解是

$$(x,n)=(1,3),(3,4),(5,5),(11,7),(181,15).$$

他问,还有没有其他正整数解?30多年以后,内格尔(Nagell,T.)第一个证明了方程(1)只有以上5组正整数解.20世纪50年代以来,此方程在组合数学中得到了重要的应用.

不定方程 $x^4-Dy^2=1$ (indeterminate equation $x^4-Dy^2=1$) 一类著名的二元四次不定方程.指形如

$$x^4 - Dy^2 = 1 \quad (D>0, \text{且非平方数}) \qquad (1)$$

的不定方程. 对于二元四次不定方程的研究,有如下一些重要结果:

1. 对每一个整数 D,方程(1)最多有两组正整数解,这是1942年永格伦(Ljunggren,W.)证明的.

2. 若 $D=p$ 是一个奇素数,则当 $p\neq5,29$ 时,方程(1)无正整数解;当 $p=5$ 时,只有一组正整数解 $(x,y)=(3,4)$;当 $p=29$ 时,也只有一组正整数解 $(x,y)=(99,1820)$.

3. 若方程 $x^2-Dy^2=-4$ 有解 $x\equiv y\equiv1(\bmod 2)$,则方程(1)除了 $D=5$ 时,仅有解 $(x,y)=(3,4)$ 和 $D=29$ 时,仅有解 $(x,y)=(99,1820)$ 之外,别无其他正整数解.

4. 若 $x^2-Dy^2=-4$ 无解,而 $x^2-Dy^2=4$ 有解 $x\equiv y\equiv1(\bmod 2)$,则方程(1)除了 $D=725$ 时仅有解 $(x,y)=(99,364)$ 外,无其他正整数解.

5. 若 $x^2-Dy^2=2$ 或 -2 之一有解,则方程(1)除 $D=6$ 时,仅有解 $(x,y)=(7,20)$ 外,无其他正整数解.

6. 若 $D\equiv3(\bmod 8)$,且当 $x^2-y^2=1$ 的基本解 x_0,y_0 满足 $2|x_0$ 时,方程(1)无正整数解.

7. 设 $D\equiv7(\bmod 8)$,且 $D=pq$,p,q 是两个不同的素数,则在

$$p\equiv1(\bmod 8), q\equiv7(\bmod 8), \left(\frac{q}{p}\right)=-1$$

或 $$p\equiv13(\bmod 25), q\equiv3(\bmod 8), \left(\frac{q}{p}\right)=-1$$

时,方程(1)均无正整数解.

8. 设 $D=pq$,p,q 是两个不同的素数,则在 $p\equiv17(\bmod 24)$,$q\equiv3(\bmod 8)$ 或者 $p\equiv5(\bmod 24)$,$q\equiv23(\bmod 24)$ 亦或

$$p\equiv5(\bmod 24), q\equiv3(\bmod 8), \left(\frac{p}{q}\right)=1$$

时,方程(1)均无正整数解.

9. 设 $D=2p$,p 为奇素数,则当 $p=3$ 时,方程(1)有正整数解 $(x,y)=(7,20)$ 外,其他情况无正整数解.

上述结果仍在不断地得到改进.

四次不定方程(quartic indeterminate equation) 一类著名的不定方程. 关于四次不定方程整数解的研究,是个难度较大的数论专题. 目前的研究主要在二元四次和三元四次方面有一些结果,其余都还在探索之中. 在两百多年以前就已经知道不定方程

$$x^2 - 2y^4 = -1 \qquad (1)$$

有两组正整数解 $(x,y)=(1,1),(239,13)$. 但是,直到1942年,永格伦(Ljunggren,W.)才给出了一个很繁的方法,证明了方程(1)除上述两组解外,再没有其他正整数解. 17世纪,费马(Fermat,P. de)证明了不定方程 $x^4+y^4=z^2$ 没有 $xyz\neq0$ 的整数解. 利用科恩(Cohen,J. H. E.)关于斐波那契数列的两个重要结果,可以证明下列不定方程解的情况为:$y^2=5x^4+1$,仅有两组整数解 $(x,y)=(0,\pm1)$;$y^2=5x^4-1$,仅有四组整数解 $(x,y)=(\pm1,\pm2)$;$y^2=5x^4+4$,仅有十组整数解 $(x,y)=(0,\pm2),(\pm1,\pm3),(\pm12,\pm322)$;$x^4+4=5y^2$,仅有八组整数解 $(x,y)=(\pm1,\pm1),(\pm2,\pm2)$. 更一般的结果是:设整数 $D>1$,且无平方因子,$N(\eta)=-1$,$\eta=X+Y\sqrt{D}$ 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 中的基本单位数,若 X,Y 不是整数,则不定方程

$$4x^4 - Dy^2 = -1 \qquad (2)$$

当 $D=5$ 时,仅有一组正整数解 $(x,y)=(1,1)$;当 $D=13$ 时,仅有一组正整数解 $(x,y)=(3,5)$. 如果 D 是除5和13以外的奇素数时,则不定方程

$$x^4 + 4 = Dy^2 \qquad (3)$$

无正整数解. 当 $D=5$ 时,方程(3)仅有两组正整数解 $(x,y)=(1,1),(2,2)$;当 $D=13$ 时,方程(3)仅有一组正整数解 $(x,y)=(6,10)$.

莫德尔方程(Mordell equation) 一种著名的二元三次不定方程. 指 k 为整数的不定方程

$$y^2 = x^3 + k. \qquad (1)$$

费马(Fermat,P. de)在评注丢番图(Diophantus,(A.))《算术》的页边注中宣布:他发现了一个美妙而精巧的方法,证明了方程 $y^2=x^3-2$ 仅有一组正整数解 $(x,y)=(3,5)$. 但他的证明未找到,引起了许多数学工作者去探索方程(1)的解法. 从欧拉(Euler,L.)到近代的哈尔(Haar,A.)、莫德尔(Mordell,L. J.)、贝克(Baker,A.)都曾研究过它. 人们的探索丰富和发展了数论的内容,并得到一些有普遍意义的方法. 如初等数论方法、代数数论方法. 他们利用同余式和二次剩余理论对不定方程(1)首先得到下面结果:

1. 当 a,b 为整数,且 a 没有 $4t+3$ 形状的素因子时,不定方程 $y^2=x^3+(4b-1)^3-4a^2$ 没有整数解. 由此可知,方程 $y^2=x^3-5$,$y^2=x^3-17$,$y^2=x^3+11$ 均无整数解.

2. 当 a,b 为整数,且 $2a+1$ 没有 $4t+3$ 形状的素因子时,不定方程 $y^2=x^3+(4b+2)^3-(2a+1)^2$ 无整数解.

3. 当 $a\equiv2,4(\bmod 8)$,$b\equiv1(\bmod 2)$,且 b 没有 $8t\pm3$ 形状的素因子时,方程 $y^2=x^3+2b^2-a^3$ 无整数解.

4. 当 $a\equiv4(\bmod 8)$,$b\equiv1(\bmod 2)$,且 b 无形如 $8t+5$ 和 $8t+7$ 的素因子时,方程 $y^2=x^3-2b^2+a^3$ 无整数解. 更一般地,当 $a\equiv-1(\bmod 4)$,$b\equiv0(\bmod 2)$,k 无平方因子,$(k,b)=1$,$k\equiv3(\bmod 4)$,k

$\equiv 2 \pmod 3$，$b \not\equiv 0 \pmod 3$，对每一个奇素数 p，勒让德符号

$$\left(\frac{k}{p}\right) = -1$$

时，$p \nmid (a,b)$，这时方程 $y^2 = x^3 + kb^2 - k^3a^3$ 无整数解. 直到 1875 年，佩宾（Pepin，T.）完整地证明了方程 $y^2 = x^3 - 2$ 仅有解 $(x,y) = (3, \pm 5)$. 1912 年，莫德尔由于给出方程(1)的一系列新结果，荣获英国剑桥大学颁发的史密斯奖；1918 年，他又证明了方程(1)仅有有限组整数解. 1930 年，内格尔（Nagell，T.）证明了方程 $y^2 = x^3 + 17$ 的 8 组正整数解分别是 $(x,y) = (-2,3)$，$(-1,4)$，$(2,5)$，$(4,9)$，$(8,23)$，$(43,282)$，$(52,375)$，$(5234,378661)$；1968 年，贝克证明了方程(1)的整数解满足

$$\max(|x|,|y|) < \exp(10^{10}|k|^{10^4}).$$

卡塔朗猜想（Catalan conjecture）　一个关于二元不定方程的著名猜想. 设 a 是正整数，m 是大于 1 的整数，a^m 称为正整数的乘幂. 卡塔朗（Catalan，E. C.）在 1842 年提出猜想：除开 $8 = 2^3$，$9 = 3^2$ 外，没有两个连续数都是正整数的乘幂. 故称此为卡塔朗猜想. 此猜想可叙述为：不定方程

$$x^p - y^q = 1 \quad (p,q \text{ 是素数}) \qquad (1)$$

除 $x=3$，$p=2$，$y=2$，$q=3$ 外，没有其他的正整数解. 在 19 世纪就已证明了 $q=2$ 时，猜想是成立的. 比较困难的是 $p=2$ 的情形. 1962 年，柯召给出了不定方程 $x^2 - 1 = y^q$（$q > 3$，且为素数）无正整数解的初等而简洁的证明. 其证明方法巧妙运用雅可比符号的性质很富启发性. 1977 年，特亚尼安（Terjanian，G.）用类似柯召的方法证明了下述定理：设 p 为奇素数，若有整数 x,y,z 使得 $x^{2p} + y^{2p} = z^{2p}$ 成立，则 $2p \mid x$ 或 y. 1983 年，罗特凯维奇（Rotkiewicz）用柯召的方法，通过计算雅可比符号

$$\left(\frac{P_m}{P_n}\right)$$

来处理更多的不定方程. 这里 P_n 是莱默数

$$P_n(\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} & (2 \nmid n), \\[2ex] \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^2 - \beta^2} & (2 \mid n), \end{cases}$$

其中 α,β 是方程 $z^2 - \sqrt{L}z + M = 0$ 的两根，L,M 是整数，满足 $L > 0$，$L - 4M > 0$，$(L,M) = 1$.

莱默数（Lehmer number）　见“卡塔朗猜想”.

三个连续数的问题（problem of three continuous numbers）　数论的一个著名问题. 指在任何四个连续数中，总有一个形如 $4t+2$ 不能表成任何正整数的方幂的数. 是否有三个连续数都是正整数乘幂的问题也称为弱型卡塔朗猜想. 因为，如果卡塔朗猜想成立，立即可以推出不存在三个连续数都是正整数的乘幂. 关于弱型卡塔朗猜想，20 世纪 60 年代初才被柯召和卡塞尔斯（Cassels，J. W. S.）分别独立地解决. 回答是否定的，即三个正整数的乘幂不可能成为连续数. 证明依赖于不定方程 $x^p + 1 = y^q$（q 是素数，p 是奇素数）有正整数解的充分必要条件是 $x + 1 = p^{sq-1}y_1^q$，$(x^p+1)/(x+1) = py_2^q$，$y = p^s y_1 y_2$，$(y_1,y_2) = 1$，$p \nmid y_1y_2$，$y - 1 = q^{tp-1}x_1^p$，$(y^q-1)/(y-1) = qx_2^p$，$x = q^t x_1 x_2$，$(x_1,x_2) = 1$，$q \nmid x_1x_2$，其中 s,t,x_1,x_2,y_1,y_2 都是正整数. 1962 年，柯召解决了卡塔朗猜想中 $p=2$ 的情形. 1975 年，爱尔特希（Erdös，P.）和赛尔弗里奇（Selfridge，J. L.）进一步证明了不定方程 $x(x+1)\cdots(x+n-1) = y^k$（$k > 1$）当 $n > 1$ 时无非零整数解.

弱型卡塔朗猜想（Catalan conjecture of weak type）　见“三个连续数的问题”.

无限递降法（method of infinite descent）　亦称费马递降法，这是费马（Fermat，P. de）创立的专门证明与正整数有关的命题的方法，此法常用于确立否定的结论. 这种证明方法的逻辑步骤如下：如果要否定某个与正整数有关的命题 $P(n)$，那么：

1. 先假定命题 $P(n)$ 对若干特定的正整数集合 n 为真，在集合 n 中必有较小的正整数 $n' < n$ 存在.

2. 从假定 $P(n)$ 为真出发，由 $n' < n$ 推证出 $P(n')$ 为真；在集合 n' 中，又必有较小的正整数 $n'' < n'$ 存在，使由 $P(n')$ 为真再推出 $P(n'')$ 为真. 于是可以无限地推下去，这和正整数不能无限减小相矛盾. 所以，开始时对 $P(n)$ 为真的假设是错误的.

由于费马生前很少发表文章，他的许多数学论断都是从一些片断中得到的，甚至有些是在他逝世后别人从他在丢番图（Diophantus）《算术》书的页边评注中整理出来的. 费马递降法的面世就更晚了，它是费马逝世两百多年后的 1879 年，在荷兰的莱顿图书馆的惠更斯（Huygens，C.）数学手稿的一篇论文中详述了费马的无限递降法. 此后，这种证明方法才引起数学家们的重视和应用.

费马递降法（method of Fermat descent）　即“无限递降法”.

费马猜想（Fermat conjecture）　亦称费马大定理，又称费马最后定理. 数论中的一个著名定理. 用不定方程来表述的费马猜想是：当整数 $n > 2$ 时，不定方程

$$x^n + y^n = z^n \qquad (1)$$

没有 $xyz \neq 0$ 的整数解. 这个猜想是 1637 年费马（Fermat，P. de）提出来的，1995 年才获得证明. 过去，称其为费马猜想更为适合. 在费马病逝后，留下一大堆遗稿和手札，法国出版界委托他的儿子萨穆埃尔·费马（Fermat，C. S.）整理，以供出版. 他儿子在 1670 年突然发现，在那本梅齐利亚克（Meziriac，

C. G. B. de)1621 年翻译的丢番图(Diophantus)《算术》拉丁文译本第 2 卷第 8 命题“把一个平方数分为两个平方数”旁，他父亲于 1637 年用拉丁文写的一段批注：“把一个立方数分为两个立方数，一个四次幂分为两个四次幂，或一般地，把一个高于二次的幂分为两个同次幂，这是不可能的. 关于这一点我已发现一种巧妙的证明，但是，这书的页边太窄了，写不下. 不容我把证明写出来”. 费马这段批注引起数学界的关注，他的儿子遍查全部遗物，未找到费马的巧妙的证明. 许多优秀数学家为证明这个猜想，付出过巨大的精力，都未能成功. 1850 年和 1853 年，法国布鲁塞尔和巴黎科学院曾先后两次悬赏两千金法郎，征求对此猜想的证明，仍无结果. 1908 年，沃尔夫斯克尔(Wolfskehl, F. P.)在哥廷根皇家科学会上悬赏 10 万马克，限期 100 年，向全世界征求对费马大定理的彻底证明. 经过数学家们不断努力，证明逐步得到推进，经过 358 年的努力，终于证明了这个著名的猜想.

证明不定方程(1)没有非平凡解，只需证明方程 $x^4+y^4=z^4$，$(x,y)=1$ 和方程 $x^p+y^p=z^p$，$(x,y)=(x,z)=(y,z)=1$(p 为奇素数)均无非平凡解. 此问题的研究还可以追溯到公元 10 世纪，阿尔·霍安第(al-Khojandi, A. M.)就证明过不定方程 $x^3+y^3=z^3$ 无 $xyz\neq 0$ 的整数解. 但是，此问题真正引起人们重视还是在费马的页边评注以后的事. 1637—1665 年间，费马给出过 $p=3$ 时的证明，但是证明欠完整. 1770 年，欧拉(Euler, L.)证明了 $p=3$，$n=4$ 时，猜想是成立的. 1823 年，勒让德(Legendre, A.-M.)证明了 $p=5$ 时，猜想是成立的. 1839 年，拉梅(Lamé, G.)证明了 $p=7$ 时，猜想是成立的. 以上记载说明，费马猜想证明的进程是相当缓慢的. 以后，数学家们把猜想中的 $p\nmid xyz$ 称为费马猜想的第一种情形，而对 $p\mid xyz$ 称为费马猜想的第二种情形. 用初等方法可以证明 $2p+1$，$4p+1$，$8p+1$，$10p+1$，$14p+1$，$16p+1$ 之一为素数时，费马猜想第一情形成立，由此可推出 $p<100$ 时，猜想的第一种情形成立. 1847 年，库默尔(Kummer, E. E.)取消了热尔曼(Germain, S.)关于 x,y,z 与 n 互素的限制，改进了证明方法. 他设 $\eta=e^{2\pi i/p}$，h 是分圆域 $Q(\eta)$ 的类数，当 $p\nmid h$ 时，p 称为正规素数. 证明了当 p 是正规素数时，费马猜想是成立的. 小于 100 的奇素数中，除开 $p=37,59,67$ 以外，都是正规素数. 以后他又继续对分圆域进行研究，从而证明了 $p=37,59,67$ 时，猜想也是成立的. 他所创立的理想数论，丰富和发展了代数数论. 1944 年，赛尔弗里奇(Selfridge, J. L.)、尼可(Nicol, C. A.)、范迪维尔(Vandiver, H. S.)等证明了 $2<p<4002$ 时，费马猜想是成立的. 他们是在库默尔理论的基础上得到的进一步成果. 1976 年，瓦格斯塔夫(Wagstaff, S. S.)借助于大型电子计算机证明了 $2<p<125000$ 情形下，费马猜想是成立的. 1977 年，特亚尼安(Terjanian, G.)用柯召解决不定方程 $x^2-1=y^p$ 的思想，证明了 $x^{2p}+y^{2p}=z^{2p}$ 若费马猜想成立，则 $2p\mid x$ 或 $2p\mid y$. 1983 年，西德 29 岁的法尔廷斯(Faltings, G.)证明了莫德尔猜想(参见第二卷《代数几何》中的“莫德尔猜想”)，从而推出方程 $x^n+y^n=z^n$，对于给定的 $n(n>3)$，仅有有限组非平凡解. 这个证明使他荣获 1986 年国际数学家大会颁发的菲尔兹奖.

在法尔廷斯工作的基础上，1993 年 6 月 23 日，在普林斯顿大学工作的英藉 40 岁的怀尔斯(Wiles, A.)在剑桥大学牛顿数学研究所宣称他证明了费马猜想. 怀尔斯是在解决了一个近几十年来新的思想链最后一环后得到成功的. 该思想链起于 1954 年日本数学家山谷提出的韦伊-山谷猜想：有理数域上任一椭圆曲线皆可用椭圆模函数参数化. 1983 年，由于法尔廷斯的前述工作使大家把注意力集中到了代数几何领域，从而更加重视韦伊-山谷猜想了. 紧接着，德国萨尔大学的费雷(Free)指出韦伊-山谷猜想与费马猜想间有着奇妙而简单的联系. 1987 年，美国加州大学贝克莱分校的里贝特(Liebet, K.)证明了费马大定理是韦伊-山谷猜测的一个推论. 最后怀尔斯由于证明了韦伊-山谷猜想的一种形式成立而获得成功. 他最初的证明曾有漏洞，经修正于 1995 年 5 月得到完善的证明. 怀尔斯因这一重大的成就荣获了当年度的沃尔夫奖. 三个半世纪以来，人们为这一猜想的证明所作出的努力，仅副产物也是十分可观的. 比如理想数论这一数学分支的创立，代数数论的更臻完善等即是辉煌的例证.

费马大定理(Fermat large theorem)　即“费马猜想”.

正规素数(standard prime number)　见“费马猜想”.

谢尔品斯基猜想(Sierpiński conjecture)　关于单位分数的著名猜想. 该猜想可表述为：当 m,n 为正整数，$m<n$，且 n 较大时，不定方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{m}{n} \tag{1}$$

一定有正整数解. 古埃及的兰德纸草书上就记载了用单位分数 $1/n$ 表示真分数的方法. 后来知道任何真分数 $2/n$，$3/n$ 都能表为两个或三个相异的单位分数的和：

$$\frac{2}{n}=\begin{cases}\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m(m+1)} & (n=2m),\\[2ex] \dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{(m+1)(2m+1)} & (n=2m+1);\end{cases}$$

$$\frac{3}{n}=\begin{cases}\frac{1}{2m}+\frac{1}{m} & (n=2m),\\ \frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{(m+1)(2m+1)} & (n=2m+1).\end{cases}$$

1950 年，爱尔特希(Erdös，P.)猜想 $4/n(n>4)$ 能表示成三个相异的单位分数的和. 谢尔品斯基(Sierpiński，W.)猜想 $5/n(n>5)$ 也能表示成三个单位分数的和. 谢尔品斯基还进一步猜想：在 n 较大时，真分数 m/n 都能表示成三个单位分数(不一定相异)的和，此即不定方程(1)有正整数解. 这里要限定 n 较大，是因为 n 较小时发现有猜想不成立的例子. 比如已证明 8/11 至少需要 4 个单位分数的和才能表示它. 至今还未能证明上述猜想是否成立.

无加减号的不定方程 (indeterminate equation without plus and minus signs)　一类特殊的不定方程. 当整数 $x>1,y>1,z>1$ 时，形如

$$x^x y^y = z^z \tag{1}$$

的三元不定方程和形如

$$x^x y^y z^z = w^w \tag{2}$$

的四元不定方程，常称为无加减号的不定方程. 爱尔特希(Erdös，P.)曾猜想方程(1)无整数解. 1940 年，柯召证明了在 $(x,y)=1$ 时，这一猜想是成立的. 同时给出在 $(x,y)>1$ 时含有一个参数 n(n 为正整数)的偶数解

$$\begin{aligned}x&=2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+2n}(2^n-1)^{2(2^n-1)},\\ y&=2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+n+1}(2^n-1)^{2(2^n-1)+2},\\ z&=2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+n+1}(2^n-1)^{2(2^n-1)+1}.\end{aligned} \tag{3}$$

方程(1)是否存在一组奇数解？ 至今仍未解决. 1958 年，施英策尔(Schinzel)证明了方程(1)若有整数解，则 x 的每个素因子能整除 y，或 y 的每个素因子能整除 x，这个结果比 $(x,y)=1$ 时无整数解要强. 1980 年，爱尔特希又提出，很可能柯召给出的关于方程(1)的含有一个参数的解(3)，就是方程(1)的全部整数解，这个猜想既未否定亦未被证明. 安德森(Anderson，C.)提出四元不定方程(2)无整数解的猜想，柯召和孙琦于 1964 年给出了方程(2)的无穷多组非平凡解而否定了这个猜想.

不定方程整数解的上界 (upper bound of the integer solution of indeterminate equations)　不定方程的研究中的一个重要问题. 该问题可表述为：设 $n\geqslant 3$，整系数多项式 $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0\ (a_n\neq 0)$ 在有理数域上不可约，则不定方程

$$\begin{aligned}H(x,y)&=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}y+\cdots\\ &\quad +a_1 xy^{n-1}+a_0 y^n\\ &=c\end{aligned} \tag{1}$$

仅有有限多组整数解 x,y，其中 c 是给定的任意非零整数. 此定理是 1909 年图埃(Thue，A.)证明的，被称为图埃定理. 这并不能得出求解形如(1)的不定方程的方法. 1966 年，贝克(Baker，A.)运用丢番图逼近给出了方程(1)解的一个可计算的上界. 对于方程(1)不妨设 $c>0$，则其解满足

$$\max(|x|,|y|)<\mathrm{e}^{(nH)^{(10n)^2}+(\ln c)^{2n+2}},$$

其中 H 是 $f(z)$ 的系数的最大绝对值. 这个上界还可改进为 $\max(|x|,|y|)<ac^b$，其中 a,b 是仅依赖于 $H(x,y)$ 的可计算常数. 1968 年，贝克又给出了不定方程 $y^2=x^3+k$(k 为整数)的整数解满足

$$\max(|x|,|y|)<\exp(10^{10}|k|^{10^4}).$$

贝克还定出了另外许多类不定方程的上界. 他的这个贡献被称为解不定方程的有效方法. 知道了一个不定方程解的绝对值的上界，从理论上就明确了此方程有能通过有限步的计算求出其全部解的可能，即使找不到求解的方法，至少也能将界内的整数逐个代入该方程验算，从而求出其方程的全部整数解. 虽然用有理数逼近代数数(即丢番图逼近)的方法，能圆满地判定该方程整数解的个数有限，但无法得出解的绝对值的上界. 因此，即使知道某不定方程最多只有一组整数解，也还无法通过有限步的计算求出这组解.

能否判定一个不定方程是否有解的问题，是 1900 年希尔伯特(Hilbert，D.)提出的 23 个数学问题的第 10 个，其内容是：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是任给的整系数多项式，给出一个只有有限步运算的方法来判定不定方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 是否有整数解. 1970 年，马尔库舍维奇(Маркушевич，А. И.)利用初等数论与数理逻辑的方法，得到了否定的回答，即这样的方法是不存在的. 但是，对于某些特殊类型的不定方程，由于定出了方程整数解的上界，也就存在一个只有有限步运算的方法，来确定该方程是否有整数解. 贝克的这一工作获得 1970 年的国际数学家大会的菲尔兹奖.

图埃定理 (Thue theorem)　见“不定方程整数解的上界”.

撰　稿　王怀安　刘培杰　孙宗明　李秀荣　张文忠　张毓新　袁绍唐　高隆昌　裘焯明
审　阅　王　元　孙　琦　潘承洞

高 等 代 数

高等代数(higher algebra) 代数学的一门基础课程,包括多项式论和线性代数两部分内容,主要介绍它们的基础知识和基本理论,以及研究它们的基本方法.多项式论以数域上一元多项式的因式分解理论为中心内容,并讨论复数域、实数域和有理数域上的一元多项式以及多元多项式中的对称多项式.线性代数部分主要介绍行列式、矩阵、线性方程组、二次型、线性空间、线性变换和欧几里得空间.

多项式论是代数学的一个古老分支.在中国,《九章算术》(成书不迟于公元1世纪)中一次方程组的解法和现在中学数学中讲授的方法基本相同.《益古演段》(李冶,1259)和秦九韶的著作中,用算筹的方法表示一个方程或多项式,在此方法的基础上,宋、元数学家建立了多项式运算,并且用这种方法列出方程.朱世杰在《四元玉鉴》(1303)中记述了四次方程的解法.在古代开平方、开立方的基础上发展起来的高次方程的数值解法是对当时数学的卓越贡献.《数书九章》(秦九韶,1247)中求解高次代数方程的一种数字解法,其演算步骤和鲁菲尼-霍纳方法完全相同.

在欧洲,古希腊最杰出的数学成就是几何学,欧几里得(Euclid)的《原本》集其大成,但它也包含有算术、数论和代数的内容,只是在代数方面还处在文字叙述阶段.公元500年,由语法学家梅特多鲁斯(Metrodorus)收集46个问题而成《选集》,许多内容起源较早,其中,半数问题导出一元线性方程,有十几个问题导出易解的二元联立方程,一个问题导出三元三次方程,另一个问题导出四元四次方程.最早致力于代数问题研究的是公元3世纪的丢番图(Diophantus),他的《算术》的尚存部分主要是一次和二次方程问题的解法,还解出一个特殊的三次方程.他还触及到一元、二元、三元的二次甚至高次的不定方程.

18世纪末至19世纪初,代数方程的解法问题被认为是代数学研究的中心.这个问题的发生是因为一元 n 次代数方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的解法对于数学的重要性及其应用的广泛性,另一方面还由于大多数与其相联系的理论证明的深刻性与困难性.任何二次方程 $x^2+px+q=0$ 都可以借助于公式

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

而求解.16世纪,意大利代数学家求得了三次和四次方程的相应求解公式.对于更高次的代数方程,求解问题遇到了不可克服的困难.当时的数学家,如塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)、卡尔达诺(Cardano,G.)、费拉里(Ferrari,L.)、笛卡儿(Descartes,R.)、牛顿(Newton,I.)、贝祖(Bézout,É.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、欧拉(Euler,L.)、达朗贝尔(d'Alembert,J. L. R.)、契恩豪斯(Tschirnhaus,E. W.)、高斯(Gauss,C. F.)、阿贝尔(Abel,N. H.)、伽罗瓦(Galois,E.)、罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н. И.)和斯图姆(Sturm,C.-F.)等创造了与这个问题有关的大量的复杂理论.高等代数中只是介绍其中最简单和最基本的一部分.

线性代数是代数学的重要分支之一.线性函数是线性代数的研究对象.历史上线性代数的第一个问题是求解线性方程组.从线性代数的研究对象必然会导致对矩阵的研究.矩阵论是线性代数中重要而且不可缺少的部分,它在提出与解决线性代数的问题中起着工具性的作用.几何学,特别是解析几何学的研究需要发展线性代数.采用向量的概念,将通常的几何空间推广到 n 维向量空间,使解析几何和线性方程组的理论显得特别的简单和清楚.为进一步地推广 n 维向量空间而引进一般的线性空间的概念是自然的和有益的.这种广义空间的元素可以是任意的数学对象或物理对象.高等代数中线性代数部分介绍的内容及其进一步的理论,就其应用的重要性和广泛性来说,是第一位的.很难指出在数学、理论力学或理论物理等学科以及科学技术中,有不用到线性代数的结果和方法的.例如,线性代数对于泛函分析的发展就起着决定性的影响.

高等代数就其内容来说不同于几何和数学分析.几何和数学分析是在实数范围内讨论问题的,而高等代数基本上是在任意数域上讨论其各种问题的.高等代数不同于几何和数学分析的另一个特点是方法的不同.代数方法,即对不同对象的代数运算及其性质的讨论和研究的方法,是高等代数最重要的主题.例如,多项式、矩阵、线性变换等的加法与乘法及其性质的研究和讨论几乎贯穿高等代数的始末,是高等代数研究的中心问题.高等代数还有一个重要的思想方法,即利用等价分类并从每个等价类中寻求适当的代表元的方法.例如,矩阵的秩、矩阵按相似或合同分类、解线性方程组、求二次型的各种标准形、线性空间的同构以及矩阵和 λ 矩阵在各种不同分类中求标准形的问题等,都属于这种情况.当

然，从根本上说，这种思想方法不仅在代数而且在其他的数学学科，甚至在任何科学领域中都要频频涉及，然而在高等代数中，这种思想方法的特点尤为明显和突出，并几乎贯穿于高等代数的所有内容之中.

数环(number ring)　一种特殊的数集. 设 P 是复数集的非空子集. 如果 P 中任意两个数的和、差、积仍属于 P，则称 P 是一个数环. 例如，偶数集与整数集都是数环，分别称为偶数环与整数环；只有数“零”作成的数集 $\{0\}$ 也是数环. 相对于代数中一般的环，数环只是一种特殊的环.

偶数环(ring of even numbers)　见“数环”.

整数环(ring of integers)　见“数环”.

数域(number field)　一种特殊的数集，是高等代数中讨论问题的范围和基础. 设 P 是复数集的一个含有非零数的子集. 如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍属于 P，则称 P 是一个数域. 例如，全体有理数、全体实数以及全体复数都构成数域，分别称为有理数域、实数域和复数域；又如，$\{a+b\sqrt{p}\mid a,b$ 为任意有理数，p 为一确定的素数$\}$ 也构成一个数域. 数域有无穷多个. 数域一定是数环，但数环不一定是数域. 如整数环不是数域. 相对于代数中一般的域，数域只是一种特殊的域. 任何数域都包含有理数域. 因此，有理数域是最小的数域，而复数域是最大的数域.

有理数域(field of rational numbers)　见“数域”.

实数域(field of real numbers)　见“数域”.

复数域(field of complex numbers)　见“数域”.

多　项　式

一元多项式(polynomial of one variable)　代数学研究的基本对象之一. 设 P 是一个数域，x 是一个文字. 形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (1)$$

称为系数在数域 P 上 x 的一元多项式，或称数域 P 上的一元多项式，式中 n 是一个非负整数，$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 是数域 P 中的数. P 称为系数域或基域. 在多项式(1)中，a_ix^i 称为 i 次项，a_i 称为 i 次项的系数，$i=0,1,\cdots,n$；a_0 称为常数项. 常用 $f(x)$，$g(x)$ 等表示 x 的多项式. 例如，$f(x)=3x^2+2x+1$ 是有理数域上的多项式；$g(x)=5\sqrt{2}x^3+2x^2-3\mathrm{i}x+1$ 是复数域上的多项式，而不是实数域上的多项式.

系数域(coefficient domain)　见“一元多项式”.

基域(base field)　即“系数域”.

一元多项式的相等(equality of polynomials of one variable)　多项式的重要概念之一. 它是多项式运算的基础. 若数域 P 上一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有同次项的系数都相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相等的，记为 $f(x)=g(x)$. 由多项式相等的定义，数域 P 上系数不全为零的多项式能惟一地表示为 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq0)$ 的形式.

一元多项式的次数(degree of a polynomial of one variable)　多项式的重要概念之一. 若多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n\neq0$，则 a_nx^n 称为 $f(x)$ 的首项，非负整数 n 称为 $f(x)$ 的次数，多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\deg f(x)$ 或者 $\partial(f(x))$. 首项系数为 1 的多项式称为首一多项式，亦称简型多项式. 系数全为零的多项式称为零多项式，记为 0，零多项式没有次数.

首一多项式(monic polynomial)　见“一元多项式的次数”.

简型多项式(simple type polynomials)　见“一元多项式的次数”.

一元多项式的加法(addition of polynomials in one variable)　多项式的基本运算之一. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

是数域 P 上的两个多项式，并且 $m\leqslant n$. 数域 P 上的多项式 $(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和，记为 $f(x)+g(x)$，式中 $b_n=b_{n-1}\cdots=b_{m+1}=0$. 若 $h(x)$ 是数域 P 上的任意多项式，用 $-h(x)$ 表示把 $h(x)$ 的每一个系数都变号后所得的多项式，数域 P 上的多项式 $f(x)+(-g(x))$ 称为 P 上的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的差，记为 $f(x)-g(x)$. 多项式的加法满足交换律和结合律. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上的两个多项式，且 $f(x)\neq0$，$g(x)\neq0$，若 $f(x)+g(x)\neq0$，则

$$\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max(\deg f(x),\deg g(x)).$$

一元多项式的乘法(multiplication of polynomials in one variable)　多项式的基本运算之一. 对于数域 P 上的两个多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

则多项式 $c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0$，式中 $c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0$，$k=0,1,2,\cdots,n+m$，称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的乘积，记为 $f(x)g(x)$. 多项式的乘法满足交换律. 结合律和乘法对加法的分配律. 在代数中，把具有加法和乘法两个代数运算且满足交换律、结合律、分配律的代数系统称为环. 因此，数域 P 上 x 的一元多项式的全体，称为数域 P 上的一元多项式环，记为 $P[x]$.

一元多项式的乘法还具有以下的性质：

1. 若 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$，则 $\deg(f(x)g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$.

2. $f(x)g(x)=0$ 当且仅当$f(x)$和 $g(x)$中至少有一个是零多项式.

3. 若$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则$g(x)=h(x)$.

一元多项式环(polynomial ring of one variable)　见“多项式的乘法”.

多项式的整除性(exact divisibility of a polynomial)　整数的整除性概念的推广. 设 $f(x), g(x)$是多项式环$P[x]$中的两个多项式，如果$P[x]$中存在多项式$h(x)$，使得 $g(x)=f(x)h(x)$，则称 $f(x)$整除 $g(x)$，亦称 $g(x)$能被 $f(x)$整除，记为 $f(x)\mid g(x)$. 符号$f(x)\nmid g(x)$表示 $f(x)$不能整除 $g(x)$. 当 $f(x)$整除$g(x)$时，称 $f(x)$是 $g(x)$的因式，而称$g(x)$是 $f(x)$的倍式. 零多项式是任一多项式的倍式. 多项式的整除性有以下性质：

1. 若 $f(x)\mid g(x), g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$.

2. 若 $h(x)\mid f(x), h(x)\mid g(x)$，则
$$h(x)\mid(f(x)\pm g(x)).$$

3. 若 $h(x)\mid f(x)$，则对于$P[x]$中的任意多项式$g(x)$，都有 $h(x)\mid f(x)g(x)$.

4. 零次多项式整除$P[x]$中的任意多项式.

5. 每个多项式 $f(x)$都能被 $cf(x)$整除，其中 c 是 P 中任意不等于零的数，这时 $f(x)$和 $cf(x)$称为相互结合的多项式.

6. 若 $f(x)\mid g(x), g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$，其中 c 是数域 P 中一个不等于零的数.

7. 零多项式能被任意多项式整除.

8. 用 ∂f 表示多项式 $f(x)$的次数. 若$f(x)\mid g(x)$，则 $\partial f\leqslant\partial g$. 若 $f(x)\mid g(x)$，而$g(x)\nmid f(x)$，则 $\partial f<\partial g$，这时$f(x)$称为$g(x)$的真因式. 如果数域 P 上的多项式 $g(x)$不整除 $f(x)$，数域 $\overline{P}$ 是包含 P 的扩域，则作为数域 $\overline{P}$ 上的多项式，$g(x)$仍然不整除 $f(x)$，即 $g(x)$是否整除 $f(x)$不因系数域的扩大而改变.

多项式的因式(factor of a polynomial)　见“多项式的整除性”.

多项式的倍式(multiple of a polynomial)　见“多项式的整除性”.

多项式的真因式(proper factor of polynomials)　见“多项式的整除性”.

多项式的带余除法(division of polynomial with remainder)　多项式整除性的理论基础. 对一元多项式环$P[x]$中任意两个多项式 $f(x)$和 $g(x)\neq 0$，一定存在$P[x]$中的多项式 $q(x), r(x)$，使 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，式中 $r(x)=0$ 或 $r(x)$的次数小于$g(x)$的次数，并且这样的 $q(x)$与 $r(x)$是惟一确定的. $q(x)$称为 $g(x)$除 $f(x)$的商式，$r(x)$称为$g(x)$除$f(x)$的余式，$g(x)$称为除式，$f(x)$称为被除式；当 $r(x)=0$ 时，称 $g(x)$除尽 $f(x)$(参见“多项式的整除性”). 对已给多项式 $f(x), g(x)\neq 0$，求商式 $q(x)$与余式$r(x)$的方法称为带余除法. 例如 $g(x)=x^2-3x-1$ 除 $f(x)=x^4-4x^3-1$，商式为 $q(x)=x^2-x-2$，余式为 $r(x)=-7x-3$.

多项式的商式(expression of quotient of polynomial)　见“多项式的带余除法”.

多项式的余式(expression of complement of polynomial)　见“多项式的带余除法”.

最大公因式(greatest common factor)　最大公因数概念的推广. 设 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的公因式，若 $f(x)$与 $g(x)$的任意公因式皆是 $d(x)$的因式，则$d(x)$称为$f(x)$与$g(x)$的最大公因式，亦称最高公因式. 两个零多项式的最大公因式就是零多项式；两个不全为零的多项式 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式是存在的，并且除相差零次因式外是惟一确定的. 用$(f(x), g(x))$表示 $f(x)$与$g(x)$的最大公因式中首项系数是 1 的最大公因式. 若$d(x)$是多项式环$P[x]$中多项式$f(x)$与$g(x)$的最大公因式，则在$P[x]$中存在多项式 $u(x)$与 $v(x)$，使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$，此称为多项式的最大公因式定理. 若 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$的公因式 $d(x)$能被这 s 个多项式的每一个公因式整除，则$d(x)$称为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$的最大公因式. $P[x]$中 s 个不全为零的多项式的最大公因式是存在的，并且除相差零次因式外是惟一确定的. 这 s 个多项式首项系数是 1 的最大公因式称为标准最大公因式，用$(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x))$表示. 若 $d(x)$是$P[x]$中多项式 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$的最大公因式，则在$P[x]$中存在多项式 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x)$，使
$$f_1(x)u_1(x)+f_2(x)u_2(x)+\cdots+f_s(x)u_s(x)=d(x).$$

最高公因式(greatest common factor)　即“最大公因式”.

标准最大公因式(standard greatest common factor)　见“最大公因式”.

最大公因式定理(theorem of the greatest common factor)　见“最大公因式”.

埃尔米特定理(Hermitian theorem)　多项式最大公因式定理的推广. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ $(s\geqslant 2)$是数域 P 上的 s 个非零多项式，则存在一个 λ 矩阵 $A(\lambda)$，它的第一行元素是$f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_s(\lambda)$，而其行列式 $|A(\lambda)|=(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_s(\lambda))$，此称为埃尔米特定理. 当 $s=2$ 时，取

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda), & f_2(\lambda) \\ -v(\lambda), & u(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中 $u(\lambda),v(\lambda)$是 P 上的多项式，使

$$|A(\lambda)|=f_1(\lambda)u(\lambda)+f_2(\lambda)v(\lambda)=(f_1(\lambda),f_2(\lambda)).$$

此即多项式的最大公因式定理.

求最大公因式的行列式法(determinant method for finding the greatest common factor)　求多项式的最大公因式的方法之一. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0,n>0)$与 $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$ $(b_0\neq 0,m>0)$是数域 P 上的多项式，$R(f,g)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式. 在 $R(f,g)$ 中划去前 i 行与第 $m+1$ 行，第 $m+2$ 行，…，第 $m+i$ 行；划去前 i 列与最后的 i 列所得到的行列式，称为多项式$f(x)$与 $g(x)$的第 i 次子结式，记为 $R_i(f,g)$. 其中 $1\leqslant i\leqslant \min(m,n)$. 例如，$f(x)$与 $g(x)$分别为 5 次与 3 次多项式，则 $R(f,g)$(记为 $R_0(f,g)$)是 8 阶行列式，$R_1(f,g)$为 6 阶行列式，$R_2(f,g)$是 4 阶行列式，而 $R_3(f,g)$为 2 阶行列式. 多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式的次数等于 $R_0(f,g),R_1(f,g),R_2(f,g),\cdots$中第一个不为零的下标. 设 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式的次数等于 i，则可在多项式 $f(x)$与 $g(x)$的第 i 次子结式中含 $f(x)$系数的最后一行的最末一个元素代以$f(x)$，在其上的元素代以 $xf(x)$，余此类推；而在含 $g(x)$系数的最后一行的最末一个元素代以$g(x)$，在其上的元素代以 $xg(x)$，余此类推. 如此得到的行列式即为 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式. 例如 $f(x),g(x)$分别为 5 次与 3 次多项式，而 $i=1$，则其最大公因式为

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & xf(x) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & x^3g(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & x^2g(x) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & xg(x) \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & g(x) \end{vmatrix}.$$

互素多项式(relatively prime polynomials)　亦称互质多项式. 整数互素概念的推广. 若数域 P 上的两个多项式，除零次多项式外不再有其他的公因式，则这两个多项式称为互素的. $P[x]$中两个多项式$f(x)$与 $g(x)$互素的充分必要条件是$P[x]$中存在多项式 $u(x)$与 $v(x)$，使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$. 多项式的互素有以下重要的性质：

1. 若多项式 $f(x)$和 $g(x)$都与多项式$h(x)$互素，则乘积 $f(x)g(x)$也与 $h(x)$互素.

2. 若多项式 $h(x)$整除多项式 $f(x)$与 $g(x)$的乘积，而 $h(x)$与 $f(x)$互素，则 $h(x)$一定整除 $g(x)$.

3. 若多项式 $g(x)$与 $h(x)$都整除多项式$f(x)$，而 $g(x)$与 $h(x)$互素，则 $g(x)h(x)$也整除$f(x)$.

若 $P[x]$中的多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$除零次多项式外没有其他的公因式，则这 s 个多项式称为互素的，亦称互质的. 互素的多项式$f_1(x)$，$f_2(x),\cdots,f_s(x)$不一定是两两互素的.

互质多项式(relatively prime polynomials)　即“互素多项式”.

辗转相除法(division algorithm)　亦称欧几里得算法. 求多项式最大公因式的一种重要方法. 它是整数的辗转相除法的推广(参见本卷《初等数论》同名条). 设 $f(x),g(x)$是 $P[x]$中不全为零的多项式. 若$g(x)\neq 0$，用 $g(x)$除 $f(x)$得商式$q_1(x)$，余式 $r_1(x)$，于是 $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$；若 $r_1(x)\neq 0$，再用 $r_1(x)$除$g(x)$得商式$q_2(x)$，余式$r_2(x)$，于是 $g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x)$；若 $r_2(x)\neq 0$，再用 $r_2(x)$除 $r_1(x)$得商式$q_3(x)$，余式$r_3(x)$，于是$r_1(x)=r_2(x)\cdot q_3(x)+r_3(x)$；依此类推，由于余式的次数逐次降低，必有某一正整数 s，使$r_{s-2}(x)=r_{s-1}(x)q_s(x)+r_s(x)$，且$r_s(x)\neq 0$，但有$r_{s-1}(x)=r_s(x)q_{s+1}(x)$，则 $r_s(x)$就是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式. 以上求任意两个不全为零的多项式的最大公因式的方法，称为辗转相除法.

欧几里得算法(Euclidean algorithm)　即“辗转相除法”.

最小公倍式(least common multiple)　亦称多项式的最低公倍式. 整数环中最小公倍数概念的推广. 如果多项式 $m(x)$满足：

1. $m(x)$是多项式 $f(x)$与$g(x)$的公倍式，即 $f(x)|m(x)$，且 $g(x)|m(x)$.

2. $f(x)$与 $g(x)$的任一个公倍式都是 $m(x)$的倍式，

则称 $m(x)$为 $f(x)$与 $g(x)$的最小公倍式. 两个不全为零的多项式$f(x)$与 $g(x)$的最小公倍式中首项系数为 1 的最小公倍式常用$[f(x),g(x)]$表示. $P[x]$中非零多项式 $f(x),g(x)$的最小公倍式与最大公因式的关系是

$$[f(x),g(x)]=\frac{af(x)g(x)}{(f(x),g(x))},$$

式中 a 是 $f(x)$与 $g(x)$的首项系数乘积的倒数.

最低公倍式(least common multiple)　即“最小公倍式”.

不可约多项式(irreducible polynomial)　一种重要的多项式. 它在多项式环中有类似于素数在整数环中的地位. 对于数域 P 上的任意多项式 $f(x)$，P 中非零数 c 与 $cf(x)$总是 $f(x)$的因式. 这两种因式称为$f(x)$的平凡因式，亦称当然因式. 其他的因式，称为$f(x)$的非平凡因式，亦称非当然因式. 设 $p(x)$为 P 上的一个次数大于零的多项式，如果在 P

上$p(x)$只有平凡因式，则称$p(x)$在P上(或$P[x]$中)不可约，亦称$p(x)$是P上的不可约多项式，或既约多项式；如果$p(x)$除平凡因式外，在P上还有其他因式，则称$p(x)$在P上(或在$P[x]$中)可约，亦称$p(x)$是P上的可约多项式．一个多项式是否可约，与其基域有关．例如，x^2-2在有理数域上不可约，但在实数域上可约，因为此时它有非平凡因式

$$x+\sqrt{2}\text{与}x-\sqrt{2}.$$

数域P上的不可约多项式有如下的基本性质：

1．若$p(x)$不可约，且$c\neq 0, c\in P$，则$cp(x)$也不可约．

2．若$p(x)$不可约，$f(x)$是任一多项式，则$(p(x),f(x))=1$或者$p(x)|f(x)$．

3．若$p(x)$不可约，且$p(x)|f(x)g(x)$，则$p(x)|f(x)$或者$p(x)|g(x)$．

平凡因式(trivial factor)　见“不可约多项式”．

非平凡因式(non-trivial factor)　见“不可约多项式”．

可约多项式(reducible polynomial)　见“不可约多项式”．

多项式的惟一分解定理(unique decomposition theorem for polynomial)　多项式理论的主要命题之一．数域P上的每个次数大于零的多项式$f(x)$都可以分解为数域P上的不可约多项式的乘积．若

$$\begin{aligned}f(x)&=p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)\\&=q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),\end{aligned}$$

式中$p_i(x)$与$q_j(x)$ $(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$都是数域$P$上的不可约多项式，则$r=s$，并且适当调换$q_i(x)$的次序后，可使$q_i(x)=c_ip_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,r)$，式中c_i是P中不为零的数．换句话说，如果不计次序与零次因式的差异，多项式$f(x)$分解为不可约因式乘积的分解式是惟一的．此即多项式的惟一分解定理．在多项式$f(x)$的分解式中，提出每一个不可约因式的首项系数，使它们成为首一多项式，然后合并相同的不可约因式，则$f(x)$的分解式为$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_k^{r_k}(x)$，式中$c$是$f(x)$的首项系数，$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_k(x)$是$P$上互不相同的不可约多项式，$r_1,r_2,\cdots,r_k$是正整数，$f(x)$的这种分解式称为$f(x)$的标准分解式，或典型分解式．

多项式的典型分解式(canonical factorization of a polynomial)　见“多项式的惟一分解定理”．

多项式的标准分解式(standard factorization of a polynomial)　见“多项式的惟一分解定理”．

多项式的导数(derivative of a polynomial)　亦称多项式的导式．一种次数比原多项式低的多项式．对于数域P上的多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则称多项式$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)\cdot a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$为$f(x)$的导数或导式．$f'(x)$的导数称为$f(x)$的二阶导数，记为$f''(x)$，$f''(x)$的导数称为$f(x)$的三阶导数，记为$f'''(x)$，一般地，$f(x)$的$k-1$阶导数的导数，称为$f(x)$的$k$阶导数，记为$f^{(k)}(x)$．多项式的导数的基本公式有：

1．$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$．

2．$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，特别地，$(cf(x))'=cf'(x)$，$c$是数域$P$中的数．

3．当$k>1$时，$(f^k(x))'=kf^{k-1}(x)f'(x)$．

重因式(multiple factor)　一种特殊因式．设$f(x)$是数域P上的一个多项式．如果P上的不可约多项式$p(x)$的k次幂$p^k(x)$整除$f(x)$，但是$p^{k+1}(x)$不整除$f(x)$，则称$p(x)$是$f(x)$的一个k重因式．当$k>1$时，$p(x)$称为$f(x)$的重因式；当$k=1$时，$p(x)$称为$f(x)$的单因式．若$p(x)$是$f(x)$的k $(k>1)$重因式，则$p(x)$必是$f'(x)$的$k-1$重因式．特别地，$f(x)$的单因式不是其导数$f'(x)$的因式．$f(x)$没有重因式的充分必要条件是$f(x)$与$f'(x)$互素；多项式

$$g(x)=\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$$

无重因式，且与$f(x)$有完全相同的不可约因式．

单因式(simple factor)　见“重因式”．

分离重因式法(method of separating multiple factor)　多项式因式分解的一种方法．设$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$是$f(x)$的标准分解式，且其中不可约因式的最高重数$m>1$．令$F_i(x)$为$f(x)$的一切$i$重因式之积$(i=1,2,\cdots,m)$，若$f(x)$中没有$j$重因式，就令$F_j(x)=1$．于是由$f(x)$的标准分解式得$f(x)=a_0F_1(x)F_2^2(x)F_3^3(x)\cdots F_m^m(x)$．按以下的方法，可以具体地求出$F_1(x),F_2(x),\cdots,F_m(x)$，令

$$\begin{aligned}&d_1(x)=(f,f')=F_2(x)F_3^2(x)\cdots F_m^{m-1}(x),\\&d_2(x)=(d_1,d_1')=F_3(x)F_4^2(x)\cdots F_m^{m-2}(x),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&d_{m-1}(x)=(d_{m-2},d_{m-2}')=F_m(x),\\&d_m(x)=1,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=a_0F_1(x)F_2(x)\cdots F_m(x),\\&\varphi_2(x)=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=F_2(x)F_3(x)\cdots F_m(x),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\varphi_{m-1}(x)=\frac{d_{m-2}(x)}{d_{m-1}(x)}=F_{m-1}(x)F_m(x),\\&\varphi_m(x)=\frac{d_{m-1}(x)}{d_m(x)}=F_m(x).\end{aligned}$$

于是　$F_1(x)=\dfrac{\varphi_1(x)}{a_0\varphi_2(x)}$，$F_2(x)=\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)}$，$\cdots$，

$$F_{m-1}(x)=\frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi_m(x)},\ F_m(x)=\varphi_m(x).$$

这种按以上方法和步骤求出 $F_i(x)$ 的方法，称为分离重因式法，亦称重因式的分离.

重因式的分离(separation of multiple factor) 即“分离重因式法”.

多项式函数(polynomial function) 一类常见的函数. 指由一元多项式确定的函数. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是数域 P 上的多项式，以数域 P 中的数 α 代替 $f(x)$ 中的 x，得到 P 中的一个数 $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$，称为多项式 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 时的值，记为 $f(\alpha)$. 这样，多项式 $f(x)$ 就确定了数域 P 上的一个函数. 当 P 为实数域时，$f(x)$ 便是数学分析中所讨论的多项式函数.

余数定理(remainder theorem) 亦称余式定理、贝祖定理. 多项式理论的主要命题之一. 设 $f(x)$ 是数域 P 上的一元多项式，c 是 P 中的数，则用 $x-c$ 除 $f(x)$ 所得的余数等于 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值 $f(c)$.

余式定理(remainder theorem) 即“余数定理”.

贝祖定理(Bézout theorem) 即“余数定理”.

多项式的根(root of polynomial) 多项式的重要概念之一. 设 $f(x)$ 是数域 P 上的多项式，c 是 P 中的数. 若 $x=c$ 时，$f(x)$ 的值 $f(c)=0$，则 c 称为 $f(x)$ 在数域 P 中的根，亦称为 $f(x)$ 在数域 P 中的零点. 数 c 是 $f(x)$ 的根的充分必要条件是 $x-c$ 为 $f(x)$ 的因式. 若 $x-c$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则 c 称为 $f(x)$ 的 k 重根. 当 $k>1$ 时，c 称为 $f(x)$ 的重根；当 $k=1$ 时，c 称为 $f(x)$ 的单根. 数域 P 上的不可约多项式无重根. 数域 P 上 n $(n\geqslant0)$ 次多项式在 P 中至多有 n 个不同的根；数域 P 中的每个数都是零多项式的根.

多项式的零点(null point of a polynomial) 见“多项式的根”.

多项式的重根(repeated root of a polynomial) 见“多项式的根”.

多项式的插值问题(problem of polynomial interpolation) 多项式理论的重要问题. 即寻求在指定点取指定值的多项式问题. 对给定数域 P 中的 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$，找出 P 上的一个次数最低的多项式 $f(x)$，使其在 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 处的值等于给定的数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}$，这样的问题称为多项式的插值问题. 插值问题的一个重要解法是拉格朗日插值公式，即

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}.$$

插值公式亦称插补公式，由拉格朗日(Lagrange, J.-L.)首创，后被收入他的《论高次数字方程的解法》一书中.

拉格朗日插值公式(Lagrange interpolation formula) 见“多项式的插值问题”.

牛顿插值公式(Newton interpolation formula) 插值问题的一个重要公式. 对于数域 P 上给定的两两不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 与给定的数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}$ 的下列插值公式

$$\begin{aligned}f(x)&=l(a_1)+l(a_1,a_2)(x-a_1)\\&+l(a_1,a_2,a_3)(x-a_1)(x-a_2)+\cdots\\&+l(a_1,a_2,\cdots,a_{n+1})(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\end{aligned}$$

适合 $f(a_i)=b_i(i=1,2,\cdots,n+1)$，其中 $l(a_1)$，$l_1(a_1,a_2)$，…由如下递推公式决定：

$$l(a_1)=b_1,l(a_2)=b_2,\cdots,l(a_{n+1})=b_{n+1};$$

$$l(a_1,a_2)=\frac{l(a_1)-l(a_2)}{a_1-a_2};$$

$$l(a_2,a_3)=\frac{l(a_2)-l(a_3)}{a_2-a_3},\cdots;$$

$$l(a_1,a_2,a_3)=\frac{l(a_1,a_2)-l(a_2,a_3)}{a_1-a_3},\cdots;$$

$$\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}&l(a_1,a_2,\cdots,a_{n+1})\\&=\frac{l(a_1,a_2,\cdots,a_n)-l(a_2,a_3,\cdots,a_{n+1})}{a_1-a_{n+1}},\cdots\end{aligned}$$

当 $k\geqslant1$ 时，

$$\begin{aligned}&l(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})\\&=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{b_i}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{k+1})}.\end{aligned}$$

代数基本定理(fundamental theorem of algebra) 多项式理论的主要命题之一. 它是 17—18 世纪代数学的基本问题. 在复数域里，任何一元 n $(n\geqslant1)$ 次多项式至少有一个根. 或等价的，任一复系数一元 n $(n\geqslant1)$ 次多项式在复数域中有且仅有 n 个根(k 重根作 k 个根计). 这就是所谓的代数基本定理. 由此得出的结论：复数域上只有一次不可约多项式，实数域上只有一次和二次不可约多项式，就能推出复数域和实数域上一元多项式的因式分解定理：在复数域上每个一元 n $(n\geqslant1)$ 次多项式都可惟一地分解为一次因式的乘积，在实数域上每个一元 n $(n\geqslant1)$ 次多项式都可以惟一地分解为一次与二次不可约因式的乘积.

在 19 世纪以前，古典代数学研究的核心问题是解代数方程及求其根的分布. 探讨代数基本定理，可以上溯到 1608 年的罗特(Rothe, P.). 后来吉拉尔(Girard, A.)于 1629 年发表的论文《代数中的新发现》中，借助代数方程根与系数间的关系，推测并断言：“n 次多项式有 n 个根”，但未能予以证明. 1742 年 12 月 15 日，欧拉(Euler, L.)给出了与代数基本定理等价的命题：任意实系数的多项式总能分解成实系数的一次和二次的因式的乘积，亦未给出证明.

直到1746年，达朗贝尔(d'Alembert, J. L. R.)才第一个给出了证明，但他的证明有一点不严密. 1797年，高斯(Gauss, C. F.)在其博士论文中首先给出了严格证明(发表于1799年)，然而此证明所需要做的补充不少于达朗贝尔所给出的证明，因而他后来又给出过三个证明，其中，第四个证明发表于1850年，和第一个证明的发表相隔整整半个世纪.

韦达定理(Viete theorem)　多项式理论的主要命题之一. 指多项式的根与系数所满足的一组等式. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是复数域 P 上的 n $(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ 的 n 个复数根，$f(x)$的根与系数之间的关系是：

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0};$$

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_2}{a_0};$$

……………………………………………………

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<a_k\leqslant n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}\cdots\alpha_n=(-1)^k\frac{a_k}{a_0};$$

……………………………………………………

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

其中第 k 个等式的左端是 $f(x)$的根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意 k 个乘积之和($k=1,2,\cdots,n$)，即都是 n 个根的基本对称多项式. 因此，根据对称多项式基本定理，系数属于复数域 P 的关于根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的每一个对称多项式都是复数域 P 中的一个数. 一元 n 次多项式根与系数的关系，是韦达(Viete, F.)于1559年最早提出来的，后来发表在他的数学著作《论方程的整理与修正》中，该书在韦达死后于1615年才发表. 韦达当时只是就五次以下的多项式得出根与系数的关系，并没有提出与证明一般 n 次多项式的根与系数的关系.

互反方程(reciprocal equation)　一种特殊的代数方程. 数域 P 上的方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$的系数若满足 $a_n=a_0, a_{n-1}=a_1,\cdots$，则称此方程为互反方程. 当 n 为奇数时，$x=-1$ 是它的根；当 n 为偶数 $2m$ 时，解此方程相当于解一个 m 次方程与一个二次方程. 数域 P 上的方程是互反方程当且仅当它的倒数方程与该方程同解，即 α 为方程的根当且仅当 $1/\alpha$ 也为其根(参见本卷《初等代数》中的同名条和“倒数方程”).

丢番图方程(Diophantine equation)　不定方程在多项式中的推广. 设 $f(x)$, $g(x)$和 $h(x)$是数域 P 上的多项式，方程

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=h(x) \qquad (1)$$

称为丢番图方程，式中 $u(x)$, $v(x)$是数域 P 上待求的多项式. 方程(1)有解的充分必要条件是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式 $d(x)$整除 $h(x)$. 若方程(1)有解，令 $u_0(x)$, $v_0(x)$是它的特解，则它的通解为

$$u(x)=u_0(x)-g_0(x)p(x),$$
$$v(x)=v_0(x)+f_0(x)p(x),$$

式中　$f_0(x)=\dfrac{f(x)}{d(x)},\ g_0(x)=\dfrac{g(x)}{d(x)}$，

$p(x)$是 P 上的任意多项式. 丢番图(Diophantus)在他最重要的著作《算术》中运用了许多巧妙的方法解不定方程，因此，也把只考虑整数解的整系数不定方程称为丢番图方程(参见本卷《初等数论》中的“不定方程”).

二项方程(binomial equation)　一种简单的代数方程. 指数域 P 上形如 $x^m-a=0$ 的方程. 在复数域上，若以 $\sqrt[m]{a}$ 表示它的一个根，则 $\sqrt[m]{a}$, $\xi\sqrt[m]{a}$, $\xi^2\sqrt[m]{a}$, $\cdots$, $\xi^{m-1}\sqrt[m]{a}$ 是它的全部根，式中 ξ 为 m 次本原单位根. 实际上它们就是复数 a 在复数域内的全部 m 次方根.

一元 n 次方程(equation of degree n with one unknown)　一元 n 次多项式所确定的方程. 指方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$. 当 $n\geqslant 3$ 时，称为高次方程. 研究一元 n 次方程的根，包括根的存在、根式解、根的界和根的个数等，曾经是代数学的中心问题. 一元 n 次方程的系数和有理常数以及对这些数进行加、减、乘、除和开整数次方的符号组成的式子，称为方程的根式. 根式解就是求将代数方程的根用方程系数的根式表达出来. n 次方程的根式解，亦称为代数解法. 三次方程与四次方程的根式解于16世纪由意大利数学家给出. 此后自然地开始寻求五次以及五次以上代数方程的根式解. 这种尝试一直继续近三个世纪，经过莱布尼茨(Leibniz, G. W.)、范德蒙德(Vandermonde, A.-T.)、拉格朗日(Lagrange, J.-L.)、鲁菲尼(Ruffini, P.)等人的艰辛努力，直到19世纪才由阿贝尔(Abel, N. H.)解决. 他证明了一般的 n $(n\geqslant 5)$次方程不能用根式解. 不久伽罗瓦(Galois, E.)用群论方法得出了方程可用根式解的充分必要条件.

高次方程(equation of higher degree)　见“一元 n 次方程”.

卡尔达诺公式(Cardano formula)　亦称卡丹公式. 三次方程的求解公式. 它给出三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个解为 $x_1=u+v$, $x_2=uw+vw^2$, $x_3=uw^2+vw$，其中：

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$w=\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}.$$

由于一般三次方程 $y^3+ay^2+by+c=0$ 经过未知量的代换 $y=x-a/3$ 后，可化为形如 $x^3+px+q=0$ 的三次方程. 因此，运用卡尔达诺公式可解任意复系数的三次方程. 此公式实为塔尔塔利亚(Tartaglia, N.)于 1541 年首先发现，但未公开发表，却在允诺保密的央求下告诉了卡尔达诺(Cardano, G.). 后者于 1545 年将这一结果发表在自己的著作《大法》里. 后人遂称为卡尔达诺公式，沿袭至今.

四次方程的费拉里解法(Ferrari method of quartic equations)　四次方程的一种解法. 对复系数四次方程

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0, \tag{1}$$

作代换 $y=x-a/4$，可化为

$$x^4+px^2+qx+r=0, \tag{2}$$

且可设 p,q,r 不全为零. 引进参数 α，使

$$\begin{aligned}&x^4+px^2+qx+r\\&=(x^2+\frac{p}{2}+\alpha)^2-2\alpha\left(x^2-\frac{q}{2\alpha}x+\frac{\alpha}{2}+\frac{p}{2}-\frac{r}{2\alpha}+\frac{p^2}{8\alpha}\right).\end{aligned}$$

选取 α，使二次多项式

$$x^2-\frac{q}{2\alpha}x+\frac{\alpha}{2}+\frac{p}{2}-\frac{r}{2\alpha}+\frac{p^2}{8\alpha}$$

的根为重根，即其判别式

$$\frac{q^2}{4\alpha^2}-2\alpha-2p+\frac{2r}{\alpha}-\frac{p^2}{2\alpha}=0.$$

因此，α 是三次方程

$$\alpha^3+p\alpha^2+\left(\frac{p^2}{4}-r\right)\alpha-\frac{q^2}{8}=0$$

的非零根. 由卡尔达诺公式，取其一个根 α_0，则

$$\begin{aligned}&x^4+px^2+qx+r\\&=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(x-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2\\&=\left[x^2+\sqrt{2\alpha_0}x+\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right]\\&\quad\times\left[x^2-\sqrt{2\alpha_0}x+\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right].\end{aligned}$$

因此，方程(2)的四个根由两个二次方程

$$x^2-\sqrt{2\alpha_0}x+\left[\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right]=0,$$

$$x^2+\sqrt{2\alpha_0}x+\left[\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right]=0$$

的根组成. 再由代换 $y=x-a/4$ 可得到原四次方程的四个根. 四次方程的解法，由卡尔达诺(Cardano, G.)的助手费拉里(Ferrari, L.)给出，而由卡尔达诺在《大法》中公开发表.

四次方程的笛卡儿-欧拉解法(Descartes-Euler method of quartic equations)　四次方程的一种解法. 四次方程 $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$ 经代换 $y=x-a/4$ 化为 $x^4+px^2+qx+r=0$. 设 z_1,z_2,z_3 是三次方程

$$z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0$$

的三个根，则 $x^4+px^2+qx+r=0$ 的四个根 x_1,x_2,x_3,x_4 是

$$\pm\sqrt{z_1}\pm\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3},$$

式中符号的选取应满足

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}=-\frac{q}{8}.$$

这种解法是由笛卡儿(Descartes, R.)与欧拉(Euler, L.)所给出.

四次方程的退化解法(degenerate method of quartic equations)　四次方程的一种解法. 它来源于解析几何中二次曲线退化的判别条件. 设 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (a\neq0)$ 是一个四次方程，引进参数 t，使之满足三次方程

$$\begin{vmatrix}2a & b & t\\ b & 2(c-t) & d\\ t & d & 2e\end{vmatrix}=0,$$

即 $t^3-ct^2+(bd-4ae)t+(4ace-ad^2-eb^2)=0$. 设 t_0 为它的任一个根，代入原方程，则方程

$$ax^4+bx^3+(c-t_0)x^2+t_0x^2+dx+e=0$$

可分解为两个二次方程. 解之，即得原方程的四个根. 在解析几何中，二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\ (a\neq0)$ 退化的充分必要条件是

$$\Delta=\begin{vmatrix}2a & b & d\\ b & 2c & e\\ d & e & 2f\end{vmatrix}=0.$$

如果令 $x=y^2$，相应地有

$$ay^4+by^3+(ced)y^2+ey+f=0\ (a\neq0).$$

退化的充分必要条件是 $\Delta=0$. 因此，上述的解四次方程的方法称为退化解法.

解整系数四次方程的 * 法(solution of quartic equations with integral coefficients — * method)　十字相乘法的推广. 该法可用于整系数四次多项式分解成两个整系数二次多项式之积. 设

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1\\ a_1b_2+a_2b_1 & \times & b_1c_2+b_2c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ \hline \multicolumn{3}{c}{c-(a_1c_2+a_2c_1)\quad a_1c_2+a_2c_1}\end{array}$$

$p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 是一个整系数多项式，且能分解成两个整系数多项式 $(a_1x^2+b_1x+c_1)$ 与 $(a_2x^2+b_2x+c_2)$

的乘积，则 $a=a_1a_2,e=c_1c_2$，即 a_1,a_2 可在 a 的因子中寻找，c_1,c_2 可在 e 的因子中寻找. 乘积中二次项的系数为 $a_1c_2+a_2c_1+b_1b_2$，因此 $b_1b_2=c-(a_1c_2+a_2c_1)$. 故 b_1,b_2 可在 $c-(a_1c_2+a_2c_1)$ 的因子中寻找. 如果能够找到适当的 b_1,b_2，使 $a_1b_2+a_2b_1=b$，$b_1c_2+b_2c_1=d$，则问题就全部解决了，否则换其他的 b_1,b_2 再试. 如果各种可能的 b_1,b_2 都不行，就须改变 a_1,a_2,c_1,c_2 的组合或数值再试.

正多项式(positive polynomial)　一种特殊的实系数多项式. 设 $f(x)$ 是实系数多次式，如果对于任意实数 x，都有 $f(x)>0$，则 $f(x)$ 称为正多项式. 如果对于任意实数 x，都有 $f(x)\geqslant 0$，则称 $f(x)$ 为非负多项式. 正多项式没有实根，且首项系数是正实数；正多项式是偶数次的多项式.

共轭根(conjugate roots)　一对特殊根. 指多项式或代数方程的一类成对出现的根. 譬如，若非实复数 α 是实系数 n 次方程 $f(x)=0$ 的根，则其共轭复数 $\bar{\alpha}$ 也是方程 $f(x)=0$ 的根，且 α 与 $\bar{\alpha}$ 的重数相同，称 α 与 $\bar{\alpha}$ 是该方程的一对共轭复(虚)根. 又若 $a+b\sqrt{c}$ $(a,b\neq 0,c>0$ 皆为有理数，$\sqrt{c}$ 为无理数$)$ 是有理系数方程 $f(x)=0$ 的根，则 $a-b\sqrt{c}$ 也是方程 $f(x)=0$ 的根，称 $a+b\sqrt{c}$，$a-b\sqrt{c}$ 为该方程的一对共轭无理根. 在抽象代数中，一个域上的 n 次不可约多项式在其分裂域中的 n 个根，称为互相共轭的根.

共轭复根(conjugate complex roots)　见“共轭根”.

共轭无理根(conjugate irrational roots)　见“共轭根”.

赫尔维茨定理(Hurwitz theorem)　多项式理论的主要命题之一. 它给出了一类实多项式的判别条件. 每一个根的实部皆为负数的实多项式，称为赫尔维茨多项式，亦称稳定多项式. 赫尔维茨多项式的系数都是正数. 赫尔维茨定理是：实系数 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_0>0)$ 是赫尔维茨多项式的充分必要条件为行列式

$$\Delta_1=a_1,\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\cdots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

皆为正数，其中 $a_j=0$ $(j>n)$. 赫尔维茨(Hurwitz, A.)在研究实系数多项式的根时，引入了赫尔维茨多项式的概念. 这一术语来源于微分方程，是由研究一个物理系统在平衡位置渐近稳定问题引起的. 赫尔维茨定理由赫尔维茨和鲁歇(Rouché, E.)于1895年给出，亦称为赫尔维茨-鲁歇判别法.

赫尔维茨多项式(Hurwitz polynomials)　见“赫尔维茨定理”.

稳定多项式(stable polynomials)　即“赫尔维茨多项式”.

赫尔维茨-鲁歇判别法(Hurwitz-Rouché criterion)　即“赫尔维茨定理”.

结式(eliminant)　代数学术语. 指由两个多项式的系数所构成的一种行列式. 数域 P 上的两个多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\ (n>0),$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m\ (m>0)$$

的结式 $R(f,g)$ 是指 $m+n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}.$$

若 $a_0\neq 0$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $f(x)$ 在复数域内的 n 个根，则 $R(f,g)=a_0^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$；若 $b_0\neq 0$，且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 $g(x)$ 在复数域内的 m 个根，则

$$R(f,g)=(-1)^{mn}b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2)\cdots f(\beta_m).$$

因此，若 $R(f,g)=0$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公根，或者 $a_0=b_0=0$；反之也成立. 又

$$R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f),$$

判断 $f(x)$ 是否有重根，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否有公根以及解二元高次方程组时，结式都是一个有用的工具.

多项式的判别式(discriminant of a polynomial)　用以判别多项式有无重根的一种表达式. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是数域 P 上多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq 0)$ 在复数域内的 n 个根，则

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$$

称为 $f(x)$ 的判别式. 它同 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的结式 $R(f,f')$ 有关系

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}R(f,f').$$

多项式 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是

$$D(f)=R(f,f')=0.$$

特别地，如果 $f(x)$ 是实系数多项式，则 $D(f)$ 是实数. 当 $D(f)>0$ 时，$f(x)$ 有偶数对共轭虚根；当 $D(f)<0$ 时，$f(x)$ 有奇数对共轭虚根. 若 $f(x)$

$=ax^2+bx+c$ 为实系数二次多项式，则

$$D(f)=a_0^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac.$$

实系数三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的判别式 $D(f)=b^2c^2-4b^3d+18abcd-4ac^3-27a^2d^2$. 当 $D(f)>0$时，$f(x)$有三个相异实根；当 $D(f)=0$ 时，$f(x)$有三个实根且至少有两个根相等；当 $D(f)<0$ 时，$f(x)$有一个实根和一对共轭虚根.

三次方程的不可约情形(irreducible case of a cubic equation)　代数学术语. 指实系数三次方程实根公式中出现虚根的情形. 设实系数三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根为 x_1,x_2,x_3，则其判别式

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$$
$$=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$

若三个根 x_1,x_2,x_3 为互异的实数，则 $D>0$，而

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{D}{108}<0.$$

于是三次方程 $x^3+px+q=0$ 的求根公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

中有虚数出现. 该公式长时期被认为是此一求根公式的严重缺点，并有很多数学家企图寻求其他只包含实根式的求根公式，但利用域的理论可证明这是不可能的. 历史上把这一事实称为三次方程的不可约情形.

实根的界限(bound of real roots)　多项式的重要概念之一. 指实系数 n 次方程实根存在的范围. 设

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (1)$$

$(a_0a_n\neq0,n>0)$是一个实系数 n 次方程. 设 P_1 和 P_2 是两个正实数，若对方程(1)的任一个正根 c，必有 $P_1\leqslant c\leqslant P_2$，则称 P_1 为正根下限，P_2 为正根上限. 设 $-N_1$ 和 $-N_2$ 是两个负实数，若对方程(1)的任一个负根 d，必有 $-N_1\leqslant d\leqslant -N_2$，则称 $-N_2$ 为负根上限，$-N_1$为负根下限. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0>0)$ 是实系数多项式，且 a_k 是第一个负系数，即 $a_1>0,\cdots,a_{k-1}>0$，但 $a_k<0$. 若 b 是负系数中的最大绝对值，则 $f(x)=0$ 的正根上限为

$$1+\sqrt[k]{\frac{b}{a_0}}.$$

这种求正根上限的方法，称为拉格朗日方法. 设 $f(x)$是实系数多项式，k 是一个实数，使 $f(k)$，$f'(k),\cdots,f^{(n)}(k)$皆为非负实数，或者皆为非正实数，则方程 $f(x)=0$ 的实根都小于 k，其中 $f^{(m)}(x)$ 是$f(x)$的 m 阶导数. 这种求根的上限的方法，称为牛顿方法.

拉格朗日方法(Lagrange method)　见“实根的界限”.

多项式的变号数(number of changing signs in a polynomial)　求实根界限使用的一个概念. 设 q_1，$q_2,\cdots,q_m$ 是一个实数序列，其中 $q_1\neq0$. 从 q_1 向右，若第一个与 q_1 的符号相反的数是 q_i，则称 q_1 与 q_i 间有一个变号. 再从 q_i 向右，若第一个与 q_i 符号相反的数是 q_j，这样便得到第二个变号. 如此继续直至 q_m，若共得到 r 个变号，则称 r 为此序列的变号数. 设$f(x)$是一个实系数多项式，$f(x)$的系数序列的变号数称为多项式 $f(x)$的变号数.

斯图姆定理(Sturm theorem)　确定实系数多项式实根个数的一个重要定理. 设 $f(x)$是实系数 n $(n\geqslant1)$ 次多项式，令 $f_0(x)=f(x)$，$f_1(x)=f'(x)$，则由带余除法，$f_0(x)=f_1(x)q_1(x)+r_1(x)$. 令$f_2(x)=-r_1(x)$，对$f_1(x)$与$f_2(x)$，由带余除法有 $f_1(x)=f_2(x)q_2(x)+r_2(x)$. 再令$f_3(x)=-r_2(x)$，并对$f_2(x)$与$f_3(x)$作带余除法，如此继续下去，得多项式序列：$f_0(x),f_1(x),\cdots,f_s(x),\cdots,f_m(x)$，称为$f(x)$的斯图姆序列. 斯图姆定理是：设$f(x)$是实系数多项式，且$f(x)$无重根，$f_0(x),f_1(x),\cdots,f_m(x)$是$f(x)$的斯图姆序列. 若 $a<b$，$f(a)\neq0$ 和$f(b)\neq0$，则序列$f_0(a),f_1(a),\cdots,f_m(a)$的变号数$V(a)$与序列 $f_0(b),f_1(b),\cdots,f_m(b)$ 的变号数 $V(b)$ 的差 $V(a)-V(b)$恰是$f(x)$在区间(a,b)内实根的个数. 斯图姆(Sturm，C.-F.)在 1829 年的论文《论数字方程解》中，深入地讨论了代数方程根的隔离，引入了斯图姆序列的概念，给出了斯图姆定理.

斯图姆序列(Sturm system)　见“斯图姆定理”.

笛卡儿符号律(Descartes sign rule)　估计实系数多项式正根个数的一种方法. 它断定实系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的正根个数等于 $f(x)$的系数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的变号数减去一个非负偶数. 这是判断一个实系数多项式大致有多少个正根的最简便的方法. 由笛卡儿符号律可推知，实系数多项式 $f(x)$负根的个数(k 重根按 k 个计算)等于多项式 $f(-x)$的系数列的变号数减去一个非负偶数. 笛卡儿(Descartes，R.)所著《方法论》一书于 1637 年出版，书中有一个附录《几何学》，讨论了当时流行的代数问题，其中给出了这一方法.

傅里叶-比当定理(Fourier-Budan theorem)　关于实系数多项式在确定区间内根的个数的一个命题. 该定理断言：设$f(x)$是一个实系数 n 次多项式. 如果$f(a)\neq0$，$f(b)\neq0$，$a<b$，则多项式$f(x)$在区间(a,b)内实根的个数(k 重根按 k 个计算)等于数列$f(a),f'(a),\cdots,f^{(n)}(a)$与$f(b),f'(b),\cdots,f^{(n)}(b)$的变号数之差减去一个非负偶数. 傅里叶(Fourier，J.-B.-J.)和比当(Budan de Boislaurent，F. F. D.)各自

独立地发现了此定理.

罗尔定理(Rolle theorem) 确定实系数多项式导式根的个数的命题.该定理断言:设 $f(x)$ 是实系数多项式,$f(x)$ 的导式 $f'(x)$ 在 $f(x)$ 的两个相邻的实根之间有奇数个实根.罗尔(Rolle,M.)于 1691 年在他所著的《方程的解法》一书中提出.后人把它推广到 $f(x)$ 是一般的可微函数的情形(参见本卷《数学分析》同名条).

秦九韶方法(Qin Jiushao method) 求实系数多项式实根近似值的一种方法.例如,设实系数多项式 $f(x)$ 在[3,4]内有一实根 α.令 $x=3+y$,即 $y=x-3$,再令 $f_1(y)=f(3+y)$,则 $f_1(y)$ 在[0,1]内有一个相应的实根.把[0,1]分为十个小的区间[0,0.1],[0.1,0.2],…,[0.9,1],看 $f_1(y)$ 的相应实根在哪个区间内,比如在[0.7,0.8]内,令 $y=0.7+z$,$z=y-0.7$,设 $f_2(z)=f_1(0.7+z)$,则 $f_2(z)$ 在[0,0.1]内必有相应的一个实根.同样,把[0,0.1]分成十个小区间[0,0.01],[0.01,0.02],…,[0.09,0.1],看 $f_2(z)$ 的相应实根在哪个区间内,比如在[0.04,0.05]内,于是 $\alpha\in[3.74,3.75]$.则 3.74 与 3.75 就是 $f(x)$ 的实根 α 精确到 0.01 的近似值,前者是不足近似值,后者是过剩近似值.如此下去,可达到所需要的精确度.这个方法是秦九韶于 1247 年在他所著《数书九章》一书中给出的,有不少书称为霍纳-鲁菲尼方法,实际上鲁菲尼(Ruffini,P.)在 1804 年,霍纳(Horner,W.G.)在 1819 年才分别提出这一方法.

霍纳-鲁菲尼方法(Horner-Ruffini method) 即“秦九韶方法”.

牛顿方法(Newton method) 求实系数多项式实根近似值的一种方法.设实系数多项式 $f(x)$ 无重根,且在区间 $[a,b]$ 内仅有一个实根 α,并假设 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 在此区间内都没有根.这样将会出现以下的四种情形之一:

	$f(a)$	$f(b)$	在$[a,b]$上			初始值
			$f'(x)$	$f''(x)$	曲线 $y=f(x)$	
1	−	+	+	+	单调上升且向上凹	b
2	−	+	+	−	单调上升且向下凹	a
3	+	−	−	+	单调下降且向上凹	a
4	+	−	−	−	单调下降且向下凹	b

例如,在情形 1,应取 b 作为 α 的初始近似值,在点 $B(b,f(b))$ 作 $y=f(x)$ 的切线,设其与 x 轴的交点为 b_1,则 b_1 比 b 更接近于 α.由于 $y=f(x)$ 在点 B 的切线方程为 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$,令 $y=0$,即得交点

$$b_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

根据这一公式可进一步求出 α 的近似值 b_2,b_3 等.此方法称为牛顿法.这种方法可以达到任意精确度.另外,这一方法不仅对多项式而且对任意满足条件的在区间 $[a,b]$ 上的实连续可微函数均适用.牛顿(Newton,I.)在他的著作《流数术》中提出这个代数方程数值求根法则.他还提出一种求实系数多项式方程的实根上限的方法(参见“实根的界限”).

线性插值法(linear interpolation) 求实系数多项式实根近似值的一种方法.设实系数多项式 $f(x)$ 无重根,且在 $[a,b]$ 内仅有一个实根 α,并假设 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 在此区间内都没有根.这样将会出现以下四种情形之一:

	$f(a)$	$f(b)$	在$[a,b]$上			初始值
			$f'(x)$	$f''(x)$	曲线 $y=f(x)$	
1	−	+	+	+	单调上升且向上凹	a
2	−	+	+	−	单调上升且向下凹	b
3	+	−	−	+	单调下降且向上凹	b
4	+	−	−	−	单调下降且向下凹	a

例如,在情形 1,应取 a 作为 α 的初始近似值.过曲线 $y=f(x)$ 上点 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 作直线(见图),设其与 x 轴的交点为 a_1,则 a_1 比 a 更接近于 α.由于过点 A 与 B 的直线方程是

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a},$$

令 $y=0$,得

$$a_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

根据这一公式可进一步求出 α 的近似值 a_2,a_3 等.此方法称为线性插值法,该方法最早见于《九章算术》.这一种方法可达到任意精确度,不仅对多项式而且对任意满足条件的在区间 $[a,b]$ 上的实连续函数均适用.

罗巴切夫斯基方法(Lobachevski method) 求多项式复根近似值的一种方法.设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),$$

则

$$g(x)=x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_n=\prod_{i=1}^{n}(x+x_i),$$

且

$$f(x)g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x^2-x_i^2).$$

于是 $$h(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i^2)$$

是以 $f(x)$ 的根的平方 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2$ 为根的 n 次多项式. 同样可求出以 $x_1^4,x_2^4,\cdots,x_n^4$ 为根的 n 次多项式等. 可用以下特殊情况来说明罗巴切夫斯基方法的基本思想. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是实数, 且 $|x_1|>|x_2|>\cdots>|x_n|$, 又 s 是一个充分大的正整数, 而

$$K(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i^s),$$

从而 $-b_1=x_1^s+x_2^s+\cdots+x_n^s$, $b_2=x_1^sx_2^s+x_2^sx_3^s+\cdots+x_{n-1}^sx_n^s$, $\cdots$, $(-1)^nb_n=x_1^sx_2^s\cdots x_n^s$. 于是当 s 充分大时, $x_1^s\approx-b_1$, $x_1^sx_2^s\approx b_2$, $\cdots$, $x_1^sx_2^s\cdots x_n^s=(-1)^nb_n$. 因此,

$$x_1\approx\sqrt[s]{-b_1},x_2\approx\sqrt[s]{-\frac{b_2}{b_1}},\cdots,x_n\approx\sqrt[s]{-\frac{b_n}{b_{n-1}}}.$$

罗巴切夫斯基(Лобачевский, Н. И.)在 1834 年所著《代数》一书中提出这一方法, 此法也被格雷费(Gräffe, K. H.)在 1837 年独立提出, 因此, 这种方法也称为罗巴切夫斯基-格雷费方法.

罗巴切夫斯基-格雷费方法(Lobachevski-Gräffe method)　即“罗巴切夫斯基方法”.

本原多项式(primitive polynomial)　一类重要的整系数多项式. 设 $f(x)$ 是有理系数多项式, 令 c 表示其系数的公分母, 则 $cf(x)$ 是一个整系数多项式, 且 $f(x)$ 与 $cf(x)$ 有相同的可约性. 因此, 有理系数多项式在有理数域内的可约性问题, 可以化为整系数多项式的可约性问题. 如果非零的整系数多项式 $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$ 的系数是互素的, 即 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 的最大公因数等于 1, 则 $g(x)$ 称为本原多项式. 任意一个有理系数多项式都可以惟一地表示为一个既约分数与一个本原多项式的乘积.

高斯引理(Gauss lemma)　多项式理论的主要命题之一. 即任意两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式. 由高斯引理可知, 任一非零的整系数多项式如果能够分解为两个次数较低的有理系数多项式的乘积, 则它一定能够分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积. 高斯引理在研究有理系数多项式的因式分解与有理根中起着重要的作用. 高斯(Gauss, C. F.)引入了本原多项式的概念, 并且给出了这个引理.

整系数多项式有理根的确定(determination of rational roots of a polynomial with integral coefficients)　求整系数多项式有理根的一种方法. 整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的有理根可依据下面的方法求得: 若既约分数 r/s 是 $f(x)$ 的有理根, 则 s 整除 a_n, r 整除 a_0. 例如 $f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$ 的首项系数 3 的因数有 $\pm1,\pm3$; 常数项 -2 的因数有 $\pm1,\pm2$. 于是 $f(x)$ 的有理根只可能是:

$$\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}.$$

用综合除法或其他方法逐个地检验可知, $f(x)$ 的有理根为 -2 与 $1/3$. 笛卡儿(Descartes, R.)、牛顿(Newton, I.)建立和应用了这一方法, 因此亦称牛顿试除法.

牛顿试除法(Newton trying division)　即“整系数多项式有理根的确定.”

艾森斯坦判别法(Eisenstein criterion)　判别整系数多项式在有理数域上不可约的方法. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是整系数多项式. 如果存在素数 p, 满足:

1. p 不能整除首项系数 a_0.
2. p 整除 $f(x)$ 的其余各项系数(包括常数项).
3. p^2 不能整除常数项 a_n,

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

据此可以判断多项式 x^n+2 不可约. 因此, 有理数域上存在任意次数的不可约多项式. 这个方法只提出有理数域上多项式不可约性的充分条件, 而不是必要条件. 这个方法由艾森斯坦(Eisenstein, F. G. M.)提出.

整系数多项式的克罗内克方法(Kronecker method about polynomial with integral coefficient)　判别整系数多项式在有理数域上是否可约且在可约时作因式分解的一般方法. 这个方法的具体步骤如下: 设 $f(x)$ 是一个整系数 m 次多项式.

1. 任取 $m+1$ 个互异的整数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$(取法完全任意), 并算出 $f(a_0),f(a_1),\cdots,f(a_m)$.
2. 求出每个 $f(a_i)$ 的一切因数 b_i, 并对每个因数组合 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 利用插值公式求出满足 $g(a_i)=b_i$ $(i=0,1,\cdots,m)$ 的一切 $g(x)$.
3. 用求出的一切 $g(x)$ 去试除 $f(x)$, 若都不能整除, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约, 否则可对 $f(x)$ 的因式再应用这一方法.

这样进行有限步骤后, 即可将 $f(x)$ 分解成有理数域上不可约多项式的乘积. 克罗内克(Kronecker, L.)提出的这个方法虽然在实用上相当麻烦, 但却有理论价值.

分圆多项式(cyclotomic polynomial)　见本卷《初等数论》同名条.

方程的变形(transform of an equation)　研究方程根性质的一种方法. 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 次方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (1)$$

$(a_0\neq 0)$的 n 个根.为了研究方程(1)的根的性质,常对它们进行某种变换,把它们变成另外的 n 个数 $d_1,d_2,\cdots,d_n$,使其成为一个 n 次方程

$$g(y)=b_0y^n+b_1y^{n-1}+\cdots+b_{n-1}y+b_n=0 \quad (2)$$

$(b_0\neq 0)$的 n 个根.如果 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 可经过某种变换变回到 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,那么从 $g(y)=0$ 的根的一些性质,就能推出 $f(x)=0$ 的根的某些性质.则称方程(2)是方程(1)的变形.设一元 n 次方程 $f(x)=a_0\cdot x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0\ (a_0\neq 0)$的 n 个根为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,又 c 为一个非零的常数,则以 $cc_1,cc_2,\cdots,cc_n$ 为根的方程是 $f(c^{-1}x)=0$ 或 $a_0x^n+ca_1x^{n-1}+\cdots+c^{n-1}a_{n-1}x+c^na_n=0$.特别取 $c=-1$,根为 $-c_1,-c_2,\cdots,-c_n$ 的方程是 $f(-x)=0$ 或 $a_0x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}x+(-1)^na_n=0$;根为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 中的非零根之倒数的方程是 $x^nf(x^{-1})=0$ 或 $a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$;根为 $c_1-b,c_2-b,\cdots,c_n-b$ 的方程是$f(x+b)=0$.

多元多项式(polynomial of several variables) 一元多项式的推广.它是多项式理论研究的重要对象.设 P 是一个数域,$a\in P$,形如 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的表达式,称为 P 上的一个 n 元单项式,式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个文字,$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非负整数.a 称为该单项式的系数,$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$称为其指数组,$k_1+k_2+\cdots+k_n$ 称为其次数.数域 P 上有限个 n 元单项式的和

$$\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

称为 P 上的一个 n 元多项式,亦称多元多项式.n 元多项式常用 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n),g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$等来表示.$n$ 元多项式中的每一个单项式,称为该多项式的项.指数组相同的两项称为同类项.两个 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,如果除去系数为 0 的项外有完全相同的项,则称它们为相等的,记为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.$n$ 元多项式的所有系数不为零的项中,最大的次数称为该 n 元多项式的次数.次数为零的 n 元多项式就是数域 P 中的非零常数;系数全为零的 n 元多项式称为零多项式,仍用 0 表示,它是多元多项式中惟一不定义次数的多项式.

多元多项式的运算(operation of polynomials of several variables) 一元多项式加法与乘法运算概念的推广.数域 P 上的两个 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的和是指将这两个多项式中对应的同类项的系数相加得到的 n 元多项式,记为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或简记为 $f+g$.设 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 与 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 是数域 P 上的两个 n 元单项式,n 元单项式 $abx_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2}\cdots x_n^{k_n+l_n}$ 称为它们的乘积.设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的两个 n 元多项式,把 f 的每一项分别与 g 的每一项相乘,再把这些乘积相加(合并同类项)得到一个 n 元多项式,称为 f 与 g 的乘积,记为 fg.n 元多项式的运算满足交换律、结合律与分配律.

数域 P 上的 n 个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式的全体构成的集合,连同所定义的加法与乘法构成一个环,称为 P 上的 n 个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式环,简称 P 上的 n 元多项式环,记为

$$P[x_1,x_2,\cdots,x_n].$$

多元多项式环(polynomial ring of several variables) 见“多元多项式的运算”.

多项式的字典排列法(lexicographic order of a polynomial) 确定多元多项式各项次序的一种方法.这种排列法的名称来源于拼音文字的字典排序.其具体排法是先确定元的顺序,然后依元的顺序对各元进行降幂排列.设 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 与 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 是数域 P 上多元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的两个不同的项(这时对于单项式中不出现的元理解为这个单项式含这个元的零次幂).它们的指数组$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$与$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$中,如果 $k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_{i-1}=l_{i-1}$,而 $k_i>l_i$,则说以$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$为指数组的项先于以$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$为指数组的项.由此可以将多元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的各项按先后次序排列.这种排列方法称为字典排列法.当 $n=1$ 时,字典排列法就是一元多项式的降幂排列法.

多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$按字典排列法排定后,第一个系数不为零的单项式,称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的首项.一个多元多项式的首项不一定是它的最高次项.关于首项有以下基本事实:多元多项式乘积的首项等于各因子首项的乘积.多元多项式的字典排列法及由此所确定的首项,在多元多项式的理论中,特别在对称多项式基本定理的证明和具体化法中,起着重要的作用.

多元多项式按一个文字的降幂式(power-descending form of a polynomial of several variables according to one letter) 多元多项式的一种排列方法.设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的 n 元多项式,则

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=\alpha_{i0}x_i^{n_i}+\alpha_{i1}x_i^{n_i-1}+\cdots+\alpha_{in_i} \quad (1)$$

称为多项式 f 按文字 x_i 的降幂排列法,其中,$\alpha_{ij}(j=0,1,\cdots,n_i)$是 P 上的 $n-1$ 个文字$(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$的多项式(参见本卷《初等代数》中的

“降幂式”). n 元多项式的 $n-1$ 元因式有以下性质:

1. $g(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$ 是 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的因式的充分必要条件是 g 为(1)式中诸 α_{ij}的因式.

2. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的 n 元多项式,$h(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$是 P 上的$n-1$ 元不可约多项式. 若 h 是 fg 的因式,则 h 是 f 或者 g 的因式.

3. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的 n 元多项式,$h(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$是 P 上的$n-1$ 元多项式. 若 h 是 fg 的因式,且 h 与 g 互素,则 h 是 f 的因式.

齐次多项式(homogeneous polynomial) 一种特殊的多元多项式. 若数域 P 上的 n 元多项式各项的次数都等于 m,则称该多项式为 n 元 m 次齐次多项式,简称 m 次齐式,亦称 n 个变量的 m 次型. 一次型亦称线性型. 两个 n 元齐次多项式的乘积仍是齐次多项式,且次数就等于这两个齐次多项式次数之和. 数域 P 上任一个 n 元多项式都可以惟一地表示为 P 上齐次多项式之和.

多元多项式的整除性(exact divisibility of the polynomial of several variables) 整除性概念的推广. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的两个 n 元多项式,若存在 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$使 $f=gh$,则称 g 整除 f,亦称 f 能被 g 整除,记为 $g|f$;否则称 g 不整除 f,记为 $g\nmid f$. 若 n 元多项式$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$整除 n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则称 g 是 f 的一个因式,f 是 g 的一个倍式. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上次数大于零的多项式,若存在 P 上的次数大于零的多项式 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使 $f=gh$,则称 f 在数域 P 上可约;否则称 f 在数域 P 上不可约.

多元不可约多项式(irreducible polynomial of several variables) 见“多元多项式的整除性”.

多元多项式的最大公因式(greatest common factor of polynomials of several variables) 一元多项式最大公因式概念的推广. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $d(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的 n 元多项式,若$d|f,d|g$,则 d 称为 f 与 g 的公因式. 又若对 f,g 在 P 上的任意公因式 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,都有 $h|d$,则 d 称为 f,g 的最大公因式. 零次多项式总是任意两个多项式的公因式. 没有次数大于零的公因式的两个多项式 f,g 称为互素的,亦称互质的. 设$f(x,y)=\alpha_0(y)x^m+\alpha_1(y)x^{m-1}+\cdots+\alpha_m(y)$是数域 P 上的二元多项式,其中 $\alpha_i(y)$是 P 上 y 的多项式,$i=0,1,\cdots,m$. 若 $\alpha_0(y),\alpha_1(y),\cdots,\alpha_m(y)$互素,则称$f(x,y)$是关于 y 的本原多项式. 设$f_1(x,y)$,$f_2(x,y),\cdots,f_n(x,y)$是数域 P 上的二元多项式,$d(x,y)$是本原多项式. 如果 d 是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的公因式,且 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的任意本原多项式的公因式整除 d,则 d 称为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的本原最大公因式. 对行矩阵$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$施行列的初等变换化成与它有相同本原公因式的行矩阵$(0,\cdots,0,h,0,\cdots,0)$. 将 $h(x,y)$表示为 x 的多项式,求出其所有系数的最大公因式$\varphi(y)$. 设 $h(x,y)=\varphi(y)d(x,y)$,则 $d(x,y)$就是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的本原最大公因式. 将 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 表示为 x 的多项式,设其所有系数的最大公因式为 $\delta(y)$,则 $\delta(y)d(x,y)$即是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的最大公因式. 仿照上面的方法,可以从两个文字推广到任意多个文字的多项式. 因此,任意个多元多项式都有最大公因式.

互素多元多项式(relatively prime polynomials of several variables) 见“多元多项式的最大公因式”.

互质多元多项式(prime to each other polynomials of several variables) 见“多元多项式的最大公因式”.

本原最大公因式(primitive greatest common factor) 见“多元多项式的最大公因式”.

多元多项式因式分解的惟一性定理(unique factorization theorem of the polynomials of several variables) 因式分解的一个重要性质. 数域 P 上没有非常数的因式的 n 次多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为数域 P 上的不可约多项式,亦称数域 P 上的质式. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的 n 元多项式,且 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 P 上不可约. 若 $p|fg$,则 p 至少整除 f 和 g 中的一个. 因此有因式分解惟一性定理:数域 P 上任意非常数的多元多项式可以惟一地分解为 P 上不可约多项式的乘积.

多元多项式的艾森斯坦判别法(Eisenstein criterion of a polynomial of several variables) 判别多元多项式不可约的一种方法. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\alpha_0(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})x_n^m+\alpha_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})x_n^{m-1}+\cdots+\alpha_m(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 是数域 P 上的一个 n 元多项式. 如果有 P 上的一个不可约多项式 $p(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$满足:

1. p 不能整除首项系数 α_0.

2. p 整除 f 的其余各项系数(包括常数项).

3. p^2 不能整除常数项 α_m,

则 f 在数域 P 上不可约. 例如 $x_1+x_2^m$ 是任意数域 P 上的不可约多项式. 因此,数域 P 上有任意次数的不可约多元多项式.

行列式的不可约性(irreducibility of a determi-

nant) 代数学术语.指行列式是不可约的多元多项式.若把 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

看成 n^2 个文字的多项式,则此多项式是任意数域上的不可约的 n^2 元多项式.若把 n 阶对称行列式

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

看成 $n(n+1)/2$ 个文字的多项式,则此多项式是任意数域上的不可约多项式.

对称多项式(symmetric polynomial) 一种特殊的多元多项式.数域 P 上满足下列条件的多元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$:对 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意排列 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$,都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})$. $P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中任意两个对称多项式的和、差、积仍为 $P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中的对称多项式.因此,$P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中全体对称多项式构成环 $P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$的一个子环.n 个对称多项式

$$\begin{aligned} &\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ &\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sigma_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n\\ &\qquad+\cdots+x_2x_3\cdots x_n,\\ &\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

称为初等对称多项式,亦称基本对称多项式.$P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中任意一个对称多项式都可以惟一地表示为系数在 P 中的关于 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 的多项式.此结论称为对称多项式基本定理.

初等对称多项式(elementary symmetric polynomial) 见"对称多项式".

基本对称多项式(fundamental symmetric polynomial) 见"对称多项式".

对称多项式基本定理(fundamental theorem of a symmetric polynomial) 见"对称多项式".

牛顿公式(Newton formula) 多项式的根与某些对称多项式之间的一种关系式.设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 次首一多项式 $f(x)$在复数域内的所有根,$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为关于这 n 个根的初等对称多项式.令 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$ $(k=0,1,2,\cdots)$,则诸 s_k 与 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 之间的关系式

$$\begin{aligned} &s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}-\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1\\ &\quad+(-1)^k\sigma_ks_0=0\ (1\leqslant k\leqslant n),\\ &s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0\ (k>n) \end{aligned}$$

称为牛顿公式.这个公式载于牛顿(Newton,I.)1707年出版的著作《广义算术》里.应用牛顿公式可将 s_k 逐一地用初等对称多项式 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 表出.例如,当 $k=2\leqslant n$ 时,$s_2-\sigma_1s_1+2\sigma_2=0$,则 $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$;当 $k=3\leqslant n$ 时,$s_3-\sigma_1s_2+\sigma_2s_1-3\sigma_3=0$,则 $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.数域 P 上关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意对称多项式,都可以表示成系数属于 P 的关于 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 的多项式.

交错多项式(alternating polynomial) 对称多项式概念的推广.设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的 n 元多项式.若对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任意排列 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}$,所有 $f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})$只能是两个不同的多项式,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的交错多项式.当这两个不同的式子只能是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$时,称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为狭义交错多项式.例如,$f(x_1,x_2,x_3)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)+2x_1x_2x_3$ 为关于 x_1,x_2,x_3 的交错多项式.n 元多项式$(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)$为关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的狭义交错多项式.这个特殊的狭义交错多项式称为最简交错多项式.一个狭义交错多项式与一个对称多项式的和与积是交错多项式.

狭义交错多项式(alternating polynomial in the narrow sense) 见"交错多项式".

最简交错多项式(simplest alternating polynomial) 见"交错多项式".

希尔伯特不可约性定理(Hilbert theorem of irreducibility) 判别多元多项式不可约性的一种方法.设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是数域 P 上的 n 元多项式,若 f 在数域 P 上不可约,则对于任意的 m $(0<m<n)$,必存在 $\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\in P$,使$f(x_1,x_2,\cdots,x_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$为数域 P 上的 m 元不可约多项式.

有理分式域(field of rational fractions) 包含多元多项式环的最小域.设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq0$ 是数域 P 上的两个 n 元多项式,

$$\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{g(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

称为 P 上的有理分式,亦称有理函数.与一元多项式的有理分式一样,可以同样地定义多元多项式的有理分式的加法与乘法,而且也满足交换律、结合律与分配律.数域 P 上任意两个有理分式的和、差、积、商(除式不为零)仍为 P 上的有理分式.因此,P 上的全体有理分式的集合构成一个域,称为数域 P 上的有理分式域,记为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

代数方程组(system of algebraic equations) 由多个 n 元多项式方程所构成的方程组.由数域 P 上 m 个 n 元多项式 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$

组成的方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

称为数域 P 上的代数方程组. 若 $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,\cdots, x_n=\alpha_n$ 满足方程组中(1)的每一个方程,则称它们为方程组(1)的一个解. 当方程组(1)中每个方程的次数$\leqslant 1$ 时,则方程组(1)就是通常的线性方程组;当方程组(1)中 $m=n=1$ 时,方程组(1)就是通常的一元 n 次方程. 因此,代数方程组可以看成是线性方程组与一元 n 次方程的推广和发展. 研究代数方程组的解及其性质属于代数几何.

在古代巴比伦和 1300 年前后朱世杰所著《四元玉鉴》中,都曾讨论过二元、三元和四元的高次方程组. 但较系统地研究却迟至 16 世纪,正式讨论已到 18 世纪,主要由研究高次代数曲线 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ 的交点数而引起的. 贝祖(Bézout,É.)于 1779 年在其所著《代数方程的一般理论》中给出用消元法求解代数方程组的方法.

二元高次方程组(system of binary equations of higher degree)　一种代数方程组. 若代数方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

中的 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 是复系数二元多项式,其中至少有一个为高次的,则称(1)为二元高次方程组. 解方程组(1)的一般方法是把 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 看成 x 的多项式,设

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \cdots \\ &\quad + a_{n-1}(y)x + a_n(y), \\ g(x,y) &= b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \cdots \\ &\quad + b_{m-1}(y)x + b_m(y), \end{aligned}$$

式中 $a_i(y)$, $b_j(y)$ 是 y 的复系数多项式, $i=0,1,\cdots,n$; $j=0,1,\cdots,m$. 设结式 $R_x(f,g)$ 为

$$\begin{vmatrix} a_0(y) & a_1(y) & a_2(y) & \cdots & a_n(y) & & & \\ & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & a_{n-1}(y) & a_n(y) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_0(y) & a_1(y) & \cdots & a_n(y) \\ b_0(y) & b_1(y) & b_2(y) & \cdots & b_m(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_{m-1}(y) & b_m(y) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_m(y) \end{vmatrix},$$

则 $m+n$ 阶行列式 $R_x(f,g)$ 是 y 的复系数多项式. 若 (x_0,y_0) 是方程组(1)的复数解,则 y_0 是 $R_x(f,g)$ 的复根;反之,若 y_0 是 $R_x(f,g)$ 的复根,则 $a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$,或者存在复数 x_0,使 (x_0,y_0) 是方程组(1)的复数解(参见"结式"). 因此,为了解方程组(1),可先求高次方程 $R_x(f,g)=0$ 的全部根,再把 $R_x(f,g)=0$ 的每个根代入方程组(1),求 x 的值. 这样就得到方程组(1)的全部解. 对于多个未知数的高次方程组,可用与上述类似方法求解.

相当的多项式(corresponding polynomial)　代数学术语. 指由已知的多元多项式确定的次数相同的齐次多项式. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 是数域 P 上的非齐次多项式,若以新变数 x_n 的幂乘 f 的各项,使其变成为一个与 f 同次的齐次多项式 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则 g 称为 f 的相当多项式,亦称 f 与 g 是互为相当的多项式. 例如,多项式 $2x^3+3x^2y-5xz^2-yz+2z^2+x-3y+9$ 与齐次多项式 $2x^3+3x^2y-5xz^2-yzt+2z^2t+xt^2-3yt^2-9t^3$ 互为相当的多项式. 数域 P 上的两个相当多项式中的一个在 P 上可约,则另一个也在 P 上可约,且它们所有的因式亦是相当的. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是数域 P 上两个非齐次多项式, F 与 G 分别是 f 与 g 相当的齐次多项式,则 F 与 G 互素的充分必要条件是 f 与 g 互素.

变数对的对称多项式(symmetric polynomial of variable pairs)　n 元对称多项式的一种推广. 设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 是 n 对变数, $f(x_1,y_1;x_2,y_2;\cdots;x_n,y_n)$ 是数域 P 上的一个多元多项式. 若对 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$,都有 $f(x_1,y_1;x_2,y_2;\cdots;x_n,y_n)=f(x_{i_1},y_{i_1};x_{i_2},y_{i_2};\cdots;x_{i_n},y_{i_n})$,则称 f 为关于变数对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 的对称多项式. 令

$$S_{kl}=\sum x_i^k y_i^l = x_1^k y_1^l + x_2^k y_2^l + \cdots + x_n^k y_n^l$$

$(k=0,1,\cdots;l=0,1,\cdots)$,则数域 P 上任一个变数对的对称多项式 $f(x_1,y_1;x_2,y_2;\cdots;x_n,y_n)$ 都可以表为 P 上的诸 S_{kl} 的多项式.

多项式的 Σ 函数(Σ functions of a polynomial)　一种多项式函数. 即把多元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一项对应改变其下标所得到的一切相似项与该项之和的函数. 例如

$$\sum x_1^\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha;$$

$$\begin{aligned} \sum x_1^\alpha x_2^\beta &= x_1^\alpha x_2^\beta + x_1^\alpha x_3^\beta + \cdots + x_1^\alpha x_n^\beta + x_2^\alpha x_1^\beta \\ &\quad + x_2^\alpha x_3^\beta + \cdots + x_2^\alpha x_n^\beta + \cdots \\ &\quad + x_n^\alpha x_1^\beta + x_n^\alpha x_2^\beta + \cdots + x_n^\alpha x_{n-1}^\beta, \alpha\neq\beta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum x_1^\alpha x_2^\alpha &= x_1^\alpha x_2^\alpha + x_1^\alpha x_3^\alpha + \cdots + x_1^\alpha x_n^\alpha \\ &\quad + x_2^\alpha x_3^\alpha + \cdots + x_2^\alpha x_n^\alpha + \cdots \\ &\quad + x_{n-1}^\alpha x_n^\alpha. \end{aligned}$$

数域 P 上任意 n 元对称多项式可表为 P 上若干个 $\sum$ 函数的线性组合.

变数对的初等对称多项式(elementary symmetric polynomial of variable pairs)　一种特殊的变数对的对称多项式. 设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,$

y_n)是 n 个变数对,则其任意的$\sum$函数可表为

$$\sum x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}x_2^{\alpha_2}y_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\alpha_n}y_n^{\beta_n}.$$

若 $\alpha_i+\beta_i=0$ 或 1 ($i=1,2,\cdots,n$),且诸 α_i 与 β_j 不全为零,则这些$\sum$函数称为变数对(x_1,y_1),(x_2,y_2) $\cdots$,(x_n,y_n)的初等对称函数.令

$$p_{10}=\sum x_1,$$
$$p_{01}=\sum y_1;$$
$$p_{20}=\sum x_1x_2,$$
$$p_{11}=\sum x_1y_2,$$
$$p_{02}=\sum y_1y_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{n0}=x_1x_2\cdots x_n,\quad \cdots;$$
$$p_{i,n-i}=\sum x_1\cdots x_iy_{i+1}\cdots y_n,\quad \cdots;$$
$$p_{0n}=y_1y_2\cdots y_n,$$

则数域 P 上变数对(x_1,y_1),(x_2,y_2),$\cdots$,(x_n,y_n)的任意对称多项式 $f(x_1,y_1;x_2,y_2;\cdots;x_n,y_n)$都可以表为 P 上的诸 p_{ij}的多项式.

变数对的初等对称函数(elementary symmetric function of variable pairs) 见"变数对的初等对称多项式".

行 列 式

奇排列(odd permutation) 一种全排列.在 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的全排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,若一个较大的数码排在一个较小的数码的前面,则称它们构成反序,亦称逆序.这个排列的所有反序的总和,漷为这个排列的反序数,记为$\tau(j_1\ j_2\cdots j_n)$或$\pi(j_1j_2\cdots j_n)$.例如,在四个数码的排列 3142 中,3 与 1,3 与 2 以及 4 与 2 都构成反序.因此$\tau(3142)=3$.反序数为奇数的排列称为奇排列,反序数为偶数的排列称为偶排列.在n ($n>1$)个数码的全体 $n!$ 个排列中,奇、偶排列的个数相等,即都为 $n!/2$ 个.这决定了在 n 阶行列式的展开式的 $n!$ 项中正负项各半.

反序数(inverse order number) 见"奇排列".

偶排列(even permutation) 见"奇排列".

对换(transposition) 一种特殊置换的表示方法.在一个 n 元排列中,如果交换某两个数码的位置,而其余的数码不动,则称对这个排列施行了一次对换.如果交换的两个数码是 i 与 j,则把这个对换记为(i,j).对换改变排列的奇偶性.由这个事实可以得到,在 n 元的全体 $n!$ 个排列中,奇、偶排列各半.

行列式(determinant) 代数学的重要概念之一.数域 P 中 n^2 个数 a_{ij}($i,j=1,2,\cdots,n$)排成 n 行与 n 列(横的称为行,纵的称为列)的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示所有取自不同行与不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的代数和,且项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$前面的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的反序数,此代数和称为 n 阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

式中 $\sum$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 $n!$ 个排列求和.行列式还有归纳定义法和公理化定义法.

行列式起源于解线性方程组,它是重要的数学工具之一,广泛应用于数学的各个分支以及物理、化学和科学技术中.1683 年,关孝和在其所著《解伏题之法》一书中,对行列式概念和展开已有清楚的叙述.1693 年,莱布尼茨(Leibniz,G. W.)也曾使用过行列式.首先将行列式脱离开线性方程组,而把行列式当做一个独立的理论来研究的是范德蒙德(Vandermonde,A.-T.).他是行列式理论的奠基人之一.柯西(Cauchy,A.-L.)也有重要贡献,行列式这一名称是他于 1812 年首先使用的,他还叙述了行列式的乘法.在行列式理论的形成和发展中,做出贡献的数学家还有西尔维斯特(Sylvester,J. J.)和凯莱(Cayley,A.)等人.1841 年,雅可比(Jacobi,C. G. J.)发表论文《论行列式的形成与性质》,标志着行列式系统理论的形成.

行列式的基本性质(basic properties of determinants) 证明行列式恒等式与简化行列式计算的理论依据.行列式的基本性质是:

1.行列互换,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若等式左边的行列式记为 $D=|a_{ij}|$,则等式右边的行列式称为 D 的转置行列式,记为 D'或 D^T.显然 D 与 D'互为转置行列式.性质 1 说明行与列在行列式中的地位是对等的.因此,凡是行列式中有关行的性质,行列式的列也都具有.

2.用数 k 乘行列式中某一行(列)的每个元素所得行列式的值是原行列式值的 k 倍.若行列式中有

一行(列)的元素全为零,则行列式的值为零.

3. 交换行列式某两行(列)的位置,行列式的值改变符号. 因此,若行列式有两行(列)的元素相同,则该行列式的值为零;若行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则此行列式的值为零.

4. 若 n 阶行列式 D 中第 i 行(j 列)的元素为两组 n 个数依次对应之和,则 $D=M+N$,式中 n 阶行列式 M 和 N 的第 i 行(j 列)的元素分别为前后各一组的 n 个数,而其余各行(列)的元素与 D 的相应元素相同.

5. 把行列式任一行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变.

转置行列式(transposed determinant)　见"行列式的基本性质".

三角形行列式(triangular determinant)　一种特殊的行列式. 数域 P 上形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式分别称为上三角形行列式和下三角形行列式,亦称上三角行列式和下三角行列式,统称三角形行列式. 每个行列式都可以只运用行或者列的性质化为一个与其相等的上(下)三角形行列式. 上(或下)三角形行列式都等于它们主对角线上元素的乘积. 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为对角形行列式,亦称对角行列式. 它既是一个上三角形行列式,又是一个下三角形行列式.

对角形行列式(diagonal determinant)　见"三角形行列式".

行列式的子式(subdeterminant of determinant)　一种行列式. 指由原行列式按一定规则得出的降阶行列式. 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中,任意选定 k 行与 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$,位于这些行与列交点上的 k^2 个元素按照原来相对位置构成的一个 k 阶行列式,称为 D 的一个 k 阶子式. 若所取的 k 行与 k 列依次为第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行与第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列,则此子式记为

$$D\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix},$$

即

$$D\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix},$$

或记为 $D(i_1i_2\cdots i_k|j_1j_2\cdots j_k)$.

代数余子式(algebraic complementary minor)　一种行列式. 指由子式按一定规则确定的带符号的子式. 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中,任意选定 k 行与 k 列 $(1\leqslant k\leqslant n)$,位于这些行和列交点处的 k^2 个元素构成 D 的一个 k 阶子式记为 M;D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按原来的位置构成的一个 $n-k$ 阶子式记为 N,称其为 M 的余子式. 设 M 在 D 中所在的行标和列标分别是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$$

称为 M 的代数余子式. 特别地,D 的元素 a_{ij} 的代数余子式记为 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

行列式依行(列)展开(expansion of a determinant by a row (or a column))　计算行列式的一种方法. 设 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 为 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的任意一行中的元素,而 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 分别为它们在 D 中的代数余子式,则 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$ 称为行列式 D 的依行展开. 如果行列式 D 的第 i 行各元素与第 j 行各元素的代数余子式对应相乘后再相加,则当 $i\neq j$ 时,其和为零. 因此有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D\ (i=j), \\ 0\ \ (i\neq j). \end{cases}$$

对于行列式的列,有类似的等式

$$a_{1s}A_{1t}+a_{2s}A_{2t}+\cdots+a_{ns}A_{nt}=\begin{cases} D\ (s=t), \\ 0\ \ (s\neq t). \end{cases}$$

行列式依行(列)展开不仅对行列式计算有重要作用,且在行列式理论中也有重要的应用.

萨鲁斯法则(Sarrus rule)　展开二阶和三阶行列式的方法. 将二阶和三阶行列式按下图所示进行计算:实线上的元素的乘积带有正号,虚线上的元素的乘积带有负号,并将这些乘积相加,得到二阶与三阶行列式的展开式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

这种计算方法称为萨鲁斯法则. 在 n 阶行列式

$D=|a_{ij}|$中，从左上角到右下角称为 D 的主对角线，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$称为主对角线上的元素，简称主对角元；从右上角到左下角称为 D 的次对角线，而元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$称为次对角线上的元素，简称次对角元. 因而，萨鲁斯法则亦称对角线法则.

主对角元(element of main diagonal) 见“萨鲁斯法则”.

次对角元(element of minor diagonal) 见“萨鲁斯法则”.

对角线法则(digonal method) 即“萨鲁斯法则”.

拉普拉斯定理(Laplace theorem) 计算降阶行列式的一种方法. 该定理断言：在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$中，任意取定 k 行(列)，$1\leqslant k\leqslant n$，由这 k 行(列)的元素所构成的一切 k 阶子式与其代数余子式的乘积的和等于行列式 D 的值. 此展式称为拉普拉斯展式. 特别地，当 $k=1$ 时，

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\left(=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\right),$$

其中 A_{ij}是 a_{ij}的代数余子式，$i,j=1,2,\cdots,n$，就是行列式按行(列)展开. 因而拉普拉斯定理亦称按 k 行展开定理. 拉普拉斯定理事实上是柯西(Cauchy, A.-L.)于 1812 年首先证明的.

拉普拉斯展式(Laplace expansion) 见“拉普拉斯定理”.

行列式的相乘规则(rule for multiplication of two determinants) 行列式的一个重要性质. 设 $D_1=|a_{ij}|,D_2=|b_{ij}|$是数域 P 上的两个 n 阶行列式，则 D_1 与 D_2 的乘积 $D_1D_2=|c_{ij}|$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即乘积 D_1D_2 中的第 i 行、第 j 列的元素 c_{ij}为 D_1 的第 i 行元素与 D_2 的第 j 列对应元素乘积的和. 此相乘规则简称行乘列. 由于行列式与其转置行列式相等，因此 $D_1D_2=D_1D_2'=D_1'D_2=D_1'D_2'$，即行列式的相乘规则还有行乘行、列乘列和列乘行的方法.

范德蒙德行列式(Vandermonde determinant) 一种重要的行列式. 数域 P 上形如

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

的行列式称为范德蒙德行列式. 此行列式

$$D=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

因此 $D\neq 0$，当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互异.

带形行列式(band determinant) 一种特殊形状的行列式，即形如

$$D_n=\begin{vmatrix}a & b & & & \\ c & a & \ddots & & \\ & c & \ddots & b & \\ & & \ddots & a & b\\ & & & c & a\end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式称为带形行列式，其中主对角线上的元素全是 a，与主对角线平行的两条线上的元素分别全为 b 和 c，其余的元素全是零. 带形行列式

$$D_n=\begin{cases}(n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n & (a^2=4bc),\\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & (a^2\neq 4bc),\end{cases}$$

式中

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2},\quad \beta=\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$$

是二次方程 $x^2-ax+bc=0$ 的根.

循环行列式(cyclic determinant) 一种特殊的 n 阶行列式. n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0\end{vmatrix}$$

称为循环行列式. 若令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}\cdot x^{n-1}$，则 $D=f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$，式中

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

是全部 n 次单位根.

***b* 循环行列式**(b-cyclic determinant) 亦称 b 轮换行列式. 循环行列式的一种推广. 指 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}\\ ba_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2}\\ ba_{n-2} & ba_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ba_2 & ba_3 & ba_4 & \cdots & a_0 & a_1\\ ba_1 & ba_2 & ba_3 & \cdots & ba_{n-1} & a_0\end{vmatrix},$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},b$ 是 $n+1$ 个复数. 若将多项式 x^n-b 的 n 个复根记为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，则 $D_n=f(b_1)f(b_2)\cdots f(b_n)$. 当 $b=1$ 时，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 就是全部 n 次单位根，此时 D_n 即为循环行列式；当 $b=-1$ 时，称 D_n 为反循环行列式，亦称反轮换行列式.

***b* 轮换行列式**(b-cyclic determinant) 即“b 循环行列式”.

反循环行列式(anti-cyclic determinant) 即“b 循环行列式”.

对称行列式(symmetric determinant) 类似于

对称矩阵的一种特殊行列式.一个行列式,如果关于主对角线对称位置上的元均对应相等,则称为对称行列式.例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

斜对称行列式(skew-symmetric determinant) 类似于斜对称矩阵的一种特殊行列式.一个行列式,如果其主对角线上的元素全为零,而关于主对角线对称位置上的元素绝对值相等符号相反,则称为斜对称行列式.例如

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

交错行列式(alternate determinant) 即"斜对称行列式".

克莱姆法则(Cramer rule) 亦称克莱姆规则.利用行列式来解线性方程组的一种方法.如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则它有惟一解 $x_j = D_j/D$ $(j=1,2,\cdots,n)$,式中 D_j 是将 D 的第 j 列的元素用线性方程组的常数项 b_1, $b_2,\cdots,b_n$ 代替而得的行列式($j=1,2,\cdots,n$).上述解线性方程组的法则称为克莱姆法则.1750 年,克莱姆(Cramer,G.)在他所著的《线性代数分析导言》一书中给出了这个方法.

加边行列式(bordered determinant) 一种特殊行列式.即对一个 n 阶行列式添加 k 行和 k 列(k 为正整数),且每行(列)各含有 n 个元素,而添加行列的交叉处补零所得到的($n+k$)阶行列式.例如,行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & u_1 \\ c & d & u_2 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix}$$

与

$$\begin{vmatrix} a & b & u_1 & t_1 \\ c & d & u_2 & t_2 \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

都是二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

的加边行列式.

伴随行列式(adjoint determinant) 与原行列式密切相关的一个行列式.设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由 D 中元素 a_{ij}的代数余子式构成的行列式

$$D^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的伴随行列式.若 M 和 M^* 分别是行列式 D 及其伴随行列式 D^* 的相应的 m 阶子式,则 M^* 等于 D^{m-1} 与 M 的代数余子式的乘积.特别当 $m=n$ 时,$D^* = D^{n-1}$.

矩　　阵

矩阵(matrix) 代数学的重要概念之一.指由 mn 个数 a_{ij}($i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$)排成的 m 行(横的称为行)n 列(纵的称为列)的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

称其为一个 m 行 n 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵,常简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$,$(a_{ij})_{mn}$或(a_{ij});亦可记为$[a_{ij}]_{m\times n}$,$[a_{ij}]_{mn}$或$[a_{ij}]$;还可记为 $\| a_{ij} \|$.数 a_{ij}称为该矩阵的第 i 行第 j 列的元素,简称(i,j)元素.$n\times n$ 矩阵称为 n 阶矩阵,亦称 n 阶方阵.$1\times n$ 矩阵称为行矩阵或行向量;$m\times 1$ 矩阵称为列矩阵或列向量.矩阵一般用大写字母 A,B,C 等表示.当需指明矩阵 A 的行列数时,亦常记成 $A_{m\times n}$.如果矩阵 A 中的所有元素都属于数域 P,则称 A 为数域 P 上的矩阵.实数域上的矩阵称为实矩阵;复数域上的矩阵称为复矩阵.元素全为零的矩阵称为零矩阵,常记为 $0_{m\times n}$或 0.零矩阵在矩阵运算中与数"零"在数的运算中的地位相当.

《九章算术》中就有了类似于矩阵的概念,并利用相当于矩阵的初等变换的方法来解线性方程组.矩阵这个词是西尔维斯特(Sylvester,J. J.)于 1850

年首先使用的.在欧洲,由于有了行列式的成果做基础,1850年前后,矩阵理论得到迅速地发展.对此,凯莱(Cayley,A.)和西尔维斯特的贡献最大,特别是凯莱,他做了许多开创性的工作.例如,他介绍了矩阵的乘法、逆矩阵的性质和求法,转置矩阵以及特征方程和特征根等.1870年,若尔当(Jordan,M.E.C.)证明了任何复方阵都可以化为相似标准形,即现在所说的若尔当标准形.1878年,弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F.G.)证明了哈密顿-凯莱定理;还引入了矩阵的秩、正交矩阵和最小多项式的概念;他在λ矩阵的不变因子和初等因子等方面,也做了很多工作.矩阵不仅是代数学的一个主要研究对象,也是数学中其他分支,以及物理学、化学等科学技术中的重要工具,矩阵理论在科学技术的许多领域中有广泛的应用.

方阵(square matrix) 见"矩阵".

行矩阵(row matrix) 见"矩阵".

列矩阵(column matrix) 见"矩阵".

实矩阵(real matrix) 见"矩阵".

复矩阵(complex matrix) 见"矩阵".

零矩阵(null matrix) 见"矩阵".

矩阵的子式(subdeterminant of a matrix) 由矩阵按一定规则构造的行列式.在矩阵$A_{m\times n}$中任取k行和k列($1\leqslant k\leqslant \min(m,n)$),位于这些行列交点处的$k^2$个元素按原来相对位置所构成的$k$阶行列式,称为矩阵$A_{m\times n}$的一个$k$阶子式,记为

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

$$(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m;$$
$$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n).$$

当$i_1=j_1,i_2=j_2,\cdots,i_k=j_k$时,称为$k$阶主子式.在$n$阶矩阵$A$中,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\cdots,A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

称为A的n个顺序主子式.在n阶矩阵A的k阶子式

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\quad\left(1\leqslant \begin{matrix} i_1<i_2<\cdots<i_k \\ j_1<j_2<\cdots<j_k \end{matrix}\leqslant n\right)$$

中,如果差$i_1-j_1,i_2-j_2,\cdots,i_k-j_k$中,只有一个不等于零,则称为近主子式.

矩阵的主子式(principal minors of a matrix) 见"矩阵的子式".

矩阵的顺序主子式(sequential principal minors of a matrix) 见"矩阵的子式".

矩阵的近主子式(near principal minors of a matrix) 见"矩阵的子式".

矩阵的秩(rank of a matrix) 刻画矩阵的一个非负整数.矩阵A中不为零的诸子式的最大阶数称为A的秩.如果矩阵A的秩为k,则记为$r(A)=k$.规定零矩阵的秩为零.矩阵A的行向量组中极大线性无关向量组所含向量的个数,称为矩阵A的行秩;A的列向量组中极大线性无关向量组所含向量的个数称为A的列秩.数域P上的任何矩阵A的行秩与列秩相等,且都等于矩阵A的秩.$m\times n$矩阵A的秩$r(A)\leqslant\min(m,n)$.若$r(A)=n$,则矩阵A称为高矩阵;若$r(A)=m$,则矩阵A称为低矩阵.若A,B是P上的两个$m\times n$矩阵,则$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$.若$A$是$P$上的$m\times k$矩阵,$B$是$P$上的$k\times n$矩阵,则$r(AB)\leqslant\min(r(A),r(B))$.

矩阵的行秩(row rank of a matrix) 见"矩阵的秩".

矩阵的列秩(column rank of a matrix) 见"矩阵的秩".

弗罗贝尼乌斯不等式(Frobenius inequality) 亦称西尔维斯特不等式.一种特殊不等式.指矩阵乘积的秩与其因子的秩之间的重要关系式.设矩阵A和B是可乘的,而B和C是可乘的,则

$$r(ABC)\geqslant r(AB)+r(BC)-r(B).$$

在此不等式中,若A为$m\times n$矩阵,B为n阶单位矩阵,C为$n\times s$矩阵,则$r(AC)\geqslant r(A)+r(C)-n$.

西尔维斯特不等式(Sylvester inequality) 即"弗罗贝尼乌斯不等式".

矩阵的相等(equality of matrices) 矩阵的基本概念之一.数域P上两个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$,当其所有对应元素都相等,即$a_{ij}=b_{ij}$($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$)时,则称矩阵$A$与$B$相等,记为$A=B$.否则称为不相等,记为$A\neq B$.

矩阵的加法(addition of matrices) 矩阵的一种运算.设$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{m\times n}$是数域$P$上的两个矩阵,则矩阵$C=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$称为$A$与$B$的和,记为$C=A+B$.矩阵的加法具有以下的性质:

1.交换律 $A+B=B+A$.

2.结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3.$A_{mn}+0_{mn}=0_{mn}+A_{mn}=A_{mn}$,$0_{mn}$是零矩阵.

4.矩阵$(-a_{ij})_{mn}$称为矩阵$A=(a_{ij})_{mn}$的负矩阵,记为$-A$.显然,$A+(-A)=0_{mn}$.矩阵$A+(-B)$称为A与B的差,记为$A-B$.因此,

$$A-B=A+(-B).$$

负矩阵(negative matrix) 见"矩阵的加法".

矩阵的数乘(scalar multiplication of a matrix) 矩阵与数的一种运算.设$A=(a_{ij})$是数域P上的一个$m\times n$矩阵,k是P中的任意一个数,则P上的矩阵$(ka_{ij})_{mn}$称为数k与矩阵A的数乘矩阵,记为kA,

即 $kA=(ka_{ij})_{mn}$. 矩阵的数乘具有以下的性质：

1. $1\cdot A=A$.

2. $(kl)A=k(lA)$.

3. $(k+l)A=kA+lA$.

4. $k(A+B)=kA+kB$,

式中 $k,l,1$ 是数域 P 中的数.

矩阵的乘法(multiplication of matrices)　矩阵的一种运算. 设 $A=(a_{ij})_{sn}$, $B=(b_{jk})_{nm}$ 是数域 P 上的两个矩阵，则 P 上的 $s\times m$ 矩阵 $C=(c_{ik})$，式中

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\quad(i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,m),$$

称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$. 主对角线上的元素都是 1，而其他元素都是 0 的 n 阶矩阵称为单位矩阵，记为 E,I 或 E_n,I_n. 单位矩阵在矩阵的乘法中犹如数中的 1. 矩阵的乘法具有以下的性质：

1. 结合律　$(AB)C=A(BC)$.

2. 左分配律　$A(B+C)=AB+AC$.

3. 右分配律　$(B+C)A=BA+CA$.

4. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$, $k\in P$.

5. $E_sA_{sn}=A_{sn}E_n=A_{sn}$.

注意：

1. 若数域 P 上的 n 阶矩阵 $A\neq 0$, $B\neq 0$，可能有 $AB=0$ 或 $BA=0$，即 A,B 可能为真零因子. 矩阵的乘法不满足交换律，即若 AB,BA 都有意义，也可能有 $AB\neq BA$. 对于 n 阶矩阵 A，可规定它的方幂：

$$A^0=E_n,\quad A^1=A,\quad A^{k+1}=A^k\cdot A,$$

且有 $A^kA^l=A^{k+l}$, $(A^k)^l=A^{kl}$，式中 k,l 为非负整数. 对于 n 阶可逆矩阵 A，规定 $A^{-s}=(A^{-1})^s$. 于是 A^m 对任意整数 m 都有意义.

2. 若数域 P 上的 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $AB=BA$，则称 B 与 A 可换. 若矩阵 B,C 都与 A 可换，则 $BC,kB+lC$ 也与 A 可换，其中 $k,l\in P$. 因此，若 B 与 A 可换，则 B 与以矩阵 A 为元的多项式是可换的. 数量矩阵与所有的同阶矩阵可换；反之，若一个 n 阶矩阵与所有的 n 阶矩阵可换，则它必为一个数量矩阵. 一个 n 阶矩阵与所有满秩矩阵可换的充分必要条件为：它是一个数量矩阵.

单位矩阵(unit matrix)　见“矩阵的乘法”.

矩阵向量空间(vector space of matrices)　以矩阵为元素的线性空间. 数域 P 上全体 $m\times n$ 矩阵所构成的集合 P^{mn}，对矩阵的加法与数乘构成 P 上的一个 mn 维线性空间，称为矩阵向量空间. 特别地，数域 P 上全体 n 阶方阵的集合 P^{nn}，构成 P 上的一个 n^2 维向量空间. P^{nn} 对矩阵的加法与乘法构成一个环，称为 P 上的全阵环；P^{nn} 对矩阵的加法、乘法和数乘构成数域 P 上的一个 n^2 维代数，称为全矩阵代数.

全阵环(all matrix ring)　见“矩阵向量空间”.

全矩阵代数(all matrix algebra)　见“矩阵向量空间”.

矩阵单位(matrix unit)　一种特殊矩阵. 数域 P 上仅 (i,j) 元素是 1，而其余元素都是零的 $m\times n$ 矩阵

$$E_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

称为矩阵单位. 矩阵单位是线性无关的，且数域 P 上的任意 $m\times n$ 矩阵都可惟一地表为它们的线性组合. 因此，矩阵单位是矩阵向量空间 P^{mn} 的基. 当 $m=n$ 时，矩阵单位有关系式

$$E_{ij}E_{kl}=0\ (j\neq k),$$
$$E_{ik}E_{kl}=E_{il}.$$

转置矩阵(transposed matrix)　一种特殊矩阵. 指由原矩阵行列互换所得到的新矩阵. 若矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix},$$

则其转置矩阵为 $n\times s$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{s1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{s2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{sn}\end{pmatrix}.$$

A 的转置矩阵记为 A' 或 A^T. 它们具有以下的性质：

1. $(A')'=A$.

2. $(A+B)'=A'+B'$.

3. $(kA)'=kA'\ (k\in P)$.

4. $(AB)'=B'A'$.

矩阵的直积(direct product of matrices)　亦称克罗内克积. 矩阵间的一种运算. 设 $A=(a_{ij})_{mn}$, $B=(b_{kl})_{st}$ 是数域 P 上的两个矩阵，则 $ms\times nt$ 矩阵

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B&a_{12}B&\cdots&a_{1n}B\\a_{21}B&a_{22}B&\cdots&a_{2n}B\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}B&a_{m2}B&\cdots&a_{mn}B\end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 与 B 的直积.

克罗内克积(Kronecker product)　即“矩阵的直积”.

分块矩阵(partitioned matrix)　一种特殊矩阵. 把矩阵用纵线与横线分成若干块，每个小块称为此矩阵的子块或子矩阵. 分成子块的矩阵，称为分块矩阵. 设分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1s}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2s}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{r1}&A_{r2}&\cdots&A_{rs}\end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是矩阵 A 的子块，则其转置矩阵为

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11}' & A_{21}' & \cdots & A_{r1}' \\ A_{12}' & A_{22}' & \cdots & A_{r2}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1s}' & A_{2s}' & \cdots & A_{rs}' \end{pmatrix}.$$

子矩阵(submatrix)　见“分块矩阵”.

分块矩阵的运算(operations of partitioned matrices)　矩阵运算的推广. 指与矩阵运算相应的三种运算：

1. 设 A,B 是数域 P 上的两个 $m\times n$ 分块矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij}与 B_{ij}有相同的行数与列数，则

$$A+B= \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}.$$

2. 设 $A=(a_{ij})_{mn}$，$B=(b_{ij})_{np}$是数域 P 上的两个分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{\alpha\delta}$的列数与 $B_{\delta\beta}$的行数相等，均为 $n_\delta(\delta=1,2,\cdots,t)$，则 $AB=(C_{\alpha\beta})$，其中

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\delta=1}^{t} A_{\alpha\delta}B_{\delta\beta}\ \ (\alpha = 1,2,\cdots,s;\beta = 1,2,\cdots,u).$$

3. 设 A 是数域 P 上的一个 $m\times n$ 分块矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

则 P 中任意的数 k 与 A 的数乘矩阵为

$$kA = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1t} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{st} \end{pmatrix}.$$

准三角形矩阵(quasi-triangular matrix)　一种特殊的分块矩阵. 设数域 P 上的分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix},$$

若 $s=t$，且当 $i>j$ 或 $i<j$ 时，所有的 $A_{ij}=0$，则分别称 A 为上准三角形矩阵或下准三角形矩阵，亦称高准三角形矩阵或低准三角形矩阵，统称准三角形矩阵. 两个同形上(下)准三角形矩阵的乘积是一个上(下)准三角形矩阵，且乘积中对角线上的子块分别是它们对角线上对应子块的乘积. 准三角形矩阵的行列式等于这个矩阵的主对角线上诸子块的行列式的乘积.

对角矩阵(diagonal matrix)　亦称对角形矩阵. 一种特殊矩阵. 即数域 P 上除主对角线上的元素外，其余的元素都为零的 n 阶矩阵 $D=(d_{ij})$，记为 $D=\mathrm{diag}\{d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn}\}$或 $D=[d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn}]$. 对角矩阵的和、差、积以及数与对角矩阵的积仍为对角矩阵. 单位矩阵是对角元素都为 1 的对角矩阵. 如果对角矩阵 $D=\mathrm{diag}\{d_{11},d_{22},\cdots,d_{nn}\}$中，$d_{11}=d_{22}=\cdots=d_{nn}=a$，则 D 称为 n 阶数量矩阵，亦称纯量矩阵，记为 aE_n 或 aI_n. 数量矩阵的和、差、积以及数与数量矩阵的积仍为数量矩阵.

数量矩阵(scalar matrix)　见“对角矩阵”.

准对角矩阵(quasi-diagonal matrix)　亦称准对角形矩阵. 一种特殊矩阵. 即形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中 A_i 是 n_i 阶方阵$(i=1,2,\cdots,s)$. 对角矩阵是一种特殊的准对角矩阵. 两个有相同分块的准对角矩阵

$$A= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

$$B= \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix},$$

且 A_i 与 B_i 有相同的阶数，则它们的和、积仍是同形准对角矩阵.

矩阵行列式(determinant of a matrix)　矩阵的全部元素构成的行列式. 设 $A=(a_{ij})$是数域 P 上的一个 n 阶矩阵，则行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的行列式，记为 $|A|$ 或 $\det(A)$. 若 A,B 是数域 P 上的两个 n 阶矩阵，k 是 P 中的任一个数，则 $|AB|=|A||B|$，$|kA|=k^n|A|$，$|A^*|=|A|^{n-1}$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵；若 A 是可逆矩阵，则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

柯西-比内公式(Cauchy-Binet formula)　求矩阵乘积行列式的一种方法. 设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 分别是数域 P 上的 $m\times n$ 与 $n\times m$ 矩阵，则 A 与 B 乘积的行列式，当 $m>n$ 时等于零；当 $m=n$ 时，等于 A 与 B 的行列式的乘积；当 $m<n$ 时，等于

$$\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{j_11} & \cdots & b_{j_m1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j_1m} & \cdots & b_{j_mm} \end{vmatrix},$$

其中

$$\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}$$

表示对适合 $1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n$ 的所有行列式之积求和. 比内(Binet, J. P. M.)于 1812 年的论文中叙述了此行列式的乘法定理，但未给出满意的证明. 1815 年，柯西(Cauchy, A.-L.)给出了严格的证明.

伴随矩阵(adjoint matrix)　一种特殊矩阵. 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 P 上的一个 n 阶矩阵，A_{ij} 是元素 a_{ij} 在 $|A|$ 中的代数余子式，则 n 阶矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵. 伴随矩阵有以下性质：$AA^*=A^*A=|A|E_n$. 当 n 阶矩阵 A 的秩 $r(A)=n$ 时，$r(A^*)=n$；当 $r(A)=n-1$ 时，$r(A^*)=1$；当 $r(A)<n-1$ 时，$r(A^*)=0$. 又 $|A^*|=|A|^{n-1}(n>1)$，当 A,B 同为 n 阶矩阵时，$(AB)^*=B^*A^*$. 伴随矩阵在求逆矩阵和哈密顿-凯莱定理的证明中有用.

矩阵的直和(direct sum of matrices)　一种准对角形矩阵. 设 A 是数域 P 上可分块为准对角形的 n 阶矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$

其中 A_i 是 n_i 阶矩阵 $(i=1,2,\cdots,k)$，则 A 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的直和，记为 $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_k$. 若 $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_k$，$B=B_1\dotplus B_2\dotplus\cdots\dotplus B_k$，其中 A_i 与 B_i 同为 n_i 阶矩阵 $(i=1,2,\cdots,k)$，则 $A\dotplus B=(A_1+B_1)\dotplus(A_2+B_2)\dotplus\cdots\dotplus(A_k+B_k)$，$AB=A_1B_1\dotplus A_2B_2\dotplus\cdots\dotplus A_kB_k$. 若 $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_k$ 是 k 个矩阵的直和，$f_i(\lambda)$ 是 A_i 的特征多项式，$g_i(\lambda)$ 是 A_i 的最小多项式 $(i=1,2,\cdots,k)$，则 A 的特征多项式 $f(\lambda)=f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_k(\lambda)$，$A$ 的最小多项式是

$$g(\lambda)=[g_1(\lambda),g_2(\lambda),\cdots,g_k(\lambda)].$$

正规矩阵(normal matrix)　实正规矩阵与复正规矩阵的统称. 一个 n 阶实矩阵若与其转置矩阵可换，则称为实正规矩阵. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 n 阶实正规矩阵 A 的实特征值，$a_k+\mathrm{i}b_k$ 是 A 的复特征值 $(b_k\neq0,k=1,2,\cdots,s)$，且 $r+2s=n$，则存在一个正交矩阵 T，使

$$T'AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_r & & & & \\ & & & & A_1 & & & \\ & & & & & A_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & A_s \end{pmatrix},$$

式中

$$A_k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix}\quad(k=1,2,\cdots,s).$$

上述准对角矩阵称为实正规矩阵 A 在正交相似下的标准形. 实正规矩阵 A 存在正交矩阵 T，使 $T'AT$ 是对角矩阵的充分必要条件是：A 的特征值全是实数. 若 n 阶复矩阵 A 满足 $A\overline{A}'=\overline{A}'A$，则称为复正规矩阵，式中 $\overline{A}'$ 是 A 的共轭转置矩阵. 对复矩阵 A 存在酉矩阵 U，使 $\overline{U}'AU$ 为对角矩阵的充分必要条件是：A 为复正规矩阵.

实正规矩阵(real normal matrix)　见"正规矩阵".

复正规矩阵(complex normal matrix)　见"正规矩阵".

矩阵的迹(trace of a matrix)　矩阵的基本概念之一. 数域 P 上的 n 阶矩阵 A 的主对角线上 n 个元素之和称为 A 的迹，记为 $\mathrm{Tr}A$ 或 $\mathrm{Sp}A$. 对数域 P 上任意 n 阶矩阵 A,B 与 P 中的数 λ，有：

1. $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}A+\mathrm{Tr}B$.
2. $\mathrm{Tr}(\lambda A)=\lambda\mathrm{Tr}A$.
3. $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$.
4. $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(A')$.
5. $\mathrm{Tr}(AA')=0$，当且仅当 $A=0$.

初等矩阵(elementary matrix)　三种形状简单且经常使用的方阵的统称. 单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵. 数域 P 上的矩阵的

初等变换是指下列三种变换：

1. 以 P 中的一个非零的数 c 乘矩阵的某一行(列).

2. 把矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)，这里 k 为 P 中的任意一个数.

3. 互换矩阵中两行(列)的位置，

其中，变换 1,2 是最基本的，变换 3 可由变换 1,2 复合而成.

初等矩阵有以下三种：

$$1.\ P(i(c))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&c&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\i\text{行}\\\\\\\\\end{matrix}$$

其中 $0\neq c\in P$.

$$2.\ P(i,j(k))=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\i\text{行}\\\\j\text{行}\\\\\\\end{matrix}$$

其中 $k\in P$.

3. $P(i,j)$

$$=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&1&&&\\&&&&1&&&&\\&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\&&&&&1&&&\\&&&1&\cdots&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\i\text{行}\\\\\\\\j\text{行}\\\\\\\\\end{matrix}$$

初等矩阵是可逆的，它们的逆矩阵仍然是初等矩阵，且有 $P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1}))$，$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$，$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$. 初等变换和初等矩阵的关系是：用第 i 种初等矩阵左(右)乘矩阵 A，相当于对 A 的相应的行(列)施行第 i 种初等变换($i=1,2,3$)；反之亦然.

矩阵的初等变换(elementary transformations of matrices)　见“初等矩阵”.

非奇异矩阵(nonsingular matrix)　亦称非退化矩阵，又称满秩矩阵. 一种重要而应用广泛的特殊矩阵. 数域 P 上行列式 $|A|\neq 0$ 的 n 阶矩阵 A 称为非奇异矩阵；如果 $|A|=0$，则 A 称为奇异矩阵，亦称退化矩阵，又称降秩矩阵. 矩阵 A 是非奇异的，当且仅当 A 是可逆的或 A 可表为若干个初等矩阵的乘积.

满秩矩阵(nonsingular matrix)　即“非奇异矩阵”.

奇异矩阵(singular matrix)　见“非奇异矩阵”.

降秩矩阵(singular matrix)　见“非奇异矩阵”.

逆矩阵(inverse matrix)　与非奇异矩阵有重要关系的矩阵. 设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，如果存在 P 上的 n 阶矩阵 B，使 $AB=BA=E$，则称 A 为可逆矩阵，B 称为 A 的逆矩阵. 如果 A 可逆，则其逆矩阵是惟一的，记为 A^{-1}. n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 可逆的充分必要条件是：A 为非奇异的，且其逆矩阵为

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix},$$

式中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 在行列式 $|A|$ 中的代数余子式，$i,j=1,2,\cdots,n$. 矩阵 A 可逆的充分必要条件是：A 可表为若干个初等矩阵的乘积. 若 A,B 都是 n 阶可逆矩阵，则 A'，A^{-1} 与 AB 都是可逆的，且 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$，$(A^{-1})^{-1}=A$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 凯莱(Cayley, A.)于 1849 年首先介绍了可逆矩阵及其性质，并指出全体 n 阶可逆矩阵对矩阵乘法构成一个群. 求逆矩阵的方法通常有以下三种：

1. 利用伴随矩阵求逆矩阵：$A^{-1}=A^*/|A|$，式中 $|A|$ 是 A 的行列式，A^* 是 A 的伴随矩阵.

2. 利用初等变换求逆矩阵：作 $n\times 2n$ 矩阵 (A,E)，并对其施行初等行变换，当把 A 化成 E 时，原来 E 位置上的矩阵就是 A^{-1}. 对 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$ 施行初等列变换，也可求出 A^{-1}.

3. 设 $X=(x_{ij})$ 为 A 的逆矩阵，则 $AX=E$. 由此可得出 n^2 个未知量和 n^2 个方程的线性方程组，解此方程组求出一切 x_{ij}，即得 A^{-1}.

可逆矩阵(invertible matrix)　见“逆矩阵”.

矩阵的等价(equivalence of matrices)　亦称矩阵的相抵. 矩阵间的一种等价关系. 对于数域 P 上的 $m\times n$ 矩阵 A 与 B，如果 A 经过有限次初等变换可以变成 B，则 A 与 B 称为等价的. 应用初等变换和初等矩阵的关系可得，矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件为：存在一系列初等矩阵 $S_1,S_2,\cdots,S_k$；$T_1,T_2,\cdots,T_l$，使得 $B=S_1\cdots S_kAT_1\cdots T_l$，即存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 S 与 T，使得 $B=SAT$. 矩阵的等价具有自反性、对称性和传递性，即是一种等价关系.

矩阵多项式(matrical polynomial)　一种特殊矩阵.设 $A_0,A_1,\cdots,A_s$ 是数域 P 上的 $m\times n$ 矩阵,λ 是一个文字,则 $A_0\lambda^s+A_1\lambda^{s-1}+\cdots+A_{s-1}\lambda+A_s$ 称为矩阵多项式.当 A_0 不为零时,s 称为它的次数.矩阵多项式实际上是 λ 矩阵;反之,任何 λ 矩阵都可以表示成关于 λ 的矩阵多项式.当 $A_0,A_1,\cdots,A_s$ 都是 n 阶矩阵,且 A_0 可逆时,矩阵多项式 $A_0\lambda^s+A_1\lambda^{s-1}+\cdots+A_{s-1}\lambda+A_s$ 称为正则的.对正则矩阵多项式可以做带余除法,但商式和余式需区分左右.正则矩阵多项式在证明哈密顿-凯莱定理中有应用.

正则矩阵多项式(regular matrical polynomial)见"矩阵多项式".

矩阵多项式的运算(operations of matrical polynomials)　多项式运算的推广.设 $A(\lambda),B(\lambda)$ 是数域 P 上的两个同阶的矩阵多项式,m 是这两个多项式较大的次数:

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m,$$
$$B(\lambda)=B_0\lambda^m+B_1\lambda^{m-1}+\cdots+B_{m-1}\lambda+B_m.$$

则矩阵多项式 $(A_0+B_0)\lambda^m+(A_1+B_1)\lambda^{m-1}+\cdots+(A_m+B_m)$ 称为它们的和,记为 $A(\lambda)+B(\lambda)$.若 $A(\lambda),B(\lambda)$ 同为 n 阶且次数各为 m 与 p 的两个矩阵多项式:

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m\ (A_0\neq0),$$
$$B(\lambda)=B_0\lambda^p+B_1\lambda^{p-1}+\cdots+B_p\ (B_0\neq0),$$

则矩阵多项式 $A_0B_0\lambda^{m+p}+(A_0B_1+A_1B_0)\lambda^{m+p-1}+\cdots+A_mB_p$ 称为它们的积,记为 $A(\lambda)B(\lambda)$.注意可能有 $A_0B_0=0$.因此,两个矩阵多项式乘积的次数小于或等于这两个矩阵多项式的次数之和.若 $A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m$ 是数域 P 上的矩阵多项式,k 是 P 中的数,则矩阵多项式 $(kA_0)\lambda^m+(kA_1)\lambda^{m-1}+\cdots+(kA_{m-1})\lambda+(kA_m)$ 称为 k 与 $A(\lambda)$ 的数乘矩阵多项式,记为 $kA(\lambda)$.

数乘矩阵多项式(scalar multiplication of matrical polynomial)　见"矩阵多项式的运算".

矩阵多项式的右(左)除(right(or left) division of matrical polynomials)　多项式除法的推广.设 $A(\lambda),B(\lambda)$ 是数域 P 上的两个 n 阶矩阵多项式,且 $B(\lambda)$ 是正则的,如果

$$A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda)$$
$$(A(\lambda)=B(\lambda)\hat{Q}(\lambda)+\hat{R}(\lambda)),$$

且当 $R(\lambda)(\hat{R}(\lambda))\neq0$ 时,其次数小于 $B(\lambda)$ 的次数,则以 $B(\lambda)$ 右(左)除 $A(\lambda)$ 时,所得的矩阵多项式 $Q(\lambda)(\hat{Q}(\lambda))$ 与 $R(\lambda)(\hat{R}(\lambda))$ 分别称为其右(左)商与右(左)余.若 $R(\lambda)=0(\hat{R}(\lambda)=0)$,称 $B(\lambda)$ 右(左)整除 $A(\lambda)$.

广义剩余定理(generalized remainder theorem)亦称广义贝祖定理.余数定理在矩阵多项式上的推广.给定数域 P 上的矩阵多项式

$$F(\lambda)=F_0\lambda^m+F_1\lambda^{m-1}+\cdots+F_{m-1}\lambda+F_m$$
$$=\lambda^mF_0+\lambda^{m-1}F_1+\cdots+\lambda F_{m-1}+F_m,$$

其中 $F_0,F_1,\cdots,F_m$ 为 P 上的 n 阶矩阵,且 $F_0\neq0$,则以 $\lambda E-A$ 右除 $F(\lambda)$ 所得的余式为 $F(A)=F_0A^m+F_1A^{m-1}+\cdots+F_{m-1}A+F_m$;以 $\lambda E-A$ 左除 $F(\lambda)$ 所得的余式为 $\hat{F}(A)=A^mF_0+A^{m-1}F_1+\cdots+AF_{m-1}+F_m$.$\lambda E-A$ 右(左)整除矩阵多项式 $F(\lambda)$ 的充分必要条件是:$F(A)=0\ (\hat{F}(A)=0)$.

广义贝祖定理(generalized Bézout theorem)即"广义剩余定理".

矩阵的多项式(polynomial of a matrix)　一种特殊多项式.指以矩阵代替文字所得的多项式.设

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是数域 P 上的多项式,A 是 P 上的 n 阶矩阵,则

$$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$$

称为矩阵 A 的多项式.设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 P 上的两个多项式,令

$$u(x)=f(x)+g(x),$$
$$v(x)=f(x)g(x),$$

则

$$u(A)=f(A)+g(A),$$
$$v(A)=f(A)g(A).$$

若 k 是 P 中的数,则

$$kf(A)=(ka_m)A^m+(ka_{m-1})A^{m-1}+\cdots+(ka_1)A+(ka_0)E.$$

因此,数域 P 上矩阵 A 的多项式集合,对上述的加法、数乘与乘法构成一个交换代数.

三角形矩阵(triangular matrix)　一种特殊矩阵.数域 P 上主对角线以下或以上的全体元素都是零的 n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

分别称为上三角形矩阵和下三角形矩阵,亦称上三角矩阵和下三角矩阵,统称三角形矩阵.主对角元全是1的三角形矩阵称为特殊三角形矩阵;主对角元全为零的三角形矩阵称为严格三角形矩阵.两个 n 阶上(下)三角形矩阵的和、积以及 P 中的一个数与上(下)三角形矩阵的乘积仍是上(下)三角形矩阵.

特殊三角形矩阵(special triangular matrix)

见“三角形矩阵”.

严格三角形矩阵(strictly triangular matrix) 见“三角形矩阵”.

对称矩阵(symmetric matrix) 一种特殊矩阵.数域 P 上满足条件 $A'=A$,即 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$称为对称矩阵.如果 $A'=-A$,即 $a_{ij}=-a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,则 A 称为反对称矩阵,此时 $a_{ii}=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.反对称矩阵亦称斜对称矩阵或交错矩阵.任意方阵 A 都可惟一地表为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和,即

$$A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}.$$

反对称矩阵(antisymmetric matrix) 见“对称矩阵”.

斜对称矩阵(skew-symmetric matrix) 见“对称矩阵”.

交错矩阵(alternate matrix) 见“对称矩阵”.

实对称矩阵(real symmetric matrix) 一种对称矩阵.指欧氏空间的对称变换在标准正交基下的矩阵.即元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$全是实数的对称矩阵 $A=(a_{ij})$.实对称矩阵 A 的特征值全为实数.在实欧氏空间 R^n 中,对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量必正交,且在 R^n 中存在 n 个列特征向量组成的标准正交基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,使

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)'\,A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=T'AT$$

为实对角矩阵,其对角线上的元素为 A 的特征值,T 为正交矩阵.$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 称为 A 的特征向量的一个完备系.

实反对称矩阵(real antisymmetric matrix) 一种反对称矩阵.指欧氏空间的反对称变换在标准正交基下的矩阵.即元素 a_{ij} 都是实数,并且 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots)$,$n$ 的 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$.它有以下性质:

1. A 的特征值是零或纯虚数.

2. $|A|$是一个非负实数的平方.

3. A 的秩是偶数,奇数阶反对称矩阵的行列式等于零.

4. 存在 n 阶正交矩阵 T,使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & & \\ -a_1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & a_2 & & & & & \\ & & -a_2 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & a_r & & \\ & & & & & -a_r & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

且$\pm \mathrm{i}a_k$ 是 A 的全部非零的特征值,$k=1,2,\cdots,r$,A 的秩 $r(A)=2r$,矩阵(1)称为实反对称矩阵 A 在正交相似下的标准形.

正交矩阵(orthogonal matrix) 一种实矩阵.指正交变换在标准正交基下的矩阵.即满足 $A'A=E$ 的 n 阶实矩阵 A.若 A 是正交矩阵,则$|A|=\pm 1$.当$|A|=1$ 时,称 A 为第一类正交矩阵或旋转矩阵;当$|A|=-1$ 时,称 A 为第二类正交矩阵或镜面反射矩阵.给定 n 阶正交矩阵 $A=(a_{ij})$,由 $A'A=E$ 得 $A^{-1}=A'$,从而 $AA'=E$.因此

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \quad (1)$$

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \quad (2)$$

即 A 的不同行(列)是正交的.等式组(1)或(2)都称为正交条件,都是实矩阵 A 为正交矩阵的充分必要条件.此外,

$$a_{ij}=\frac{A_{ij}}{|A|}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

也是实矩阵 A 为正交矩阵的充分必要条件.正交矩阵的特征值的模为 1,因而它的实特征值只可能为± 1.任一实满秩 n 阶矩阵 A 都可以惟一地分解成 $A=QT$,其中 Q 是实正交矩阵,T 是主对角线元素大于零的上三角矩阵.对于对称矩阵 B,必有正交矩阵 A,使 $A'BA$ 为对角矩阵,其对角元是 B 的全体特征值.

第一类正交矩阵(orthogonal matrix of the first kind) 见“正交矩阵”.

旋转矩阵(rotational matrix) 即“第一类正交矩阵”.

第二类正交矩阵(orthogonal matrix of the second kind) 见“正交矩阵”.

镜面反射矩阵(matrix of mirror reflection) 即“第二类正交矩阵”.

正交条件(orthogonal condition) 见“正交矩阵”.

埃尔米特矩阵(Hermite matrix) 一种复矩阵.指酉空间的埃尔米特变换在标准正交基下的矩阵.即满足 $H'=\overline{H}$ 的 n 阶复矩阵 H.埃尔米特矩阵的特征值都是实数,且属于不同特征值的特征向量必正交.对埃尔米特矩阵 H,存在酉矩阵 U,使$\overline{U}'HU$ 是对角矩阵,其中对角线上的元素是 H 的全体特征值.

酉矩阵(unitary matrix) 一种复矩阵.指酉空间的酉变换在标准正交基下的矩阵.亦即满足 $U\overline{U}'=\overline{U}'U=E$ 的复矩阵 U,其中 $\overline{U}'$是 U 的转置共轭矩阵.任意满秩矩阵都可以表为一个酉矩阵与一个上三角形矩阵的乘积.在 n 维酉空间中,一个标准正交

基到另一个标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵. 酉矩阵的行列式的绝对值等于 1.

整数矩阵(integer matrix)　在数论中有重要应用的一种矩阵. 指元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$都是整数的 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$. 若 n 阶整数矩阵 A 的行列式$|A|=\pm1$,则 A 称为幺模整数矩阵. 一个整数矩阵有逆整数矩阵,当且仅当这个矩阵是幺模整数矩阵.

幺模整数矩阵(unimodular integer matrix)　见"整数矩阵".

幂零矩阵(nilpotent matrix)　一种特殊矩阵. 指幂零变换所对应的矩阵. 亦即存在正整数 m,使 $A^m=0$ 的 n 阶矩阵 A. 幂零矩阵是降秩矩阵. 一个矩阵是幂零的充分必要条件是:它的特征值全为零. 若 $A^m=0$,但 $A^{m-1}\neq0$,则 $E-A$ 可逆,且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}.$$

这时 m 称为幂零矩阵 A 的幂零指数.

幂零指数(nilpotent exponent)　见"幂零矩阵".

幂等矩阵(idempotent matrix)　亦称投影矩阵. 一种特殊矩阵. 指幂等变换所对应的矩阵. 满足 $A^2=A$ 的 n 阶矩阵 A 称为幂等矩阵. 幂等矩阵或者是单位矩阵,或者是奇异的. 如果 A 是幂等矩阵,则

$$r(A)+r(A-E)=n,$$

式中 $r(A)$是 A 的秩.

投影矩阵(projection matrix)　即"幂等矩阵".

幂幺矩阵(unipotent matrix)　一种特殊矩阵. 指幂幺变换所对应的矩阵. 即存在正整数 m,使 $A^m=E$ 的 n 阶矩阵 A. 幂幺矩阵 A 是可逆的,且其逆矩阵为 A^{m-1};A 的特征值的模均为 1. 当 $m=2$ 时,若有 $A^2=E$ 时,则 A 称为对合矩阵. n 阶对合矩阵 A 的特征值为 1 或 -1,且

$$r(A+E)+r(A-E)=n.$$

对合矩阵(involutory matrix)　见"幂幺矩阵".

半单矩阵(semisimple matrix)　一种特殊矩阵. 指最小多项式无重根的矩阵. 与对角矩阵相似的 n 阶矩阵 A,存在 n 阶可逆矩阵 T,使$T^{-1}AT$是对角矩阵. 若 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵,且 A 的全部特征值都属于 P,则 A 是半单矩阵的充分必要条件是:A 的最小多项式无重根. 复 n 阶矩阵是半单矩阵的充分必要条件是:其最小多项式无重根.

循环矩阵(cyclic matrix)　一种特殊矩阵. 形如

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

的 n 阶矩阵称为循环矩阵. 特殊的 n 阶循环矩阵

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

称为基本循环矩阵. n 阶矩阵是循环矩阵的充分必要条件是:它可由 $E,T,T^2,\cdots,T^{n-1}$线性表出. 对循环矩阵 A,有

$$A=a_0E+a_1T+a_2T^2+\cdots+a_{n-1}T^{n-1}.$$

若 A,B 都是 n 阶循环矩阵,则 AB 也是循环的,且 $AB=BA$;若循环矩阵 A 是可逆的,则 A^{-1}也是循环的. 如果令

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,\cdots,n-1),$$

又令

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

则 $|\Delta|\neq0$,且

$$\Delta^{-1}A\Delta=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & & & \\ & f(\varepsilon_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix},$$

即 A 在复数域上同对角矩阵相似,且 A 的特征值是

$$f(\varepsilon_0),f(\varepsilon_1),\cdots,f(\varepsilon_{n-1}).$$

因此

$$|A|=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_{n-1}),$$

其中 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$.

基本循环矩阵(fundamental cyclic matrix)　见"循环矩阵".

西尔维斯特定理(Sylvester theorem)　给出计算矩阵子式的方法的一个命题. 在 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$中,取第 $1,2,\cdots,r,r+i$ 行与第 $1,2,\cdots,r,r+j$ 列构成一个 $r+1$ 阶矩阵,记为 $B_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n-r)$,令 $s_{ij}=|B_{ij}|$,$n-r$ 阶矩阵

$$S=\begin{pmatrix} s_{r+1,r+1} & \cdots & s_{r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n,r+1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

称为西尔维斯特矩阵. 等式

$$|S|=|A|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix},$$

其中

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

称为西尔维斯特定理或西尔维斯特恒等式，由西尔维斯特(Sylvester，J. J.)给出.

西尔维斯特恒等式(Sylvester identity) 即“西尔维斯特定理”.

阿达马矩阵(Hadamard matrix) 一类特殊矩阵. 设 A 是以 1 和 -1 为元素的 n 阶矩阵. 如果 $AA'=nE$，则 A 称为阿达马矩阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

是二阶阿达马矩阵. 若 A 是 $n(n>2)$ 阶阿达马矩阵，则 n 必为 4 的倍数. 阿达马矩阵任两列必正交，即对应元素乘积之和等于零. 构造阿达马矩阵有各种方法，现已构造出阶数$\leqslant 264$ 的所有阿达马矩阵. 阿达马(Hadamard，J. (-S.))证明了：n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$ 中每个元素的绝对值 $|a_{ij}|\leqslant 1$ 时，A 的范数 $\|A\|\leqslant n^{n/2}$. 而当 $\|A\|=n^{n/2}$时，A 是阿达马矩阵.

阿达马矩阵在正交试验设计等问题中有重要应用.

阿达马不等式(Hadamard inequality) 一种特殊不等式. 指矩阵的子行列式所满足的一个不等式. 设 V 是 n 维欧氏空间，V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的格拉姆矩阵 A 的行列式的平方小于等于诸向量 α_i 的内积的乘积，即

$$|A|^2=\begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_s) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_s,\alpha_1) & (\alpha_s,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_s,\alpha_s) \end{vmatrix}^2$$
$$\leqslant (\alpha_1,\alpha_1)(\alpha_2,\alpha_2)\cdots(\alpha_s,\alpha_s).$$

由此导出阿达马不等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix}^2$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{s}|a_{1k}|^2\sum_{k=1}^{s}|a_{2k}|^2\cdots\sum_{k=1}^{s}|a_{sk}|^2.$$

其几何意义是：超平行体的体积不超过其各边长的乘积，而且仅在其边两两正交时等式成立.

可分离矩阵(separable matrix) 亦称可约矩阵. 一种特殊矩阵. 数域 P 上的 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为可分离的，如果可分裂所有的足数 $1,2,\cdots,n$ 为两个互补组(无公共数的)$i_1,i_2,\cdots,i_\mu;k_1,k_2,\cdots,k_\gamma(\mu+\gamma=n)$，使

$$a_{i_\alpha k_\beta}=0\ (\alpha=1,2,\cdots,\mu;\beta=1,2,\cdots,\gamma).$$

否则矩阵 A 称为不可分离的. n 阶矩阵 A 中的次序置换，是指合成矩阵 A 中诸行的置换与诸列的同一个置换. 因此，n 阶矩阵 A 可分离的充分必要条件是：如果 A 的次序置换可以把 A 变为

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 B 与 D 为两个矩阵.

可约矩阵(reducible matrix) 即“可分离矩阵”.

广义逆矩阵(generalized inverse matrix) 逆矩阵的推广. 设 A 是 $s\times n$ 矩阵，如果存在 $n\times s$ 矩阵 G，使 $AGA=A$，则称 G 为 A 的广义逆矩阵，简称广义逆，亦称 G 逆. 若 A 是 n 阶可逆矩阵，则 $G=A^{-1}$. 设 A 是秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵，如果

$$A=P\begin{bmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(s-r)\times r} & 0_{(s-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}Q,$$

式中 P,Q 分别为 $s\times s$ 和 $n\times n$ 可逆矩阵，则 A 的广义逆为

$$G=Q^{-1}\begin{bmatrix} E_r & C_{r\times(s-r)} \\ D_{(n-r)\times r} & F_{(n-r)\times(s-r)} \end{bmatrix}P^{-1},$$

式中 $C_{r\times(s-r)},D_{(n-r)\times r},F_{(n-r)\times(s-r)}$可以任意选取. 因此，秩为 r 的 $s\times n$ 矩阵 A 的广义逆不惟一. 而其广义逆惟一的充分必要条件是：$s=n=r$，即 A 是满秩矩阵.

穆尔-彭罗斯广义逆矩阵(Moore-Penrose generalized inverse matrix) 一种广义逆矩阵. 设 A 是 $s\times n$ 复矩阵，如果 $n\times s$ 复矩阵 G 满足：

1. $AGA=A$.
2. $GAG=G$.
3. $(\overline{AG})'=AG$.
4. $(\overline{GA})'=GA$,

则 G 称为 A 的穆尔-彭罗斯广义逆矩阵. 显然，A 与 G 互为穆尔-彭罗斯广义逆. 任意的 $s\times n$ 复矩阵 A 有惟一的穆尔-彭罗斯广义逆，记为 A^+. 矩阵 A 的广义逆 A^+有如下的性质：

1. A^+的秩 $r(A^+)=r(A)=r(A')$；
2. $(A^+)^+=A$.
3. $(A')^+=(A^+)'$，因此，若 A 是对称矩阵，则 A^+也是对称矩阵.
4. $(A'A)^+=A^+(A^+)'$，因此，若 A 是半正定矩阵，则 A^+也是半正定矩阵.
5. AA^+,A^+A 都是幂等矩阵.

穆尔-彭罗斯广义逆矩阵在最小二乘法中有用.

复矩阵的极分解式(polar factorization of a complex matrix) 复矩阵分解为两个矩阵乘积的一种方法. 设 $A=(a_{ij})$是一个 n 阶复满秩矩阵，则 $A=SO$ 或 $A=O_1S_1$ 称为 A 的极分解式，其中 S 与 S_1

为复对称矩阵，O 与 O_1 为复正交矩阵，且

$$S = \sqrt{AA'} = f(AA'),$$
$$S_1 = \sqrt{A'A} = f_1(A'A),$$

其中，$f(\lambda)$与$f_1(\lambda)$是 λ 的多项式. 设 $A=SO=O_1S_1$ 是矩阵 A 的极分解式，则 S 与 O(S_1 与 O_1)可交换的充分必要条件是：矩阵 A 与 A' 可交换.

复对称矩阵(complex symmetric matrix)　一种对称矩阵，指 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$的 n 阶复矩阵 $A=(a_{ij})$. 任何 n 阶复矩阵相似于复对称矩阵. 任何复对称矩阵 S 正交相似于对称矩阵 $\widetilde{S}$，即存在正交矩阵 T，使 $S=T\widetilde{S}T^{-1}$，其中

$$\widetilde{S} = [\lambda_1E^{(p_1)} + S^{(p_1)}, \lambda_2E^{(p_2)} + S^{(p_2)}, \cdots, \lambda_rE^{(p_r)} + S^{(p_r)}]$$

是准对角形矩阵，子块 $E^{(p)}$是 p 阶单位矩阵，子块

$$S^{(p)} = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ & \iddots & \iddots & \iddots & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \end{pmatrix}\right\}$$

$\widetilde{S}$ 称为复对称矩阵 S 的标准形.

复反对称矩阵(complex skew-symmetric matrix)　一种反对称矩阵. 指

$$a_{ij} = -a_{ji}\ \ (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

的 n 阶复矩阵 $A=(a_{ij})$. 任意的复反对称矩阵 K 正交相似于反对称矩阵 $\widetilde{K}$，即存在一个正交矩阵 T，使 $K=T\widetilde{K}T^{-1}$，其中

$$\widetilde{K} = [K_{\lambda_1}^{(p_1p_1)}, \cdots, K_{\lambda_s}^{(p_sp_s)}, K^{(q_1)}, \cdots, K^{(q_r)}]$$

是准对角矩阵($q_1,q_2,\cdots,q_r$ 都是奇数)，子块

$$K_\lambda^{(pp)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{i} & 2\lambda\mathrm{i} \\ -1 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & 2\lambda\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & i & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & 2\lambda\mathrm{i} & \mathrm{i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -\mathrm{i} & -2\lambda\mathrm{i} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \mathrm{i} & \cdots & -2\lambda\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ -\mathrm{i} & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -2\lambda\mathrm{i} & -\mathrm{i} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^{(q)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\lambda \\ 0 & 0 & & 2\lambda & 1 \\ & \iddots & \iddots & \iddots & \\ -1 & -2\lambda & & 0 & 0 \\ -2\lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

上式第一个 q 阶矩阵中主对角线以上的斜线上依次有$(q-1)/2$ 个 1 与$(q-1)/2$个-1，而主对角线以下的斜线上则依次有$(q-1)/2$ 个-1 及$(q-1)/2$ 个 1. 同样，第二个 q 阶矩阵中次对角线以上及以下的斜线上自左至右均依次有$(q-1)/2$ 个-1 与$(q-1)/2$ 个 1.

若尔当矩阵(Jordan matrix)　一种重要的具有特殊形式的矩阵，即形如

$$J(\lambda,t) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

或 $J(\lambda,t)'$的复 t 阶矩阵称为若尔当块，其中 λ 是复数. 由若干个若尔当块组成的准对角矩阵称为若尔当矩阵. 一阶若尔当块是一阶矩阵，因此，若尔当矩阵中包括对角矩阵.

若尔当块(Jordan block)　见"若尔当矩阵".

线性方程组

线性方程组(system of linear equations)　即一次方程组. 代数学的一个重要概念和研究对象. 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

称为含 m 个方程和 n 个未知量的线性方程组，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表未知量，而 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为 x_j 的系数，$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 称为常数项. 如果方程组(1)的系数和常数项都属于数域 P，则(1)称为数域 P 上的线性方程组. 满足方程组(1)中的每一个方程的 $x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n$ 称为方程组(1)的一个解，$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$称为方程组(1)的一个解向量. 方程组(1)全体解构成的集合，称为它的解集合. 若方程组(1)无解，则其解集合是空集. 如果两个线性方程组有相同的解集合，则称它们是同解的. 求解集合的过程称为解线性方程组. 线性方程组是最简单且应用最广泛的一类方程组. 科学技术中有大量问题都归结为解一个线性方程组. 因此，线性方程组的数值解法在计算数学及其应用中占有

重要的地位.

中国古代数学著作《九章算术》中的第八章《方程》,主要是讲多元线性方程组应用问题的解法.这里的方程与现在所说的方程式不同,不是指含有未知数的等式,而是指用数字排成的相当于矩阵的长方阵.求解就是在由系数和常数项排成的"方程"上进行.其解法称为直除,较为繁琐,相当于现在的初等变换.宋、元时的秦九韶在《数书九章》中,彻底改进连续相减的直除法,采用互乘相消法,相当于对增广矩阵施行初等变换.在西方,线性方程组的研究是由莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于1678年以前开创的,后来伴随着行列式与矩阵的产生而逐步发展并完善.

线性方程组的解向量(vector of solutions of linear equations) 见"线性方程组".

解线性方程组(solving the system of linear equations) 见"线性方程组".

同解线性方程组(equivalent system of linear equations) 见"线性方程组".

线性方程组的矩阵形式(matrix form of the system of linear equations) 线性方程组的一种表示方法.由线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

的所有系数构成的 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组(1)的系数矩阵,$m \times (n+1)$矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为方程组(1)的增广矩阵.增广矩阵 $\overline{A}$ 可表示为 (A, B),其中 B 表示方程组(1)的常数项所构成的列向量.这是增广矩阵 $\overline{A}$ 用分块矩阵表示的形式.如果令 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)'$,由矩阵的乘法可知,线性方程组(1)可表示成 $AX=B$ 的矩阵形式.又若以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$ 依次表示增广矩阵 $\overline{A}$ 的列向量,则线性方程组(1)又可表为以下的向量形式:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n x_n = \boldsymbol{\beta}.$$

线性方程组的矩阵形式和向量形式各有许多方便之处,在数学中经常使用.

线性方程组的系数矩阵(coefficient matrix of a system of linear equations) 见"线性方程组的矩阵形式".

线性方程组的增广矩阵(augmented matrix of a system of linear equations) 见"线性方程组的矩阵形式".

线性方程组的向量形式(vector form of a system of linear equations) 见"线性方程组的矩阵形式".

线性方程组的初等变换(elementary transformations of a system of linear equations) 线性方程组的三种同解变换.对数域 P 上的线性方程组施行下列的变换:

1. 交换两个方程的位置.
2. 用 P 中一个不等于零的数乘某一个方程.
3. 用 P 中一个数乘某一个方程后加到另一个方程.

这三种变换称为线性方程组的初等变换.它们相当于对线性方程组的增广矩阵的行施行三种初等变换.初等变换把线性方程组变为与它同解的线性方程组.它是解线性方程组的一个基本方法.

线性方程组有解的判别定理(solvability criterion theorem of a system of linear equations) 亦称克罗内克-卡佩利定理.判定线性方程组有解的一个充分必要条件.该定理断言:数域 P 上的一个线性方程组有解的充分必要条件为其系数矩阵与增广矩阵的秩相等.这个定理是由克罗内克(Kronecker, L.)和卡佩利(Capelli, A.)给出的.

克罗内克-卡佩利定理(Kronecker-Capelli theorem) 即"线性方程组有解的判别定理".

齐次线性方程组(system of homogeneous linear equations) 常数项全为零的线性方程组.即线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

$x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$ 显然是它的一个解,称为零解;其他的解称为非零解.齐次线性方程组的两个解(解向量)的和,以及任意数与任意解(解向量)的乘积,仍为该齐次线性方程组的解(解向量).齐次线性方程组任意一组解(解向量)的线性组合仍为该齐次线性方程组的解(解向量).因此,齐次线性方程组的全体解向量构成一个向量空间,称为齐次线性方程组的解空间.设 $AX=\mathbf{0}$ 是数域 P 上 m 个方程的 n 元齐次线性方程组,则方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解的充分必要条件是矩阵 A 的秩 $r(A)<n$.当 $m=n$ 时,齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是它的系数

行列式等于零.

齐次线性方程组的零解(zero solution of a system of homogenous linear equations) 见"齐次线性方程组".

齐次线性方程组的非零解(non-zero solution of a system of homogenous linear equations) 见"齐次线性方程组".

齐次线性方程组的解空间(solution space of a system of homogenous linear equations) 见"齐次线性方程组".

齐次线性方程组的基础解系(system of basic solutions of a system of homogenous linear equations) 齐次线性方程组解空间的基. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,若齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是线性无关的,而且 $AX=\mathbf{0}$ 的每一个解向量都可由它们线性表出,则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 为 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系. 如果矩阵 A 的秩 $r(A)=r$,则 $t=n-r$,且 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间的维数是$n-r$,而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是它的基. 基础解系的意义在于齐次线性方程组的全部解可以通过有限个解表示出来. 齐次线性方程组基础解系的具体求法是:对 A 的行施行初等变换(必要时交换列即交换相应未知量的足码),化成下面形式的矩阵:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $AX=\mathbf{0}$ 与齐次线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=0, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

同解,其中 $c_{11},c_{22},\cdots,c_{rr}$均不等于零. 然后把$n-r$个未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 作为自由未知量,并取它们的$n-r$组值$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$,由此所得到的 $AX=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个解向量,就是 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

线性方程组的一般解(general solution of a system of linear equations) 线性方程组解的表示形式之一. 设数域 P 上的线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,2,\cdots,m)$$

的系数矩阵 A 的秩 r 等于增广矩阵的秩,则 A 有一个不为零的 r 阶子式 D. 不失普遍性,可设 D 位于 A 的左上角,则原方程组与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases}$$

同解. 把自由未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 看做任意常数,由克莱姆法则可得原方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_r=\frac{D_r}{D},$$

$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 为任意数(参见"克莱姆法则"). 此种 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 可由自由未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 表示的解称为原方程组的一般解或通解. 它包含了原线性方程组的所有解.

线性方程组的通解(general solution of a system of linear equations) 即"线性方程组的一般解".

高斯消元法(Gauss elimination method) 解线性方程组的一种程序. 用高斯消元法解线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\ (i=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

的程序如下:

1. 通过对方程组(1)的初等变换与交换未知量(连同系数一起)的次序,将其化为如下的同解阶梯形线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}x_{i_1}+c_{12}x_{i_2}+\cdots+c_{1r}x_{i_r}+c_{1,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{1n}x_{i_n}=d_1, \\ \qquad c_{22}x_{i_2}+\cdots+c_{2r}x_{i_r}+c_{2,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{2n}x_{i_n}=d_2, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_{i_r}+c_{r,r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{rn}x_{i_n}=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \end{cases}$$

其中 $c_{11},c_{22},\cdots,c_{rr}$均不为零. 从而此方程组有解的充分必要条件为:若存在左端消去所有的未知量(即系数为 0)的式子,则右端均不出现非零常数,即上述示意式中 $d_{r+1}=0$.

2. 当此方程组有解时,进行下面的回代过程:若 $r=n$,则由最下边的一个方程求得 x_{i_r},再逐个地由下而上的代入方程中,依次求得 $x_{i_{r-1}},x_{i_{r-2}},\cdots,x_{i_1}$;若 $r<n$,则先将自由未知量 $x_{i_{r+1}},x_{i_{r+2}},\cdots,x_{i_n}$ 移到等号的右边,再按由下而上的顺序逐个地求出 x_{i_r},$x_{i_{r-1}},\cdots,x_{i_1}$的由 $x_{i_{r+1}},x_{i_{r+2}},\cdots,x_{i_n}$ 给出的表达式.

线性方程组的导出方程组(derived system of a system of linear equations) 一个特殊的线性方程组. 将线性方程组的常数项换为零后所得到的齐次线性方程组,称为原线性方程组的导出方程组,简称原线性方程组的导出组. 一个有解的非齐次线性方程组的解与其导出组的解有以下的基本性质:

1. 线性方程组的两个解向量的差是它的导出组

的解向量.

2. 线性方程组的解向量与它的导出组的解向量的和，是这个线性方程组的解向量.

3. 设 γ_0 是线性方程组的一个固定的解向量，则线性方程组的任一个解向量 γ 可以表为 $\gamma=\gamma_0+\eta$，其中 η 是它的导出组的解向量.

线性方程组解的结构(structure of solutions of a system of linear equations)　线性方程组解之间的关系. 其结构如下：

1. 设数域 P 上的齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有无穷多个解，而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是它的一个基础解系，则它的任一个解向量 η 均可以表为 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 为 P 中的一组数. 此称为解的第二结构定理.

2. 设数域 P 上的非齐次线性方程组 $AX=B$ 有无穷多个解，若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是它的导出组 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，η_0 是它的一个固定的解向量(亦称特解)，则它的任一个解向量 η 均可表为 $\eta=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 为 P 中的一组数. 此称为解的第一结构定理.

两个定理分别给出线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 与 $AX=B$ 的全部解.

二次型与双线性型

二次型(quadratic form)　亦称二次齐式. 一种重要的多元多项式. 数域 P 上的 n 元二次齐次多项式

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$$

称为数域 P 上的 n 元二次型，简称 P 上的二次型. P 上的任意二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$$

都可表为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}=(b_{ij}+b_{ji})/2, a_{ii}=b_{ii}$. 由二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j(a_{ji}=a_{ij})$$

所确定的 n 阶对称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为二次型的矩阵，它的秩称为二次型的秩，它的行列式称为二次型的判别式. 由二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

确定的对称双线性型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

称为此二次型的极型，亦称相伴的双线性型. 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 P 上的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

的矩阵，$X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 称为二次型 f 的矩阵形式.

二次型的理论起源于化二次曲线与二次曲面方程为标准形方程的研究. 它在解析几何、数学分析、微分方程、数论、数理统计等数学分支，以及物理、力学等方面都有广泛的应用. 对于数域上二次型的研究，已由数域上的算术理论发展到域上，甚至于含有单位元的环上二次型的算术理论. 它们与代数数论，代数几何等都有着密切的联系.

二次齐式(quadratic form)　即"二次型".

二次型的矩阵(matrix of a quadratic form)　见"二次型".

二次型的秩(rank of a quadratic form)　见"二次型".

二次型的判别式(discriminant of a quadratic form)　见"二次型".

二次型的极型(polar form of a quadratic form)　见"二次型".

相伴双线性型(associated bilinear form)　见"二次线".

二次型的矩阵形式(matrix of a quadratic form)　见"二次线".

矩阵的合同(congruence of matrices)　矩阵的基本概念之一. 设 A,B 是数域 P 上的两个 n 阶矩阵，若存在 P 上的 n 阶可逆矩阵 C，使 $B=C'AC$，则称 A 与 B 合同. 与对称矩阵合同的矩阵也是对称的. 矩阵的合同关系，具有反身性、对称性和传递性. 因而可以将矩阵按合同关系分类，所得到的类，称为合同类. 合同矩阵具有相同的秩.

线性代换(linear substitution)　亦称线性变换. 代数学术语. 指变量与被代换的变量间的关系是一次的代换. 即数域 P 上的两组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的如下的线性关系式

$$\begin{cases} x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n, \\ x_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n. \end{cases} \tag{1}$$

由线性代换(1)的系数构成的矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为线性代换(1)的矩阵. 而其行列式称为线性代换(1)的

行列式. 若令 $X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Y'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 则线性代换(1)可表为矩阵形式 $X=AY$. 若 A 是满秩的, 则线性代换(1)称为满秩的或非退化的. 此时线性代换 $Y=A^{-1}X$, 称为线性代换(1)的逆代换. 如果另有线性代换

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \cdots + b_{1n}z_n, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \cdots + b_{2n}z_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \cdots + b_{nn}z_n, \end{cases} \tag{2}$$

其矩阵形式为 $Y=BZ$, 其中 $B=(b_{ij})$ 为数域 P 上的 n 阶矩阵, $Z'=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$. 将线性代换(2)代入(1), 得 $X=(AB)Z$. 这是数域 P 上由变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的线性代换, 称为线性代换(1)与(2)的乘积. 线性代换乘积的矩阵等于各线性代换矩阵的乘积.

满秩线性代换(nonsingular linear substitution) 见"线性代换".

非退化线性代换(nonsingular linear substitution) 见"线性代换".

线性代换的逆代换(inverse transformation of linear substitution) 见"线性代换".

二次型的等价(equivalence of quadratic forms) 亦称二次型的相合. 二次型分类中的一个概念. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是数域 P 上的两个二次型, 若可通过满秩线性代换(参见"线性代换")把 f 变成 g, 则 f 与 g 称为等价的, 亦称相合的. 数域 P 上两个二次型等价的充分必要条件为: 它们的矩阵是合同的. 数域 P 上的二次型的等价满足反身性、对称性和传递性. 因此, P 上的 n 元二次型可以按等价来分类, 每个这样的类, 称为一个等价类或相合类.

二次型的相合(congruent of quadratic forms) 即"二次型的等价".

二次型的标准形(standard form of a quadratic form) 一种特殊的二次型. 即只含变量平方项的二次型. $d(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 称为对角二次型, 亦称典型二次型. 任何 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可以通过适当的非退化线性代换化为对角二次型, 该对角二次型称为二次型 f 的标准形. 二次型的标准形不是惟一的, 但是其标准形中不等于零的平方项的个数是惟一确定的, 它就是此二次型的秩.

对角二次型(diagonal quadratic form) 见"二次型的标准形".

典型二次型(canonical quadratic form) 见"二次型的标准形".

实二次型(real quadratic form) 一类重要的二次型. 指实数域上的二次型. 任意实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可以通过实满秩线性代换化为形如 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ 的标准形. 这种标准形称为实二次型 f 的规范型或正规型, 其中 r 是 f 的秩, 正平方项个数 p 称为 f 的正惯性指数, 负平方项个数 $q=r-p$ 称为 f 的负惯性指数, $s=p-q$ 称为 f 的符号差. 实二次型的正、负惯性指数是惟一确定的, 此称为实二次型的惯性定律, 亦称惯性定理. 此定理由西尔维斯特(Sylvester, J. J.)给出, 故亦称西尔维斯特定理. 但他认为不证自明. 雅可比(Jacobi, C. G. J.)也独立发现并证明了这个定理. 两个 n 元实二次型等价的充分必要条件是: 它们有相同的秩, 且有相同的正惯性指数(或有相同的秩与符号差).

实二次型的规范型(normal form of a real quadratic form) 见"实二次型".

实二次型的正惯性指数(positive inertial index on a real quadratic form) 见"实二次型".

实二次型的负惯性指数(negative index on a real quadratic form) 见"实二次型".

实二次型的符号差(signature of a real quadratic form) 见"实二次型".

实二次型的西尔维斯特定理(Sylvester theorem on real quadratic forms) 见"实二次型".

实二次型的惯性定律(law of inertia on real quadratic forms) 见"实二次型".

复二次型(complex quadratic form) 一类重要的二次型. 指复数域上的二次型. 任意复二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可经复满秩线性代换化为形如 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$ 的标准形, 其中 r 是二次型 f 的秩. 这种标准形是由 f 所惟一确定的, 称为复二次型 f 的规范型, 亦称正规型. 两个 n 元复二次型等价的充分必要条件是: 它们有相同的秩.

复二次型的规范型(normal form of complex quadratic form) 见"复二次型".

定型二次型(definite quadratic form) 实二次型的类型. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个实二次型, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意 n 个不全为零的实数. 实二次型分类如下:

1. 若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$, 则 f 称为正定的.
2. 若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$, 则 f 称为负定的.
3. 若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geqslant 0$, 则 f 称为半正定的.
4. 若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leqslant 0$, 则 f 称为半负定的.
5. 其他情形的 f 称为不定的.

正定、半正定、负定、半负定的二次型合称为定型二次型; 不定的二次型称为不定型二次型. 高斯

(Gauss,C. F.)在1801年出版的《算术的研究》中包含了对二次型的探讨. 他用行列式表示二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 的判别式,还引进了正定、半正定、负定的概念. 他引进的负定概念实际上是现在的半负定.

不定型二次型(indefinite quadratic form)　见“定型二次型”.

半负定二次型(negative semi-definite quadratic form)　见“定型二次型”.

半正定二次型(positive semi-definite quadratic form)　见“定型二次型”.

正定二次型(positive definite quadratic form)　见“定型二次型”.

负定二次型(negative definite quadratic form)　见“定型二次型”.

正定矩阵(positive definite matrix)　一种实对称矩阵. 正定二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 的矩阵 $A(A^T)$ 称为正定矩阵. 正定矩阵有以下性质:

1. 正定矩阵的行列式恒为正.
2. 实对称矩阵 A 正定当且仅当 A 与单位矩阵合同.
3. A 是正定矩阵当且仅当 A^{-1} 是正定矩阵.
4. 两个正定矩阵的和是正定矩阵.
5. 正实数与正定矩阵的乘积是正定矩阵.

对于 n 阶实对称矩阵 A,下列条件是等价的:

1. A 是正定矩阵.
2. A 的一切顺序主子式均为正.
3. A 的一切主子式均为正.
4. A 的特征值均为正.
5. 存在实可逆矩阵 C,使 $A=C'C$.
6. 存在秩为 n 的 $m\times n$ 实矩阵 B,使 $A=B'B$.
7. 存在主对角线元素全为正的实三角矩阵 R,使 $A=R'R$.

樊-塔尔斯基定理(Fan-Tarski theorem)　一个判断矩阵乘积是否正定的定理. 设 A 是正定矩阵, AB 是实对称矩阵,则 AB 是正定的充分必要条件为:B 的特征值全大于零. 该定理由樊𰻞和塔尔斯基(Tarski,A.)提出.

正定二次型的判别法(criterion for positive definite quadratic forms)　实二次型正定的充分必要条件. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX(A'=A)$ 是一个实二次型,则下列条件等价:

1. f 是正定的,即对于任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$, $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$.
2. f 有标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$,而 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 皆为正实数.
3. f 的正惯性指数是 n.
4. A 为正定矩阵(参见“正定矩阵”).

双线性型(bilinear form)　二次型概念的推广. 对两组变数都是线性的多项式,亦即数域 P 上的 $n+m$ 个文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j, \quad (1)$$

令 $X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Y'=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$, $A=(a_{ij})_{n\times m}$,则 $f=X'AY$ 称为(1)中的双线性型 f 的矩阵表示,A 称为 f 的矩阵,矩阵 A 的秩称为 f 的秩. 双线性型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 可以通过两个满秩线性代换化为 $u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_rv_r$,其中 r 是矩阵 A 的秩. 如果 $n=m$,A 是对称矩阵,则双线性型 f 称为对称双线性型.

对称双线性型(symmetric bilinear form)　见“双线性型”.

对称矩阵的合同标准形(congruent canonical form of symmetric matrices)　一种对角形矩阵. 数域 P 上的任意 n 阶对称矩阵 A 必与 P 上的一个对角形矩阵 $D=[d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0]$ 合同,D 称为矩阵 A 的合同标准形. 矩阵 A 的合同标准形不是惟一的,但其对角线上非零元素的个数是惟一的,等于 A 的秩. 对任意秩为 r 的 n 阶复对称矩阵 A,总存在 n 阶复可逆矩阵 C,使 $D=C'AC=[E_r,0_{n-r}]$,D 称为复对称矩阵 A 的合同标准形. 两个 n 阶复对称矩阵合同当且仅当它们有相同的合同标准形,即它们有相同的秩. 因此,n 阶复对称矩阵有 $n+1$ 个合同类. 对任意秩为 r 的 n 阶实对称矩阵 A,总存在实可逆矩阵 C,使 $D=C'AC=[E_p,-E_{r-p},0_{n-r}]$,$D$ 中对角线上1的个数是 p,-1 的个数是 $r-p$,0的个数是 $n-r$,D 称为实对称矩阵 A 的合同标准形. 两个 n 阶实对称矩阵合同当且仅当它们有相同的合同标准形. 因此,n 阶实对称矩阵有 $(n+1)(n+2)/2$ 个合同类.

复对称矩阵的合同标准形(congruent canonical form of complex symmetric matrices)　见“对称矩阵的合同标准形”.

实对称矩阵的合同标准形(congruent canonical form of real symmetric matrices)　见“对称矩阵的合同标准形”.

化二次型为标准形的方法(reduction of a quadratic form to its standard form)　二次型理论的主要问题之一. 给定数域 P 上的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j = X'AX \quad (A'=A),$$

其中 $A=(a_{ij})$, $X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 化二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为标准形的方法有:

1. 配方法,亦称拉格朗日法.

1）若 $a_{11}\neq 0$，对 x_1 配方，设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=a_{11}(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j,$$

其中 b_{ij} 是由前面的与 x_1 有关的配方后出现的 x_ix_j $(i,j\geqslant 2)$ 项的系数和后面原有的 x_ix_j 项系数合并而成的. 作非退化的线性代换

$$\begin{cases}x_1=y_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}y_j,\\ x_2=y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=y_n,\end{cases}$$

则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}y_1^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j,$$

式中

$$\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j$$

是一个 $n-1$ 元的二次型（如果 $a_{11}=0$，而某个 $a_{ii}\neq 0$，则对 x_i 配方）. 在某个 y_i^2 的系数不为零的情况下，可依此法继续作下去，便可将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为标准形.

2）如果进行到 k 步后得到

$$\sum_{i=1}^{t}d_iw_i^2+\sum_{i,j=t+1}^{n}f_{ij}w_iw_j,$$

其中 $f_{ii}=0$ $(i=t+1,\cdots,n)$，但 $f_{rs}\neq 0$ $(r\neq s)$. 作线性代换 $w_r=u_r+u_s$，$w_s=u_r-u_s$，$w_p=u_p(p\neq r,s)$ 后，便出现系数非零的平方项. 于是可继续进行 1）中的步骤，直到将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为标准形. 18 世纪末，拉格朗日（Lagrange，J. L.）引入 n 个文字的二次型，并给出了化二次型为标准形的上述方法.

2. 初等变换法. 对二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 A 作同类型的行与列的初等变换，使所得的矩阵 D 为对角形，即

$$E_m'(E_{m-1}'\cdots(E_2'(E_1'AE_1)E_2)\cdots E_{m-1})E_m=D,$$

其中 E_i 为初等矩阵（$i=1,2,\cdots,m$）. 以 D 为矩阵的二次型就是二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形.

化实二次型对为平方和（reduction of a pair of real quadratic forms to square sums） 化两个实二次型为标准形的一般方法. 设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX\quad(A'=A),$$
$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'BX\quad(B'=B)$$

是两个实二次型，且 g 是正定的，则存在满秩实线性代换 $X=TY$，其中 T 是 n 阶实满秩矩阵，使二次型 f 和 g 同时化为平方和，即

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$
$$g=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2,$$

其中 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是实数. 外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））于 1858 年给出了同时化两个二次型为平方和的一般方法，并把这一问题应用于微振动的力学问题. 1868 年，他完成了二次型的理论，并把这一理论推广到双线性型的情况.

零化子空间（annihilating subspace） m 维向量空间的与双线性函数相联系的一种子空间. 给定数域 P 上的双线性型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)=X'AY$，其中 $X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y'=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，A 是 f 的矩阵. 对确定的 n 维列向量 X，满足 $f=X'AY=0$ 的 m 维列向量 Y 的全体构成 m 维向量空间 P^m 的子空间，称为 f 的零化子空间. 设 $f=X'AY$ 是 P 上的双线性型，其中 $A=(a_{ij})$ 是 P 上的 $n\times m$ 矩阵，则 f 的零化子空间就是齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1m}y_m=0,\\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2m}y_m=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nm}y_m=0\end{cases}$$

的解空间.

半正定矩阵（positive semi-definite matrix） 正定矩阵的推广. 半正定实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 的矩阵 $A(A^T=A)$ 称为半正定矩阵. 半正定矩阵有如下的性质：

1. 半正定矩阵的行列式是非负的.
2. 两个半正定矩阵的和是半正定的.
3. 非负实数与半正定矩阵的数乘矩阵是半正定的.

设 A 是 n 阶实对称矩阵，则下列的条件等价：

1. A 是半正定的.
2. A 的所有主子式均为非负的.
3. A 的特征值均为非负的.
4. 存在 n 阶实矩阵 C，使 $A=C'C$.
5. 存在秩为 r 的 $r\times n$ 实矩阵 B，使 $A=B'B$.

负定矩阵（negative definite matrix） 一种特殊的实对称矩阵. 对于负定实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ $(A'=A)$ 的矩阵 A. 若实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半负定的，则 f 的矩阵 A 称为半负定的. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 是实二次型，则下列的条件等价：

1. f 是负定的，即对于任意不全为零的实数组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$.
2. f 有标准形 $-d_1y_1^2-d_2y_2^2-\cdots-d_ny_n^2$，而 d_i 全为正实数（$i=1,2,\cdots,n$）.
3. f 的负惯性指数为 n.
4. $(-1)^kA\begin{pmatrix}12\cdots k\\12\cdots k\end{pmatrix}>0(k=1,2,\cdots,n)$.
5. $(-1)^kA\begin{pmatrix}i_1i_2\cdots i_k\\i_1i_2\cdots i_k\end{pmatrix}>0(k=1,2,\cdots,n)$.

半负定矩阵(negative semi-definite matrix)　见"负定矩阵".

二次型的主轴问题(principal axis problem of a quadratic form)　二次型变换中的一个重要问题. 正交矩阵的实线性代换称为正交线性代换. 任何 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ $(A'=A)$都可经过正交线性代换化为标准形 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$,其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$为实对称矩阵 A 的全部特征值,且都是实数. 此称为实二次型的主轴问题,它是解析几何的中心二次曲线或中心二次曲面的方程化为标准形式问题的自然推广.

双线性型的等价(equivalence of bilinear forms)　二次型等价概念的推广. 对数域 P 上的对称双线性型

$$\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

施行非退化线性代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k'$$

与 $$y_j=\sum_{s=1}^{n}d_{js}y_s'\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

后,得到的双线性型为

$$\varphi_2(x_1',x_2',\cdots,x_n';y_1',y_2',\cdots,y_n')=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_i'y_j',$$

则称双线性型 φ_1 与 φ_2 等价. φ_1 与 φ_2 的矩阵间的关系为$(b_{ij})=(c_{ij})'(a_{ij})(d_{ij})$. 特别地,当$(c_{ij})=(d_{ij})$时,即非退化线性代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k'$$

与 $$y_j=\sum_{s=1}^{n}d_{js}y_s'$$

$(i,j=1,2,\cdots,n)$的矩阵相等时,称双线性型 φ_1 与 φ_2 是相合的,它们的矩阵间的关系为

$$(b_{ij})=(c_{ij})'(a_{ij})(c_{ij}).$$

双线性型的相合(congruent of bilinear forms)　见"双线性型的等价".

埃尔米特二次型(Hermitian quadratic form)　一种特殊的复二次型. 复数域上变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{x}_ix_j=\overline{X}'AX$$

称为埃尔米特二次型,A 称为 Q 的矩阵,其中

$$X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n),a_{ij}=\bar{a}_{ji},$$

因而 a_{ii}都是实数,即 $A=(a_{ij})$是埃尔米特矩阵. 作非退化线性代换 $X=TY$,其中

$$T=(t_{ij}),Y'=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

所得到的二次型的矩阵 B 与矩阵 A 的关系为 $B=\overline{T}'AT$. 对埃尔米特二次型也可以与二次型一样地定义秩、等价和相伴的双线性型等概念(参见"二次型"). 若 U 是酉矩阵,即 $\overline{U}'=U$,则任意的埃尔米特二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{X}'AX$可经过酉线性代换 $X=UY$(其中 U 是酉矩阵)化为

$$\lambda_1\bar{y}_1y_1+\lambda_2\bar{y}_2y_2+\cdots+\lambda_r\bar{y}_ry_r,$$

其中 r 为 Q 的秩,而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是矩阵 A 的非零特征值.

正定埃尔米特二次型(positive definite Hermitian quadratic form)　与实数域上正定二次型相对应的概念. 对于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的任何复数值,埃尔米特二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{X}'AX$ 的值都是实数. 设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意不全为零的复数.

1. 若恒有 $Q(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$,则 Q 称为正定二次型.

2. 若恒有$Q(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geqslant 0$,则 Q 称为半正定二次型.

3. 若恒有 $Q(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$,则 Q 称为负定二次型.

4. 若恒有 $Q(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leqslant 0$,则 Q 称为半负定二次型.

5. 其他情形的 Q 称为不定二次型.

正定、半正定、负定、半负定的埃尔米特二次型统称为定型的;不定的埃尔米特二次型称为不定型的. 埃尔米特二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{X}'AX$ 是正定的充分必要条件为:Q 的矩阵 A 的各阶顺序主子式都大于零.

半正定埃尔米特二次型(positive semi-definite Hermitian quadratic form)　见"正定埃尔米特二次型".

负定埃尔米特二次型(negative definite Hermitian quadratic form)　见"正定埃尔米特二次型".

半负定埃尔米特二次型(negative semi-definite Hermitian quadratic form)　见"正定埃尔米特二次型".

李亚普诺夫定理(Liapunov theorem)　关于实矩阵特征值的一个命题. 对 n 阶实矩阵 A 和 n 阶正定矩阵 C,若存在正定矩阵 B,使得 $AB+BA'=-C$,则 A 的特征值的实部必全小于零. 这个定理由李亚普诺夫(Ляпунов, A. M.)提出,在运动稳定性理论中起着重要的作用.

二次型束(pencil of quadratic forms)　一种带参数的二次型. 设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

是数域 P 上的两个二次型,则

$$f-\lambda g=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-\lambda b_{ij})x_ix_j$$

称为二次型束.此束的行列式

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & \cdots & a_{1n}-\lambda b_{1n} \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & \cdots & a_{2n}-\lambda b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-\lambda b_{n1} & a_{n2}-\lambda b_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

是 λ 的一个 n 次多项式,且可表为 $F(\lambda)=\alpha_0-\alpha_1\lambda+\cdots+(-1)^n\alpha_n\lambda^n$,其中 α_j 为 a_{ij} 与 b_{ij} 的多项式,且 α_0 与 α_n 分别为 f 与 g 的矩阵的行列式.

二次型的顶点(vertice of a quadratic form) 与二次型相关联的一组特殊的数.设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

是数域 P 上的一个二次型.P 中使方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ic_j=0$$

对任何 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都成立的一组不全为零的数 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为二次型 f 的一个顶点.P 上的不全为零的 n 元有序数组 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为 f 的顶点的充分必要条件是:$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=0, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n=0 \end{cases}$$

的非零解.

二次型的克罗内克方法(Kronecker method about a quadradic form) 化二次型为标准形的一种方法.给定数域 P 上的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX.$$

1.若 f 的秩 $r>0$,设 A 的左上角的 r 阶子式不为零.在齐次线性方程组 $AX=0$ 中,取 $c_{r+1}=c_{r+2}=\cdots=c_{n-1}=0,c_n=1$,若由此得二次型 f 的一个顶点 $(c_1,c_2,\cdots,c_r,0,\cdots,1)$,则二次型 f 经非退化线性代换

$$\begin{cases} x_i'=x_i-c_ix_n & (i=1,2,\cdots,r), \\ x_i'=x_i & (i=r+1,\cdots,n) \end{cases} \tag{1}$$

化为

$$f(x_1',x_2',\cdots,x_{n-1}',0)=\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}x_i'x_j'.$$

这是秩为 r 的、有 $n-1$ 个变量的二次型,且其矩阵的左上角有一个不为零的 r 阶子式.设此二次型经非退化线性代换

$$\begin{cases} x_i''=x_i'-c_i'x_{n-1} & (i=1,2,\cdots,r), \\ x_i''=x_i' & (i=r+1,\cdots,n-1) \end{cases} \tag{2}$$

化为

$$\sum_{i,j=1}^{n-2}a_{ij}x_i''x_j'',$$

在线性代换(2)中添加 $x_n''=x_n$,则它是 n 个变量的非退化的线性代换.于是二次型 f 经此线性代换与线性代换(1)的合成,可化为二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n-2}a_{ij}x_i''x_j''.$$

如此逐步下去,则二次型 f 可化为

$$\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}y_iy_j.$$

2.若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 r,由 1 可设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}x_ix_j;$$

1) 若 a_{rr} 的代数余子式 A_{rr} 不为零,由 1 知必存在非退化线性代换,使二次型

$$\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}x_ix_j-\frac{a}{A_{rr}}x_r^2=\sum_{i,j=1}^{r-1}a_{ij}x_i'x_j',$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{r-1}a_{ij}x_i'x_j'+\frac{a}{A_{rr}}x_r'^2,$$

其中 a 为二次型 f 的行列式.

2) 若 $A_{rr}=A_{r-1,r-1}=0,A_{r,r-1}\neq0$,则

$$\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}x_ix_j-\frac{2a}{A_{r,r-1}}x_rx_{r-1}$$

是秩为 $r-2$ 的二次型,且其系数矩阵左上角有一个 $r-2$ 阶不为零的子式.由 1 存在非退化的线性代换,使二次型

$$\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}x_ix_j-\frac{2a}{A_{r,r-1}}x_rx_{r-1}=\sum_{i,j=1}^{r-2}a_{ij}x'_ix'_j,$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{r}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{r-2}a_{ij}x'_ix'_j+\frac{2a}{A_{r,r-1}}x'_rx'_{r-1},$$

其中 a 为 f 的行列式.作非退化的线性代换

$$\begin{cases} x_i'=x_i'' & (i=1,2,\cdots,r-2), \\ x'_{r-1}=x''_{r-1}+x''_r, \\ x'_r=x''_{r-1}-x''_r, \end{cases} \tag{2}$$

则 f 可化为

$$\sum_{i,j=1}^{r-2}a_{ij}x''_ix''_j+\frac{2a}{A_{r,r-1}}(x''^2_{r-1}-x''^2_r).$$

反复地使用步骤 1)和 2),则二次型 f 可化为标准形 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2$,其中 $d_1,d_2,\cdots,d_r$ 皆不为零.

可约二次型(reducible quadratic form) 一种可分解的二次型.数域 P 上的二次型 f 可约,是指 f 等于两个一次型的乘积

$$f=(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)\cdot(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n).$$

数域 P 上的一个二次型可约的充分必要条件为:其

秩不大于 2.

线性空间

n 元向量(n-tuple vector)　亦称 n 维向量，普通平面和空间向量概念的推广. 一种特殊的矩阵. 数域 P 中的 n 个数的有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. $a_i(i=1,2,\cdots,n)$称为这个向量的分量或坐标. P 上全体 n 元向量构成的集合记为 P^n. P^n 中两个 n 元向量相等是指它们的对应分量完全相同. 根据需要，一个 n 元向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$也可以表示为

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

n 元向量常用希腊字母 α,β,γ 等表示. n 元向量的加法，P 中的数与 n 元向量的数量乘法（简称数乘）定义为：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n);$$
$$c(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$
$$=(ca_1,ca_2,\cdots,ca_n)\ (c\in P).$$

分量都是 0 的 n 元向量$(0,0,\cdots,0)$称为零向量，记为 $\mathbf{0}$；将 n 元向量 α 的各分量变号后所得到的向量，称为 α 的负向量，记为 $-\alpha$. P^n 的全体 n 元向量满足线性空间的全部运算规律，构成数域 P 上的一个线性空间，称为 P 上的 n 维向量空间，亦称 n 维矢量空间.

n 维向量(n-dimensional vector)　即"n 元向量".

n 维向量空间(n dimensional vector space)　见"n 元向量".

线性空间(linear space)　线性代数的基本概念和重要研究对象. 设 V 是非空集合，P 是数域. 若：

1. 在 V 中定义了加法，即对于 V 中任意两个元素 α 与 β，都有 V 中惟一确定的元素与它们对应，这个元素称为 α 与 β 的和，记为 $\alpha+\beta$.

2. 在 P 与 V 的元素间定义一种运算，称为数量乘法，亦称纯量乘法，简称数乘，即对于 P 中任意数 k 和 V 中的任意元素 α，有 V 中惟一确定的元素与它们对应，这个元素称为k与α的数乘向量，记为 $k\alpha$.

3. 加法与数量乘法满足以下的运算规律：

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

2) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

3) 在 V 中存在一个元素 $\mathbf{0}$，称为零元，它对 V 中任意元素 α，有 $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$.

4) 对任意 $\alpha\in V$，都存在 $\beta\in V$，使 $\alpha+\beta=\mathbf{0}$，β 称为 α 的负向量，记为 $-\alpha$.

5) $1\cdot\alpha=\alpha$.

6) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$.

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

其中 α,β,γ 是 V 中的任意元素，k,l 为 P 中的任意数，则 V 称为数域 P 上的线性空间，亦称向量空间. V 中的元素称为向量，V 的零元称为零向量，P 称为线性空间 V 的基域. 当 P 为实数域时，V 称为实线性空间；当 P 为复数域时，V 称为复线性空间. 令 V 是三维几何空间中全体向量（有向线段）的集合，则 V 关于向量加法（平行四边形法则）和实数与向量的数量乘法构成实数域上的线性空间；令 V 是数域 P 上全体 $m\times n$ 矩阵的集合，则 V 关于矩阵的加法和数与矩阵的数量乘法，构成数域 P 上的线性空间.

线性空间是在考察了大量的数学对象（如几何学与物理学中的向量，代数学中的 n 元向量、矩阵、多项式，分析学中的函数等）的本质属性后抽象出来的数学概念，近代数学中不少的研究对象，如赋范线性空间、模等都与线性空间有着密切的关系. 它的理论与方法已经渗透到自然科学、工程技术的许多领域. 哈密顿(Hamilton, W. R.)首先引进向量一词，并开创了向量理论和向量计算. 格拉斯曼(Grassmann, H. G.)最早提出多维欧几里得空间的系统理论. 1844—1847 年，他与柯西(Cauchy, A.-L.)分别提出了脱离一切空间直观的、成为一个纯粹数学概念的、抽象的 n 维空间. 特普利茨(Toeplitz, O.)将线性代数的主要定理推广到任意域上的一般的线性空间中.

向量空间(vector space)　见"线性空间".

线性空间的基域(base field of linear space)　见"线性空间".

实线性空间(real linear space)　见"线性空间".

复线性空间(complex linear space)　见"线性空间".

线性组合(linear combination)　线性代数的重要概念之一. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$是数域 P 上线性空间 V 中的 s 个向量. 如果 V 中的向量 α 可以表示为 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ $(k_i\in P, i=1,2,\cdots,s)$，则 α 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，亦称 α 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出或线性表示. 例如，在三维向量空间中，向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$可由向量组 $\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(0,0,1)$线性表出，即 $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$. 设 A 是数域 P 上的线性空间 V 的含有无限多个向量的子集合. 如果 V 的向量 α 可以由 A 中有限个向量线性表出，则称 α 是 A 的线性组合，亦称 α 可由 A 线性表示.

线性表示(linear expression)　见"线性组合".

向量组的等价(equivalence of vector systems)　向量组间的一种重要关系.如果线性空间 V 的向量组Ⅰ中的每个向量都可由 V 的向量组Ⅱ线性表出,并且向量组Ⅱ中的每个向量也可由向量组Ⅰ线性表出,则称向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价.向量组之间的等价满足:

1. 反身性:每个向量组都与自身等价.
2. 对称性:如果向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价,则向量组Ⅱ也与向量组Ⅰ等价.
3. 传递性:如果向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价,向量组Ⅱ与向量组Ⅲ等价,则向量组Ⅰ与向量组Ⅲ也等价.

线性相关(linear dependence)　线性代数的重要概念之一.设 V 是数域 P 上的线性空间,$\alpha_i \in V$ $(i=1,2,\cdots,s)$.如果存在 P 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$,则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关,且称 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为其相关系数;否则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.换言之,如果仅在 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零时才有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.单独零向量是线性相关的;单独一个非零向量是线性无关的.向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s>1)$线性相关的充分必要条件是:其中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表出.设 X 是线性空间 V 的非空子集合,如果 X 中任意有限个向量都线性无关,则称 X 是线性无关的;否则称 X 是线性相关的,即 X 中至少含有一个线性相关的有限子集.

相关系数(dependence coefficient)　见"线性相关".

线性无关(linear independence)　见"线性相关".

向量组的替换定理(substitution theorem of vector systems)　刻画两个向量组之间关系的重要命题.设(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与(Ⅱ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是线性空间 V 的两个向量组.如果向量组(Ⅰ)线性无关,且其中每个向量都可由向量组(Ⅱ)线性表出,则 $r\leqslant s$;而且可以对组(Ⅱ)中的向量重新排列,使得用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 代换其前 r 个向量后所得的向量组与向量组(Ⅱ)等价.在研究向量的线性相关性、线性空间的基与维数、余子空间等,特别是将 n 维线性空间中 $n-r$ 个线性无关向量补成基时,替换定理都起着重要的作用.

线性空间的维数(dimension of a linear space)　线性空间的重要不变量.如果数域 P 上的线性空间 V 中存在 n 个线性无关的向量,而任意 $n+1$ 个向量都线性相关,则称 V 为 n 维线性空间,数 n 称为 V 的维数,记为 $\dim V=n$.只含零向量的线性空间的维数规定为零.零维与 n 维线性空间称为有限维线性空间.如果在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量,则称 V 为无限维线性空间.例如,数域 P 上的一元多项式环 $P[x]$对多项式的加法和数与多项式的乘法构成的线性空间是无限维的.线性空间的维数与基域有关.例如,把复数域看成它自身上的线性空间时,它的维数是1;如果把它看成实数域上的线性空间,则它的维数是2.

有限维线性空间(finite dimensional linear space)　见"线性空间的维数".

无限维线性空间(infinite dimensional linear space)　见"线性空间的维数".

线性空间的基(basis of a linear space)　线性代数的重要概念之一.设 V 是数域 P 上的 n $(\geqslant 1)$维线性空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个向量组.如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,且 V 中任意的向量都是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合,则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的基或基底,基中所含向量的个数是不变的,就是线性空间的维数.零维线性空间没有基.向量 α 由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出的式子 $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$ 中,a_i 称为 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的第 i 个坐标或第 i 个分量.全体分量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标.V 中向量 α 的坐标由 α 与基惟一确定.$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基的充分必要条件是:V 中每一个向量都可惟一地由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出.设 V 是数域 P 上的无限维线性空间,B 是 V 的含有无限个向量的子集.如果 B 中任意有限个向量都线性无关,且 V 中每个向量都可由 B 中有限个向量线性表出,则称 B 为 V 的基.数域 P 上的任意无限维线性空间的基是存在的.

向量的坐标(coordinates of a vector)　见"线性空间的基".

过渡矩阵(transition matrix)　亦称演化矩阵.联系线性空间中的基之间的关系的矩阵.设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon_n'$ 都是 V 的基.若

$$\varepsilon'_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_i \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

由 ε'_j 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的坐标$(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})$为第 j 列所构成的 n 阶矩阵(a_{ij}),称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵,它们之间的关系可以表示为$(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(a_{ij})$.过渡矩阵是可逆的.因此,若$(a_{ij})$是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵,则$(a_{ij})^{-1}$是基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵.过渡矩阵是线性代数中的一个重要概念,它在向量坐标的计算、线性变

换的矩阵表示、线性变换的特征值和特征向量等与线性空间基的选取有关问题中起着重要的作用.

演化矩阵(transition matrix)　即"过渡矩阵".

坐标变换公式(formula of a coordinates transformation)　线性空间的向量关于不同基的坐标之间的关系式.设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的基,A 是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的过渡矩阵.若 V 中的向量 α 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的坐标分别为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$,则 α 的坐标之间的关系

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

称为坐标变换公式.

极大无关组(maximal independent system)　线性代数的重要概念之一.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是数域 P 上线性空间 V 的一个向量组,如果其部分向量组 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性无关,且每个 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都可由它线性表出,则称 $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\cdots,\alpha_{j_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大无关组.任何向量组都与其极大无关组等价;一个向量组的任意两个极大无关组所含向量个数是相同的.若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组含有 s 个向量,则称 s 为此向量组的秩,记为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=s$.全为零向量的向量组是惟一没有极大无关组的向量组,规定其秩为零.若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 线性表出,则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\leqslant r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$;若两个向量组等价,则它们有相同的秩.极大无关组的概念可以推广到含无限个向量的情形.因此,线性空间 V 的任一个基可看成 V 的极大无关组.特别的,齐次线性方程组的基础解系是其解空间的极大无关组.

向量组的秩(rank of a vector system)　见"极大无关组".

线性子空间(linear subspace)　线性代数的重要概念之一.设 W 是数域 P 上线性空间 V 的非空子集合,如果对于 V 的加法与纯量乘法 W 也构成 P 上的线性空间,则 W 称为 V 的线性子空间,简称子空间.V 的非空子集 W 是 V 的子空间的充分必要条件为:

1.W 中任两个向量的和仍属于 W.

2.数域 P 中的任一个数与 W 中的任一个向量相乘也属于 W.

线性空间 V 自身以及单个零向量构成的线性空间都是 V 的线性子空间.这两个子空间称为 V 的平凡子空间.其他的线性子空间称为 V 的非平凡子空间或真子空间.

平凡子空间(trivial linear subspaces)　见"线性子空间".

非平凡子空间(non-trivial linear subspaces)　见"线性子空间".

真子空间(proper subspace)　见"线性子空间".

生成子空间(generated subspace)　构造子空间的一种方法.设 M 是数域 P 上线性空间 V 的子集合,M 中向量的所有线性组合构成 V 的一个子空间,称为由 M 生成的子空间,记为 $L(M)$,M 称为 $L(M)$的生成集,亦称生成系.V 中任意包含 M 的子空间必包含 $L(M)$,因而 $L(M)$是包含 M 的最小子空间.设 M,N 是线性空间 V 的两个子集,则 $L(M)=L(N)$当且仅当 M 与 N 作为向量组等价.

循环子空间(cyclic subspace)　见"生成子空间".

子空间的和(sum of subspaces)　子空间的基本运算之一.设 V 是数域 P 上的一个线性空间,V_1 和 V_2 是 V 的子空间.令 $W=\{\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_i\in V_i,i=1,2\}$,则 W 是 V 的子空间,称为 V_1 与 V_2 的和,记为 V_1+V_2.子空间的和满足交换律与结合律.因此,可以定义多个子空间的和.子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是由所有向量 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 构成的子空间,其中$\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,s$.

子空间的交(intersection of subspaces)　子空间的基本运算之一.设 V 是数域 P 上的线性空间,V_1 与 V_2 是 V 的子空间,则它们在集合意义下的交 $V_1\cap V_2$ 是 V 的子空间,称为 V_1 与 V_2 的交空间,简称子空间的交.子空间的交满足交换律和结合律.因此,多个子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的交 $V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s$ 也是 V 的子空间.

子空间的直和(direct sum of subspaces)　子空间的一种特殊运算.设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,如果 V_1+V_2 中每个向量 α 的分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ $(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$是惟一的,则和 V_1+V_2 称为直和,亦称直接和,记为 $V_1\oplus V_2$ 或 $V_1\dot{+}V_2$.设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,则下列命题是等价的:

1.V_1+V_2 是直和.

2.$\alpha_1+\alpha_2=\mathbf{0}$ $(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$,当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\mathbf{0}$,即零向量的表示法是惟一的.

3.V_1 与 V_2 的交 $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$.

4.$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

类似地有多个子空间的直和的定义,并且对于

$s(>2)$个子空间的直和也有相应于上述1至4的等价命题,其中命题3需改为

$$V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\mathbf{0}\} \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

或 $$V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{\mathbf{0}\} \quad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

余子空间(complementary subspace) 亦称补子空间.与给定子空间的直和是线性空间的子空间.设W是数域P上的线性空间V的子空间,满足条件$V=W+W'$,且$W \cap W'=\{\mathbf{0}\}$的子空间W'称为W的余子空间.如果W是一个真子空间,则W的余子空间是不惟一的.设W是n维线性空间V的一个子空间,且$\dim W=m<n$.若$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_m'$是$W$的一个基,则存在$\varepsilon_{m+1}', \cdots, \varepsilon_n'$,使$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_m', \varepsilon_{m+1}', \cdots, \varepsilon_n'$是$V$的一个基.由$\varepsilon_{m+1}', \cdots, \varepsilon_n'$生成的子空间就是$W$的一个余子空间.

补子空间(complementary subspace) 即"余子空间".

维数公式(dimension formula) 刻画两子空间维数间的一种重要关系.数域P上线性空间V的两个子空间V_1, V_2的维数之间的关系式

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2).$$

$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$,当且仅当$V_1 \cap V_2=\{\mathbf{0}\}$,即$V_1+V_2$是直和.以上的维数公式可推广如下:设$V_1, V_2, \cdots, V_s$是线性空间$V$的$s\ (s \geqslant 2)$个子空间,则其维数之间有以下关系

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_i = \dim\Big(\sum_{i=1}^{s} V_i\Big) + \sum_{i=2}^{s} \dim\Big(V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j\Big).$$

线性空间的内直和(inner direct sum of linear spaces) 线性空间的直和分解.是线性空间与子空间之间的一种重要关系.设V是数域P上的一个线性空间,V_i是V的子空间,$i \in I$.若V是V_i的直和:

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i,$$

则称V是子空间V_i的内直和,$i \in I$.设V是P上的n维线性空间,则V可以表为n个一维子空间的内直和.

线性空间的外直和(exterior direct sum of linear spaces) 由若干线性空间构成的一种线性空间.设$V_i (i \in I)$是数域P上的线性空间,令

$$V = \prod_{i \in I} V_i = \{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots) \mid \boldsymbol{v}_i \in V_i, i \in I, \text{且只有有限个}\ \boldsymbol{v}_i\ \text{不为}\ 0\}.$$

在V中定义元素相等为$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots)=(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots)$,当且仅当$\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{v}_j'$,对任意$j \in I$,定义元素的和为$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots)+(\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \cdots)=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_2', \cdots)$,定义$V$中的数量乘法为$k(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots)=(k\boldsymbol{v}_1, k\boldsymbol{v}_2, \cdots)$,对任意$k \in P$,则$V$构成$P$上的一个线性空间,称为$V_i (i \in I)$的外直和.线性空间的外直和$\prod_{i \in I} V_i$与内直和$\bigoplus_{i \in I} V_i$是同构的,因此统称为线性空间$V_i (i \in I)$的直和.

线性空间的直和(direct sum of linear spaces) 见"线性空间的外直和".

线性空间的同构(isomorphism of linear spaces) 线性代数的重要概念之一.设V与V'是数域P上的两个线性空间,σ是V到V'的一个双射,若对于V中的任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$与$P$中的任意数$k$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$,$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$,则$\sigma$称为$V$到$V'$的同构映射,$V$与$V'$称为在映射$\sigma$下同构,记为$V \cong V'$.线性空间的同构具有反身性、对称性和传递性.同构映射把零向量变为零向量;它还保持向量间的线性关系;把线性无关的向量组变为线性无关的向量组.因此,把线性空间的基变成基;把线性相关的向量组变成线性相关的向量组.数域P上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是:它们的维数相等.若只考虑线性空间的代数性质,则同构的线性空间可以不加区别.因此,维数是有限维线性空间的最本质的特征,P^n可以作为数域P上n维线性空间的代表.

线性空间的同构映射(isomorphic mapping of linear spaces) 见"线性空间的同构".

线性变换与λ矩阵

线性变换(linear transformation) 线性代数的重要概念之一.设σ是数域P上的线性空间V的一个变换.若对于V中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$与$P$中的任意数$k$,有$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$,$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$,则称$\sigma$是$V$的一个线性变换.设$\sigma$是线性空间$V$的一个变换,若对于$V$中任意向量$\boldsymbol{\alpha}$,有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$,则$\sigma$是$V$的线性变换,称为恒等变换,亦称单位变换,记为$I$.若$V$的变换$\sigma$对于$V$中的任意向量$\boldsymbol{\alpha}$,有$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$,则$\sigma$是$V$的线性变换,称为零变换,记为0.线性变换是欧氏几何中的变换、解析几何中的某些坐标变换、数学分析中的某些变量代换以及其他数学分支中某些类似的变换的抽象、概括与推广.数域上线性空间的线性变换可以推广为同一个域上的两个不同线性空间的线性映射.线性变换不仅是线性代数的主要研究对象之一,也是数学中的一个重要的概念.近代数学中的许多分支的研究对象,如泛函分析中的线性算子.同调代数中的模同态等都与线性变换有密切的联系.

单位变换(unit transformation) 见"线性变换".

恒等变换(identity transformation) 见"线性变换".

零变换(null transformation)　见"线性变换".

数乘变换(transformation of scalar multiplication)　一种线性变换.设V是数域P上的一个线性空间,k是P中的一个数,对任意$\alpha\in V$,由$\sigma(\alpha)=k\alpha$所决定的线性变换σ,称为数乘变换,记为k^*.这样1^*就是单位变换,0^*就是零变换.

线性变换的加法(addition of linear transformations)　线性变换的基本运算之一.设σ,τ是数域P上线性空间V的两个线性变换,σ与τ的和定义为$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)$,其中$\alpha$是$V$中的任意向量.线性变换的和仍是线性变换,且线性变换的加法满足结合律与交换律.设σ是P上线性空间V的线性变换,σ的负变换$-\sigma$为$(-\sigma)(\alpha)=-\sigma(\alpha)$,其中$\alpha$是$V$中的任意向量.线性变换的负变换也是线性变换.若$\sigma,\tau$是线性空间$V$的线性变换,线性变换$\sigma+(-\tau)$称为$\sigma$与$\tau$的差,记为$\sigma-\tau$.

负变换(negative transformation)　见"线性变换的加法".

线性变换的乘法(multiplication of linear transformations)　线性变换的基本运算之一.设σ,τ是数域P上线性空间V的两个线性变换,σ与τ的乘积$\sigma\tau$定义为$(\sigma\tau)(\alpha)=\sigma(\tau(\alpha))$,其中$\alpha$是$V$的任意向量.线性变换的乘积仍为线性变换,且线性变换的乘法满足结合律和乘法对加法的左、右分配律,但不满足交换律.例如,在实函数空间$\mathrm{R}[x]$中,线性变换

$$D(f(x)) = f'(x)$$

与

$$J(f(x)) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

的乘积$DJ=I$,但$JD\neq I$,其中$f(x)\in\mathrm{R}[x]$.

线性变换的数量乘法(scalar multiplication of a linear transformation)　线性变换的基本运算之一.设σ是数域P上线性空间V的一个线性变换,$k\in P$.数k与σ的数乘定义为$(k\sigma)(\alpha)=k\sigma(\alpha)$,其中$\alpha$是$V$中的任意向量.数与线性变换的数乘仍然是线性变换,且满足以下的规律:$(kl)\sigma=k(l\sigma)$,$(k+l)\sigma=k\sigma+l\sigma$,$k(\sigma+\tau)=k\sigma+k\tau$,$1\cdot\sigma=\sigma$,其中$k,l\in P$;$\sigma,\tau$是$V$的线性变换.令$L(V)$表示数域$P$上$n$维线性空间$V$的全体线性变换所构成的集合,则$L(V)$对线性变换的加法与数量乘法构成$P$上的一个线性空间,且$L(V)$同构于$P$上的矩阵向量空间$P^{n\times n}$.因此$L(V)$的维数等于$n^2$.

可逆线性变换(invertible linear transformation)　亦称非退化线性变换,或满秩线性变换.一种特殊的线性变换.设V是数域P上的线性空间,σ是V的线性变换.若存在V的变换τ,使$\sigma\tau=\tau\sigma=I$,其中I为单位变换,则σ称为可逆线性变换,τ称为σ的逆变换.V上的可逆线性变换σ的逆变换仍为V的线性变换,且是惟一的,记为σ^{-1}.线性空间的可逆线性变换的集合,对于变换的乘法构成乘法群,称为非奇异线性变换群.

满秩线性变换(nonsingular linear transformation)　即"可逆线性变换".

非退化线性变换(nondegenerate linear transformation)　即"可逆线性变换".

逆变换(inverse transformation)　见"可逆线性变换".

非奇异线性变换群(group of nonsingular linear transformations)　见"可逆线性变换".

线性变换多项式(polynomial of a linear transformation)　一种特殊的线性变换.设σ是数域P上线性空间V的线性变换.规定$\sigma^0=I$,$\sigma^n=\sigma\sigma\cdots\sigma$($n$个$\sigma$)称为线性变换$\sigma$的$n$次幂,其中$n$为正整数.线性变换的幂满足指数法则:$\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n}$,$(\sigma^m)^n=\sigma^{mn}$$(m,n\geqslant 0)$.若$\sigma$是可逆的线性变换,令$\sigma^{-n}=(\sigma^{-1})^n$,其中$n$是正整数,则指数法则对一切整数都成立.设$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$是数域$P$上的多项式,$\sigma$是$V$上的线性变换,令$f(\sigma)=a_m\sigma^m+a_{m-1}\sigma^{m-1}+\cdots+a_0I$,则$f(\sigma)$是$V$上的线性变换,称为线性变换$\sigma$的多项式.

设$h(x)=f(x)+g(x)$,$p(x)=f(x)g(x)$是数域P上的多项式,σ是V上的线性变换,则

$$h(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma),$$
$$p(\sigma)=f(\sigma)g(\sigma),$$
$$f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma).$$

线性变换的值域(range of a linear transformation)　线性变换确定的子空间.设σ是数域P上线性空间V的线性变换,V的所有元素在σ下的象所成的集合$\sigma(V)$,或记为$\mathrm{Im}(\sigma)$,构成V的子空间,称为σ的值域或象空间.V中在σ下以零向量为象的所有向量所成的集合$\sigma^{-1}(\mathbf{0})$,即$\sigma^{-1}(\mathbf{0})=\{\alpha|\alpha\in V$,且$\sigma(\alpha)=\mathbf{0}\}$,构成$V$的一个子空间,称为$\sigma$的核.$\sigma$的核也记为$\mathrm{Ker}\sigma$.设$V$是$P$上的$n$维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基,则$\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$.$\sigma(V)$的维数称为线性变换$\sigma$的秩,$\sigma$的核的维数称为$\sigma$的零度或$\sigma$的亏.$\sigma$的秩与$\sigma$的零度的和等于$V$的维数$n$.

线性变换的象空间(image space of a linear transformation)　见"线性变换的值域".

线性变换的核(kernel of a linear transformation)　见"线性变换的值域".

线性变换的秩(rank of a linear transformation)　见"线性变换的值域".

线性变换的零度(nullity of a linear transformation)　见"线性变换的值域".

线性变换的亏(nullity of a linear transforma-

tion） 即“线性变换的零度”.

线性变换矩阵(matrix of a linear transformation） 一种特殊矩阵. 指线性变换的数量表示. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基，σ 是 V 的线性变换. 若

$$\sigma(\varepsilon_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\varepsilon_i\ (j=1,2,\cdots,n),$$

则以 $\sigma(\varepsilon_j)$ 的坐标 $(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})$ 为第 j 列构成的 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为 σ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵，亦称线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵，或线性变换 σ 的矩阵. 令 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))$，则它们之间的关系可表为 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$. 因此，每个线性变换在 V 的一个基下对应一个 n 阶矩阵，且有以下性质：

1. 线性变换的和对应于矩阵的和.
2. 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积.
3. 线性变换的数乘对应于矩阵的数乘.
4. 可逆的线性变换对应于可逆矩阵，且逆变换对应于逆矩阵.

设线性空间 V 的线性变换 σ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的矩阵分别为 A 与 B，基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵是 X，则 $B=X^{-1}AX$. 因此，线性变换关于 V 的不同基的矩阵是相似的. 线性变换和矩阵的这种对应关系，使对抽象的线性变换的研究转化为对具体的矩阵的研究. 但是线性变换的矩阵与线性空间基的选取有关，而线性变换不受基变动的影响.

投影变换(projection transformation） 一种特殊的线性变换. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n(n>m)$ 是数域 P 上线性空间 V 的基，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 V 的子空间 W 的基. 由

$$\begin{cases}\sigma(\varepsilon_i)=\varepsilon_i & (i=1,2,\cdots,m),\\ \sigma(\varepsilon_i)=\mathbf{0} & (i=m+1,\cdots,n)\end{cases}$$

所确定的线性变换 σ 称为线性空间 V 对子空间 W 的投影变换. 投影变换 σ 满足 $\sigma^2=\sigma$，且在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& \ddots \\ &&&&&& 0\end{pmatrix}.$$

向量的变换(vector transformation） 几何空间点变换公式的推广. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基，σ 是 V 的线性变换，且 σ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵为 A. 若 α 是 V 的任意向量，α 与 $\sigma(\alpha)$ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则向量 α 的变换公式为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

矩阵的相似(similar of matrices） 矩阵间的一种等价关系. 设 A,B 是数域 P 上的两个 n 阶矩阵，若有 P 上的 n 阶可逆矩阵 C，使 $B=C^{-1}AC$，则称 A 与 B 相似，亦称 A 相似于 B，记为 $A\sim B$. 矩阵的相似具有反身性、对称性和传递性，因而可以将矩阵按相似关系分类，所得的类称为相似类. 相似矩阵的行列式相等，而且有相同的秩与特征值. 对于 n 维线性空间 V，线性变换关于不同基的矩阵是相似的；反之，若两个 n 阶矩阵相似，则它们可以成为 V 的一个线性变换关于 V 的某两个基的矩阵.

线性变换行列式(determinant of a linear transformation） 一种特殊行列式. 指线性变换矩阵的行列式. 设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换. 因为相似矩阵有相等的行列式，所以可以把 σ 关于 V 的任意基的矩阵的行列式，称为线性变换 σ 的行列式.

矩阵的特征多项式(characteristic polynomial of matrices） 线性代数的重要概念之一. 设 $A=(a_{ij})$ 是数域 P 上的 n 阶矩阵，$\lambda E-A$ 称为 A 的特征矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$ 称为 A 的特征多项式，式中 $b_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的一切 k 阶主子式之和乘以 $(-1)^k$，即

$$b_k=(-1)^k\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{vmatrix}.$$

由矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 所确定的方程 $f(\lambda)=0$ 称为 A 的特征方程，亦称长期方程，又称永年方程. 它在几何学、微分方程、物理学、天文学、医学等学科中均有广泛的应用. 相似矩阵有相同的特征多项式. 因此，n 维线性空间的线性变换关于任何基的矩阵都有相同的特征多项式，称为线性变换的特征多项式.

特征矩阵(characteristic matrix） 见“矩阵的特征多项式”.

矩阵的特征方程(characteristic equation of matrix） 见“矩阵的特征多项式”.

线性变换的特征多项式(characteristic polynomial of a linear transformation） 见“特征多项式”.

不变子空间(invariant subspace） 亦称稳定子

空间，又称平凡子空间. 与线性变换有关的一种子空间. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间. 若对 W 中的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 也属于 W，则称 W 是 σ 的不变子空间或称 σ 子空间. σ 的值域与核以及 σ 的特征子空间等都是 σ 的不变子空间. 有限维的复线性空间的所有的线性变换都有一维不变子空间；有限维实线性空间的线性变换都有一维或二维不变子空间. 特别地，奇数维的实线性空间的每一个线性变换都有一维的不变子空间.

稳定子空间(stable subspace)　即"不变子空间".

平凡子空间(normal subspace)　即"不变子空间".

导出线性变换(induced linear transformation)　一类线性变换. 设 V 是数域 P 上的线性空间，W 是 V 的子空间. 若 W 是 V 的线性变换 σ 的不变子空间，当考虑 σ 在 W 上的作用时，则得到 W 的一个线性变换，称为 σ 在 W 上的导出线性变换，记为$\sigma|_W$. 导出线性变换在线性空间的分解中有重要应用.

线性变换集的不变子空间(invariant subspace of the set of linear transformations)　一类特殊的子空间. 设 S 是数域 P 上线性空间 V 的一些线性变换所成的集合. 若 V 的子空间 W 对 S 中每个线性变换都是不变的，则 W 称为 S 的不变子空间. 如果 S 在 V 中没有非平凡的不变子空间，则称 S 是不可约的；否则称 S 是可约的. 设 S 是可约的，若 V 的线性变换 σ 与 S 中每个线性变换都可交换，则 σ 或者是零变换，或者是可逆变换.

线性变换矩阵的简化(simplification of the matrix of a linear transformation)　线性变换矩阵的简单形状. 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则 σ 在 V 的一个基下的矩阵形状分别为：

1. 存在非平凡的 σ 子空间 W 的充分必要条件为：σ 在 V 的一个基下的矩阵的形状为

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

此时 $\sigma|_W$ 在 W 的某个基下的矩阵是 A_1.

2. 存在非平凡 σ 子空间 $W_1, W_2, \cdots, W_s$，使 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$ 的充分必要条件为：σ 在 V 的一个基下的矩阵是准对角矩阵$[A_1, A_2, \cdots, A_s]$，此时，$\sigma|_{W_i}$在 W_i 的某个基下的矩阵是 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$.

3. V 是 n 个一维 σ 子空间的直和的充分必要条件为：σ 在 V 的一个基下的矩阵是对角形.

特征子空间(characteristic subspace)　与特征值相联系的一种子空间. 设 V 是数域 P 上的线性空间，σ 是 V 的线性变换，λ_0 是 P 中的数，则 $V_{\lambda_0} = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} \in V$，且 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_0 \boldsymbol{\alpha}\}$ 是 V 的非空子集. 如果 $V_{\lambda_0} = \{\mathbf{0}\}$，则 λ_0 不是 σ 的特征值，此时 V_{λ_0}是 V 的零子空间；如果 V_{λ_0} 中含有非零向量，则 λ_0 是 σ 的特征值，此时，V_{λ_0}是由 σ 的属于 λ_0 的一切特征向量及零向量组成的，它是 V 的子空间，称为 σ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间. 设 V 是 P 上的 n 维线性空间，则线性变换 σ 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数等于 $n - r(\lambda_0 E - A)$，其中 A 是 σ 在 V 的基下的矩阵，即 V_{λ_0} 的维数等于属于 λ_0 的线性无关的特征向量的最大个数. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是线性变换 σ 的互不相同的特征值，则特征子空间的和 $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_k}$是直和.

特征向量系(system of characteristic vectors)　线性代数的重要概念之一. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是 σ 的 t 个互不相同的特征值 $(t \leqslant n)$，$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_t}$分别为相应的特征子空间，其维数分别为 $s_1, s_2, \cdots, s_t$，则它们的基 $\boldsymbol{v}_{11}, \cdots, \boldsymbol{v}_{1s_1}, \boldsymbol{v}_{21}, \cdots, \boldsymbol{v}_{2s_2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{t1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{ts_t}$称为线性变换 σ 的特征向量系. 若线性变换的特征向量系所含向量个数等于 n，则称其特征向量系是完全的.

完全特征向量系(complete system of characteristic vectors)　见"特征向量系".

哈密顿-凯莱定理(Hamilton-Cayley theorem)　矩阵的一个重要性质. 该定理表述为：设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n$ 是 A 的特征多项式，则

$$f(A) = A^n + b_1 A^{n-1} + \cdots + b_{n-1} A + b_n E = 0.$$

哈密顿(Hamilton, W. R.)在他所著《四元数讲义》一书中，涉及线性变换满足它的特征多项式的问题. 凯莱(Cayley, A.)在 1858 年的一篇文章中，对 $n = 3$ 的情形验证了此定理，但认为没有必要进一步证明. 弗罗贝尼乌斯(Frobenius, F. G.)于 1878 年给出该定理第一个一般性的证明.

矩阵的最小多项式(minimal polynomial of a matrix)　与特征多项式有相同不可约因式的一种多项式. 设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，由哈密顿-凯莱定理，存在非零多项式 $f(\lambda) \in P[\lambda]$，使 $f(A) = 0$. $P[\lambda]$中具有这种性质的多项式，称为 A 的零化多项式. 在 A 的零化多项式中，首项系数为 1，且次数最低者，称为 A 的最小多项式，亦称最低多项式. 矩阵 A 的最小多项式是惟一的；A 的任意零化多项式都被其最小多项式整除；相似矩阵有相同的最小多项式. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，V 的线性变换 σ 在某一基下的矩阵为 A，则对 A 的零化多项式 $f(\lambda)$，亦有 $f(\sigma) = \mathbf{0}$. $P[\lambda]$中具有这种性质的多项式，称为线性变换 σ 的零化多项式. σ 的零化多项式中首项系数为 1 且次数最低者，称为 σ 的最小多项式，亦称最低多项式. 它与 σ 关于任一个基的矩阵的最小多项式是一致的. 设 A 是数域 P 上的 n 阶矩

阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$. 令 $\Delta_{n-1}(\lambda)$ 是 $\lambda E-A$ 的所有 $n-1$ 阶子式的首一最大公因式，则

$$m(\lambda)=\frac{f(x)}{\Delta_{n-1}(\lambda)}$$

是 A 的最小多项式.

矩阵的零化多项式(annihilation polynomial of a matrix) 见"矩阵的最小多项式".

线性变换的零化多项式(annihilation polynomial of a linear transformation) 见"矩阵的最小多项式".

线性变换的最小多项式(minimal polynomial of a linear transformation) 见"矩阵的最小多项式".

线性变换可对角化(diagonalization of a linear transformation) 线性代数研究的重要问题之一. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，若 σ 在 V 的一个基下的矩阵是对角形矩阵，则称线性变换 σ 可对角化. 设 σ 的全部互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 都属于 P，则下列的命题是等价的：

1. σ 是可对角化的.

2. σ 有 n 个线性无关的特征向量.

3. V 可以分解为 n 个一维 σ 子空间的直和.

4. V 是 σ 的全部特征子空间 $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_s}$ 的直和.

5. $\sum_{i=1}^{s}\dim(V_{\lambda_i})=n$.

6. $\dim(V_{\lambda_i})$ 是 λ_i 的 重数.

7. $\sum_{i=1}^{s}r(\lambda_i E-A)=n(s-1)$.

此外，还有下面的可对角化的充分条件：σ 的特征多项式在 P 中有 n 个互不相同的根. 设线性变换 σ 可对角化，则可按下列步骤求出基与对角形矩阵：

1. 取定 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，求出 σ 在此基下的矩阵 A.

2. 求出 A 的特征多项式在 P 中的全部根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，再求出 A 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

3. 分别以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为列作矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，求得 V 的另一个基 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C$.

4. σ 在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵是对角形 $\mathrm{diag}\ (\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\cdots,\lambda_s)$，$\eta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 σ 的特征向量，λ_k 的个数等于 λ_k 的重数 $(k=1,2,\cdots,s)$.

矩阵可对角化(diagonalization of a matrix) 代数学术语. 指通过相似关系可化为对角形的矩阵. 设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，如果存在 P 上的 n 阶可逆矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 是对角形矩阵，则矩阵 A 称为可对角化的. 对选定的 n 维线性空间的基，线性变换和 n 阶矩阵是相互惟一决定的. 因此，矩阵的对角化与线性变换的对角化是一致的.

矩阵的特征向量(characteristic vector of a matrix) 线性代数的重要概念之一. 设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，$\lambda\in P$. 如果存在非零的 n 维列向量 α，使 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 λ 称为 A 的特征值或特征根，α 称为 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 矩阵 A 的属于特征值 λ 的全体特征向量与零向量构成 P^n 的子空间，即 A 的特征子空间；反之，若 $A\alpha=\lambda_1\alpha$, $A\alpha=\lambda_2\alpha$，其中 $\alpha\neq\mathbf{0}$，则 $\lambda_1=\lambda_2$，即同一特征向量不能属于不同的特征值. 由 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq\mathbf{0},\lambda\in P$，即 $(\lambda E-A)\alpha=0$. 因而 α 是齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的非零解向量，且 $|\lambda E-A|=0$，即 λ 是 A 的特征多项式的根；反之，若 $\lambda\in P$，且 λ 是 A 的特征多项式的根，则 λ 是 A 的特征值，而 $(\lambda E-A)X=0$ 的非零解所构成的列向量，即为 A 的属于特征值 λ 的特征向量.

矩阵的特征值(characteristic value of a matrix) 见"矩阵的特征向量".

线性变换的特征值(characteristic value of a linear transformation) 线性代数的重要概念之一. 设 σ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，如果在 P 中存在数 λ_0，且在 V 中存在向量 $\alpha\neq\mathbf{0}$，使 $\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$，则 λ_0 称为 σ 的特征值或特征根，而 α 称为 σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量. σ 的任意特征向量均生成一维的 σ 子空间；反之，一维 σ 子空间中的每个非零向量都是 σ 的特征向量. σ 的属于不同特征值的特征向量所构成的向量组线性无关. 设 V 是 P 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一个基，A 是 σ 在此基下的矩阵，则 λ_0 是 σ 的特征值当且仅当 λ_0 是 A 的特征值，即 λ_0 是 A 的特征多项式在 P 中的根. σ 的属于特征值 λ_0 的特征向量是以 $(\lambda_0 E-A)X=0$ 的任一非零解为坐标(对于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$)的向量.

线性变换的特征向量(characteristic vector of a linear transformation) 见"线性变换的特征值".

可换线性变换(commutative linear transformations) 两线性变换在乘法中的一种相互关系. 设 σ,τ 是有限维线性空间 V 的线性变换. 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则称 σ 与 τ 是两个可换的线性变换. 若 σ,τ 可换，令 V_λ 是 σ 的属于特征值 λ 的特征子空间，则 V_λ 也是线性变换 τ 的不变子空间；任意两个可换线性变换有公共的特征向量. 设 M,N 是有限维线性空间的两个线性变换集，若对任意 $\sigma\in M,\tau\in N,\sigma\tau=\tau\sigma$，则称 M,N 是可换的线性变换集. 任意两个可换线性变换集有公共的特征向量.

可换线性变换集(set of the commutative linear

transformations） 见“可换线性变换”.

幂零变换(nilpotent transformation） 一类特殊的线性变换.设 V 是数域 P 上的线性空间,σ 是 V 的线性变换.若存在自然数 m,使 $\sigma^m=0$,但 $\sigma^{m-1}\neq 0$,则 σ 称为幂零变换,m 称为幂零指数.一个线性变换是幂零变换,当且仅当它的特征多项式的根都是零;如果一个幂零变换可以对角化,则它一定是零变换.

幂幺变换(unipotent transformation） 一种特殊的可逆线性变换.设 V 是数域 P 上的线性空间,σ 是 V 的线性变换.若存在自然数 m,使 $\sigma^m=I$,$\sigma^{m-1}\neq I$,I 为单位变换,则 σ 称为幂幺变换,m 称为幂幺指数.一个线性变换是幂幺变换,当且仅当它的特征多项式的根是 m 个 m 次单位根.

幂幺指数(unipotent exponent） 见“幂幺变换”.

对合变换(involutory transformation） 一种特殊的幂幺变换.设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,σ 是 V 的线性变换.如果 $\sigma^2=I$,I 是单位变换,则 σ 称为对合变换.对合变换的特征值只能是 1 或 -1,且 $V=V_1\oplus V_{-1}$,其中 V_1 是 σ 的特征值 1 的特征子空间,V_{-1}是 σ 的特征值-1 的特征子空间.

线性映射(linear mapping） 线性变换概念的推广.设 V 和 W 是数域 P 上的线性空间,若 σ 是 V 到 W 的一个映射,且满足:

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(\lambda\alpha)=\lambda\sigma(\alpha),$$

对任意的 $\alpha,\beta\in V$,$\lambda\in P$成立,则 σ 称为 V 到 W 的线性映射.若 $W=V$,则 σ 即为 V 的线性变换.映射即函数,所以,线性映射即线性函数.但是在线性代数中常对线性函数作狭义的理解,而把 W 是一维线性空间即 $W=P$ 的线性映射称为线性函数(参见“线性函数”).

线性函数(linear function） 一种映射.数域 P 上的线性空间 V 到 P 上的线性映射称为 V 上的线性函数(参见“线性映射”).设 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 P 中固定的 n 个数.对任意的 $\alpha\in V$,设 $\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$,其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基,定义

$$f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_ic_i,$$

则 f 是 V 上的线性函数;反之,设 f 是 V 的线性函数,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基,令 $c_i=f(\varepsilon_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则对于任意的

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i,f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_if(\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ic_i.$$

V 上的线性函数的全体,按通常函数的加法与数量乘法构成 P 上的线性空间,记为 V^*.V^* 与 V 同构,因此,V^* 也是 P 上的 n 维线性空间,称为 V 的对偶空间.

线性映射矩阵(matrix of a linear mapping） 一种特殊矩阵.指线性映射的数量表示.设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 到 P 上 m 维线性空间 W 的一个线性映射,$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 是 V 的基,$\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_m$ 是 W 的基.若$(\sigma(\boldsymbol{v}_1),\sigma(\boldsymbol{v}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{v}_n))=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_m)(a_{ij})_{m\times n}$,则矩阵$(a_{ij})$称为 σ 关于基偶$(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)$,$(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_m)$的矩阵.设 V 的基变换为$(\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2',\cdots,\boldsymbol{v}_n')=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)R$,$W$ 的基变换为$(\boldsymbol{w}_1',\boldsymbol{w}_2',\cdots,\boldsymbol{w}_m')=(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_m)Q$,则线性映射 σ 关于基偶$(\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2',\cdots,\boldsymbol{v}_n')$,$(\boldsymbol{w}_1',\boldsymbol{w}_2',\cdots,\boldsymbol{w}_m')$的矩阵$(a_{ij}')$与$(a_{ij})$是等价的,即$(a_{ij}')=Q^{-1}(a_{ij})R$.若 $W=V$,则线性变换 σ 对基 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ 的矩阵(a_{ij})与对基 $\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2',\cdots,\boldsymbol{v}_n'$的矩阵$(a_{ij}')$是相似的,即$(a_{ij}')=R^{-1}(a_{ij})R$,其中$(\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2',\cdots,\boldsymbol{v}_n')=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)R$.

λ 矩阵(λ-matrix） 亦称多项式矩阵.以多项式为元素的矩阵.设 P 是数域,若矩阵中的元素皆为 P 上未知量 λ 的多项式,则此矩阵称为 P 上的 λ 矩阵或简称 λ 矩阵,一般用 $A(\lambda)$,$B(\lambda)$等表示.数域 P 上的矩阵是 λ 矩阵的特殊情况,称为数字矩阵.类似于数字矩阵,在 λ 矩阵中有加法、乘法和 λ 的多项式与 λ 矩阵的数量乘法等运算,它们与数字运算有相同的运算规律;也有 λ 矩阵的行列式、子式及秩等概念.对数域 P 上的 n 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$,若存在 P 上的 n 阶 λ 矩阵 $Q(\lambda)$,使得

$$A(\lambda)Q(\lambda)=Q(\lambda)A(\lambda)=E,$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵,则称 $A(\lambda)$为可逆的,$Q(\lambda)$为 $A(\lambda)$的逆矩阵.若 $A(\lambda)$是可逆的,则其逆矩阵是惟一的,记为 $A(\lambda)^{-1}$.n 阶 λ 矩阵$A(\lambda)$可逆的充分必要条件是:它的行列式$|A(\lambda)|$是不等于零的常数.

多项式矩阵(polynomial matrix） 即“λ 矩阵”.

数字矩阵(digital matrix） 见“λ 矩阵”.

初等λ 矩阵(elementary λ-matrices） 一类简单的 λ 矩阵.指三种形状简单且经常使用的 λ 矩阵.数域 P 上的 n 阶 λ 矩阵中,下列的三种矩阵称为初等 λ 矩阵:

1. $P(j(d))=E+(d-1)E_{jj}$,$d\in P$,且 $d\neq 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$.

2. $P(i,j(b(\lambda)))=E+b(\lambda)E_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n$,且 $i\neq j)$.

3. $P(i,j)=E-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n$,且 $i\neq j)$,

其中 E 为 n 阶单位矩阵,E_{ij}是矩阵单位,$b(\lambda)$是 λ 的多项式.初等 λ 矩阵都是可逆的,且

$$P(i(d))^{-1}=P(i(d^{-1})),$$
$$P(i,j(b(\lambda)))^{-1}=P(i,j(-b(\lambda))),$$
$$P(i,j)^{-1}=P(i,j).$$

λ矩阵的初等变换(elementary transformations of λ-matrices) 与初等λ矩阵密切相关的λ矩阵的三种变换的统称. 下列的三种变换称为数域 P 上的λ矩阵的初等变换:

1. 用数域 P 中非零数 d 乘矩阵的第 j 行(列).
2. 把矩阵的第 j 行(列)的 $b(\lambda)$ 倍加到第 i 行(列).
3. 互换矩阵的第 i 行(列)与第 j 行(列).

设 $A(\lambda)$ 是数域 P 上的 $m\times n$ 的λ矩阵, 对 $A(\lambda)$ 的行(列)施行变换1, 相当于用 $m(n)$ 阶初等矩阵 $P(j(d))$ 左(右)乘 $A(\lambda)$; 施行变换2, 相当于用 $m(n)$ 阶初等矩阵 $P(i,j(b(\lambda)))$ 左(右)乘 $A(\lambda)$; 施行变换3, 相当于用 $m(n)$ 阶初等矩阵 $P(i,j)$ 左(右)乘 $A(\lambda)$.

λ矩阵的等价(equivalence of λ-matrices) 亦称λ矩阵的相抵. λ矩阵的一种等价关系. 设 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 是数域 P 上的 $m\times n$ 的λ矩阵, 如果 $A(\lambda)$ 可以经过有限次初等变换变为 $B(\lambda)$, 则 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 称为等价的, 记为 $A(\lambda)\sim B(\lambda)$. 应用初等变换与初等矩阵的关系, 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充分必要条件为: 有一系列初等矩阵 $P_1(\lambda),P_2(\lambda),\cdots,P_l(\lambda)$; $Q_1(\lambda),Q_2(\lambda),\cdots,Q_t(\lambda)$, 使 $B(\lambda)=P_1(\lambda)P_2(\lambda)\cdots P_l(\lambda)A(\lambda)Q_1(\lambda)Q_2(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)$. λ矩阵的等价具有反身性、对称性和传递性. 因此, 全体 $m\times n$ 的λ矩阵可以按等价性来分类. λ矩阵理论中的重要问题之一是在每一个类中找称为标准形的λ矩阵.

λ矩阵的标准形(canonical form of a λ-matrix) 一个与λ矩阵等价的对角形矩阵. 数域 P 上任一个 $m\times n$ 的λ矩阵 $A(\lambda)$ 必等价于如下的对角形矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 r 是 $A(\lambda)$ 的秩, $d_i(\lambda)\neq 0$ 为 P 上首一多项式, 且满足条件: $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r-1)$. 这个矩阵称为 $A(\lambda)$ 在等价下的标准形.

矩阵的不变因子(invariant factor of matrices) 亦称不变因式. 矩阵相似的不变量. 设 $A(\lambda)$ 是数域 P 上一个λ矩阵, 则以下结论成立:

1. 若 $A(\lambda)$ 中存在不属于 P 的元素, 则 $A(\lambda)$ 在等价关系的标准形中的非零元素 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子. $A(\lambda)$ 中全部非零 k $(1\leqslant k<r)$ 阶子式中首一的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子, $D_k(\lambda)$ $(1\leqslant k\leqslant r)$ 与不变因子的关系为

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots,$$

$$d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}.$$

2. 若 A 是 n 阶数字矩阵, λ矩阵 $\lambda E-A$ 的不变因子称为 A 的不变因子, $\lambda E-A$ 的行列式因子称为 A 的行列式因子. n 阶矩阵 A 的不变因子共有 n 个: $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$, 其中 $d_n(\lambda)$ 等于 A 的最小多项式. 数字矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件为: 它们有相同的不变因子.

3. 若 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换, A 是 σ 在 V 的某个基下的矩阵, 则 A 的不变因子也称为线性变换 σ 的不变因子. 线性变换的不变因子与基的选取无关.

矩阵的不变因式(invariant factor of matrices) 即"矩阵的不变因子".

矩阵的行列式因子(determinant factor of matrices) 见"矩阵的不变因子".

线性变换的不变因子(invariant factor of a linear transformation) 见"不变因子".

矩阵的初等因子(elementary factor of matrices) 矩阵相似的不变量. 设 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 是数域 P 上的 $m\times n$ λ矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子, 其中 r 是 $A(\lambda)$ 的秩. 把每个不变因子分解为 P 上的不可约因式的乘积:

$$d_i(\lambda)=p_1(\lambda)^{n_{i1}}p_2(\lambda)^{n_{i2}}\cdots p_t(\lambda)^{n_{it}},$$

其中 $0\leqslant n_{1j}\leqslant n_{2j}\leqslant\cdots\leqslant n_{rj}$ $(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,t)$, 则 $p_1(\lambda)^{n_{i1}},p_2(\lambda)^{n_{i2}},\cdots,p_t(\lambda)^{n_{it}}$ 中除去指数为零的以外, 皆称为 $A(\lambda)$ 的初等因子. 所有初等因子合起来(包括重复的在内)称为初等因子组. 设 A 是复 n 阶矩阵, 把矩阵 A 的每个次数大于零的不变因子分解为互不相同的一次因式方幂的乘积, 所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)称为矩阵 A 的初等因子. 两个同阶矩阵相似的充分必要条件是: 它们有相同的初等因子. 设 σ 是复 n 维线性空间 V 的线性变换, 且 A 是 σ 在 V 的基之下的矩阵, 则矩阵 A 的初等因子也称为线性变换 σ 的初等因子. 线性变换的初等因子与基的选取无关.

矩阵的初等因子组(elementary factor group of matrices) 见"矩阵的初等因子".

线性变换的初等因子(elementary factor of a linear transformation) 见"矩阵的初等因子".

友矩阵(companion matrix) 亦称伴侣矩阵. 矩阵标准形理论中一类重要的矩阵. 设 $d(\lambda)=\lambda^k-b_{k-1}\lambda^{k-1}-\cdots-b_1\lambda-b_0$ 是数域 P 上的首一多项式, 则 P 上的矩阵

$$M_{d(\lambda)}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{k-2}&b_{k-1}\end{pmatrix}$$

称为多项式 $d(\lambda)$ 的友矩阵. 设 $M_{d(\lambda)}$ 是 $d(\lambda)$ 的友矩阵,则特征矩阵 $\lambda E-M_{d(\lambda)}$ 的不变因子是 $1,1,\cdots,1,d(\lambda)$.

伴侣矩阵(companion matrix) 即"友矩阵".

矩阵的有理标准形(rational canonical form of a matrix) 亦称弗罗贝尼乌斯标准形. 矩阵的一种标准形. 设 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$ 是数域 P 上的 n 阶矩阵 A 的不变因子,$C_1,C_2,\cdots,C_s$ 分别为它们的友矩阵,则由诸 C_i 构成的 n 阶矩阵 $C=[C_1,C_2,\cdots,C_s]$ 称为矩阵 A 的有理标准形,$C_i(i=1,2,\cdots,s)$ 称为弗罗贝尼乌斯块. 数域 P 上的每个 n 阶矩阵 A,都等价于一个有理标准形. 数域 P 上两个 n 阶矩阵相似的充分必要条件是:它们有相同的有理标准形. 设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换,A 是 σ 在 V 的某个基下的矩阵,则 A 的有理标准形称为线性变换 σ 的有理标准形.

矩阵的弗罗贝尼乌斯标准形(Frobenius canonical form of a matrix) 即"矩阵的有理标准形".

弗罗贝尼乌斯块(Frobenius block) 见"矩阵的有理标准形".

线性变换的有理标准形(rational canonical form of a linear transformation) 见"矩阵的有理标准形".

矩阵的若尔当标准形(Jordan canonical form of a matrix) 复矩阵的一种标准形. 设复 n 阶矩阵 A 的初等因子是 $(\lambda-\lambda_j)^{l_{ij}}$ $(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,k)$,则 l_{ij} 阶的若尔当块 $J(\lambda_i,l_{ij})$ 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_j)^{l_{ij}}$. 由所有正次数初等因子对应的若尔当块构成的若尔当矩阵,称为 A 的若尔当标准形. 每个 n 阶复矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似,若不计若尔当块排列的顺序,则 A 的若尔当标准形是惟一的. 设 σ 是复 n 维线性空间 V 的线性变换,A 是 σ 在 V 的某个基下的矩阵,则矩阵 A 的若尔当标准形也称为线性变换 σ 的若尔当标准形.

线性变换的若尔当标准形(Jordan canonical form of a linear transformation) 见"若尔当标准形".

欧几里得空间

欧几里得空间(Euclidean space) 引进度量概念的实线性空间. 设 V 是实数域 R 上的线性空间,若对于 V 中任意两个向量 α 与 β,都有惟一确定的实数,记为 (α,β),与之对应,且满足:

1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;
2. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;
3. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;
4. $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$,等号成立当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$,

其中 α,β,γ 是 V 中的任意向量,k 是任意实数,则称 (α,β) 是 α,β 的内积或数量积,亦称在 V 上定义了内积. 若在实线性空间 V 上定义一个内积,则称 V 是欧几里得空间,简称欧氏空间. 在实线性空间 R^n 中,对于向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,定义 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,则它是 R^n 的内积,因而 R^n 是欧氏空间,通常称为 n 维欧几里得空间. 在 n 维欧几里得空间中用内积定义向量的长度、夹角,使之成为具有度量性质的实线性空间,扩大了线性空间理论的应用范围,在泛函分析、拓扑学、力学和物理学中都有广泛的应用(参见本卷《高等几何》同名条).

欧氏空间(Euclidean space) 欧几里得空间的简称.

内积(inner product) 见"欧几里得空间"及本卷《空间解析几何》同名条.

向量的长度(length of a vector) 几何空间中向量长度概念的推广. 设 α 是欧氏空间 V 的向量,非负实数 (α,α) 的算术平方根 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为向量 α 的长度或长,亦称 α 的模,记为 $|\alpha|$. 向量的长度具有下列性质:

1. 对于任意的 $\alpha\in V$,$|\alpha|\geqslant 0$. $|\alpha|=0$ 当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$.
2. 对任意的 $k\in\mathrm{R}$,$\alpha\in V$,$|k\alpha|=|k||\alpha|$,其中 $|k|$ 是 k 的绝对值.

长度为 1 的向量称为单位向量. 若向量 $\alpha\neq\mathbf{0}$,则 $|\alpha|^{-1}\alpha$ 是单位向量,称为将 α 单位化. 设 α,β 是欧氏空间 V 的两个向量,$\alpha-\beta$ 的长度 $|\alpha-\beta|$ 称为 α 与 β 之间的距离,记为 $d(\alpha,\beta)$. 距离具有性质:

1. $d(\alpha,\beta)\geqslant 0$,且 $d(\alpha,\beta)=0$ 当且仅当 $\alpha=\beta$.
2. $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$.
3. $d(\alpha,\beta)\leqslant d(\alpha,\gamma)+d(\gamma,\beta)$.

向量的模(modules of vector) 即"向量的长度".

单位向量(unit vector) 见"向量的长度"及本卷《空间解析几何》同名条.

度量矩阵(metric matrix) 由基的内积按一定规则构成的矩阵. 设 V 是 n 维欧氏空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基,n 阶矩阵 $A=((\varepsilon_i,\varepsilon_j))$ 称为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的另外一个基,若 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C$,其中 C 是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,$

$\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵，则 $B=((\eta_i,\eta_j))=C'AC$，即不同基的度量矩阵是合同的.

向量的正交(orthogonality of vectors)　几何空间中垂直概念的推广. 如果欧氏空间 V 中两个向量 α,β 的内积为零，则称 α 与 β 正交，记为 $\alpha\perp\beta$. 零向量与任何向量都正交. 若 $(\alpha,\beta)=0$，则 $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$，此为勾股定理在欧氏空间中的推广. 一般地，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，则

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2.$$

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是两两正交的非零向量，则它们必线性无关. 若向量 α 与子空间 W 的每个向量都正交，则称 α 与 W 正交，记为 $(\alpha,W)=0$ 或 $\alpha\perp W$.

柯西-布尼亚科夫斯基不等式(Cauchy-Bunjakovski inequality)　一种特殊不等式. 指两个向量的长度积与其内积绝对值(模)的关系. 欧氏空间或酉空间 V 中任意两个向量 α 与 β 必满足 $|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|$，等号成立的充分必要条件是：$\alpha$ 与 β 线性相关. 此不等式称为柯西-布尼亚科夫斯基不等式. 例如，在 n 维欧氏空间 R^n 中，上述不等式为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2},$$

又称为柯西不等式. 由此可规定 n 维欧氏空间中两个向量的夹角

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\cos^{-1}\left(\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\right).$$

1821 年，对于欧氏空间 R^n，柯西(Cauchy, A. L.)证明了在一般情况的这一不等式；1859 年，布尼亚科夫斯基(Буняковский, В. Я.)证明并系统地应用了这一不等式；1885 年，施瓦兹(Schwarz, H. A.)在其文章《纪念文集》中论证了这个不等式，因而也称这个不等式为施瓦兹不等式.

柯西不等式(Cauchy inequality)　见"柯西-布尼亚科夫斯基不等式".

向量的夹角(angle between two vectors)　见"柯西-布尼亚科夫斯基不等式"及本卷《空间解析几何》同名条.

施瓦兹不等式(Schwarz inequality)　见"柯西-布尼亚科夫斯基不等式".

三角形不等式(triangular inequality)　三角形边长关系的推广. 设 V 是欧氏空间，对 V 中任意两个向量 α,β，$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，此不等式称为三角形不等式. 一般地，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是欧氏空间的 m 个向量，则

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_m|.$$

三角形不等式亦可表示为

$$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|.$$

推广此不等式，则得到托勒密不等式

$$|\alpha-\beta|\cdot|\gamma|\leqslant|\beta-\gamma|\cdot|\alpha|+|\gamma-\alpha|\cdot|\beta|.$$

托勒密不等式(Ptolemy inequality)　见"三角形不等式".

标准正交基(orthonormal basis)　亦称法正交基. 与解析几何中直角坐标系相类似的概念. 欧氏空间中一组非零向量，如果它们两两正交，则称为正交向量组，简称正交组. 由单个非零向量所成的向量组，也称为正交向量组. 正交向量组是线性无关的. 由单位向量组成的正交向量组，称为标准正交向量组. 由正交组构成的基称为正交基；由标准正交组构成的基称为标准正交基. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基，对任意的 $\alpha,\beta\in V$，若

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$$
$$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n,$$

则下列条件是等价的：

1. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的标准正交基.
2. $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & (i=j),\\0 & (i\neq j).\end{cases}$
3. $x_i=(\alpha,\varepsilon_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$.
4. $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.
5. $|\alpha|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$.

任意的 $n(>0)$ 维欧氏空间都存在标准正交基，且可以从 V 的任一个基出发按照一定的程序求得(参见"施密特正交化").

标准正交基与正交矩阵有如下的关系：设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基，且

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的标准正交基的充分必要条件为 A 是正交矩阵.

法正交基(normal orthogonal basis)　即"标准正交基".

正交向量组(orthogonal system of vectors)　见"标准正交基".

标准正交向量组(orthonormal system of vectors)　见"标准正交基".

向量在子空间上的正射影(orthogonal projection from a vector to a subspace)　几何空间中正射影概念的推广. 设 W 是欧氏空间 V 的一个有限维子空间，$\alpha\in V$. 在 W 中存在惟一的向量 α_0，使 $(\alpha-\alpha_0)\perp W$ (即 $\alpha-\alpha_0$ 与 W 中每个向量正交)，α_0 称为向量 α 在子空间 W 上的正射影. 任取 W 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，

$$\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i,\alpha_j)x_j=(\alpha_i,\alpha)\ (i=1,2,\cdots,m)$$

称为正规方程组. 它有惟一的解 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，则

$$\alpha_0=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m.$$

对于 W 中任意一个不等于 α_0 的向量 β_0，均有

$$|\alpha-\beta_0|>|\alpha-\alpha_0|.$$

正规方程组(normal equation system) 见"向量在子空间上的正射影".

施密特正交化(Schmidt orthogonalization) 求欧氏空间正交基的一种方法.从欧氏空间任意线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发,求得正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$,使由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 生成的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$ 等于由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 生成的子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$ 的方法,称为施密特正交化.具体做法如下:设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是线性无关的向量组,取 $\beta_1=\alpha_1$,再取

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_k,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_k,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_k,\beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\beta_{k-1})}\beta_{k-1}\quad(k=1,2,\cdots,m),$$

得到正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$,且 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$.施密特正交化方法可由 n 维欧氏空间的任一个基得到正交基,再单位化可得到标准正交基.因此,任何有限维欧氏空间(酉空间)必有标准正交基.

欧氏空间的同构(isomorphism of Euclidean spaces) 欧氏空间之间的一种等价关系.设 V 与 V' 是两个欧氏空间,σ 是 V 到 V' 的一一映射,若对于 V 中的任意两个向量 α,β 与任意实数 k,有:

1. $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$;
2. $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$;
3. $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$,

则称 σ 是 V 到 V' 的同构映射.若 V 到 V' 的同构映射存在,则称欧氏空间 V 与 V' 同构.

欧氏空间的同构具有反身性、对称性和传递性.任意的 n 维欧氏空间 V 都与欧氏空间 R^n(内积是通常意义的)同构.两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数相等.从抽象的观点看,同构的欧氏空间看成相同的欧氏空间.因此,有限维欧氏空间完全由其维数决定.欧氏空间 R^n 可以作为 n 维欧氏空间的代表.

欧氏空间的同构映射(isomorphism mapping of Euclidean spaces) 见"欧氏空间的同构".

正交变换(orthogonal transformation) 一类重要的线性变换.设 σ 是欧氏空间 V 的线性变换,如果对 V 的任意向量 α,有 $(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\alpha,\alpha)$,则称 σ 是 V 的正交变换.任意欧氏空间 V 的线性变换 σ 是正交变换的充分必要条件是:σ 保持向量内积不变,即对 V 中任意向量 α,β,有 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$.设 V 是有限维欧氏空间,σ 是 V 的线性变换,则下列的条件是等价的:

1. σ 是正交变换.
2. σ 把 V 的标准正交基变为标准正交基.
3. σ 在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

设 σ 是有限维欧氏空间的正交变换,则存在标准正交基,使 σ 在此基之下的矩阵具有以下的形状:

$$\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&-1&&&&&&&\\&&&&\ddots&&&&&&\\&&&&&-1&&&&&\\&&&&&&\cos\varphi_1&-\sin\varphi_1&&&\\&&&&&&\sin\varphi_1&\cos\varphi_1&&&\\&&&&&&&&\ddots&&\\&&&&&&&&&\cos\varphi_s&-\sin\varphi_s\\&&&&&&&&&\sin\varphi_s&\cos\varphi_s\end{pmatrix}.$$

由于这里的欧氏空间是向量空间而不是点空间,所以,这里的正交变换是向量的变换,而与《高等几何》中作为点变换的正交变换有相同处也有不同处(参见本卷《高等几何》同名条).

旋转变换(rotation transformation) 亦称特征正交变换.一种特殊的正交变换.n 维欧氏空间正交变换的行列式只能是 1 或 -1.行列式等于 1 的正交变换称为旋转变换,又称第一种正交变换;行列式等于 -1 的正交变换称为非特征的,亦称第二种正交变换.两个旋转或两个第二种正交变换的乘积是旋转变称;旋转与第二种正交变换的乘积是第二种正交变换(参见本卷《高等几何》同名条).

特征正交变换(characteristic orthogonal transformation) 即"旋转变换".

第一类正交变换(orthogonal transformation of the first kind) 即"旋转变换".

对称变换(symmetric transformation) 一种线性变换.设 σ 是欧氏空间 V 的一个线性变换.若对 V 的任意向量 α,β,有 $(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$,则称 σ 为 V 的一个对称变换.有限维欧氏空间的线性变换 σ 为对称变换的充分必要条件是:σ 在标准正交基之下的矩阵是实对称矩阵.有限维欧氏空间的每个对称变换,都存在标准正交基,使其在此基之下的矩阵是实对角形矩阵,其中对角线上的元素是它的特征值(参见"对称矩阵").

反对称变换(auti-symmetric transformation) 一种线性变换.设 V 是欧氏空间,σ 是 V 的线性变换.若对任意 $\alpha,\beta\in V$,有 $(\sigma(\alpha),\beta)=-(\alpha,\sigma(\beta))$,则称 σ 为 V 的反对称变换.反对称变换对于有限维欧氏空间 V 的任意标准正交基的矩阵是实反对称矩阵,即为满足条件 $A'=-A$ 的实矩阵;反之,若线性变换关于 V 的标准正交基的矩阵是反对称的,则

σ 是反对称变换. 反对称变换的特征值或是零，或是纯虚数.

镜面反射(mirror reflection)　亦称非特征正交变换，又称第二类正交变换. 一种特殊的正交变换. 设 V 是欧氏空间，α 是 V 的非零向量. 对任意的 $\beta \in V$，由

$$\tau(\beta)=\beta-\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

决定的变换是满足 $\tau^2=I$ 的正交变换，称为由向量 α 决定的镜面反射，其中 I 为单位变换. 若 V 是 n 维欧氏空间，则存在 V 的标准正交基，使镜面反射 τ 在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(参见本卷《高等几何》同名条).

非特征正交变换(non-characteristic orthogonal transformation)　即“镜面反射”.

第二类正交变换(orthogonal transformation of the second kind)　即“镜面反射”.

格拉姆矩阵(Gram matrix)　一种实对称矩阵. 它是欧氏空间中判别向量组线性无关常用的矩阵. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为欧氏空间的一个向量组，矩阵

$$G=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{pmatrix}$$

称为该向量组的格拉姆矩阵，$|G|$ 称为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的格拉姆行列式. 格拉姆矩阵是实对称矩阵，其特征值全为实数. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是：其格拉姆行列式不等于零，即 $|G|\neq 0$. 格拉姆(Gram, J. P.)在研究用最小二乘法可解的问题时引入了这种行列式，并给出它的一些性质.

格拉姆行列式(Gram determinant)　见“格拉姆矩阵”.

酉空间(unitary space)　一种复线性空间. 设 V 是复数域 C 上的线性空间. 若对于 V 中任意两个向量 α,β，都有惟一确定的复数，记为 (α,β)，与它们对应，且满足：

1. $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$，$\overline{(\beta,\alpha)}$ 是 (β,α) 的共轭复数；
2. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$；
3. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；
4. (α,α) 是非负的实数，且 $(\alpha,\alpha)=\mathbf{0}$，当且仅当 $\alpha=\mathbf{0}$，其中 α,β,γ 是 V 中的任意向量，k 为任意复数；则称 (α,β) 是 α 与 β 的内积. 定义了内积的复线性空间 V 称为酉空间. 例如，在复 n 维向量空间 C^n 中，对任意 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，定义

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{b}_i,$$

则 (α,β) 是 C^n 上的内积，而 C^n 是酉空间. 在 n 维酉空间中，可以定义正交基和标准正交基(参见“标准正交基”). $n(>0)$ 维酉空间的标准正交基是存在的.

酉变换(unitary transformation)　一种线性变换. 设 σ 是酉空间 V 的线性变换，若对任意的 $\alpha,\beta\in V$，$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，则称 σ 为 V 上的酉变换. 设 σ 是 n 维酉空间 V 的酉变换，则存在 V 的标准正交基，使 σ 关于此基的矩阵为对角形，且对角线上元素的模为 1. 设 σ 是 n 维酉空间 V 的线性变换，则下列命题等价：

1. σ 是酉变换.
2. $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$，对任意的 $\alpha\in V$.
3. σ 关于标准正交基的矩阵是酉矩阵.
4. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的标准正交基，则 $\sigma(\varepsilon_1)$，$\sigma(\varepsilon_2)$，$\cdots$，$\sigma(\varepsilon_n)$ 也是 V 的标准正交基.

埃尔米特变换(Hermite transformation)　一种对称变换. 设 σ 是酉空间 V 的线性变换，若对任意 $\alpha,\beta\in V$，$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma(\beta))$，则 σ 称为 V 的埃尔米特变换. n 维酉空间 V 的线性变换 σ 是 V 的埃尔米特变换的充分必要条件为：σ 在 V 的标准正交基下的矩阵是对称矩阵. 若 σ 是 n 维酉空间 V 的埃尔米特变换，则存在 V 的标准正交基，使 σ 在此基下的矩阵是实对角形矩阵，且对角元是 σ 的特征值.

撰稿　于恩芳　牛保才　孔宗文　朱作桐　许时芬
孙宗明　杨晋　杨子胥　李时吉　李秀荣
李治国　张宝林　陈青　陈铁补　姬翠莲
梁庆云　蒲昭棣　潘万富
审阅　丁石孙　佟文廷　应制夷　张宝林　赵力田

高 等 几 何

高等几何(higher geometry)　几何学的一门课程.其内容主要包括几何基础与射影几何.相对于初等几何而言,讨论的内容更深入、广泛,研究方法也较为多样.

几何基础是研究几何学的公理体系的一个几何学分支学科.几何学发展的初始阶段可以称为实验几何,当实验的结果越来越丰富时,一些数学家就展开了整理、总结、归纳的工作.在古希腊研究几何与天文学的泰勒斯(Thales,(M))即开始了这样的整理工作,他首先注意到必须用逻辑推理而不仅依靠实验来研究几何学.毕达哥拉斯(Pythagoras)及其门徒希波克拉底(Hippocrates,(C))把大量已经知道的几何命题依照逻辑推理顺序加以排列.柏拉图(Plato)强调数学与哲学的联系,他的哲学思想对于实验几何的抽象化和系统化起了重要的促进作用,他提出反对用直尺和圆规以外的任何东西作为几何作图的工具.亚里士多德(Aristotle)进一步指出不能什么都要证明,证明必须有个起点,对学科中所使用的名词,也需要有一些不加定义的原始概念.欧几里得(Euclid)集前人之大成,他的《原本》在当时达到高峰.在他以后一百多年中,还出现了阿基米德(Archimedes)用穷竭法计算面积和体积,阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))对圆锥曲线进行了研究.《原本》的基本特征,就是由很少的原始假定出发,通过逻辑推理,把不相联系的实验结果,编排组织成为一连串的定理,把几何学改造成为抽象的逻辑推理的学科.这种建立在某些原始假定(公理和公设)基础上的几何称为公理法几何,其整个原始假定称为公理系统.《原本》是公理法几何的第一部著作.它具有划时代的伟大意义.从当时来看它的逻辑性相当严密,它对整个数学及其他科学都有深远的影响.历经两千多年,这种几何仍然是中学生学习的内容.

《原本》问世以来,许多数学家不断指出其欠缺,并不断加以修改完善.指出许多概念,例如顺序、合同等,未加定义而常被使用.有些命题,例如直线和圆的连续性等,未加说明而直观地承认,以后的数学家相继补充并提出更加完善的公理体系.例如,阿基米德补充了有关连续性的公理,帕施(Pasch,M.)补充了顺序公理,佩亚诺(Peano,G.)在1889年以关联和顺序的概念表达了帕施公理,并在1894年提出合同公理组.与上述扩大公理体系相反,另一方面是进行减少《原本》中某些公理的研究.例如,得出"凡直角皆相等"这一公设能从其余公理、公设中逻辑地推出等.但绝大多数研究集中于企图证明《原本》的第五个公设.这是因为第五公设的叙述冗长繁琐,而且在《原本》中使用也较迟,使人认为欧几里得本人也有不以它为公设的企图.对第五公设的试证延续了两千余年,但这些数学家的努力都归于失败.例如,普罗克洛斯(Proclus)、沃利斯(Wallis,J.)等都是不自觉地使用了和第五公设等价的命题作为基础来证明的.这些证明虽然失败,但却确立了不少与第五公设等价的命题.另一些数学家企图用反证法来证明第五公设,即假定第五公设的反面命题成立,企图导出矛盾.例如,萨凯里(Saccheri,G.)、朗伯(Lambert,J. H.)、勒让德(Legendre,A.-M.)、施外卡特(Schweikart,F. K.)和陶林努斯(Taurinus,F. A.)等人在证明的过程中展开了逻辑推理,但终未推得两个互相矛盾的推论.他们之中有些人已提出猜测,就是在第五公设不成立的情况下,存在一种新的无矛盾的几何体系.

直到19世纪20年代,终于明确地建立了不同于欧氏几何的新几何,称为非欧几何.它的发明彻底解决了两千多年来的第五公设问题.建立非欧几何的数学家主要有高斯(Gauss,C. F.)、波尔约(Bolyai,J.)和罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н. И.).罗巴切夫斯基于1826年2月11日在喀山大学作了关于几何原理的报告,他首先发表了欧氏第五公设不能从其余公理导出,并且证实保留第五公设以外的所有公理公设再加上与第五公设不相容的命题为前提,可推出一种新的几何,后人称之为罗巴切夫斯基几何,又称为双曲几何.在这种几何中,过直线外一点至少可以作两条(因而有无数条)直线与已知直线共面而不相交.黎曼(Riemann,(G. F.)B.)基于同样的思想,于1854年又建立了与罗氏不同的黎氏非欧几何,亦称椭圆几何学.相对这些几何来说,原有的欧氏几何学,也称为抛物几何学.希尔伯特(Hilbert,D.)于1899年给出了欧氏几何完备的公理体系,证明了平行公理对其他公理的独立性,因而明确了非欧几何成立的逻辑基础.1903年,希尔伯特在《罗氏几何新论》中,把平行公理改为罗氏平行公理,而保留关联、顺序、合同、连续等四组公理,从而给出双曲几何的公理体系并证明其无矛盾性.霍尔斯特德(Halsted,G. B.)在《理性几何》(1904)中提供了双重椭圆几何的公理体系;1905年,海森伯(Heisenberg,G.)给出了单重椭圆几何的公理基础.1911—1916年,爱因斯坦(Einstein,A.)正致力于广

义相对论的研究，他逐渐认识到该理论涉及四维黎曼流形的性质. 1916 年终于把广义相对论成功地建立在时空四元黎曼度量

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i dx_j$$

之上.

射影几何是研究图形在射影变换下不变性质与不变量的一个几何学分支学科. 它起源于绘画和建筑. 早在希腊时期的阿波罗尼奥斯与帕普斯(Pappus,(A))的著作中，射影几何的一些基本思想如交比、调和点列及配极等都有了体现. 最先做出可以认为是属于射影几何工作的是德萨格(Desargues, G.)，他在其主要著作《试图处理圆锥与平面相交情况的初稿》(1639)中引进了射影方法. 可惜由于印数少且用词偏僻，影响不大. 他的关于三角形的重要定理及其他成果刊于其友波士(Boose,A.)所著《德萨格先生运用透视的一般方法》(1648)的附录中. 笛卡儿(Descartes,R.)原来以为关于圆锥曲线理论的研究除了借助代数方法之外，不可能再有什么新突破. 读了上述著作后，他对德萨格甚为推崇. 费马(Fermat,P. de)更赞扬他为圆锥曲线理论的真正奠基人，夸奖其方法非常富于新意. 德萨格首先引进无穷远元素：平面上每一方向对应一个无穷远点，它是平面上所有同向直线的公共点，这些点的全体构成该平面的一条无穷远直线；该直线又是诸平行平面的公共交线，这些交线全体构成空间的无穷远平面. 在这种安排下，欧氏几何中的公理或定理，只需在字面上略作修改，就能得到射影几何中相应的公理或定理. 例如，平面上任意两条直线均有一个交点就是射影几何中的一条公理. 在引进无穷远元素的基础上，德萨格叙述并证明了平面、空间的德萨格定理及其逆. 他还证明了交比、对合在射影变换下的不变性，特别地，射影变换将调和点列变为调和点列. 他研究了配极理论. 他把射影与截景提高为论证有关不同圆锥曲线性质的统一新方法.

拉伊尔(La Hire,P. de)继承了德萨格的射影与截影思路. 在其《圆锥曲线》(1685)一书中，他先证明圆具有某一关于调和点列的性质，然后统一地运用射影与截影方法把这一性质推广到别的圆锥曲线上去. 在该书中，他综合性地、系统地证明了大约 300 条圆锥曲线的定理，不仅几乎全部包含了阿波罗尼奥斯名著中的 364 条定理，甚至可说今天熟知的圆锥曲线的性质已尽在其中. 拉伊尔企图以此显示射影法非但高于阿波罗尼奥斯的传统方法，而且也优于笛卡儿与费马新创的解析法. 此外，在配极理论中他还取得一个重要的新成果. 彭赛列(Poncelet,J.-V.)研究了几何图形在中心射影之下保持不变的性质. 同时，沙勒(Chasles,M.)、施泰纳(Steiner,J.)等人通过引入无穷远元素，用综合法研究这个问题得出许多成果，这和基于度量的初等几何有了很大的差别. 然而，使射影几何从度量观点中摆脱出来，则基本上是由冯・施陶特(von Staudt,K. G. C.)完成的. 从此，射影几何成为仅研究几何图形的定位性质的几何分支(画法几何).

从 19 世纪后期到 20 世纪初，在对射影几何的公理体系进行的研究中，克莱因(Klein,C. F.)和维布伦(Veblen,O.)做出很大的贡献. 在公理法观点下，射影几何乃是基本对象点、直线、平面在基本关系关联、分离之下满足一套公理的逻辑推论. 另一方面，默比乌斯(Möbius,A. F.)、普吕克(Plücker,J.)等利用解析法研究射影几何. 在射影直线和射影平面上建立坐标方法，使射影几何的发展进入了一个新的阶段. 克莱因在 1872 年根据李(Lie,M. S.)的群论思想，在他的"埃尔朗根纲领"中提出几何学的群论原则. 按照他的观点，每一种几何学的内容就是在某种变换群之下保持不变的性质和不变量的研究. 在这种观点下，研究射影变换群之下的不变性质的几何称为射影几何. 设 P^2 是复数域上的射影平面，C 是其上一条非退化的实二次曲线，则 P^2 关于 C 自同构的射影变换的全体也构成群，它是 P^2 到自身的射影变换群的子群，称为双曲运动群. 从属于双曲运动群的几何是双曲几何. 若取 C 为 P^2 上非退化的虚二次曲线，则该自同构群称为椭圆运动群，从属于椭圆运动群的几何是椭圆几何. 类似地，若指定在实数域中的射影空间 P^n 的一个超平面 π_∞，则使 π_∞ 不变的所有射影变换的集合构成射影变换群的子群，而从属于它的几何是仿射几何. 又在 π_∞ 内再指定一个正则二次超曲面，从属于使它不变的子群的几何学称为相似几何学即抛物几何学. 欧氏几何是其中的一种. 由此得出的射影几何与其他几种古典几何间的关系，说明射影几何是最广泛的几何. 实射影空间或复射影空间在微分几何、代数拓扑中起着基本的作用，其重要之点在于它们是球面以外最简单的紧流形. 射影空间在量子力学中也有所应用.

几何基础与射影几何系统地阐述了古今数学思想，讨论了各种几何学的发展与关联，在理论研究中有很高的学术价值，它们的发展影响到整个数学的面貌，并且已越出数学范围，渗透到物理、力学等领域中去. 另外，它们在生产实践中也有广泛的应用.

公理法几何(axiomatic geometry)　见"高等几何"和"几何公理".

实验几何(experimental geometry)　一种古典几何学. 一般指欧几里得(Euclid)的《几何原本》出现之前的几何学. 实验几何的特征是，人们通过经验的积累产生了对几何事物的简单阐述和对证明方法的初步拟定. 形成了图形、几何命题和证明等概念，

出现了一些计算简单的几何量的公式．实验几何在古代的埃及、希腊、巴比伦和中国等许多国家都有所认识，并在希腊得到较大的发展．

仿射几何

仿射几何(affine geometry)　几何学的一个分支学科．主要研究仿射空间中的图形在仿射对应(仿射变换)下不变的几何性质和不变量．如共线性，平行性，单比等．n 维仿射空间的构成如下：设 V 是一个 n 维向量空间，A 是一个集合，A 中的元素称为点，如果对于 A 中两点 P,Q，对应着 V 中惟一的一个向量$\overrightarrow{PQ}$，并且这种对应满足：

1. $\overrightarrow{PP}=\mathbf{0}$($V$ 中的零向量)．

2. 任给 A 中一点 P 和 V 中的向量 $\boldsymbol{a}$，在 A 中存在惟一的点 Q，使得$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{a}$．

3. 对 A 中三点 P,Q,R，有等式$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$．

则称 A 为一个 n 维仿射空间．特别地，当 $n=1$ 时称为仿射直线；$n=2$ 时称为仿射平面；$n=3$ 时称为仿射空间．

在欧几里得平面(空间)中，若不考虑距离的概念，则这个平面(空间)就是一个仿射平面(空间)．如果在仿射平面(空间)中引进无穷远点，则这样的平面(空间)就称为扩大的仿射平面(空间)．在扩大的仿射平面(空间)中，对原有的点与无穷远点不加区别，得到的平面(空间)就是射影平面(空间)．仿射几何中最重要的变换是仿射变换．这种变换的特征是将共线三点变成共线三点．仿射几何中最重要的不变量是单比．其他仿射不变量都可以用单比表示．在仿射平面(空间)中，仿射变换的全体构成一个变换群，称为仿射变换群，简称仿射群．并且在扩大的仿射平面(空间)中，它还是保持无穷远直线(无穷远平面)不变的一个射影变换群．因此，仿射群是射影群的子群，仿射几何是射影几何的子几何．

***n* 维仿射空间**(n-dimensional affine space)　见“仿射几何”．

仿射直线(affine line)　见“仿射几何”．

仿射平面(affine plane)　见“仿射几何”．

仿射空间(affine space)　见“仿射几何”．

扩大的仿射平面(amplify affine plane)　见“仿射几何”．

扩大的仿射空间(amplify affine space)　见“仿射几何”．

对应(correspondence)　见本卷《集合论》同名条．只是在几何学中把对应理解为多一对应(包括一一对应)．也就是认为对应与映射是同义词．

映射(mapping)　亦称映照．见本卷《集合论》同名条．只是在几何学中认为映射就是对应．

映照(mapping)　即“映射”．

到上映射(onto mapping)　见本卷《集合论》同名条．

满射(surjection)　见本卷《集合论》同名条．

一一对应(one-one correspondence)　见本卷《集合论》同名条．

双射(bijection)　见本卷《集合论》同名条．

单射(injection)　见本卷《集合论》同名条．

变换(transformation)　一种特殊的映射．即一个集合到自身的映射．

一一变换(one-one transformation)　一种特殊的变换．即一个集合到自身的双射．

点变换(point transformation)　一种特殊集合的变换．即点集合的变换．若集合 M 的元素是点，φ 是 M 中(上)的变换，则 φ 称为点变换．几何学中研究的变换，大都是一一的点变换．

变换的乘积(product of transformation)　变换集合元素间的二元运算．几个变换连续进行所得到的结果．即两个变换连续进行所得到的合成变换称为这两个变换的乘积．例如：设 φ_1,φ_2 是集合 S 的两个变换，若对于 S 中的任何元素 x，先通过 φ_1 得到 $\bar{x}$，再通过 φ_2 得到 x'，即 $\bar{x}=\varphi_1(x)$．$x'=\varphi_2(\bar{x})$．则所得到的 S 的新变换 $\varphi:x'=\varphi(x)$称为变换 φ_1 与 φ_2 的乘积，记为 $\varphi=\varphi_2\varphi_1$．则有 $\varphi_2\varphi_1(x)=\varphi_2(\varphi_1(x))$．两个变换的乘积与它们的顺序有关．一般地，$\varphi_1\varphi_2\neq\varphi_2\varphi_1$，即变换的乘积未必满足交换律．但变换的乘积满足结合律，即 $\varphi_3(\varphi_2\varphi_1)=(\varphi_3\varphi_2)\varphi_1$．

恒等变换(identical transformation)　亦称恒同变换、幺变换或不动变换．集合的一种特殊变换．设 S 是一个集合，使 S 的任何元素都变为其自身的变换称为 S 的恒等变换．恒等变换常记为 ε，对于 S 的任何变换 φ，有 $\varepsilon\varphi=\varphi\varepsilon=\varphi$．

恒同变换(identical transformation)　即“恒等变换”．

幺变换(identical transformation)　即“恒等变换”．

不动变换(identical transformation)　即“恒等变换”．

逆变换(inverse transformation)　亦称反变换．相对于一个变换的一种变换．指把象点变为原象点的变换．设 φ 是集合 S 的一个一一变换，它把 S 中的任一元素 x 变换为 $\varphi(x)$．S 的另一个变换 φ^{-1}，把每一个 $\varphi(x)$变换为 x，即 $\varphi^{-1}:\varphi(x)\to x$，这个变换 φ^{-1}称为变换 φ 的逆变换．φ 也是 φ^{-1}的逆变换．φ 和 φ^{-1}满足恒等式：$\varphi\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\varphi=\varepsilon$．也可把满足这个等式的变换 φ^{-1}称为变换 φ 的逆变换．

反变换(inverse transformation)　即“逆变换”．

合同变换(congruent transformation)　亦称全等变换或正交变换.欧氏几何中的一类重要变换.即使图形变为其全等图形的变换.如果欧氏平面(平面几何)或欧氏空间(立体几何)的点变换,把任意线段的两个端点变成等长线段的两个端点,则称其为合同变换.合同变换把几何图形变成合同(即全等)图形,保持线段长度不变,保持角度不变,并把直角变成直角.在 n 维欧氏空间(包括普通平面和空间)中,也把保持两点间距离(即线段长度)不变(因而角度也不变)的点变换称为正交变换或合同变换.正交(合同)变换把欧氏空间中由两两正交的单位向量组成的标准正交基变成标准正交基.在标准正交基下,把已知点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$变成点$(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$的正交(合同)变换的公式是

$$x'_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+a_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

是正交矩阵(参见本卷《高等代数》中的"正交变换"),因而有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{kj}=\delta_{ik}=\begin{cases}1&(i=k),\\0&(i\neq k),\end{cases}$$

和$\triangle=|a_{ij}|=\pm1$. $\triangle=1$ 时称为第一种正交(合同)变换,$\triangle=-1$ 时称为第二种正交(合同)变换.第一种变换把图形变成同向全等形,第二种变换把图形变成反向全等形.

全等变换(congruent transformation)　即"合同变换".

正交变换(orthogonal transformation)　即"合同变换",并可参见本卷《高等代数》同名条,应注意两者含义的不同.

第一种正交(合同)变换(orthogonal (congruent) transformation of the first type)　亦称刚体运动或运动变换.见"合同变换".

第二种正交(合同)变换(orthogonal (congruent) transformation of the second type)　见"合同变换".

平移变换(translation transformation)　简称平移或直移.欧氏几何中的一种重要变换.即在欧氏平面上(欧氏空间中),把每一点 P 按照已知向量$\overrightarrow{AA'}$的方向移到 P',使$\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{AA'}$,如此产生的变换称为平面上(空间中)沿向量$\overrightarrow{AA'}$的平移变换,简称平移.平移是第一种正交变换.例如在平面直角坐标系中,若$\overrightarrow{AA'}=\{a,b\}$,点 $P(x,y)$沿$\overrightarrow{AA'}$平移到点 $P'(x',y')$,则这个平移变换的代数表达式为

$$\begin{cases}x'=x+a,\\y'=y+b.\end{cases}$$

平移变换的逆变换也是平移变换.两个平移变换的乘积仍是平移变换.所有平移变换的全体构成一个群,称为平移群.平移变换的概念可以推广到 n 维欧氏空间,其代数表达式为:$x'_i=x_i+a_i(i=1,2,\cdots,n;$ a_i 为常数),或用矩阵表示为:$(x'_i)=(x_i)+(a_i)$.其中(x'_i),(x_i),(a_i)均为 $n\times1$ 矩阵.

平移(translation)　平移变换的简称.

直移(translation)　即"平移变换".

旋转变换(rotation transformation)　简称旋转.欧氏几何中的一种重要变换.即在欧氏平面上(欧氏空间中),让每一点 P 绕一固定点(固定轴线)旋转一个定角,变成另一点 P',如此产生的变换称为平面上(空间中)的旋转变换.此固定点(固定直线)称为旋转中心(旋转轴),该定角称为旋转角.旋转是第一种正交变换.在平面直角坐标系中,若旋转中心为点 $M_0(x_0,y_0)$,点 $P(x,y)$绕 M_0 旋转定角 θ 后变成点 $P'(x',y')$,则平面上旋转变换的代数表达式为

$$\begin{cases}x'-x_0=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta,\\y'-y_0=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta.\end{cases}$$

旋转变换的逆变换也是旋转变换,两个绕同一点(同一轴线)的旋转变换的乘积仍是旋转变换.所有绕同一点(同一轴线)的旋转变换的全体构成一个群,称为旋转群.在旋转变换下,两点间的距离与两直线的交角均保持不变.旋转变换的概念可以推广到 n 维欧氏空间.绕 $O(0,0,\cdots,0)$点旋转的代数表达式为

$$x'_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ (i=1,2,\cdots,n),$$

或用矩阵表示为:$(x'_i)=(a_{ij})\cdot(x_i)$,其中 a_{ij} 为常数,且(x'_i),(x_i)均为 $n\times1$ 矩阵.矩阵(a_{ij})是行列式等于 1 的正交矩阵(参见本卷《高等代数》同名条).

旋转(rotation)　旋转变换的简称.

刚体运动(rigid motion)　即第一种正交变换.欧氏平面上和欧氏空间中旋转变换与平移变换的乘积是刚体运动.在平面直角坐体系中,平面上刚体运动的代数表达式为

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta+a,\\y'=x\sin\theta+y\cos\theta+b,\end{cases}$$

其中(x,y),(x',y')分别是变换前的点与变换后它的对应点的坐标.刚体运动的逆变换也是刚体运动.两个刚体运动的乘积仍是刚体运动,所有欧氏平面上的刚体运动的全体构成一个群,称为刚体运动群.

刚体运动群(group of rigid motion)　见"刚体运动".

运动变换(motion transformation)　即"第一种正交(合同)变换".

中心反射变换(central reflection transformation) 亦称点反射.简称中心反射.欧氏几何中的一种重要变换.在欧氏平面或欧氏空间中,把任一点映成与一个给定的点 S 对称的点 A' 的变换称为关于点 S 的中心反射变换.点 S 称为反射中心或对称中心.在中心反射下,连结每一对对应点 A,A' 所得的线段被点 S 所平分.反射中心 S 是惟一的不动点.平面上的中心反射是第一种正交变换,空间的中心反射是第二种正交变换.在平面(空间)直角坐标系中,如果以坐标原点为反射中心,则中心反射的代数表达式为:$x'=-x, y'=-y, (z'=-z)$.其中 $(x,y(,z)),(x',y'(,z'))$ 分别是变换前后的点的坐标.

点反射(point reflection) 即"中心反射变换".

中心反射(central reflection) 中心反射变换的简称.

反射中心(center of reflection) 见"中心反射变换".

轴反射变换(axial reflection transformation) 简称轴反射.欧氏几何中一种重要变换.在欧氏平面上或欧氏空间中,把任一点 A 映成关于给定直线 S 对称的点 A' 的变换称为关于直线 S 的轴反射变换,直线 S 称为反射轴.平面轴反射是第二种正交变换.空间轴反射变换亦称半周旋转.它是旋转角为 π 的空间绕反射轴的旋转,因而是第一种正交变换.在轴反射变换下,连结每一对对应点 A,A' 所得到的线段都垂直于 S,且被 S 所平分.反射轴上的每一点都是不动点.在平面直角坐标系中,若以 x 轴为反射轴,则轴反射的代数表达式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y, \end{cases}$$

其中 $(x,y),(x',y')$ 分别是变换前的点与它的对应点的坐标.

轴反射(axial reflection) 轴反射变换的简称.

反射轴(axis of reflection) 见"轴反射变换".

镜面反射变换(mirror reflection transformation) 简称镜面反射或平面反射.欧氏空间中的一种特殊变换.在欧氏空间中,把任一点 A 映成关于给定平面 π 对称的点 A' 的变换称为关于平面 π 的镜面反射变换,平面 π 称为反射平面.镜面反射是第二种正交变换.在镜面反射变换下,连结变换的每一对对应点 A,A' 所得到的线段都垂直于反射平面 π 且被 π 所平分.平面 π 上的点都是不动点.镜面反射变换在直观上相当于把平面 π 看做一面镜子,变换前后的对应点就好比是物与像那样.在空间直角坐标系中,若把坐标平面 xOy 取为反射平面,则镜面反射变换的代数表达式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=y, \\ z'=-z, \end{cases}$$

其中 $(x,y,z),(x',y',z')$ 分别是变换前的点与变换后它的对应点的坐标(参见本卷《高等代数》的"镜面反射").

平面反射(plane reflection) 即"镜面反射变换".

镜面反射(mirror reflection) 镜面反射变换的简称.

反射平面(reflection plane) 见"镜面反射变换".

反射变换(reflection transformation) 欧氏几何中一种重要变换.即欧氏平面上的轴反射变换和欧氏空间中的镜面反射变换统称反射变换,简称反射.

反射(reflection) 反射变换的简称.

平面正交变换的代数表达式(algebraic expression of a plane orthogonal transformation) 表示平面正交变换的公式.在平面上给定直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$,如果平面上的正交变换把直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 变成直角坐标系 $\{O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2\}$,且点 O',向量 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$ 在直角坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中的坐标分别为 $O'(a_{13},a_{23}),\boldsymbol{e}'_1=\{a_{11},a_{21}\},\boldsymbol{e}'_2=\{a_{12},a_{22}\}$,那么正交变换的代数表达式为

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}. \end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$ 都是单位向量且互相垂直,所以表达式中的系数必满足正交条件

$$\begin{cases} a_{11}^2+a_{21}^2=1, \\ a_{12}^2+a_{22}^2=1, \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0. \end{cases}$$

系数构成的行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\pm 1.$$

当 $\Delta=+1$ 时是第一种正交变换,它不改变坐标系的定向,即它把右(左)手系仍变成右(左)手系;当 $\Delta=-1$ 时是第二种正交变换,它将改变坐标系的定向,即它把右(左)手系变成左(右)手系(参见"正交变换").

度量性质(metric property) 亦称正交性质.正交变换的一种特征.指图形在正交变换下保持不变的性质.例如,结合性、平行性、相等性等都是度量性质.

正交性质(orthogonal property) 即"度量性质".

度量不变量(metric invariant) 亦称正交不变

量.正交变换的一种特征.指在正交变换下保持不变的量.例如,两点之间的距离、两直线间的夹角、图形的面积等均是度量不变量.其中,两点之间的距离是最基本的度量不变量,其他度量不变量都可以由该不变量表示出来.

正交不变量(orthogonal invariant) 即"度量不变量".

欧几里得空间(Euclidean space) 简称欧氏空间.既是几何学的研究对象,又是代数学的研究对象.在几何学中,欧氏空间是满足全部欧几里得公理的几何空间.它的几何是研究几何图形的度量性质和度量不变量的欧几里得几何(简称欧氏几何),包括普通平面几何和立体几何的全部理论.

欧氏几何空间按维数的不同而有一维欧氏空间(即欧氏直线)、二维欧氏空间(即欧氏平面)和三维欧氏空间(即普通空间,在几何学中也常简称欧氏空间).在代数学中,欧氏空间是实数域上的一个线性空间,在其中规定了一个称为内积的二元实函数.欧氏线性空间的维数可以是任意的自然数.容易在同维数的欧氏几何空间与欧氏线性空间之间建立直接的联系.在欧氏几何空间中取定一点作为公共的起点,空间每一点就决定一个以该点作为终点的向量.这种向量的全体构成的集合在向量加法和数乘向量的乘法下就是一个线性空间.再以通常向量的数量积作为线性空间中向量的内积,这个线性空间就是一个欧氏线性空间.反之,在线性空间取定基底后,n 维线性空间中的向量可以用 n 元数组作为坐标表示,再把 n 维欧氏线性空间的向量的坐标看做 n 维欧氏几何空间中建立了直角坐标系后点的坐标,这样就在 n 维欧氏线性空间的向量和 n 维欧氏几何空间的点之间建立了一一对应,并且当取后者的坐标原点作为公共的起点,由后者的每个点作为终点所决定的向量,其坐标正好与前者的对应向量的坐标相同,由其数量积所确定的欧氏线性空间,也与前者完全合一.

总之,按照以上的讨论,在同维数的几何空间和欧氏线性空间之间可以建立一一对应,并在此对应下保持着各自的几何、代数结构.这也是将后来发展的代数体系与先发展的几何体系取同一名称——欧几里得空间的原因(参见本卷《高等代数》同名条).

欧氏直线(Euclidean straight line) 即一维欧氏空间,见"欧几里得空间".

欧氏平面(Euclidean plane) 即二维欧氏空间,见"欧几里得空间".

仿射坐标系(affine coordinate system) 见本卷《平面解析几何》中的"平面仿射坐标"及本卷《空间解析几何》中的"标架".

向量的仿射坐标(affine coordinate of a vector) 仿射几何中向量的代数表示.在平面仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中,平面上任一向量 $\boldsymbol{p}$ 可惟一地表示成 $\boldsymbol{p}=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2$,由系数组成的有序数偶 $\{X,Y\}$ 称为向量 $\boldsymbol{p}$ 对 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 的仿射坐标,记为 $p=\{X,Y\}$.同样,在空间仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中,空间中任一向量 $\boldsymbol{p}$ 可惟一地表示成 $\boldsymbol{p}=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2+Z\boldsymbol{e}_3$,由系数组成的有序三数组 $\{X,Y,Z\}$ 称为向量 $\boldsymbol{p}$ 对 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的仿射坐标,记为 $\boldsymbol{p}=\{X,Y,Z\}$.

点的仿射坐标(affine coordinate of a point) 亦称点的平行坐标.仿射几何中点的代数表示.在平面仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中,平面上的任一点 M 可惟一决定向量 $\overrightarrow{OM}$,而 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,$(x,y)$ 称为点 M 对 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 的仿射坐标,记为 $M(x,y)$.同样,在空间仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 中,空间中任一点 M 亦可惟一决定向量 $\overrightarrow{OM}$,而 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$,$(x,y,z)$ 称为点 M 对 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的仿射坐标,记为 $M(x,y,z)$.

点的平行坐标(parallel coordinate of a point) 即"点的仿射坐标".

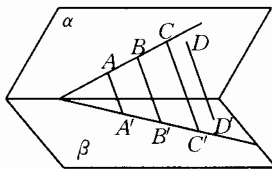
单比(simple ratio) 亦称仿射比,又称简单比.是仿射几何中最基本的不变量.若 P_1,P_2 是有向直线上的两个定点,P 是这直线上的另一点.P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 为两个有向线段 $\overrightarrow{P_1P}$ 和 $\overrightarrow{P_2P}$,则其数量的比 P_1P/P_2P 称为三点 P_1,P_2,P 的单比,记为 $(P_1\,P_2\,P)$.即

$$(P_1\,P_2\,P)=\frac{P_1P}{P_2P},$$

其中 P_1,P_2 称为基点,P 称为分点(参见本卷《算术》中的"比").

仿射比(affine ratio) 即"单比".

透视仿射对应(perspective affine correspondence) 亦称平行投影.仿射几何中的一种对应.指两个点集间通过平行投影所建立的对应.设 α 与 β 是两个平面(如图),过 α 内各点 $A,B,C,\cdots$,引直线平行于给定的方向,交 β 于 $A',B',C',\cdots$,这样使 α 内的点与 β 内的点建立起一种一一对应关系,这种对应称为 α 到 β 的透视仿射对应.透视仿射对应与给定的方向有关.沿不同方向作平行线,就得到 α 与 β 间不同的透视仿射对应.透视仿射对应保持同素性,即在该对应下,对应的几何元素保持同一种类.例如,它把点仍变成点,另外,把直线仍变为直线.透视仿射对应还保持点与直线的结合性(即点在直线上或直线经过点),两直线的平行性及共线三点的单比不变.



平行投影(parallel projection)　即"透视仿射对应".

仿射对应(affine correspondence)　一种重要的几何对应.有限个透视仿射对应的乘积.例如,设有 $n+1$ 个平面 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta$.如果在平面偶 $(\alpha,\alpha_1),\cdots,(\alpha_i,\alpha_{i+1}),\cdots,(\alpha_{n-1},\beta)$ 之间都存在着透视仿射对应,即每两个相邻平面之间都存在着平行投影,则平面 α 与平面 β 的点之间就建立起一个一一对应关系,这种对应就称为平面 α 到平面 β 的仿射对应.仿射对应保持同素性,结合性,平行性(即互相平行的直线对应着互相平行的直线)和共线三点的单比不变.

仿射变换(affine transformation)　仿射几何学中最基本、最重要的一种变换.若 M 是点集,则 M 到自身的仿射对应称为 M 上的仿射变换.例如,若 α 与 β 是两个重合的平面,则 α 到 β 的仿射对应称为平面 α 到自身的仿射变换,或称为平面 α 上的仿射变换.类似地,直线 l 到自身的仿射对应称为直线 l 上的仿射变换;空间 S 到自身的仿射对应称为空间中的仿射变换.平面上(直线上、空间中)一切仿射变换构成一个群,称为平面(直线、空间)仿射变换群.简称平面(直线、空间)仿射群.

平面仿射变换的代数表达式(algebraic expression of a plane affine transformation)　表示平面仿射变换的公式.在平面内给定仿射坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$,若一个仿射变换把坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 变为坐标系 $\{O';\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2\}$,把点 $P(x,y)$ 变为点 $P'(x',y')$.这里 (x,y),(x',y') 是 P 与 P' 点关于坐标系 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 的坐标.设向量 $\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2$ 在 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 中的坐标分别为 $\{a_{11},a_{21}\}$,$\{a_{12},a_{22}\}$,点 O' 的坐标为 (a_{13},a_{23}),则这个仿射变换的代数表达式是

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\end{cases}\quad\left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0\right).$$

仿射变换的变积系数(coefficient of area change of a affine transformation)　仿射变换下一个重要不变量.在欧氏平面上,仿射变换使图形的面积按同一个比值改变,这个比值称为仿射变换的变积系数.在平面直角坐标系中,若一个仿射变换的代数表达式是

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13},\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\end{cases}\quad\left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0\right).$$

则系数行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

就是该仿射变换的变积系数.仿射变换的变积系数常用来计算欧氏平面上某些图形的面积.

等积仿射变换(equivalent affine transformation)　亦称幺模仿射变换.一种特殊的仿射变换.指变积系数的绝对值等于 1 的仿射变换.

幺模仿射变换(unimodular affine transformation)　即"等积仿射变换".

中心仿射变换(central affine transformation)　一类重要的仿射变换.即含一个不变点的仿射变换称为中心仿射变换.这个不变点称为中心仿射变换的中心.在以变换中心为坐标原点的仿射坐标系中,中心仿射变换公式右端的常数项为 0.例如,在平面仿射坐标系中,变换

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y,\\ y'=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}\quad(|a_{ij}|\neq0)$$

是一个中心仿射变换,其变换中心为坐标原点.

中心仿射变换群(group of central affine transformations)　仿射变换群的子群.即平面上以同一点为中心的中心仿射变换的全体构成一个群,称为中心仿射变换群.

位似变换(homothetic transformation)　简称位似.一种特殊的中心仿射变换.在欧氏平面上(欧氏空间中),取定一点 S,规定 S 的像为 S 本身,其他点 P 的像为 P',若满足以下条件:

1. 点 P' 在直线 SP 上.

2. 单比 $(P'\ P\ S)=k$,(k 为不等于 0 的常数),

则称这种变换为平面上(空间中)的位似变换.定点 S 称为位似中心,常数 k 称为位似比.当 $k>0$ 时,其变换称为同向位似;$k<0$ 时其变换称为反向位似.位似变换保持两向量的交角不变;把两点间的距离放大(或缩小)$|k|$ 倍;把图形变成与它相似的图形.在以位似中心 S 为坐标原点的平面直角坐标系中,位似变换的表达式为

$$\begin{cases}x'=kx,\\ y'=ky.\end{cases}$$

位似(homothetic)　位似变换的简称.

位似中心(homothetic center)　见"位似变换".

位似比(homothetic ratio)　见"位似变换".

相似变换(similarity transformation)　简称相似.正交变换的推广.指在欧氏平面上(欧氏空间中)的一类变换,若任何两点 P,Q 与其像点 P',Q' 满足

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|}=k(k\text{ 为非零常数}),$$

则称这种变换为平面上(空间中)的相似变换,k 称为相似比.当 $k=1$ 时,即为正交变换.相似变换把图形变成与它相似的图形.相似变换可以表示成一个正交变换与一个位似变换的乘积.例如,在平面直角坐标系中,平面上相似变换的代数表达式是

$$\begin{cases}x'=\gamma(x\cos\theta-\varepsilon y\sin\theta)+c_1,\\ y'=\gamma(x\sin\theta+\varepsilon y\cos\theta)+c_2.\end{cases}\quad(\gamma>0,\varepsilon=\pm1).$$

其中 γ,θ,c_1,c_2 是四个独立参数,且 $|\varepsilon|=1$.当 ε

$=+1$时，其变换称为同向相似，它是第一种正交变换与位似变换的乘积. 当$\varepsilon=-1$时，其变换称为异向相似，它是第二种正交变换与位似变换的乘积.

相似(similarity)　相似变换的简称.

相似比(similarity ratio)　见“相似变换”.

相似性质(similarity property)　相似变换的一种特征. 即图形经过任何相似变换都不改变的性质. 例如，结合性、平行性、保角性等都是相似性质.

相似不变量(similarity invariant)　相似变换的一种特征. 即图形经过任何相似变换都不改变的量. 例如，相似比就是最基本的相似不变量.

仿射性质(affine property)　仿射变换的一种特征. 指图形经过任何仿射对应(变换)都不改变的性质. 例如，同素性、结合性、平行性等都是仿射性质.

仿射不变量(affine invariant)　仿射变换的一种特征. 指图形经过任何仿射对应(变换)都不改变的量. 共线三点的单比是最基本、最重要的仿射不变量. 其他如两平行的有向线段之比、平行平面(包括同一平面)上两个封闭图形的面积比等都是仿射不变量.

仿射等价(affine equivalence)　图形间的一种等价关系. 若存在一个仿射变换把图形C_1变成C_2，则称C_1与C_2仿射等价. 否则称为仿射不等价. 图形的仿射等价是一种等价关系，即具有自反性、对称性、传递性. 利用仿射等价关系可以把几何图形进行分类. 同一类里的图形具有相同的仿射性质，不同类的两个图形间至少存在一个不同的仿射性质. 仿射等价的概念在仿射几何中有广泛的应用. 例如，利用圆和椭圆仿射等价的事实可以得到仿射变换的重要定理：平面上的仿射变换可以分解为一个正交变换和两个在互相垂直方向上的压缩(或伸长)的乘积.

仿射不等价(affine non-equivalence)　见“仿射等价”.

二次曲线的中心(center of a quadratic curve)　见本卷《平面解析几何》同名条.

二次曲线的渐近方向(asymptotic direction of a quadratic curve)　见本卷《平面解析几何》同名条.

二次曲线的直径(diameter of a quadratic curve)　见本卷《平面解析几何》同名条.

二次曲线的共轭直径(conjugate diameters of a quadratic curve)　见本卷《平面解析几何》同名条.

二次曲线的切线(tangent line of a quadratic curve)　见本卷《平面解析几何》同名条.

二次曲线的奇点(singular point of a quadratic curve)　见本卷《平面解析几何》同名条.

奇异二次曲线(singular quadratic curve)　二次曲线的特殊类型. 若二次曲线是由两条直线构成的，则称为奇异的或退化的二次曲线. 否则称为非奇异的或非退化的二次曲线. 如果曲线方程为：$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$，那么它是奇异二次曲线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

二次曲线有奇点的充分必要条件为它是奇异的.

非奇异二次曲线(nonsingular quadratic curve)　见“奇异二次曲线”.

退化二次曲线(degenerate quadratic curve)　即“奇异二次曲线”.

非退化二次曲线(nondegenerate quadratic curve)　见“奇异二次曲线”.

二次曲线的仿射分类(affine classification of quadric curves)　二次曲线的一种分类方法. 即用仿射等价对二次曲线进行的分类. 在仿射平面上，所有的二次曲线可分成九个仿射等价类. 这九类曲线的标准方程及所代表的曲线如下：

1. $x^2+y^2+1=0$，虚椭圆.
2. $x^2+y^2-1=0$，椭圆.
3. $x^2-y^2-1=0$，双曲线.
4. $y^2-2x=0$，抛物线.
5. $x^2+y^2=0$，一点或两条相交虚直线.
6. $x^2-y^2=0$，两条相交实直线.
7. $y^2+1=0$，两条平行虚直线.
8. $y^2-1=0$，两条平行实直线.
9. $y^2=0$，两条重合实直线.

射 影 几 何

射影几何(projective geometry)　亦称投影几何. 几何学的一个分支. 主要研究图形在射影对应(射影变换)下不变的几何性质. 射影变换是射影几何中最重要的几何变换. 这种变换的主要特点是保持结合性. 例如，点与直线及点与平面的结合性等. 交比是射影几何中最基本的不变量，其他不变量都可以用交比表示出来.

射影几何的思想，特别是其中的透视投影原理，早在古罗马时代已为画家所认识和应用；射影几何的基本不变量——交比，早已为帕普斯(Pappus，(A))所熟知；射影几何的一些命题也早已为古代几何学家所得到(参见“高等几何”). 然而，射影几何作为几何学的一个独立分支学科却是在19世纪初期，随着几何学的发展以及绘画与建筑的需要而形成和发展起来的. 1822年，彭赛列(Poncelet, J.-V.)发表了射影几何的第一部系统著作《论图形的射影性质》

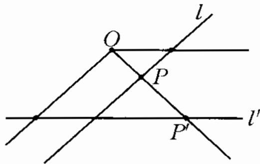
一书.他通过几何方法引进无穷远元素,研究了二次曲线和二次曲面的配极理论,并由此导出一般的对偶原理.稍后,施泰纳(Steiner,J.)研究了利用简单图形产生较复杂图形的方法,并于1832年引进了线素二次曲线概念.1847年,冯·施陶特(von Staudt,K.G.C.)通过几何作图来建立直线上点的坐标,进而使交比与射影坐标不依赖于任何度量.此外,他还以精巧的方法给出虚元素的几何解释.与此同时,运用解析法研究射影几何也有了长足的发展.首先是默比乌斯(Möbius,A.F.)创立了一种齐次坐标,揭示了对偶原理与配极之间的关系,并于1827年对交比的概念给出了完善的处理.接着,普吕克(Plücker,J.)引进了另一种齐次坐标,得到了平面上无穷远线的方程和无穷远圆点的坐标.他还引入了线坐标的概念,于是从代数观点自然就得到对偶原理,并得到一般线曲线的概念.在19世纪前半叶的几何研究中,综合法与解析法的争论非常激烈.一些几何学家坚持运用综合法,如彭赛列、施泰纳等.综合法也确实有它独特的优点,它形象鲜明,使有些问题的论证直接而简洁.由于他们的努力,使综合射影几何形成了一个优美的体系.1882年,帕施(Pasch,M.)建立了第一个射影几何演绎体系.1872年,克莱因(Klein,(C.)F.)利用变换群的观点把各种几何学联系起来,他在埃尔朗根纲领中提出了这个观点,并把几种经典几何看做是射影几何的子几何,使这些几何之间的关系变得更加明朗.

1899年,希尔伯特(Hilbert,D.)发表了《几何基础》一书,开创了现代公理化方法.此后逐渐出现了各种几何学的公理体系.由于数学家们的共同努力,到19世纪末,射影几何的观点与方法已渗透到各个几何领域之中,使得欧几里得几何,罗巴切夫斯基几何和黎曼几何等联成一个统一的整体.同时,射影几何还在航空、摄影和测量等方面有着广泛的应用.

投影几何(1)(projective geometry (1)) 即“射影几何”.

投影几何(2)(projective geometry (2)) 即“画法几何”(参见《数学辞海》第五卷“画法几何”).

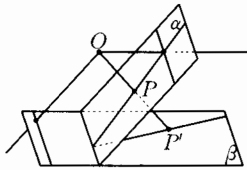
直线间的中心投影(central projection between straight lines) 两条直线上点之间的一种特殊的对应规律.如图,设 l 与 l' 是同一平面内两条不同的直线,O 是在此平面内但不在 l 与 l' 上的一点,若 P 是 l 上一点,直线 OP 与 l' 相交,则交点 P' 称为点 P 从 O 投射到 l' 上的中心投影.OP 称为投射线,O 点称为投射中心.显然,P 也是 P' 在 l 上的中心投影.直线间的中心投影与投射中心的选取有关,选取不同的投射中心,就得到 l 与 l' 间不同的中心投影.若 l 与 l' 相交,则称交点是中心投影的一个二重点,或称交点是中心投影的自对应点.两直线间的中心投影的对应不一定是 l 上的点与 l' 上的点之间的一一对应,当 l 与 l' 相交时,直线 l 与 l' 上各存在一个点,它与投射中心的连线平行于另一直线,因而在另一条直线上找不到它们的对应点.为了保证一一对应,就需要在这两条直线上各添加一个无穷远点.



中心投影的二重点(double point of a central projection) 见“直线间的中心投影”.

中心投影的自对应点(self-corresponding point of a central projection) 即“中心投影的二重点”.

平面间的中心投影(central projection between planes) 两个平面上的点之间的一种特殊的对应规律.如图,设 α 与 β 是空间中两个不同的平面,O 是不在这两个平面上的一个点,若 P 是平面 α 内任一点,直线 OP 与平面 β 相交,则交点 P' 称为点 P 在 β 上的中心投影,直线 OP 称为投射线,O 点称为投射中心.P 也是 P' 在 α 上的中心投影.平面间的中心投影与投射中心的位置有关,选取不同的投射中心,就得到 α 与 β 间不同的中心投影.若 α 与 β 相交,则交线上的点都是中心投影的二重点或称中心投影的自对应点,该交线称为中心投影的二重直线,或称中心投影的自对应直线.平面间中心投影的对应不一定是平面 α 上的点与 β 上的点的一一对应,当 α 与 β 相交时,平面 α 与 β 上各有一条直线,其上的点与投射中心的连线平行于另一平面,因而在另一个平面上找不到它们的对应点.为了保证一一对应和直线变成直线,就需要在这两个平面上各添加一条无穷远线.



投射线(projecting line) 见“直线间的中心投影”与“平面间的中心投影”.

投射中心(center of projection) 见“直线间的中心投影”与“平面间的中心投影”.

中心投影的二重直线(double straight line of a central projection) 见“平面间的中心投影”.

中心投影的自对应直线(self-corresponding line of a central projection) 即“中心投影的二重直线”.

无穷远点(point at infinity) 亦称假点或理想点.欧氏直线上的一个假想点.由于平行直线没有交点,所以直线间的中心投影不能建立一一对应.为了使中心投影保持一一对应,设想平行的直线在无穷远处交于一点,该点称为无穷远点.常记为 P_∞.并约定,任一组平行直线添加惟一的一个无穷远点与之对应,此点在组内每一条直线上而不在组外的任

何直线上. 为了区别起见，就把平面内原有的点称为有穷(远)点、真点或普通点. 引进无穷远点以后，平面内每两条直线都有交点，平行直线相交于公共的无穷远点.

假点(improper point)　即“无穷远点”.

理想点(ideal point)　即“无穷远点”.

有穷点(finite point)　见“无穷远点”.

真点(proper point)　即“有穷点”.

普通点(common point)　即“有穷点”.

无穷远直线(line at infinity)　亦称假直线或理想直线. 指欧氏平面上的一条假想直线，它是平面上所有直线上的无穷远点的集合. 为了区别起见，平面内原有的直线称为有穷直线、真直线或普通直线. 在平面上引进无穷远直线以后，空间中每两个平面都有交线. 一组平行的平面相交于属于诸平行平面的一条无穷远直线.

假直线(improper line)　即“无穷远直线”.

理想直线(ideal line)　即“无穷远直线”.

有穷直线(finite line)　见“无穷远直线”.

真直线(proper line)　即“有穷直线”.

普通直线(common line)　即“有穷直线”.

无穷远平面(plane at infinity)　亦称假平面或理想平面. 欧氏空间中的一个假想平面. 即空间中所有直线上的无穷远点的集合. 无穷远平面常记为 α_∞. 为了区别起见，就把空间中原有的平面称为有穷平面、真平面或普通平面.

假平面(improper plane)　即“无穷远平面”.

理想平面(ideal plane)　即“无穷远平面”.

有穷平面(finite plane)　见“无穷远平面”.

真平面(proper plane)　即“有穷平面”.

普通平面(common plane)　即“有穷平面”.

无穷远元素(element at infinity)　亦称假元素或理想元素. 射影几何的一个术语. 指空间中的无穷远点、无穷远直线和无穷远平面的统称. 平面几何里的无穷远元素为无穷远点和无穷远直线.

理想元素(ideal element)　即“无穷远元素”.

假元素(improper element)　即“无穷远元素”.

射影直线(projective line)　亦称一维射影空间. 射影几何研究的基本对象. 指一维(直线)射影几何的全体点的集合. 欧氏直线(或仿射直线)添加一个点(即无穷远点)后称为扩大直线. 把扩大直线上的普通点和无穷远点不加区别同等看待，这直线就成为射影直线的一个模型. 反过来，若在一条射影直线上任意取定一个点，把它当做无穷远点，而将其余的点都当做有穷点，则该直线就可看做一条欧氏直线(或仿射直线)的扩大直线，即去掉了无穷远点后的全体有穷点的集合是欧氏直线(仿射直线). 射影直线具有与欧氏直线(仿射直线)不同的性质. 例如在射影直线上，任何两点都不能确定惟一的一条线段，任何三个点也不能确定哪一个点介于另外两个点之间.

一维射影空间(one-dimensional projective space)　即“射影直线”.

扩大直线(amplify line)　见“射影直线”.

射影平面(projective plane)　亦称二维射影空间. 射影几何研究的基本对象. 指二维(平面)射影几何的全体点的集合. 欧氏平面(或仿射平面)添加一条直线(即无穷远直线)后称为扩大平面. 把扩大平面上的普通元素(点和直线)和无穷远元素不加区别同等看待，这平面就成为射影平面的一个模型. 反过来，若在一个射影平面上任意取定一条直线，把它当做无穷远直线，并把这直线上的点当做无穷远点，而将其余的直线和点都当做有穷直线和有穷点，则该平面就可看做一个欧氏平面(或仿射平面)的扩大平面，即去掉了无穷远点的全体有穷点的集合是欧氏平面(仿射平面). 射影平面具有与欧氏平面(仿射平面)不同的性质. 例如在射影平面上，任何一条直线都不能把射影平面分成两部分，任何两条直线都相交，但它们却不能把射影平面分成四部分.

二维射影空间(two-dimensional projective space)　即“射影平面”.

扩大平面(amplify plane)　见“射影平面”.

三维射影空间(three-dimensional projective space)　常简称射影空间. 射影几何研究的基本对象. 指三维(空间)射影几何的全体点的集合. 三维欧氏空间(或仿射空间)添加一个平面(即无穷远平面，它由所有直线上的无穷远点组成)后称为扩大空间. 把扩大空间中的普通元素(点、直线和平面)和无穷远元素不加区别同等看待，这空间就成为射影空间的一个模型. 反过来，若在一个射影空间中任意取定一个平面，把它当做无穷远平面，并把这平面上的点和直线当做无穷远点和无穷远直线，而将其余的点、直线和平面都当做有穷点、有穷直线和有穷平面，则该空间就可看做一个欧氏空间(或仿射空间)的扩大空间，即去掉了无穷远点后全体有穷点的集合是欧氏空间(仿射空间). 射影空间具有与欧氏空间(仿射空间)不同的性质. 例如在射影空间中，任何一个平面都不能把射影空间分成两部分，任何两个平面都相交，但它们却不能把射影空间分成四部分.

扩大空间(amplify space)　见“三维射影空间”.

空间的维数(dimension of a space)　几何学的术语. 指欧氏空间的维数. 习惯上是指点的自由度. 由于点的自由度在直线上是 1，在平面上是 2，在空间中是 3，所以在欧氏几何中也把直线、平面、空间分别称为一维空间、二维空间和三维空间. 在直线、

平面和空间建立坐标系(通常指直角坐标系)时,点的坐标分别是1个、2个和3个数,所以,欧氏空间的维数正好也是它的点的坐标的个数.向量空间的维数是指其基向量的个数,因此也是向量坐标的个数.具有内积的向量空间也称为欧氏空间.作为向量空间的欧氏空间和作为点空间的欧氏空间,在维数上是一致的.仿射空间和射影空间的维数可由与其相应的欧氏空间的维数确定.

透视对应(perspective correspondence) 一种特殊的射影对应.设 l 与 l' 是同一平面上的两条直线,在 l 与 l' 上各添加一个无穷远点,就可以由中心投影建立直线 l 上的点与直线 l' 上的点之间的一一对应.这种通过中心投影所建立的两直线上的点之间的一一对应称为两直线间的透视对应.同样,引入无穷远元素以后,也可以通过中心投影建立两平面的点之间的一一对应,该对应就称为两平面之间的透视对应.若点列 $s(A,B,C,\cdots)$ 与线束 $S(a,b,c,\cdots)$ 在中心投影之下建立了一一对应,则称该对应为

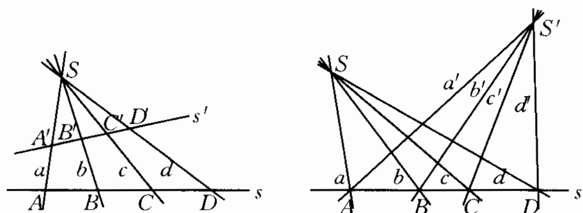


图1 图2

点列 s 与线束 S 之间的透视对应,在这种透视对应中,点列 s 是从直线 s 截割线束 S 得到的截影,该点列称为该线束 S 的透视点列,点 S 称为透视中心;而线束 S 是从点 S 投影点列 s 而得到的投影,该线束称为点列 s 的透视线束,直线 s 称为透视轴.对应的点列 s 和线束 S 称为透视的,记为

$$s(A,B,C,\cdots)\ \overline{\wedge}\ S(a,b,c,\cdots).$$

若两个点列 $s(A,B,C,\cdots)$ 和 $s'(A',B',C',\cdots)$ 都是同一线束 S 的截影,则称这两个点列间的对应为透视对应(如图1),记为

$$s(A,B,C,\cdots)\overset{(S)}{\overline{\wedge}}s'(A',B',C',\cdots).$$

若两个线束 $S(a,b,c,\cdots)$ 和 $S'(a',b',c',\cdots)$ 都是同一点列 s 的投影,则称这两个线束间的对应为透视对应(如图2),记为

$$S(a,b,c,\cdots)\overset{(s)}{\overline{\wedge}}S'(a',b',c',\cdots).$$

透视点列(perspective range of points) 见“透视对应”.

透视中心(perspective center) 见“透视对应”.

透视线束(perspective pencil of lines) 见“透视对应”.

透视轴(perspective axis) 见“透视对应”.

截影(cross section) 见“透视对应”.

射影对应(projective correspondence) 射影几何中最重要的一种对应.通常指射影空间(平面、直线)之间保持共线性和共线四点的交比不变的点的一一对应.在两个射影空间(平面、直线)都建立了射影坐标系后,它们之间的射影对应可以用对应点坐标之间的关系表出.例如,对于两个射影平面 π 与 π',若平面 π 上点 P 的射影坐标为 x_1,x_2,x_3,其对应的 π' 上点 P' 的射影坐标为 x'_1,x'_2,x'_3,则射影对应有代数表达式

$$\begin{cases}\rho x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \rho x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \rho x'_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{cases}\qquad(1)$$

$$|(a_{ij})|\neq 0\ \ (i,j=1,2,3).$$

其中 $\rho\neq 0$ 是齐次坐标的比例常数,$|(a_{ij})|$ 是矩阵 (a_{ij}) 的行列式.因此,也可以直接用点的射影坐标之间的齐次非奇异线性变换(1)来定义射影对应.当两个对应的射影空间(平面、直线)重合时,这种集合到自身的射影对应,通常称为射影空间(平面、直线)的射影变换.在射影空间(平面、直线)中建立射影坐标系后,射影变换可以用对应点的坐标之间的关系表出.例如,在射影平面上把具有射影坐标 x_1,x_2,x_3 的点变成具有射影坐标 x'_1,x'_2,x'_3 的点的射影变换同样有代数表达式(1).因此,同样可以直接用点的坐标的齐次非奇异线性变换(1)来定义射影变换.

射影变换(projective transformation) 见“射影对应”.

射影性质(projective property) 射影变换的一种特征.指图形经过任何射影对应(变换)都不变的性质.例如,同素性、结合性都是射影性质,但平行性不是射影性质.如中心投影是射影对应,而中心投影可以将两条平行直线投影成两条相交直线.

射影不变量(projective invariant) 射影变换的一种特征.指图形经过任何射影对应(变换)都不变的量.射影不变量也是一种射影性质.例如,交比就是最基本的射影不变量,同时也是最重要的射影性质.

点列(range of points) 射影几何的基本概念之一.指一条直线上所有点的集合.该直线称为点列的底,以 l 为底,以点 $A,B,C,\cdots$ 为元素的点列记为

$$l(A,B,C,\cdots).$$

线束(pencil of lines) 射影几何的基本概念之一.指平面上通过一点的所有直线的集合.该点称为线束的中心(顶点).以 O 为中心,以直线 $a,b,c,\cdots$ 为元素的线束记为 $O(a,b,c,\cdots)$.

线束的中心(center of a pencil of lines) 见“线束”.

线束的顶点(vertex of a pencil of lines)　即"线束的中心".

一维基本形(one-dimensional fundamental forms)　点列与线束的统称.

点场(field of points)　射影几何的基本概念之一.指一个平面上所有点的集合.该平面称为点场的底.以 W 为底,以 $A,B,C,\cdots$,为元素的点场可记为

$$W(A,B,C,\cdots,).$$

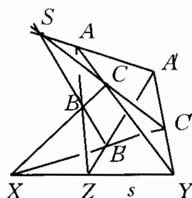
线场(field of lines)　射影几何的基本概念之一.一个平面上所有直线的集合称为线场,该平面称为线场的底.以 W 为底,$a,b,c,\cdots$为元素的线场可记为 $W(a,b,c,\cdots)$.

二维基本形(two-dimensional fundamental forms)　点场与线场的统称.

三点形(triangle of three points)　射影平面上的基本图形.指平面上不共线的三点及其每两点的连线所组成的图形.三个点称为三点形的顶点,三条直线称为三点形的边.

三线形(triangle of three lines)　射影平面上的基本图形.指平面上不共点的三条直线与其每两条直线的交点所组成的图形.三直线称为三线形的边,三点称为三线形的顶点.三点形与三线形实际上是同一图形的不同名称.它是自对偶图形(参见"三点形").

德萨格定理(Desargues theorem)　射影几何的重要定理之一.若两三点形的对应顶点连线共点(此点称为透视中心),则其对应边之交点必共线(此线称为透视轴).此定理的逆定理亦成立.满足德萨格定理的两个三点形称为透视的.



透视三点形(perspective triangles)　见"德萨格定理".

直线上点的齐次坐标(homogeneous coordinates of points on a line)　直线上点坐标的一种表示形式.在直线 l 上建立仿射坐标系,对于 l 上的任一有穷点 P,有确定的仿射坐标(x),必存在有序实数 x_1,x_2(其中 $x_2\neq0$),满足 $x=x_1/x_2$,这样的有序数偶(x_1,x_2)称为点 P 的齐次仿射坐标,简称齐次坐标.直线上点的齐次坐标适合下列条件:

1. 不全为零的有序数偶表示直线上惟一一点,$(0,0)$不代表任何点.

2. 若 $\rho\neq0$,则$(\rho x_1,\rho x_2)$与(x_1,x_2)表示同一点.

3. 当 $x_2\neq0$ 时,(x_1,x_2)表示直线上的有穷点,其仿射坐标 $x=x_1/x_2$ 亦称为该点的非齐次坐标.

4. 当 $x_2=0$,即$(x_1,0)$是该直线上的无穷远点.无穷远点只有齐次坐标,没有非齐次坐标.

平面上点的齐次坐标(homogeneous coordinate of points in a plane)　平面上点的坐标的一种表示形式.在平面上建立了仿射坐标系,若平面上点 P 的仿射坐标为(x,y),则满足$x_1/x_3=x,x_2/x_3=y$(其中 $x_3\neq0$)的有序三数组(x_1,x_2,x_3)称为点 P 的齐次仿射坐标,简称齐次坐标,记为 $P(x_1,x_2,x_3)$.平面上点的齐次坐标适合下列条件:

1. 不全为零的有序三数组(x_1,x_2,x_3)表示平面上惟一一点,$(0,0,0)$不代表任何点.

2. 若 $\rho\neq0$,则$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3)$与$(x_1,x_2,x_3)$表示同一点.

3. 当 $x_3\neq0$ 时,(x_1,x_2,x_3)表示平面上的有穷点.其仿射坐标 $x=x_1/x_3,y=x_2/x_3$ 亦称为该点的非齐次坐标.

4. 当 $x_3=0$,即$(x_1,x_2,0)$是与向量$\{x_1,x_2\}$平行的直线上的无穷远点.无穷远点只有齐次坐标,没有非齐次坐标.

三维空间点的齐次坐标(homogeneous coordinate of points in three-dimensional space)　空间中点的坐标的一种表示形式.在三维空间建立了仿射坐标系,若点 P 的仿射坐标为(x,y,z),则满足 $x_1/x_4=x,x_2/x_4=y,x_3/x_4=z$(其中 $x_4\neq0$)的有序四数组(x_1,x_2,x_3,x_4)称为点 P 的齐次仿射坐标,简称齐次坐标.记为 $P(x_1,x_2,x_3,x_4)$.空间中点的齐次坐标适合下列条件:

1. 不全为零的有序四数组(x_1,x_2,x_3,x_4)表示空间中惟一点.$(0,0,0,0)$不代表任何点.

2. 若 $\rho\neq0$,则$(\rho x_1,\rho x_2,\rho x_3,\rho x_4)$与$(x_1,x_2,x_3,x_4)$表示同一点.

3. 当 $x_4\neq0$ 时,(x_1,x_2,x_3,x_4)表示空间中的有穷点,其仿射坐标 $x=x_1/x_4,y=x_2/x_4,z=x_3/x_4$,亦称为该点的非齐次坐标.

4. 当 $x_4=0$,即$(x_1,x_2,x_3,0)$是与向量$\{x_1,x_2,x_3\}$平行的直线上的无穷远点.无穷远点只有齐次坐标,没有非齐次坐标.

非齐次坐标(non-homogeneous coordinates)　见"直线上点的齐次坐标"、"平面上点的齐次坐标"与"空间中点的齐次坐标".

直线的齐次坐标方程(homogeneous coordinate equation of a straight line)　直线的一种表示形式.即用齐次坐标表示出的直线方程.在平面上,点采用齐次坐标后,设有一直线和一个以(x_1,x_2,x_3)为流动点的齐次坐标所构成的一次齐次方程,若此方程能够且仅能够被该直线上的点的齐次坐标所满足,则称此方程为该直线的齐次坐标方程,简称齐次方程.该直线称为此方程决定的直线.一般地,若 a_1,a_2,a_3 不全为零,则方程 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ 就是

一条直线的齐次坐标方程. 例如, x 轴(即 $y=0$)的齐次坐标方程是 $x_2=0$. y 轴(即 $x=0$)的齐次坐标方程是 $x_1=0$. 无穷远直线的齐次坐标方程是 $x_3=0$. 直线 $a_1x+a_2y+a_3=0(a_1^2+a_2^2\neq0)$的齐次坐标方程是 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$.

几何元素(geometrical element) 几何学的基本概念之一. 指构成几何图形的基本对象. 取点作为基本元素的几何称为点几何学. 在点几何学里, 对于点引入坐标, 曲线是点的轨迹. 取直线作为基本元素的几何称为线几何学. 在线几何学里, 对于直线引入坐标, 曲线是一族直线的包络. 点几何学中的曲线称为点曲线, 线几何学中的曲线称为线曲线. 此外, 由于所取几何元素的不同, 还有面几何学、圆几何学和球几何学等.

点几何学(point geometry) 见"几何元素".

线几何学(line geometry) 见"几何元素".

直线坐标(line coordinates) 平面几何的基本概念之一. 指平面上表示直线位置的有序数组. 例如在平面上, 若直线 l 的齐次方程为 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$, 则它的系数 u_1,u_2,u_3 所构成的有序三数组$\{u_1,u_2,u_3\}$称为 l 的齐次直线坐标, 简称直线坐标, 记为 $l[u_1,u_2,u_3]$. 直线坐标适合下列条件:

1. 不全为零的有序三数组$\{u_1,u_2,u_3\}$表示一条直线.

2. 成比例的有序三数组$\{u_1,u_2,u_3\}$与$\{\rho u_1,\rho u_2,\rho u_3\}(\rho\neq0)$表示同一条直线.

3. 点 $P(x'_1,x'_2,x'_3)$在直线 $l[u_1,u_2,u_3]$上的充分必要条件为 $u_1x'_1+u_2x'_2+u_3x'_3=0$.

平面的齐次坐标方程(homogeneous coordinate equation of a plane) 平面的一种表示形式. 即用齐次坐标所表示的平面方程. 空间平面的齐次方程为 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$, 其中, (x_1,x_2,x_3,x_4)为此平面上点的齐次坐标.

平面坐标(plane coordinates) 平面几何的基本概念之一. 指空间中表示平面位置的有序数组. 例如, 在空间中, 若空间中点的齐次坐标用(x_1,x_2,x_3,x_4)表示, 则平面 $\pi: u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$ 由它的系数 u_1,u_2,u_3,u_4 所决定. 有序四数组$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$称为平面的齐次坐标, 记为 $\pi[u_1,u_2,u_3,u_4]$. 平面的齐次坐标适合下列条件:

1. 不全为零的有序四数组$[u_1,u_2,u_3,u_4]$表示一个平面.

2. 成比例的有序四数组$[u_1,u_2,u_3,u_4]$与$[\rho u_1,\rho u_2,\rho u_3,\rho u_4](\rho\neq0)$表示同一个平面.

3. $P(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)$在平面 $\pi[u_1,u_2,u_3,u_4]$上的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{4}u_ix'_i=0.$$

点的方程(equation of a point) 直线坐标下点的代数表示. 指平面上以$[u_1,u_2,u_3]$为流动直线坐标所构成的方程 $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$ 称为点(x_1,x_2,x_3)的方程. 此方程能够且仅能够被通过点(x_1,x_2,x_3)的直线的齐次坐标所满足. 例如, $2u_1+u_2+3u_3=0$ 表示通过点$(2,1,3)$的一束直线, 这个方程就称为用直线坐标表示的点$(2,1,3)$的方程. 一般地, 点(a_1,a_2,a_3)的方程为 $a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0$, 反之, $[u_1,u_2,u_3]$的一个一次齐次方程必表示一个点.

点与直线的结合(incidence between a point and a straight line) 几何学的一个基本关系. 即点在直线上, 或者直线通过点. 它在各种几何变换下都保持不变. 即当原象点 A 与直线 a 结合时, 经过映射, 象点 A' 与象直线 a' 仍是结合的.

点与平面的结合(incidence between a point and a plane) 几何学的一个基本关系. 即点在平面上, 或者平面通过点. 它在各种几何变换下都保持不变. 即当原象点 A 与平面 π 结合时, 经过映射, 象点 A' 与象平面 π' 仍是结合的.

对偶元素(dual elements) 射影几何的一个术语. 指射影几何中元素间的一种特殊关系. 在射影平面上, 点与直线互为对偶元素. 在三维射影空间中, 点与平面互为对偶元素, 直线的对偶元素仍是直线.

对偶运算(dual operations) 射影几何的一个术语. 指射影几何中将基本元素间的结合关系换为其对偶元素的结合关系的一种方法. 在射影平面上, 通过一点作一直线与在一直线上取一点称为平面上的对偶运算. 在三维射影空间中, 通过一点作一直线与在一平面上取一直线; 通过一直线作一平面与在一直线上取一点; 通过一点作一平面与在一平面上取一点等都称为空间中的对偶运算.

对偶图形(dual figures) 具有特定关系的两个图形. 指成对偶对应的几何图形. 射影几何中一个图形与把其中的各个几何元素换成对偶元素, 把其中的各个运算换成对偶运算而得到的另一个图形间的关系. 例如, 在射影平面上, 把由点和直线所组成的一个图形中的各元素改为它的对偶元素, 各运算改为它的对偶运算, 其结果形成另一个图形, 这两个图形称为对偶图形. 又如在三维射影空间中, 把由点、直线和平面所组成的一个图形中各元素改为它的对偶元素, 各运算改为它的对偶运算, 其结果形成另一个图形, 这两个图形称为空间中的对偶图形.

对偶命题(dual propositions) 具有特定关系的两个命题. 指成对偶对应的几何命题. 射影几何中一个命题与把其中的各个几何元素换成对偶元素, 把其中的各个运算换成对偶运算而得到的另一个命题间的关系. 例如, 在射影平面上, 设有点、直线及其相互接合关系所构成的一个命题, 将此命题中的各

元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，其结果形成另一个命题，这两个命题称为平面上的对偶命题. 又如，在三维射影空间中，设有点、直线、平面及其相互接合关系所构成的一个命题，将此命题中的各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，其结果形成另一个命题，则这两个命题称为三维空间中的对偶命题.

自对偶命题(self-dual propositions)　一种特殊的对偶命题. 即意义一致的两个命题. 例如，“三点及其两两连线组成一个三点形”与“三线及其两两交点组成一个三线形”，代表同一事实，就是自对偶命题. “一点在一直线上”与“一直线通过一点”也是自对偶命题.

对偶原则(principle of duality)　亦称对偶原理. 射影几何的一个基本原则. 指在射影空间中，若一个命题成立，则其对偶命题也必成立. 例如，平面上有关点和直线位置关系的定理中，只要把其中的名词与关系词所涉及的点和直线互换一下，就得出另一个定理，称为前者的对偶定理，前者的真实性即肯定了后者的真实性.

对偶原理(principle of duality)　即“对偶原则”.

代数对偶(algebraic duality)　射影几何的一个术语. 即采用齐次坐标后，用双线性齐次方程表示图形的对偶性. 例如在二维射影空间，方程 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 表示直线$[u_1,u_2,u_3]$的方程，其上的动点为(x_1,x_2,x_3)，方程 $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$ 是点(x_1,x_2,x_3)的方程，过该点的动直线为$[u_1,u_2,u_3]$，而点和直线是二维射影空间的对偶元素. 同理，在三维射影空间，方程 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4=0$ 表示平面$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$的方程，其上的动点为$(x_1,x_2,x_3,x_4)$，方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$ 表示点(x_1,x_2,x_3,x_4)的方程，过这点的动平面为$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，而点和平面是三维射影空间的对偶元素.

复点(complex point)　射影几何的基本概念之一. 指平面上或空间中以复数为坐标的点. 复点最初是由于在实空间里用代数方法研究实曲线的交点等几何问题时，为求理论上的完整性并便于作统一处理而出现的. 在解析几何中讨论二阶曲线(或二阶曲面)与直线相交的情况时，需解实系数的一元二次方程. 这时随着二次方程有两个实根、一个重根或两个虚根，可以确定有两个交点、一个重合交点(相切情形)或没有交点(不相交情形). 在研讨二阶曲线(曲面)以至代数曲线(曲面)时，如果在普通的实平面上(空间中)的点外增添复点，那么这种由于代数方程根的实、虚所反映交点的存在与否的区别就可消失，以至于可以利用每个 n 次方程总有 n 个复数根(包括重根)这个代数基本定理来肯定每条直线与任何 n 次代数曲线(曲面)总有 n 个交点，这有助于在解析几何以及代数几何中对代数曲线(曲面)的理论探讨. 平面上的复点是这样定义的：在平面上，若点的坐标 x,y 皆为实数，则称(x,y)表示实点；若 x,y 中至少有一个是虚数，则称(x,y)表示虚点，实点和虚点合称为复点. 为了表示平面上(空间中)包括无穷远点在内的全部复点，可对复点引进齐次坐标，这可与实点情形同样处理. 随着数学的进展和实际的需要而发展起来的复几何、复空间、复流形等，其基本元素也是复点(复数坐标的点).

实点(real point)　见“复点”.

虚点(imaginary point)　见“复点”.

复直线(complex line)　射影几何的基本概念之一. 指以复数为坐标的直线. 设直线的坐标为$[u_1,u_2,u_3]$，若 u_1,u_2,u_3 与三个不全为零的实数成比例，则称$[u_1,u_2,u_3]$为实直线. 若 u_1,u_2,u_3 不与任何三个不全为零的实数成比例，则称$[u_1,u_2,u_3]$为虚直线. 实直线与虚直线合称为复直线. 在平面上引进复点以后，复直线便是坐标满足直线方程的复点的全体. 例如，$[1,0,2]$与$[\mathrm{i},0,2\mathrm{i}]$为同一条实直线. $[\mathrm{i},1,1]$是一条虚直线，$(0,1,-1)$与$(\mathrm{i},1,0)$都是这直线上的点.

实直线(real line)　见“复直线”.

虚直线(imaginary line)　见“复直线”.

复平面(complex plane)　射影几何的基本概念之一. 指在欧氏平面上增加虚点所得到的平面. 若在该平面上再添加无穷远复点(包括无穷远实点和无穷远虚点)，则这样的平面称为扩大复平面. 若在扩大复平面上把无穷远复点与有穷复点同样看待而不加区别，则所得到的平面称为复射影平面. 复平面的复点以两个有序复数为坐标. 它与用一个复数来表示欧氏平面的点而得到的复数平面(亦称高斯平面)是完全不同的.

扩大复平面(amplify complex plane)　见“复平面”.

复射影平面(complex projective plane)　见“复平面”.

虚圆点(imaginary circular points)　亦称圆点. 射影几何的基本概念之一. 指在平面笛卡儿直角坐标系中，齐次坐标为$(1,\mathrm{i},0)$和$(1,-\mathrm{i},0)$的两点. 这是因为一个非退化圆锥曲线是圆(实圆、点圆或虚圆)的充分必要条件是它通过$(1,\mathrm{i},0)$和$(1,-\mathrm{i},0)$两点.

圆点(circular points)　即“虚圆点”.

迷向直线(isotropic line)　亦称极小直线. 射影几何的基本概念之一. 指通过虚圆点的任意虚直线. 迷向直线与无穷远直线的交点一定是虚圆点. 迷向直线构成以点$(1,\mathrm{i},0)$或$(1,-\mathrm{i},0)$为中心的平行直

线束，其斜率分别为i或$-$i. 通过平面内任一有穷点有两条迷向直线，分别属于这两个直线束. 迷向直线具有下列性质：

1. 虚直线是迷向直线的充分必要条件是它上面任意两个不同的有穷点的距离是零.

2. 一条迷向直线与另一条直线的交角是不定的.

极小直线(minimal line)　即"迷向直线".

拉盖尔定理(Laguerre theorem)　射影几何的重要定理之一. 设两条非迷向直线的交角为θ，若这两条直线与过它们交点的两条以$-$i，i为斜率的迷向直线所成的交比为μ，则$\theta=(\ln\mu)/2\mathrm{i}$. 由拉盖尔定理可得到：两条非迷向直线垂直的充分必要条件是这两条直线与过其交点的两条迷向直线调和共轭，即$\mu=-1$，亦即两直线垂直的充分必要条件是两直线上的无穷远点与虚圆点调和共轭. 拉盖尔定理把交比与调和共轭这两个射影概念表达成角与垂直这两个度量概念，给角和垂直以射影解释，从而把欧氏几何与射影几何联系起来. 拉盖尔(Laguerre, E. N.)是最先探讨复射影平面理论者之一. 他建立了用交比定义角的度量公式，把欧氏几何与射影几何联系起来.

二维共轭复元素(two-dimensional conjugate complex elements)　复二维空间中坐标互相共轭的两个元素. 若(a_1,a_2,a_3)为一个元素(点或直线)的齐次坐标，取a_1,a_2,a_3的共轭复数$\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$，则$(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$为另一个同类元素(点或直线)的齐次坐标，此二元素称为二维共轭复元素. 因为齐次坐标允许差一个非零常数因子，所以两个第三坐标不是零的元素为共轭复元素时，必须且只须其对应的非齐次坐标为共轭复数，但两个共轭复元素的对应齐次坐标不一定为共轭复数. 例如，$(1-\mathrm{i},\mathrm{i},1)$与$(-1-\mathrm{i},\mathrm{i},-1)$为两个共轭复点的齐次坐标，这是由于其非齐次坐标分别是$(1-\mathrm{i},\mathrm{i})$和$(1+\mathrm{i},-\mathrm{i})$.

交比(cross ratio)　亦称复比. 射影几何的基本不变量. 若四点P_1,P_2,P_3,P_4共线，则两个单比$(P_1P_2P_3)$与$(P_1P_2P_4)$的比称为P_1,P_2,P_3,P_4的交比，记为(P_1P_2,P_3P_4). 其中P_1,P_2称为基点偶，P_3,P_4称为分点偶. 由于交比是两个简单比的比，故又称它为复比. 利用四个点的交比可以定义直线束中四条直线的交比以及平面束中四个平面的交比.

共线四点P_1,P_2,P_3,P_4的交比(P_1P_2,P_3P_4)有下列基本性质：

1. 基点偶与分点偶交换，交比的值不变，即

$$(P_3P_4,P_1P_2)=(P_1P_2,P_3P_4).$$

2. 基点偶的两个字母交换或分点偶的两个字母交换，交比的值变为原来交比值的倒数，即

$$(P_2P_1,P_3P_4)=(P_1P_2,P_4P_3)=\frac{1}{(P_1P_2,P_3P_4)}.$$

3. 同时交换每个点偶里的字母，交比的值不变，即$(P_2P_1,P_4P_3)=(P_1P_2,P_3P_4)$.

4. 交换中间的两个字母或交换两端的两个字母，交比的值等于1减去原来的交比值，即

$$(P_1P_3,P_2P_4)=(P_4P_2,P_3P_1)=1-(P_1P_2,P_3P_4).$$

这些性质易从交比的定义或交比的代数表示推出. 由这些性质知道，尽管共线四点可构成24个交比，但不同的交比值至多只有6个. 若交比$(P_1P_2,P_3P_4)=\lambda$，则这六个值分别是

$$\lambda,\frac{1}{\lambda},1-\lambda,\frac{1}{1-\lambda},\frac{\lambda-1}{\lambda},\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

交比的性质(property of a cross ratio)　见"交比".

复比(compound ratio)　即"交比".

交比的代数表示(algebraic expression of a cross ratio)　交比的一种表达形式. 即交比用坐标计算的公式. 按交比定义，当点P_3,P_4分线段P_1P_2的比分别是λ和μ时，交比$(P_1P_2,P_3P_4)=\lambda/\mu$. 因此，设直线上点的非齐次坐标是$P_i(t_i)$，$i=1,2,3,4$，交比是

$$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{t_3-t_1}{t_2-t_3}:\frac{t_4-t_1}{t_2-t_4}=\frac{t_1-t_3}{t_1-t_4}:\frac{t_2-t_3}{t_2-t_4}.$$

又，当直线上点的齐次坐标(射影坐标)是$P_i(\lambda_i,\mu_i)$，$i=1,2,3,4$时

$$(P_1P_2,P_3P_4)=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_1&\mu_1\\\lambda_3&\mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1&\mu_1\\\lambda_4&\mu_4\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}\lambda_2&\mu_2\\\lambda_3&\mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2&\mu_2\\\lambda_4&\mu_4\end{vmatrix}}.$$

在射影平面上取共线四个点所在的直线$x_1=0$作为轴时，设这四个点的射影坐标是$P_i(0,\lambda_i,\mu_i)$，$i=1,2,3,4$，则这四个点的交比也由上式表示.

门纳劳斯定理(Menelaus theorem)　见本卷《平面几何》同名条.

切瓦定理(Ceva theorem)　见本卷《平面几何》同名条.

切瓦线(Ceva line)　见本卷《平面几何》中的"切瓦定理".

调和点列(harmonic range of points)　射影几何的基本概念之一. 即射影直线上交比等于-1的四个点. 交比$(P_1P_2,P_3P_4)=-1$时，称点偶P_3,P_4调和分离点偶P_1,P_2；或称点偶P_1,P_2与点偶P_3,P_4调和共轭；并称P_1,P_2,P_2,P_4四点为调和共轭点；也称P_4为P_1,P_2,P_3的第四调和点. 交比-1称为调和比. 若P_1P_2是普通线段，则也称P_3,P_4两点

把线段 P_1P_2 调和分割. 点偶调和分离(或点偶调和共轭)的关系是相互的,即与点偶的顺序无关. 当 $(P_1P_2,P_3P_4)=-1$ 时,可求得由这四点构成的其他交比的值为 2 或 1/2,并且当四点构成的交比值为 2 或 1/2 时,可以适当改变点的顺序,使其中两点与其他两点调和共轭.

调和共轭(harmonic conjugate) 见“调和点列”.

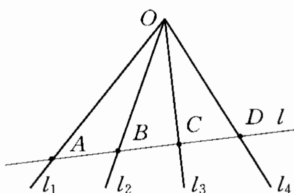
调和比(harmonic ratio) 见“调和点列”.

调和共轭点(harmonic conjugate points) 见“调和点列”.

第四调和点(fourth harmonic point) 见“调和点列”.

调和分割(harmonic cut) 见“调和点列”.

线束的交比(cross ratio of pencil of lines) 射影几何的基本不变量. 如图,若 l_1,l_2,l_3,l_4 为直线束中四条直线,其交比记为 (l_1l_2,l_3l_4). 任一条不通过线束中心的直线 l 顺次截这四直线于四个点 A,B,C,D,则 $(l_1l_2,l_3l_4)=(AB,CD)$. (l_1l_2,l_3l_4) 与 l 的选取无关. 若交比值为-1,则称四直线为一个调和线束,此时称 l_1,l_2 与 l_3,l_4 成调和共轭线. 在欧氏平面上,交比



$$(l_1l_2,l_3l_4)=\frac{\sin(l_1l_3)\sin(l_2l_4)}{\sin(l_1l_4)\sin(l_2l_3)},$$

这里(l_1l_3)表示把直线 l_1 转到 l_3(都是规定了正向的直线)的有向角,其余类推. 这就是四直线的交比在初等几何里的意义.

调和线束(harmonic pencil of lines) 见“线束的交比”.

调和共轭线(harmonic conjugate lines) 见“线束的交比”.

面束的交比(cross ratio of pencil of planes) 射影几何的基本不变量. 若 π_1,π_2,π_3,π_4 为平面束中的四个平面,任一个不通过这平面束轴的平面 π 顺次截这四平面于四条直线 l_1,l_2,l_3,l_4,则直线束中四条直线 l_1,l_2,l_3,l_4 的交比(l_1l_2,l_3l_4)称为这四个平面的交比,记为$(\pi_1\pi_2,\pi_3\pi_4)$,即$(\pi_1\pi_2,\pi_3\pi_4)=(l_1l_2,l_3l_4)$,显然$(\pi_1\pi_2,\pi_3\pi_4)$与 π 的选取无关. 若交比为-1,则这四个平面称为调和面束,此时称 π_1,π_2 与 π_3,π_4 成调和共轭面.

调和面束(harmonic pencil of planes) 见“面束的交比”.

调和共轭面(harmonic conjugate planes) 见“面束的交比”.

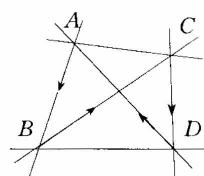
简单 *n* 点形(simple *n*-gon) 一种简单的平面图形. 即由平面上的 n 个点($n\geqslant3$,其中无三点共线)及它们顺次两两连结的 n 条直线所组成的平面图形. 这 n 个点称为简单 n 点形的顶点,n 条直线称为简单 n 点形的边. 简单 n 点形与简单 n 线形是平面上互相对偶的图形.

简单 *n* 线形(simple *n*-side) 一种简单的平面图形. 即由平面上的 n 条直线($n\geqslant3$,其中无三线共点)及它们顺次两两的交点所组成的平面图形. 这 n 条直线称为简单 n 线形的边,n 个交点称为简单 n 线形的顶点. 简单 n 线形与简单 n 点形是平面上互相对偶的图形.

完全 *n* 点形(complete *n*-gon) 一种简单的平面图形. 即由平面上的 n 个点($n\geqslant3$,其中无三点共线)及它们每两个点的连线所组成的平面图形. 这 n 个点称为完全 n 点形的顶点,$n(n-1)/2$ 条连线称为完全 n 点形的边. 完全 n 点形的对偶图形是完全 n 线形.

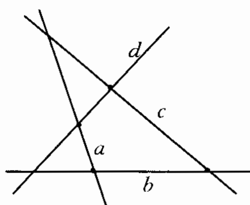
完全 *n* 线形(complete *n*-side) 一种简单的平面图形. 由平面上的 n 条直线($n\geqslant3$,其中无三线共点)及它们每两条直线的交点所组成的平面图形. 这 n 条直线称为完全 n 线形的边,$n(n-1)/2$ 个交点称为完全 n 线形的顶点. 完全 n 线形的对偶图形是完全 n 点形.

简单四点形(simple quadrangle) 一种简单的 n 点形. 指由平面上四个点 A,B,C,D(其中无三点共线)及它们顺次两两连结的直线 AB,BC,CD,DA 所组成的图形称为简单四点形(如图),记为简单四点形 $ABCD$,A,B,C,D 称为它的顶点,直线 AB,BC,CD,DA 称为它的边,不相邻的顶点的连线 AC,BD 称为它的对顶线.



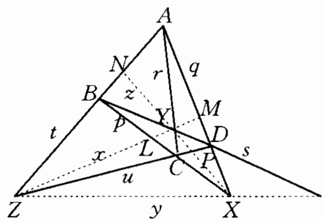
简单四点形的对顶线(line through opposite vertex of simple quadrangle) 见“简单四点形”.

简单四线形(simple quadrilateral) 一种简单 n 线形. 指由平面上四条直线 a,b,c,d(其中无三线共点)及它们顺次两两的交点 $(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)$ 所组成的图形称为简单四线形(如图),记为简单四线形 $abcd$. a,b,c,d 称为它的边,$(a,b),(b,c),(c,d),(d,a)$称为它的顶点,不相邻两边的交点$(a,c),(b,d)$称为它的对边点.



简单四线形的对边点(intersection point of opposite sides of simple quadrilateral) 见“简单四线形”.

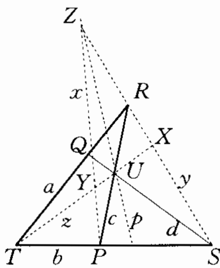
完全四点形(complete quadrangle) 一种特殊的完全 n 点形. 由平面上四个点(其中无三点共线)及其两两连结的六条直线所组成的图形称为完全四点形. 这四个点称为它的顶点,六条直线称为它的边,没有公共顶点的两边称为它的对边,对边的交点称为它的对边点,三对边点所构成的三点形称为它的对边三点形(或中心三点形). 如图,在完全四点形 $ABCD$ 中,A,B,C,D 是四个顶点,p,q,r,s,t,u 是六条边,其中 p 与 q,r 与 s,t 与 u 是三对对边;对边的交点 X,Y,Z 是对边点;XYZ 是对边三点形. 完全四点形具有调和性,在射影几何中有许多应用.



完全四点形的对边三点形(diagonal triangle of a complete quadrangle) 见“完全四点形”.

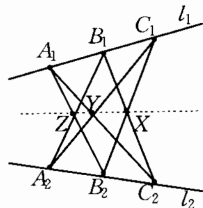
完全四点形的调和性(harmonic property of a complete quadrangle) 完全四点形的基本性质. 即在完全四点形里,每共线四点都是调和点列,每共点四线都是调和线束. 如上图中的 $(AB,NZ)=-1$, $(tu,xy)=-1$ 等.

完全四线形(complete quadrilateral) 即《平面几何》中的“完全四边形”一种特殊的完全 n 线形($n=4$). 由平面上四条直线(其中无三线共点)及其两两相交的六个交点所组成的图形,称为完全四线形,这两条直线称为它的边,六个交点所组成的图形称这完全四线形. 这四条直线称为它的边,六个交点称为它的顶点. 没有公共边的两个顶点称为它的对顶点. 对顶点连线称为它的对顶线. 三对顶点所构成的三线形,称为它的对顶点三线形(或中心三线形)如图,在完全四线形 $abcd$ 中,a,b,c,d 是它的四条边;P,Q,R,S,T,U 是它的六个顶点,其中 P 与 Q,R 与 S,T 与 U 是三对对顶点;对顶点连线 x,y,z 是对顶点线;xyz 是对顶点三线形. 完全四线形具有调和性,在射影几何中有许多应用.



完全四线形的调和性(harmonic property of a complete quadrilateral) 完全四线形的基本性质. 即完全四线形中,每共点四线都是调和线束,每共线四点都是调和点列.

帕普斯定理(Pappus theorem) 射影几何中的一个重要定理. 若平面 π 内两条直线 l_1 与 l_2 上各取三个点 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2,则三对直线 B_1C_2 与 B_2C_1,C_1A_2 与 C_2A_1,A_1B_2 与 A_2B_1 的交点 X,Y,Z 共线,这条直线称为帕普斯线. 帕普斯定理提供了一种作图方法. 当在两条直线上已知三对射影对应点时,可以作出任意第四点的对应点. 帕普斯(Pappus,(A))的著作中包含了许多射影几何的概念,如对合、非调和比等,为后世射影几何的研究提供了线索.



帕普斯线(Pappus line) 见“帕普斯定理”.

一维射影对应(one-dimensional projective correspondence) 透视对应的推广. 设$[\pi]$与$[\pi']$是两个一维基本形(点列或线束),若存在 n 个一维基本形$[\pi_1],[\pi_2],\cdots,[\pi_n]$,形成下列 $n+1$ 次透视对应链:

$$[\pi]\ \overline{\wedge}\ [\pi_1]\ \overline{\wedge}\ [\pi_2]\ \overline{\wedge}\ \cdots\ \overline{\wedge}\ [\pi_n]\ \overline{\wedge}\ [\pi'],$$

则$[\pi]$与$[\pi']$之间的对应称为射影对应,记为$[\pi]\wedge[\pi']$. 射影对应是一一对应,且关系“$\wedge$”是等价关系. 两个一维基本形(点列或线束)间的一一对应是射影对应的充分必要条件是任何四元素的交比与其对应的四元素的交比相等. 两个一维基本形间的射影对应是透视对应的充分必要条件是它们的公共元素自对应(参见“射影对应”).

施陶特定理(Staudt theorem) 确定一维基本形间射影对应的定理. 指已知两个一维基本形间任意给定三对对应元素,就可以决定惟一的射影对应. 冯·施陶特(von Staudt,K. G. C.)经过长时期的精深思考,以非常严密的公式解决了不依赖任何度量,完全独立地建立射影几何的体系.

点列间射影对应的代数表达式(algebraic expression of projective correspondence of ranges) 表示两条直线间射影对应的公式. 若 l 与 l'是两个成射影对应的点列的底,l 上的点 P 的齐次坐标为(x_1,x_2),其对应点 P'的齐次坐标为(x'_1,x'_2),则该射影对应的代数表达式是

$$\begin{cases}\rho x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\\ \rho x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2.\end{cases}$$

这里 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$都是常数,$\rho$ 是齐次坐标的比例常数,并且行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

经常用射影对应的代数表达式来定义射影对应. 由此可见,点列间的射影对应必是非奇异线性变换. 反之,点列间的非奇异线性变换必是射影对应.

一维射影变换(one-dimensional projective transformation) 重叠一维基本形之间的射影对应.如果平面上两个同类的一维基本形(同为点列或线束)是同底的或同心的,则称为重叠的一维基本形.两个重叠的一维基本形的射影对应,也就是一个一维基本形到自身的射影对应称为一维射影变换.射影变换是射影对应的特殊情形,因此其代数表达式也是非奇异线性变换(参见"射影变换").射影对应还可用参数法表示.即两个一维基本形(同为点列和线束)$A+\lambda B$ 与 $A+\lambda' B$ 成射影对应的充要条件是任何元素的参数 λ 与对应元素的参数 λ' 之间满足双线性方程 $a\lambda\lambda'+b\lambda+c\lambda'+d=0$,其中 a,b,c,d 为常数且 $ad-bc\neq0$.反之,若 λ,λ' 满足双线性方程,则 $A+\lambda B$ 与 $A+\lambda' B$ 间的对应是射影对应.

重叠基本形(repeated fundamental form) 见"一维射影变换".

一维对合对应(one-dimensional involutory correspondence) 简称对合,是特殊的一维射影变换.在两个重叠且成射影对应的一维基本形里,若对于任何元素,无论看做属于第一基本形或第二基本形,它的对应元素是一样的,这是非恒同的一维射影变换,而两次这种变换的乘积是恒同变换,则称它为对合对应.在对合对应里每对对应元素中的每个元素归入哪个基本形都可以.例如,在直线 l 上取定 O 点,对于 l 上的任何点 P_i,取 P_i 关于 O 点的对称点 P'_i 作为 P_i 的对应点,则这个射影变换是一个对合.点 O 与无穷远点是两个自对应点.两个重叠的一维基本形 $A+\lambda B$ 与 $A+\lambda' B$ 成对合对应的充分必要条件是对应元素的参数 λ 与 λ' 满足方程 $a\lambda\lambda'+b(\lambda+\lambda')+d=0, ad-b^2\neq0$.由对合的定义知,不重合的两对对应元素决定惟一对合对应.

P_i O P'_i l

对合(involution) 对合对应的简称.

同素射影对应(equal element projective correspondence) 一种特殊的射影对应.即同类基本形间的射影对应.例如,把点变成点,或直线变成直线的射影对应都称为同素射影对应.

自对应元素(self-corresponding element) 亦称不变元素或二重元素.一种变换中的特殊元素.指在变换下不变的元素.

不变元素(invariant element) 即"自对应元素".

二重元素(double element) 即"自对应元素".

一维射影变换的自对应元素(self-corresponding element of one-dimensional projective transformation) 一种变换中的特殊元素.指一维基本形在射影变换下不变的元素.非恒同的一维射影变换可按自对应元素的个数分为三种情形:不含有自对应元素,含且仅含一个自对应元素和有两个自对应元素.这三种射影变换分别称为椭圆型的、抛物型的和双曲型的射影变换.

椭圆型的射影变换(elliptic projective transformation) 一种基本射影变换.指不含自对应元素的一维射影变换.

抛物型的射影变换(parabolic projective transformation) 一种基本射影变换.指含且仅含一个自对应元素的一维射影变换.

双曲型的射影变换(hyperbolic projective transformation) 一种基本射影变换.指含有两个自对应元素的一维射影变换.

二维射影对应(two-dimensional projective correspondence) 两平面间的射影对应(参见"射影对应").

二维射影变换(two-dimensional projective transformation) 平面的射影变换(参见"射影对应").

直射变换(collineatory transformation) 一种基本射影变换.指保持同素性与结合性的二维射影变换.

对射变换(correlation) 一种基本射影变换.指平面上点与直线或直线与点间的一一对应.平面到自身的对射变换由下列关系式确定

$$\rho u'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j\ (i=1,2,3),\ \rho|a_{ij}|\neq0,$$

其中(x_i)是平面上点的射影坐标,(u'_i)是与(x_i)对应的直线的线坐标.

射影空间(projective space) 射影几何研究的基本对象.一维射影空间亦称为射影直线,二维射影空间亦称为射影平面,三维射影空间通常简称射影空间.当 $n>3$ 时,n 维射影空间也称为高维射影空间,用 P^n 表示.$n(n>2)$维射影空间 P^n 可以看做一个点集,这个点集的点与 $n+1$ 维向量空间 V^{n+1} 的非零向量构成一一对应(在齐次坐标的意义下).设不全为零的有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 表示 V^{n+1} 中向量的坐标,则称 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 为 P^n 中的点(x)的齐次射影坐标,记为 $x(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$.在 P^n 中取 $n+2$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1},E$,其中 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$是线性无关的,并且 E 与 $A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$中任意 n 个点也是线性无关的,则称这 $n+2$ 个点的全体为一个射影标架,或称为 P^n 中的一个射影坐标系,记为$\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1},E\}$或简记为$\{A_i,E\}$.$A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}$称为标架的顶点,$E$ 称为单位点.建立了射影坐标系后,可以用解析法研究射影几何.

高维射影空间(higher dimensional projective space) 见"射影空间".

齐次射影坐标(homogeneous projective coordinates) 见“射影空间”.

线性流形(linear manifold) 几何学中的常用概念. 即 P^n 中的直线,二维平面,三维平面,…,$n-1$ 维平面的统称.

超平面(hyperplane) P^n 中的线性流形. 坐标 (x) 满足方程 $u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_{n+1}x_{n+1}=0$ 的点的集合. 式中 $u_1,u_2,\cdots,u_{n+1}$ 不全为零.

***n* 维射影变换**(n-dimensional projective transformation) 亦称 n 维直射对应. 一类 n 维变换. 指 P^n 中的一一对应. P^n 中从点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 变到点 $P'(x'_1,x'_2,\cdots,x'_{n+1})$ 的点变换,满足公式

$$\begin{cases}\lambda x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n+1}x_{n+1},\\ \lambda x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n+1}x_{n+1},\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \lambda x'_{n+1}=a_{n+11}x_1+a_{n+12}x_2+\cdots+a_{n+1,n+1}x_{n+1},\end{cases}$$

其中 a_{ij} 是常数,$\lambda|a_{ij}|\neq 0$. 则这点变换称为 P^n 中的射影变换,又称直射变换.

***n* 维直射变换**(n-dimensional collineation transformation) 即“n 维射影变换”.

***n* 维对射变换**(n-dimensional correlation) 一类 n 维变换. 指 n 维射影空间中的点 (x) 和超平面 (u') 之间的对应. P^n 中的对射变换方程可写为

$$\rho u'_i=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}x_j\ \ (i=1,2,\cdots,n+1),$$

其中 $\rho|a_{ij}|\neq 0$. 当 (a_{ij}) 为对称矩阵时,则称此对射为配极或配极变换.

配极变换(transformation of polarity) 见“n 维对射变换”.

默比乌斯定理(Möbius theorem) 射影几何的重要定理之一. 在两平面 π 与 π' 上分别建立坐标系,设 π 上任意四个不同点 $P_i(i=1,2,3,4)$,其中无三者共线;π' 上任意四个不同点 $P'_i(i=1,2,3,4)$,其中也无三者共线,则从 π 到 π' 存在惟一一个非奇异线性变换使 P_i 对应 $P'_i(i=1,2,3,4)$. 默比乌斯(Möbius,A. F.)发展了射影几何学的代数方法,对 19 世纪射影几何的进展做出了重要贡献.

直线上的射影坐标(projective coordinates on a straight line) 射影直线上点的代数表示. 射影直线上点的齐次坐标 (x_1,x_2) 以及由齐次坐标经过非奇齐次线性变换

$$\begin{cases}\rho x_1=a_{11}x'_1+a_{12}x'_2,\\ \rho x_2=a_{21}x'_1+a_{22}x'_2,\end{cases}\quad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

得到的齐次坐标 (x'_1,x'_2) 都称为这个点的射影坐标. 也可以用如下方式引进射影坐标:在射影直线上取不重合的三点 A_1,A_2,E,由这三点构成的一个系统 $\{A_1,A_2;E\}$ 称为直线上的一个射影坐标系. A_1,A_2 称为基点,E 称为单位点. 设 P 是这条直线上的任一点,则可以得到一个交比

$$\lambda=(A_1A_2,EP)=\frac{x_1}{x_2},$$

这一对有序数 (x_1,x_2) 就称为点 P 关于射影坐标系 $(A_1,A_2;E)$ 的射影坐标. 点 A_1,A_2,E 又称为参考点,其射影坐标分别为 $A_1(1,0),A_2(0,1),E(1,1)$. 直线上的射影坐标具有性质:

1. 不全为零的有序数对 (x_1,x_2) 表示射影直线的一个点.

2. 成比例的有序数对 (x_1,x_2) 与 $(\gamma x_1,\gamma x_2)(\gamma\neq 0)$ 表示同一点.

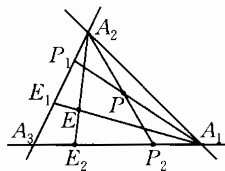
射影坐标是齐次仿射坐标进一步的抽象. 引进了射影坐标,就可以用有序数组表示点的位置,用解析方法去研究射影几何.

直线射影坐标系(linear projective coordinates system) 见“直线上的射影坐标”.

平面上的射影坐标(projective coordinates in a plane) 射影平面上点的代数表示. 射影平面上点的齐次坐标 (x_1,x_2,x_3) 以及由齐次坐标经过非奇异线性变换

$$\begin{cases}\rho x_1=a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3,\\ \rho x_2=a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+a_{23}x'_3,\\ \rho x_3=a_{31}x'_1+a_{32}x'_2+a_{33}x'_3,\end{cases}\quad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

得到的齐次坐标 (x'_1,x'_2,x'_3) 都称为这个点的射影坐标. 也可以用如下方式引进射影坐标:在射影平面(二维射影空间)上取不共线的三点 A_1,A_2,A_3,以及不在这三点决定的三点形边上的任一点 E,这四点构成的系统 $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ 称为平面上的射影坐标系(如图),三点形 A_1,A_2,A_3 称为坐标三点形,点 E 称为单位点. 设 P 为平面上任一点,以 A_1 为中心把 E,P 投影到直线 A_2A_3 上得到 A_2A_3 上的点 E_1,P_1,以 A_2 为中心把 E,P 投影到 A_1A_3 上得到点 E_2,P_2,设



$$x_1:x_3=\frac{A_3P_1}{P_1A_2}:\frac{A_3E_1}{E_1A_2},x_2:x_3=\frac{A_3P_2}{P_2A_1}:\frac{A_3E_2}{E_2A_1},$$

则实数组 (x_1,x_2,x_3) 称为点 P 关于该射影坐标系的射影坐标. 点 A_1,A_2,A_3,E 称为参考点,它们的射影坐标分别为 $A_1(1,0,0),A_2(0,1,0),A_3(0,0,1),E(1,1,1)$. 平面上的射影坐标具有性质:

1. 不全为零的有序三数组 (x_1,x_2,x_3) 表示射影平面上的一个点.

2. 成比例的有序三数组 (x_1,x_2,x_3) 与 $(\gamma x_1,\gamma x_2,\gamma x_3)(\gamma\neq 0)$ 表示同一点.

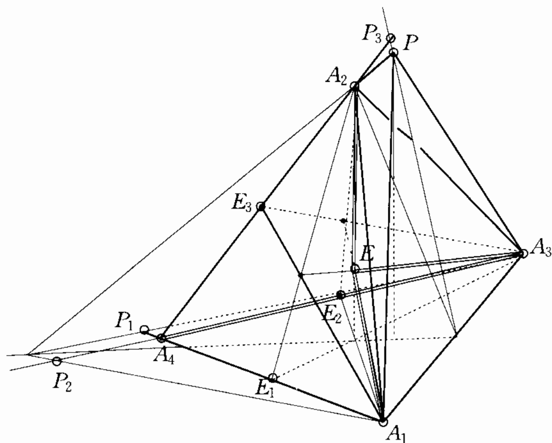
坐标三点形(coordinate triangle) 见“平面上的射影坐标”.

空间中的射影坐标(projective coordinates in space)　射影空间中点的代数表示.三维射影空间中点的齐次坐标(x_1,x_2,x_3,x_4)以及由齐次坐标经过非奇线性变换

$$\begin{cases}\rho x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4, \\ \rho x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4, \\ \rho x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4, \\ \rho x_4 = a_{41}x'_1 + a_{42}x'_2 + a_{43}x'_3 + a_{44}x'_4,\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

得到的齐次坐标(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)都称为这个点的



射影坐标,也可以用如下方式引进射影坐标.在三维射影空间P^3中取不共面的四点A_1,A_2,A_3,A_4以及不在这四点所决定的四面体的面上的任一点E,由这五点所构成的系统$\{A_1,A_2,A_3,A_4;E\}$称为P^3中的射影坐标系(如图).设π_1,π_2,π_3分别表示由点E,A_2,A_3以及E,A_1,A_3和E,A_1,A_2所决定的平面.这三个平面π_1,π_2和π_3与直线A_4A_1,A_4A_2和A_4A_3分别交于点E_1,E_2和E_3.对P^3中任一点P,设P_1,P_2,P_3顺次表示平面PA_2A_3与A_4A_1的交点,PA_1A_3与A_4A_2的交点,PA_1A_2与A_4A_3的交点,令

$$x_1:x_4 = \frac{A_4P_1}{P_1A_1} : \frac{A_4E_1}{E_1A_1},$$

$$x_2:x_4 = \frac{A_4P_2}{P_2A_2} : \frac{A_4E_2}{E_2A_2},$$

$$x_3:x_4 = \frac{A_4P_3}{P_3A_3} : \frac{A_4E_3}{E_3A_3},$$

则成比例的实数组(x_1,x_2,x_3,x_4)称为点P关于射影坐标系$\{A_1,A_2,A_3,A_4;E\}$的射影坐标.这时四面体$A_1A_2A_3A_4$称为坐标四面体,E称为单位点.这几个参考点的射影坐标分别为$A_1(1,0,0,0)$,$A_2(0,1,0,0)$,$A_3(0,0,1,0)$,$A_4(0,0,0,1)$,$E(1,1,1,1)$.坐标四面体的四个面称为坐标平面,它们的方程分别是$x_1=0,x_2=0,x_3=0,x_4=0$.空间中点的射影坐标具有如下性质:

1.不全为零的有序四数组(x_1,x_2,x_3,x_4)表示射影空间的一个点.

2.成比例的有序四数组(x_1,x_2,x_3,x_4)与$(\gamma x_1,\gamma x_2,\gamma x_3,\gamma x_4)(\gamma\neq 0)$表示同一点.

坐标四面体(coordinate tetrahedroid)　见"空间中的射影坐标".

二阶曲线(curve of order 2)　平面射影几何的基本研究对象.设在平面上点的齐次仿射坐标或射影坐标为(x_1,x_2,x_3),则满足三元二次齐次方程

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0, a_{ij} = a_{ji}$$

的点的全体称为二阶曲线.这里a_{ij}为实数且至少有一个不是零.该方程称为这二阶曲线的方程,(a_{ij})称为系数矩阵.若系数矩阵的行列式$|a_{ij}|\neq 0$,则二阶曲线称为非退化的,否则称其为退化的.退化的二阶曲线是两条直线(可以是虚直线).在射影平面上,成射影对应的两个线束的对应直线的交点的集合是二阶曲线(参见本卷《平面解析几何》中的"二次曲线").

非退化的二阶曲线(nondegenerate curve of order 2)　见"二阶曲线".

退化的二阶曲线(degenerate curve of order 2)　见"二阶曲线".

二级曲线(curve of class 2)　平面射影几何研究的基本对象.若平面上直线的齐次坐标为$[u_1,u_2,u_3]$,则满足三元二次齐次方程

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}u_iu_j = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

的直线的全体称为二级曲线.这里a_{ij}为实数且至少有一个不是零.该方程称为二级曲线的方程,(a_{ij})称为系数矩阵.若系数矩阵的行列式$|a_{ij}|\neq 0$,则二级曲线称为非退化的,否则称为退化的.退化的二级曲线是两个点.在射影平面上,成射影对应的两个点列对应点的连线的集合是二级曲线.

非退化的二级曲线(nondegenerate curve of class 2)　见"二级曲线".

退化的二级曲线(degenerate curve of class 2)　见"二级曲线".

麦克劳林定理(Maclaurin theorem)　射影几何中的著名定理之一.在平面上,一条非退化的二阶曲线的切线的集合是一条非退化的二级曲线;反过来,一条非退化的二级曲线的切点的集合是一条非退化的二阶曲线.这个定理称为二阶曲线与二级曲线的麦克劳林定理.由于二阶曲线与二级曲线有这样的对偶关系,所以在射影几何里,二阶曲线与二级曲线统称为二次曲线.麦克劳林(Maclaurin,C.)在他的著作《有机几何学》(1720)中,推广了牛顿

(Newton,I.)和斯特林(Stirling,J.)等关于圆锥曲线和高阶代数曲线的研究.

二次曲线(quadratic curve) 见“麦克劳林定理”,并参见本卷《平面解析几何》同名条.

二阶曲线的内接 n 点形(inscribed n-gon of curve of order 2) 顶点都在一个非退化二阶曲线上的 n 点形.若一个 n 点形(简单的或完全的)的顶点都在一个非退化二阶曲线上,则这个 n 点形称为该二阶曲线的内接 n 点形(简单的或完全的).

二级曲线的外切 n 线形(circumscribed n-side of a secondary curve) 边都属于一个非退化二级曲线的 n 线形.若一个 n 线形(简单的或完全的)的边都属于一个非退化的二级曲线,则这个 n 线形称为该二级曲线的外切 n 线形(简单的或完全的).

帕斯卡定理(Pascal theorem) 射影几何的著名定理之一.内接于一个非退化二阶曲线的简单六点形的三组对边的交点共线,此直线称为帕斯卡直线.这个定理称为帕斯卡定理.帕斯卡定理的逆定理也成立.即:若简单六点形的三组对边的交点共线,则此六点形内接于一个二阶曲线.若给定二阶曲线上的六个点,则可以得到 60 个不同的简单六点形,根据帕斯卡定理,每一个六点形有一条帕斯卡线,一共有 60 条帕斯卡线.这 60 条直线所构成的图形,称为帕氏构图.帕斯卡定理提供了已知二阶曲线上五个点,用直尺求作这条曲线上任意多个其他点的作图方法.帕斯卡定理与布里昂雄定理是互相对偶的定理.帕斯卡(Pascal,B.)16 岁时发现帕斯卡定理,他由此定理导出 400 余条推论,写成《圆锥曲线论》(1640).这是自阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))以来圆锥曲线论的重大进步.

帕氏构图(Pascal configuration) 见“帕斯卡定理”.

帕斯卡线(Pascal line) 见“帕斯卡定理”.

布里昂雄定理(Brianchon theorem) 射影几何的著名定理之一.外切于一个非退化二级曲线的简单六线形的三对对顶点的连线共点,此点称为布里昂雄点.此定理是布里昂雄(Brianchon,C. J.)于 1806 年发现的.它的逆定理也成立,即:若简单六线形的三对对顶点的连线共点,则此六线形外切于一个二级曲线.若给定二级曲线的六条切线,则可得到 60 个不同的简单六线形.根据布里昂雄定理,每一六线形有一个布里昂雄点,总共有 60 个布里昂雄点.这 60 个点所构成的图形,称为布氏构图.布里昂雄定理提供了已知二级曲线上五条切线,用直尺求作这曲线上任意多条其他切线的作图方法.布里昂雄定理与帕斯卡定理是互相对偶的.

布氏构图(Brianchon configuration) 见“布里昂雄定理”.

布里昂雄点(Brianchon point) 见“布里昂雄定理”.

二阶曲线的极点(pole of curve of order 2) 射影几何的基本概念之一.给定一个非退化的二阶曲线 Γ 和不在 Γ 上的点 P,过 P 作直线交 Γ 于 M_1,M_2,若 Q 是直线 PM_1 上一点,且 $(M_1M_2,PQ)=-1$,则称 P 与 Q 关于二阶曲线 Γ 调和共轭或关于 Γ 互为共轭点.点 P 关于二阶曲线 Γ 的调和共轭点的轨迹是一条直线,称为点 P 的极线,点 P 称为这直线的极点.若点 P 在二阶曲线上,则规定其极线就是它的切线.反之,切线的极点就是它的切点.这样,对于非退化的二阶曲线,极点和它的极线之间就建立了一一对应的关系.如果二阶曲线为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0\ \ (a_{ij}=a_{ji}),$$

则点 $p(p_1,p_2,p_3)$ 的极线方程是

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}p_ix_j=0\ \ (a_{ij}=a_{ji}).$$

反之,直线 $l[u_1,u_2,u_3]$ 的极点 $P(p_1,p_2,p_3)$ 的坐标可由下列方程组解出

$$\begin{cases} a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3=u_1,\\ a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3=u_2,\\ a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3=u_3. \end{cases}$$

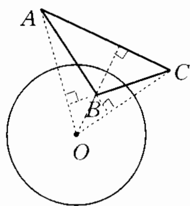
二阶曲线的极线(polar line of curve of order 2) 见“二阶曲线的极点”.并参见本卷《平面解析几何》中的“二次曲线的极线”.

平面上的配极原则(principal of polarity in plane) 射影平面上一个特殊对应规律.对给定的二阶曲线,若直线 p 的极点在直线 q 上,则直线 q 的极点也在 p 上.这个原则称为配极原则.也可以把以上结论的对偶命题称为配极原则,即:对给定的二阶曲线,若点 P 的极线通过点 Q,则点 Q 的极线也通过点 P.

自配极三点形(self-polar triangle) 亦称自共轭三点形.一种特殊的三点形.指三个顶点关于给定二阶曲线都是对边的极点的三点形(如图).

自共轭三点形(self-conjugate triangle) 即“自配极三点形”.

极圆(polar circle) 与一个三角形有关的圆.以三角形的垂心为中心,使该三角形成为自共轭三角形的圆称为该三角形的极圆.图中圆 O 即$\triangle ABC$ 的极圆.



平面上的配极变换(transformation of polarity in plane) 平面上极点与极线间的对应关系.对于非退化的二阶曲线,极点与极线构成点与直线之间

的一一对应，即给定一点，有一条直线（已知点的极线）和它对应；反之，给定一直线，有一点（已知直线的极点）和它对应. 这种对应称为关于这二阶曲线的配极变换. 若二阶曲线为

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 \ (a_{ij} = a_{ji}),$$

$|a_{ij}| \neq 0$，点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的极线是 $[u_1, u_2, u_3]$，则

$$\rho u_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \ (a_{ij} = a_{ji}, i = 1,2,3)$$

就是配极变换的代数表达式. 配极变换使得以点为元素的图形转变为以直线为元素的图形，使以直线为元素的图形转变为以点为元素的图形. 按配极变换互相转变的两个图形，称为互为配极的图形. 例如，四点形的配极图形是四线形，四线形的配极图形是四点形. 配极变换是一种对偶变换，使图形变为其对偶图形，使射影性质变为其对偶性质.

配极图形(polar figures) 亦称共轭图形. 有特殊关系的两个图形. 指在配极变换下成配极对应的两个图形.

共轭图形(conjugate figures) 即"配极图形".

二阶曲线的奇异点(singular point of curve of order 2) 二阶曲线上的特殊点，简称奇点. 即二阶曲线

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0 \ (a_{ij}=a_{ji})$$

上满足条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0,$$

的点 $P(p_1, p_2, p_3)$. 二阶曲线非退化的充分必要条件是无奇异点. 退化二阶曲线必有奇异点（可以是虚点），且当系数矩阵 (a_{ij}) 的秩等于 2 时，有惟一奇异点；当 (a_{ij}) 的秩等于 1 时，有无穷多个奇异点，它们在同一条直线上. 二阶曲线的奇异点有简单的几何意义：二阶曲线上一点是奇异点的充分必要条件是它与曲线上任何点的连线含于此曲线上（参见本卷《平面解析几何》中的"二次曲线的奇点"）.

二阶曲线的射影分类(projective classification of curve of order 2) 二阶曲线的一种分类方法. 指用射影等价关系对二阶曲线进行的分类. 射影平面上的二阶曲线

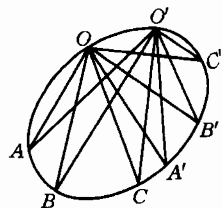
$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 0 \ (a_{ij} = a_{ji})$$

的集合在射影群之下分为五个射影类，其标准方程和曲线名称分别为：

1. $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$，非退化的实二阶曲线.
2. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$，非退化的虚二阶曲线.
3. $x_1^2-x_2^2=0$，一对实直线.
4. $x_1^2+x_2^2=0$，一对虚直线.
5. $x_1^2=0$，一对重合直线.

在同一类里的任意两条二阶曲线射影等价，即存在某一射影变换，将其中一条曲线变为另一条曲线. 而不同类中的任意两条曲线不射影等价.

二阶曲线上的射影变换(projective transformation on curves of order 2) 一种特殊的射影变换. 若在二阶曲线的点之间建立了一一对应，使得二阶曲线上任意一点与各组对应点相连所构成的两个线束是射影对应的，则称在二阶曲线上建立了射影变换. 二阶曲线称为底. 如图，若 $O(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}O(A',B',C',\cdots)$，则 $A\to A', B\to B', C\to C', \cdots$ 决定射影变换，记为 $(A,B,C,\cdots)\overline{\wedge}(A',B',C',\cdots)$，也称它们为二阶曲线上的射影点列. 射影变换与 O 点的取法无关. 二阶曲线上的射影变换由三组对应点惟一决定. 若给了二阶曲线上的一个射影变换，则对于任意两组对应点 M, M' 与 N, N'，直线 MN' 与 $M'N$ 的交点总在一条确定的直线上，这条直线就是已知变换的透视轴.



二阶曲线上的对合(involution on a curve of order 2) 二阶曲线上的一种特殊射影变换. 若在二阶曲线上的点之间建立了非恒等的一一对应，以曲线上任一点为中心与曲线上对应点的连线构成两个线束，如果这两个线束是对合的，则称在二阶曲线上所建立的对应是对合. 二阶曲线上的对合由两对对应点惟一确定.

二阶曲面(surface of order 2) 空间射影几何研究的基本对象. 设空间中点的齐次坐标或射影坐标为 (x_1, x_2, x_3, x_4)，则满足四元二次齐次方程

$$\sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j = 0 \ (a_{ij} = a_{ji})$$

的点的全体称为二阶曲面. 这里 a_{ij} 为实数且至少一个不为零. 该方程称为二阶曲面的方程. (a_{ij}) 称为系数矩阵. 若系数矩阵的行列式 $|a_{ij}| \neq 0$，则二阶曲面称为非退化的，否则称其为退化的. 在射影空间中，成射影对应的两个平面束对应平面的交线的轨迹是一个二阶曲面（参见本卷《空间解析几何》中的"二次曲面"）.

非退化二阶曲面(nondegenerate surface of order 2) 见"二阶曲面".

退化二阶曲面(degenerate surface of order 2) 见"二阶曲面". 并参见本卷《空间解析几何》中的"退化二次曲面".

二阶曲面的极点(pole of a surface of order 2) 空间射影几何的基本概念之一. 在射影空间中，给定

一个非退化的二阶曲面Σ和不在Σ上的一点P，过P作Σ的割线交Σ于两点M_1,M_2，若Q是割线上一点且交比$(M_1M_2,PQ)=-1$，则称点P与点Q关于Σ调和共轭或称P与Q关于Σ为共轭点.点P的共轭点的轨迹是一个平面，称为点P关于Σ的极面.点P称为这个平面关于Σ的极点.若点P在Σ上，则它的极面就是过这点的切面.

二阶曲面的极面(polar plane of a surface of order 2)　见“二阶曲面的极点”.

空间中的配极原则(polarity principle in space)　亦称配极原理.射影空间中一种特殊的对应规律.即对于一个给定的二阶曲面，如果点P在点Q的极面上，则点Q也在点P的极面上.上述原则也可对偶地叙述为：对于一个给定的二阶曲面，若点P的极面通过点Q，则点Q的极面也通过点P.这两个平面称为一对共轭平面.

空间中的配极原理(polarity principle in space)　即“空间中的配极原则”.

共轭平面(conjugate planes)　见“空间中的配极原则”.

共轭直线(conjugate lines)　成对出现的两条直线.在射影空间中，给定一个非退化的二阶曲面Σ，空间中每一点P都有一个确定的极面，对于空间中的一个点列，其对应的极面构成一个平面束，这个平面束的轴与点列的底称为关于二阶曲面Σ的一对共轭直线.

自配极四面形(self-polarity tetrahedron)　亦称自配极四面体，是关于二阶曲面Σ的特殊四面体.在射影空间中，若一个四面形的每个顶点都是其对面关于Σ的极点，则这个四面形称为自配极四面形.

自配极四面体(self-polarity tetrahedron)　即“自配极四面形”.

二阶曲面的奇异点(singular point of a surface order 2)　二阶曲面上特殊的点，简称奇点.二阶曲面

$$\sum_{i,j=1}^{4}a_{ij}x_ix_j=0\ (a_{ij}=a_{ji})$$

上满足条件

$$\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_j=0\ (i=1,2,3,4)$$

的点$P(p_1,p_2,p_3,p_4)$.二阶曲面非退化的充分必要条件是无奇点.退化的二阶曲面必有奇点(可以是虚点)，且当(a_{ij})的秩为3时，曲面只有一个奇点；秩等于2时，曲面有一条奇点组成的直线；秩等于1时，有一个奇点组成的平面(参见本卷《空间解析几何》中的“二次曲面的奇点”).

二阶曲面的射影分类(projective classification of surfaces of order 2)　二阶曲面的一种重要的分类法.在实射影变换下，所有的实二阶曲面分成八个射影类，其标准方程分别为：

1. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$.
2. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$.
3. $x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$.
4. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$.
5. $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.
6. $x_1^2+x_2^2=0$.
7. $x_1^2-x_2^2=0$.
8. $x_1^2=0$.

这八种二阶曲面分别有如下的特征：

1. 无奇点，有实点，无实母线.
2. 无奇点，无实点.
3. 有两族实母线.
4. 有惟一奇点，有虚母线.
5. 有惟一奇点，有实母线.
6. 一对共轭虚平面(有一条直线的奇点).
7. 一对不重合的实平面(有一条直线的奇点).
8. 一对重合平面(有一个平面的奇点).

几 何 基 础

几何基础(foundation of geometry)　几何学的一门分科.它研究公理系统的结构及构成一套完整的公理体系所应满足的条件，并在一组几何公理系统的基础上利用严密的逻辑推理展开对这种几何全部内容的研究.几何基础作为几何学的一个分支学科，其内容一般包括欧几里得几何及非欧几何.对于非欧几何一般重点研究罗巴切夫斯基几何.

据历史记载，最早的几何基础著作是欧几里得(Euclid)的《原本》，这本书是在一系列定义、公理、公设的基础上，按着逻辑发展把一系列命题排列起来，并且用严格的演绎法给出了命题的证明.但是，用现代数学的观点来看，《原本》所建立的公理法存在着一些缺点.例如欧几里得在定义点、线、面时，采用的是一种直观的描述，而在后面的论证中又都没有用到这些定义；但《原本》最主要的缺陷是公理体系存在漏洞，这些漏洞表现在诸多命题的论证中不自觉地借助于直观或利用了所列出的公理和公设无法证明的事实.欧几里得以后的一些数学家在长达两千年以上的时间里，都注意到并企图消除《原本》中在逻辑上存在的缺点，其中对第五公设的试证导致了非欧几何的诞生.

希尔伯特(Hilbert,D.)对欧氏几何进行了长期的研究，1899年，他发表了《几何基础》一书，从而建立了完善的几何学的公理系统，使得《原本》的缺陷都得到了修正.在这部著作中，希尔伯特首先列出不

加定义的基本概念(也称原始概念):点,直线,平面,在……上面,在……中间,合同等.然后引进五组公理:第Ⅰ组:结合公理;第Ⅱ组:顺序公理;第Ⅲ组:合同公理;第Ⅳ组:平行公理;第Ⅴ组:连续公理.依据希尔伯特公理体系可以纯逻辑地推出欧氏几何的全部定理和命题而无需借助于任何直观.希尔伯特还提出了公理系统的三个基本问题,即公理系统的无矛盾性(相容性,协调性或和谐性),独立性和完备性.几何学基础研究的发展引起了代数学基础的研究,建立了群的公理,环的公理以及体的公理,从而形成了近世代数这一门学科,进而研究整个数学以及数理逻辑,这些都是近代数学家们广泛研究的对象.不仅如此,几何基础的研究以及公理化方法的影响已扩大到其他学科领域,对整个科学的进展起了重要作用.

欧几里得第五公设(Euclidean fifth postulate) 见本卷《平面几何》同名条.

等价命题(equivalence propositions) 满足等价关系的命题.已知两命题 A,B 及公理系统$\sum$,若$\sum+A\Rightarrow B$,且$\sum+B\Rightarrow A$,则称 A 与 B 关于公理系统$\sum$是等价的.关于同一公理系统$\sum$,若 A 与 B 等价,且 B 与 C 等价,则 A 与 C 等价(参见本卷《形式逻辑》中的"等值命题".注意,虽在形式逻辑中两者是同义词,但在几何基础中却增加了"同一公理系统"的限制).

第五公设的等价命题(equivalent propositions of the fifth postulate) 与欧氏平行公理等价的命题.从欧几里得(Euclid)的《原本》问世,直到 19 世纪末,第五公设的试证一直是几何学里最流行的问题之一.这些试证全失败了.其原因大多是,它们的作者不知不觉地引用了与第五公设等价的命题.罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)等解决了这个问题:"不利用等价命题,第五公设不能证明".与第五公设等价的命题有很多,以下列举若干.在结合公理、顺序公理、合同公理的基础上与第五公设等价的命题有:

1.共面不交的二直线被第三条直线所截成的同位角合同.

2.对于任何直线 a 和不在其上的任何点 A,至多有一直线通过 A 且与 a 共面不交.

3.在一平面上,一直线的垂线和斜线必相交.

4.过不共线的三点恒有一圆.

5.三角形三高线共点.

6.过任何角内任一点,必可引直线与此角的两边都相交等.

在结合公理,顺序公理,合同公理,连续公理的基础上与第五公设等价的命题有:

7.任何三角形的内角和等于 π.

8.有一个三角形其内角和等于 π.

9.直角三角形斜边长度的平方等于两直角边长度的平方之和(勾股定理).

10.有两三角形其三对对应角合同而本身不合同.

11.在一平面上,有一锐角,其一边之垂线必与另一边相交.

12.存在一直线 a 及此线外一点 A,过 A 至多有一直线与 a 共面不交.

其他等价命题不再列举.

几何公理(axioms of geometry) 几何学术语.指几何学中不加证明而取作证明根据的命题.首先较系统地采用公理的是欧几里得(Euclid).1899 年,希尔伯特(Hilbert,D.)发表了《几何基础》一书,提出了一套严格的几何公理体系——希尔伯特公理体系.它包括八个基本概念和五组公理,分别是结合公理,顺序公理,合同公理,平行公理和连续公理.现今说的欧氏几何公理通常就指这五组公理.除此以外,还有罗氏几何的公理,射影几何的公理,仿射几何的公理等.不同的公理产生不同的几何学,都称为"公理法几何".

公理系统的基本问题(fundamental problems of an axiomatic system) 构成公理系统的基本要求.利用公理法建立某一学科公理结构时要考虑公理系统的三个基本问题即:无矛盾性(亦称相容性、协调性、和谐性),独立性和完备性(亦称范畴性).所谓公理系统的无矛盾性,是指由此公理系统不可能推出两个互相矛盾的命题.无矛盾性是选择公理系统的必要前提,否则将毫无意义.所谓公理系统的独立性是指公理系统中的每个公理被列为公理都是必要的,即它不是其余公理的推论,都有独立存在的必要.公理系统的完备性是指此公理系统的模型在同构的意义下是惟一的.

公理化方法(axiomatic method) 归纳整理与总结知识,建立某一学科体系的方法.指从少数不加定义的原始概念和不加证明的公理出发,运用逻辑演绎的方法推出该学科中的其他定理.

最早采用公理化方法的是欧几里得(Euclid).他在总结前人成果的基础上,从少数定义、五个公理和五个公设出发,用逻辑推理方法建立了第一个几何学的公理体系,写成《原本》一书.到 19 世纪末,希尔伯特(Hilbert,D.)克服了《几何原本》中存在的一些缺点,在他的著作《几何基础》(1899)中把欧氏几何公理系统中不完备的地方补充完善.

关于公理系统有三个重要问题:无矛盾性、独立性和完备性(范畴性).对公理系统的无矛盾性,非欧几何的发现者高斯(Gauss,C.F.)、波尔约(Bolyai,J.)、罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)以及比他们

更早的朗伯(Lambert,J. H.)等人都已意识到必须保证系统整体的无矛盾性或称协调性,即不能从公理推出两个彼此矛盾的命题 α 与 $\neg\alpha$,其中 $\neg$ 表示否定或非. 在《几何基础》中,希尔伯特把欧氏几何的无矛盾性建立在实数理论的无矛盾性上. 1904 年,他又进一步把欧氏几何的无矛盾性建立在算术理论的无矛盾性上. 对公理系统独立性的要求是佩亚诺(Peano,G.)在他的《算术原理》(1889)一书中提出的. 独立性是指:每一条公理都不能从其他公理中推出. 希尔伯特在《几何基础》中证明了平行公理、合同公理组、连续公理组关于其他四组公理的独立性. 1902 年,亨廷顿(Huntington,E. V.)提出对公理系统的第三个要求:完备性或称范畴性,即公理系统的任何一对模型同构. 维布伦(Veblen,O.)证明任何范畴公理系统必完备,即添加任何非定理的命题作为公理,则新公理系统必将是矛盾的.

无矛盾性、独立性、完备性,虽说都是对公理系统的三个基本要求,但对它们要求的程度却并不一样. 无矛盾性是公理系统生死攸关的问题,非有不可,丝毫不容放松;而独立性与完备性则不那样严格. 独立性可看做是涉及美的问题. 美固然很重要,但并非不能残缺. 有些数学家对已经建立的系统作进一步更深一层的研究时,可能宁取方便而放弃独立. 在集合论的著作中,不乏把无序对、子集等取作公理的,西科尔斯基(Sikorski,R.)的《布尔代数》也是如此. 完备性可看成是公理系统特征的问题. 有了特征,刻画清楚,当然是件好事. 但特征不明确,却能赢得较广的适用性. 集合理论、拓扑空间理论、范畴理论、群、环、体理论等莫不如此. 两种情况,一深一广,各有所长,不可偏废.

绝对几何(absolute geometry) 几何学的一个分支. 1899 年,希尔伯特(Hilbert,D.)在他的《几何基础》一书中,成功地建立了欧几里得几何的完整的公理体系,它由五组公理组成,即关联公理、顺序公理、合同公理、平行公理和连续公理. 以这五组公理为基础就可逻辑地推出欧氏几何的所有定理和全部内容. 如果去掉平行公理,由其他四组公理,即关联公理、顺序公理、合同公理、连续公理为基础所产生的几何学称为绝对几何. 如果绝对几何再加入罗氏平行公理,以此为基础所产生的几何学就是罗氏几何学. 因此绝对几何是欧氏几何与罗氏几何的共同部分.

希尔伯特公理系统(Hilbert axiomatic system) 一种几何公理体系. 它是希尔伯特(Hilbert,D.)于 1899 出版的《几何基础》中提出的欧几里得几何的公理体系. 希尔伯特指出了《原本》中存在的逻辑缺陷,并为数学向现代化过渡及各分支学科的蓬勃发展在公理系统方面开了先河. 希尔伯特公理系统包括六个基本概念和五组 20 条公理. 基本概念有:

1. 基本对象三个:点,直线,平面.

2. 基本关系三个:属于(或关联,通过,在……之上),介于(或在……之间),合同于(或全等于).

五组公理是:结合(或关联,从属)公理 8 条;顺序(或次序)公理 4 条;合同(或全合,全等)公理 5 条;平行公理 1 条;连续公理 2 条.

帕施公理(Pasch axiom) 几何学中关于顺序关系的一条重要公理. 设 A,B,C 是不共线的三点,a 是平面 ABC 上不通过 A,B,C 中任一点的直线,若 a 上有一点介于 A,B 之间,则它必有另一点介于 A,C 之间或 B,C 之间. 这个公理是帕施(Pasch,M.)1882 年提出来的,在希尔伯特公理系统中,帕施公理被列为顺序公理组第四个公理.

阿基米德公理(Archimedean axiom) 亦称度量公理之一. 建立连续性概念的重要公理(参见"连续公理"). 阿基米德(Archimedes)在他的《论球与柱》中提出这条公理. 但阿基米德本人却把它归功于欧多克索斯(Eudoxus,(C)),故又称阿基米德-欧多克索斯公理. 在中国,《墨经》的"经上"篇中有"穷,或有前,不容尺也",意思是"穷是有边界的区域,用尺沿一定方向去量,必能量尽". 其含义与阿基米德公理相似. 在实数理论中,阿基米德公理也有着特殊的作用.

度量公理(measure axiom) 即"阿基米德公理".

康托尔公理(Cantor axiom) 建立连续性概念的重要公理之一. 在直线 l 上给定了线段的无穷序列 $A_1B_1,A_2B_2,\cdots$,其中每个后面的线段都在前一个线段的内部(可以有一端点重合);而且不存在这样的线段,它在所有这些线段的内部,那么在直线 l 上必存在而且只存在一个点 C 属于所有线段 A_nB_n(n 为正整数). 这个公理是康托尔(Cantor,G. (F. P.))于 1874 年提出来的,它与阿基米德公理一起奠定了线段度量的理论基础. 在建立欧氏几何的公理系统时,常用它替代直线完备公理而与阿基米德公理组成连续公理组(参见"连续公理"). 康托尔公理在实数理论中也有着特殊的作用.

戴德金原理(Dedekind principle) 亦称戴德金分割,是保证直线连续性的基础. 其内容为:如果把直线的所有点分成两类,使得:

1. 每个点恰属于一个类,每个类都不空.

2. 第一类的每个点都在第二类的每个点的前面,或者在第一类里存在着这样的点,使第一类中所有其余的点都在它的前面;或者在第二类里存在着这样的点,它在第二类的所有其余的点的前面.

这个点决定直线的戴德金割切,此点称为戴德

金点(或界点).戴德金原理是戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)于1872年提出来的.在构造欧氏几何的公理系统时,可以选取它作为连续公理.在希尔伯特公理组Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ的基础上,阿基米德公理和康托尔公理合在一起与戴德金原理等价.

戴德金分割(Dedekind cut) 见"戴德金原理".并参见本卷《数学分析》同名条.

戴德金点(Dedekind point) 见"戴德金原理".

结合公理(axiom of incidence) 亦称关联公理或从属公理.规定基本对象点、直线、平面之间从属关系的一组公理.是希尔伯特公理系统中的第Ⅰ组公理,它包括以下八条:

1.通过不同两点的直线必定存在.

2.通过不同两点的直线至多有一条.

3.在每一直线上至少有两点;至少有三点不在一直线上.

4.通过不在同一直线上的三点的平面必定存在,并且在每一平面上至少有一点.

5.通过不在同一直线上的三点的平面至多有一个.

6.如果一直线上不同的两点在某平面上,那么这条直线上的每个点都在这平面上.

7.如果两平面有一公共点,那么它们至少还有另一公共点.

8.至少有四点不在同一平面上.

公理1—3可以称为平面几何的结合公理.公理7表明空间的维数不大于3,公理8表明空间的维数不小于3.

关联公理(incidence axioms) 即"结合公理".

从属公理(subordinate axiom) 即"结合公理".

顺序公理(axiom of order) 建立点的位置关系的公理.它是希尔伯特公理系统中的第Ⅱ组公理,包括以下四条:

1.如果B点介于A和C两点之间,那么A,B,C是一直线上的三个不同的点,并且B也介于C和A之间.

2.对于任何不同的A,B两点,在直线AB上至少有一点C,使得B介于A和C之间.

3.在一直线上任何不同的三点中,至多有一点介于其余两点之间.

4.(帕施公理)设A,B,C是不在同一直线上的三点,a是平面ABC上的一直线,它不通过A,B,C中任何一点,如果a有一点介于A和B之间,那么a必还有一点介于A和C或B和C之间.

合同公理(axiom of congruence) 建立图形相等关系的公理.它是希尔伯特公理体系中的第Ⅲ组公理,包括以下五条:

1.若A,B是直线a上的两点,A'是同一或另一直线a'上的一点,则在a'上点A'的已知一侧恒有一点B',使线段AB合同于线段$A'B'$,记为$AB\equiv A'B'$.

2.若两线段(可以相同),都合同于第三线段,则这两线段也合同,即:若$A'B'\equiv AB$,$A''B''\equiv AB$,则有$A'B'\equiv A''B''$.

3.开线段(AB),(BC)均在直线a上而无公共点,开线段$(A'B')$,$(B'C')$均在同一直线或另一直线a'上,亦无公共点,若$AB\equiv A'B'$,$BC\equiv B'C'$,则$AC\equiv A'C'$.

4.已知平面α上的一角$\angle(h,k)$,在平面α'上有一直线a',并在α'上指定直线a'的一侧,若在a'上有以O'为原点的一条射线h',则在α'上恰有一射线k',使$\angle(h,k)$合同于$\angle(h',k')$,且k'在a'的已知一侧,记为:$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$.对任何$\angle(h,k)$,有$\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$且$\angle(h,k)\equiv\angle(k,h)$(如图1).

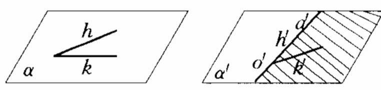


图1

5.对于两个三角形ABC和$A'B'C'$,若$AB\equiv A'B'$,$AC\equiv A'C'$,$\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$,则$\angle ABC\equiv\angle A'B'C'$,$\angle ACB\equiv\angle A'C'B'$(如图2).

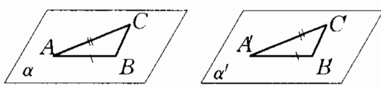


图2

运动公理(axiom of motion) 合同公理的另一种表现形式.平面上的运动公理组包括下面六条公理:

1.运动把点变为点,把直线变为直线,并且保持结合关系和顺序关系.

2.存在这样的运动,把每一个点,每一条直线变为本身,称为恒等运动.

3.一个运动之后继以另一运动称为这两个运动的乘积.任意两个运动的乘积仍是运动.对于每个运动必存在另一个运动,使这两个运动的积是恒等运动.

4.若运动把某条射线和它的端点变为本身,则射线上的每一点都变为本身.

5.若A,B,C是某一图形中不在同一直线上的三点,则存在惟一一个运动,使图形按下面的方式变为另一图形:

1) 点A变为已知点A'.

2) 点B变为以A'为端点的已知射线h'上的某一点B',即射线AB变为射线$A'B'$.

3) 点C变为射线h'已知一侧的某一点C'.

6.存在运动把线段AB变为BA;也存在运动把$\angle AOB$变为$\angle BOA$.

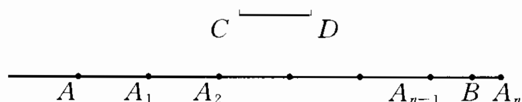
在构造欧氏几何的公理系统时，可采用运动公理组代替与其等价的合同公理组.

平行公理(axiom of parallels)　见本卷《平面几何》同名条.

罗巴切夫斯基平行公理(Lobachevskian axiom of parallels)　罗巴切夫斯基几何中最重要的公理.简称罗氏平行公理.即存在直线 a 及不在 a 上的一点 A，过 A 点至少有两条直线与 a 共面且不相交.罗氏平行公理是欧氏平行公理的反面命题.

连续公理(axiom of continuity)　确定直线的连续性，并建立线段和角的度量理论的一组公理.它是希尔伯特公理系统中的第Ⅴ组公理，包括以下两条：

1.(阿基米德公理或度量公理)：如图设 AB 和 CD 是任意两条线段.在射线 AB 上依序存在有限个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，使线段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 都合同于 CD，并且使点 B 在点 A 和点 A_n 之间.



2.(直线完备公理)：直线上的所有满足结合、顺序、合同公理和阿基米德公理的点的集合不可能扩充成仍然满足这些公理的更大的集合.直线完备公理等价于康托尔公理(参见“康托尔公理”).

平面射影几何的公理系统(axiomatic system of projective geometry in plane)　射影几何的公理体系.射影几何的公理系统不只一组，各组彼此等价.由其中的每一组都可推得射影几何的全部内容.下面是平面射影几何的一组公理系统.平面射影几何的基本对象有两个，分别称为“点”和“直线”，基本关系是“结合”，即点在直线上或直线通过点.公理有以下 7 条：

1.存在着不相结合的一点和一直线.

2.每条直线至少跟三个不同点相结合.

3.任意不同的两点恰与一直线相结合.

4.任意不同的两直线至少跟一点相结合.

5.一个完全四角形的三个对角点是不共线的.

6.若两个三角形关于某一点是透视的，则它们关于某一条直线也是透视的.

7.若一个射影对应使一直线上三个不同点的每点均不变，则直线上每点都不变.

埃尔朗根纲领(Erlangen programm)　几何学的一个著名纲领.1872 年，克莱因(Klein,(C.)F.)在埃尔朗根大学发表论文《关于近代几何研究的比较》.在这篇现在被人们简称埃尔朗根纲领的论文中，克莱因对当时已有的各种几何学进行分析归纳，把几何学统一为研究图形在变换群下的不变性质与不变量的一门学科.由于所研究的变换群不同，就得到不同的几何学.例如，研究图形在正交(变换)群下的不变性则得到欧氏几何；研究图形在仿射(变换)群下的不变性就构成仿射几何；研究图形在射影(变换)群下的不变性就产生射影几何.如果进一步研究某一变换群的一系列子群则可得到一系列 的子几何.这些子几何具有比原几何更丰富的内容.埃尔朗根纲领使人们搞清了古典几何的研究对象和本质，深刻阐明了数学各分支间的内在联系，并推进了与几何学有直接联系的其他数学学科的发展，对几何学乃至数学的发展起了重大的作用.

变换群(transformation group)　几何学研究的重要对象.即由变换构成的群.设 G 是集合 S 的一一变换所构成的集合，若它满足：

1.集合内任二变换之积仍属于这集合；

2.集合内任一变换的逆变换仍属于这集合，

则称 G 为 S 的一个变换群.例如，平面上正交变换的全体构成的变换群称为正交群；平面上仿射变换的全体构成的变换群称为仿射群.平面上射影变换的全体构成的变换群称为射影群.在“埃尔朗根纲领”中，变换群可用来对几何学进行分类.

几何学的分类(classification of geometry)　几何学术语.即按不同方法，区分各种几何学的依据.几何学科的分类，有各种各样的原则.可以按维数的不同来区分，例如，平面几何，立体几何等.可以按研究方法的不同来区分，例如，解析几何，微分几何，综合几何等.还可以按公理的不同来区分，例如，按平行公理的不同而区分为欧氏几何、非欧几何等.1872年，克莱因(Klein,(C.)F.)在埃尔朗根纲领中提出了将变换群作为几何学分类的基础.其分类的原则是，给定非空集合 S 及其上的变换群，研究 S 关于该群的不变性质与不变量就构成了 S 关于这个群的几何学.最常见的有：

1.度量几何(欧氏几何)，即研究欧氏空间关于正交(变换)群下不变性质的几何学(或研究度量性质的几何学).

2.仿射几何，即研究仿射空间关于仿射(变换)群下不变性质(仿射性质)的几何学.

3.射影几何，即研究射影空间关于射影(变换)群下不变性质(射影性质)的几何学.

克莱因的观点在近代几何领域中起了很大的作用，促进了几何学的发展.

正交变换群(orthogonal transformation group)亦称运动群或度量群.简称正交群.一类基本的变换群.即全体正交变换所构成的变换群.例如，平面上全体正交变换的集合构成平面上的正交群，空间中正交变换的全体构成空间中的正交群.平面上(空间中)的正交群是平面上(空间中)仿射群的子群.研究正交群

下不变性质与不变量的几何称为欧氏几何或度量几何.

正交群(orthogonal group)　正交变换群的简称.

运动群(group of motions)　即"正交变换群".

度量群(metric group)　即"正交变换群".

欧几里得几何(Euclidean geometry)　见"正交变换群"及本卷《平面几何》同名条.

相似变换群(similar transformation group)　亦称抛物度量群.简称相似群.一类基本的变换群.平面上所有相似变换的集合构成群,称为相似变换群.它是一个四维群.仿射变换群的子群.在仿射变换中若保持一对点 $I(1,i,0)$,$J(1,-i,0)$不变,则为相似变换.相似变换的代数表达式为

$$\begin{cases} x'=a_1x-\varepsilon b_1y+c_1, \\ y'=b_1x+\varepsilon a_1y+c_2, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -\varepsilon b_1 \\ b_1 & \varepsilon a_1 \end{vmatrix}=\varepsilon(a_1^2+b_1^2)\neq 0 \quad (\varepsilon=\pm 1).$$

当 $I\to I,J\to J$ 时,$\varepsilon=1$ 为同向的相似变换;当$I\to J$,$J\to I$ 时,$\varepsilon=-1$ 为异向的相似变换.相似变换保持同素性,结合性及共线三点的单比不变,还保持两直线所构成的角度不变.相似变换把一个图形变为与它相似的图形.与相似变换群相对应的几何学称为相似几何学或抛物几何学.

抛物度量群(parabolic metric group)　即"相似变换群".

相似群(similarity group)　相似变换群的简称.

相似几何(similarity geometry)　见"相似变换群".

抛物几何(parabolic geometry)　见"相似变换群".

仿射变换群(affine transformation group)　简称仿射群.一类基本的变换群.即由仿射空间中全体仿射变换所构成的变换群.例如,平面上的全体仿射变换构成平面上的仿射变换群,它是平面射影变换中以无穷远直线为绝对形的自同构群.空间中全体仿射变换构成空间的仿射变换群,它是空间射影变换中以无穷远平面为绝对形的自同构群.研究在仿射群下不变性质与不变量的几何称为仿射几何.

仿射群(affine group)　仿射变换群的简称.

射影变换群(projective transformation group)　简称射影群.一类基本的变换群.即由射影空间中全体射影变换所构成的变换群.例如平面上全体射影变换构成平面上的射影群.空间中全体射影变换构成空间中的射影群.研究在射影群下不变性质与不变量的几何称为射影几何.

射影群(projective group)　射影变换群的简称.

非欧几里得几何

非欧几里得几何(non-Euclidean geometry)　简称非欧几何.几何学的一门分科.它是以欧几里得第五公设的否定为基础所建立起来的几何,包括罗巴切夫斯基几何和黎曼几何两种.由于怀疑欧几里得第五公设即平行公理是一条定理,从古希腊时代到公元 1800 年间许多数学家都试图用欧氏几何的其他公理去证明它,结果都归于失败.19 世纪,高斯(Gauss,C.F.)、罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)和波尔约(Bolyai,J.)等人各自独立地发现,这种证明是不可能的,平行公理是独立于其他公理的,并且可以用与欧氏平行公理相矛盾的公理去代替它而建立起新的几何体系.1826 年,罗巴切夫斯基以"过直线外一点至少有两条直线与已知直线共面而不相交"为公理去代替欧氏平行公理,得到一种区别于欧氏几何的几何学.在这种几何学里,三角形内角之和小于两直角,当时罗巴切夫斯基称这种几何学为虚几何学.后人称之为罗巴切夫斯基几何,简称罗氏几何,亦称双曲几何.

继罗氏几何出现以后,1854 年,黎曼(Riemann,(G.F.)B.)以"过直线外一点没有直线与已知直线共面而不相交"为公理去代替欧氏平行公理,创立了另一种非欧几何,人们称之为黎曼几何,简称黎氏几何,亦称椭圆几何.在这种几何里,三角形内角之和大于两直角.非欧几何与欧氏几何虽然结果不同,但它们都是几何学的不同分支.非欧几何甚至还可以在欧氏几何的某些曲面上表现出来.非欧几何的产生打破了几何空间的惟一性,反映了空间形式的多样性.从微分几何的观点看,欧氏几何反映了曲率为零的空间,罗氏几何反映了曲率为负数的空间,黎氏几何反映了曲率为正数的空间.这些新发现使人们对空间的认识有了新的进展,而且扩大了几何学的应用范围.非欧几何的发现是 19 世纪最重要的数学成就之一.

非欧几何有着广泛的应用,它不仅推广了几何学概念,而且在物理学的发展和物理观点的更新中也起了重大的作用.非欧几何的出现为广义的黎曼几何的产生创造了条件,而黎曼几何又成为爱因斯坦广义相对论的工具.按照相对论的观点,非欧几何较欧氏几何更适用于宇宙空间结构的研究,因此非欧几何为宇宙空间的研究开辟了新的途径.非欧几何在数学的一些分支中也有重要的应用,它们互相渗透,促进了各自的发展.例如,在自守函数理论中,在求解正弦戈登方程的工作中以及在非线性偏微分方程的研究中,非欧几何都起着重要的作用.此外,

非欧几何在量子力学中也有应用.

非欧几何(non-Euclidean geometry)　非欧几里得几何的简称.

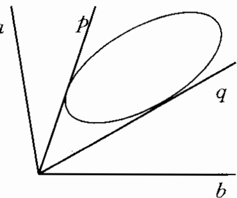
射影测度(projective measure)　射影几何的一个术语.距离的射影测度(射影距离)和夹角的射影测度(射影角度)合称为射影测度.射影测度是凯莱(Cayley,A.)于1859年建立的.1871年,克莱因(Klein,C.F.)利用射影测度的概念来说明非欧几何学.非退化的二阶曲线有实虚两种情况,若绝对形为非退化的实二阶曲线,则可构成罗氏几何;若绝对形为非退化的虚二阶曲线,则可构成黎氏几何.这两种几何合称非欧几何.这样非欧几何就可以从射影测度的概念导出.因为射影测度是由交比来定义的,它属于射影性质,所以非欧几何可以利用射影测度从射影几何导出(参见"射影距离"和"射影角度").

射影距离(projective distance)　射影几何的一个术语.指射影几何中所定义的两点之间的距离.例如在射影平面上取定一个非退化的二阶曲线,若取一个常数 $k(k\neq 0)$,平面内任意两点 A,B 的连线与二阶曲线交于 P,Q 两点.则

$$d(A,B)=k\ln(AB,PQ)$$

是两点 A,B 的函数,且有以下性质:对于任何共线点 A,B,C,$d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$.由于函数 $d(A,B)$ 由有序点对 A,B 惟一决定,而且满足射影不变性和可加性,因此把函数 $d(A,B)$ 称为两点 A 与 B 间距离的射影测度,简称射影距离.射影距离是射影变换下的不变量,预先取定的非退化二阶曲线称为这测度的绝对形,k 称为测度系数或单位.

射影角度(projective angular measure)　射影几何的一个术语.指射影几何中所定义的两条直线的夹角.例如,在射影平面上取定一个非退化的二级曲线,另选定一个常数 $k(k\neq 0)$,从这个平面上任意两直线 a,b 的交点作这个二级曲线的切线 p,q.则 $w(a,b)=k\ln(ab,pq)$ 是两直线 a,b 的函数,且有以下性质:对于任何共点直线 a,b,c,均满足 $w(a,b)+w(b,c)=w(a,c)$.由于函数 $w(a,b)$ 由有序两直线 a,b 惟一决定,并且满足射影不变性和可加性,因此把函数 $w(a,b)$ 称为两直线 a,b 所成角(或夹角)的射影测度,简称两直线 a,b 的射影角度.射影角度是射影变换下的不变量.预先取定的非退化的二级曲线称为这测度的绝对形,k 称为测度系数或单位(如图所示).



测度系数(measure coefficient)　见"射影距离"与"射影角度".

自同构群(group of automorphisms)　重要的几何变换群.是几何学分类的依据.设 S 是给定的空间,U 是 S 上的一个图形,若 S 到自身的一个变换 g 把 U 变到 U 自身,则称 g 是关于 U 的自同构变换,简称关于 U 的自同构.S 上关于 U 的自同构变换的全体构成一个变换群,称它为关于 U 的自同构群.在变换中保持不变的这个图形 U 称为绝对形.例如,在射影平面上取一条直线作无穷远直线,则在射影平面上保持无穷远直线不变的自同构射影变换构成一个变换群,它是关于无穷远直线的自同构群,同时它也是二维射影变换群的子群,即仿射变换群.

自同构变换(transformation of automorphisms)　见"自同构群".

绝对形(absolute)　见"自同构群".

双曲运动群(hyperbolic motion group)　一种运动群.即构成双曲几何的运动群.在射影平面上取一条非退化的实二阶曲线 $k:x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 作为绝对形,关于实二阶曲线 k 的自同构变换称为双曲射影运动.具有公共绝对形的双曲射影运动的全体构成射影变换群的一个子群,称为双曲运动群.研究在双曲运动群下不变性质与不变量的几何称为双曲几何,或称罗氏几何.

双曲射影运动(hyperbolic projective motion)　见"双曲运动群".

双曲几何(hyperbolic geometry)　亦称罗氏几何.非欧几何的一种.见"双曲运动群"与"罗巴切夫斯基几何".

椭圆运动群(elliptic motion group)　一种运动群.即构成椭圆几何的运动群.在射影平面上取一条非退化的虚二阶曲线 $k:x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 作为绝对形,关于虚二阶曲线 k 的自同构变换称为椭圆射影运动.具有公共绝对形的椭圆射影运动的全体构成射影变换群的一个子群,称为椭圆运动群.研究在椭圆运动群下不变性质与不变量的几何称为椭圆几何,或称黎曼几何.

椭圆射影运动(elliptic projective motion)　见"椭圆运动群".

椭圆几何(elliptic geometry)　亦称黎曼几何.非欧几何的一种.见"椭圆运动群"与"黎曼几何".

罗氏几何的克莱因模型(Klein model of Lobachevskian geometry)　解释罗巴切夫斯基几何的模型.1871年,克莱因(Klein,(C.)F.)利用凯莱(Cayley,A.)所创立的射影测度的概念来说明非欧几何学,他建立的这个模型就称为罗氏几何的克莱因模型.具体作法如下:在射影平面上取一条实非退化二阶曲线 $\Gamma:x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 为绝对形,规定 Γ 内的点

为双曲点，Γ 的弦称为双曲直线，Γ 上的点不算作双曲点，即双曲直线是开的．由以上规定可知，任意两个双曲点决定惟一一条双曲直线．对于两条双曲线段 AB 和 $A'B'$，若存在着关于 Γ 的自同构，把 AB 变到 $A'B'$，则称 $AB\equiv A'B'$．对于两个双曲角 $\angle(l_1,l_2)$，$\angle(l'_1,l'_2)$，若存在关于 Γ 的自同构把 $\angle(l_1,l_2)$ 变到 $\angle(l'_1,l'_2)$，则称 $\angle(l_1,l_2)\equiv\angle(l'_1,l'_2)$，同时定义相交于绝对形上的点（称为无穷远点）的两条直线为平行直线，相交于绝对形外部的直线为离散直线．这样，在射影平面上实的绝对形的内部定义了射影测度以后，就建立了罗巴切夫斯基几何的模型．

庞加莱复数平面模型(Poincaré complex plane model)　解释罗氏平面几何的模型．取欧氏上半平面，其中的点称为罗氏点（不包括 x 轴上的点）．罗氏直线是指中心在 x 轴上不含有端点的半圆周以及上半平面中垂直于 x 轴的半直线（不含有 x 轴上的点，这样的半直线可以看成中心在 x 轴，半径为无限大的半圆周）．它们统称为欧氏半圆周或罗氏直线．端点为 A，B 的半圆弧表示罗氏线段 AB．用起点在上半平面，终点在 x 轴上的弧 OX 表示罗氏半直线（X 不是罗氏点）．罗氏角是指通过一点的两条罗氏半直线的集合．

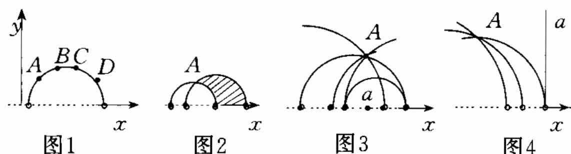
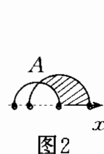
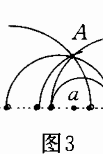
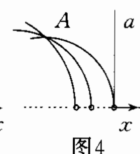





图1　图2　图3　图4

对应于欧氏点和半圆周，在罗氏点和罗氏直线之间建立如下的关系：

1．若点 A 在半圆周 a 上，则称罗氏点 A 在罗氏直线 a 上．

2．设 A，B，C 在半圆周 a 上，若 B 在 A 与 C 之间，则称罗氏直线 a 上的点 B 在 A 与 C 之间，即点在罗氏直线上的顺序与点在欧氏半圆周上的顺序相同．

3．这样的罗氏直线上存在戴德金原理．

4．在上半平面引进复数，使每一点 M 与一个复数 $x+\mathrm{i}y$ 之间建立对应，这样可以利用对半圆周的反演变换定义合同关系，即若经过几个反演变换的乘积把一个圆弧（角）变成另一个圆弧（角），则称这两个罗氏线段（罗氏角）是合同的．

利用这些关系就可以证明这个模型满足罗氏平面几何的全部公理．例如，它满足罗氏几何的平行公理．若 a 是罗氏直线，$A\notin a$，过 A 可以引无数多条罗氏直线，与 a 没有公共点．即通过罗氏直线外的任意一点，可以引无数多条罗氏直线，与已知的直线共面而不相交．这个模型是庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)首先提出来的，因为该模型的点是在复数上半平面上，所以称之为罗氏几何的庞加莱复数平面模型．庞加莱利用这个模型，在欧氏平面上解释了罗氏平面几何，若欧氏几何无矛盾，则罗氏几何亦无矛盾．

黎曼几何模型(model of Riemannian geometry)　解释黎曼几何的模型．在射影平面上取一条非退化的虚二阶曲线 Γ：$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ 作为绝对形．若以射影平面上的点为点，直线为直线．在距离的射影测度 $d(A,B)=k\ln(AB,PQ)$ 中取 $k=\mathrm{i}\alpha/2$，在夹角的射影测度 $w(a,b)=k\ln(ab,pq)$ 中取 $k=\mathrm{i}/2$，则在这个模型里，不存在不相交的直线，所以过直线外的点不存在与已知直线共面而不相交的直线，且三角形内角之和大于 π．这就是黎曼几何的一个模型．

几何公理系统的解释(interpretation of geometric axiomatic systems)　亦称几何公理系统的实现或模型．几何公理化方法的重要课题．给定一个公理系统 $\sum$，为了验证该公理系统的协调性（无矛盾性）．人们往往取现实中存在的一组具体事物 M，规定公理系统 $\sum$ 中的每个基本概念对应 M 中的某一事物，并且验证了：在此规定之下，$\sum$ 中的每个公理都成立，则 M 就称为 $\sum$ 的一个解释，或一个实现（模型）．利用这种方法还可以验证公理系统的独立性和完备性．几何公理系统的解释是19世纪中叶随着罗氏几何的产生而发展起来的，贝尔特拉米(Beltrami,E.)利用他的微分几何模型，庞加莱((Poincaré,(J.-)H.)利用他的复数平面模型，克莱因(Klein,(C.)F.)利用他的射影几何模型等，各自成功地解释了罗氏几何．模型法已成为研究公理系统的重要方法．特别是当涉及原始概念的对象有无限多时就更是这样．因此，在数学中行之有效的方法是用一种熟知的公理系统 A 作为新公理系统 B 的解释．当 B 为 A 的子公理系统时，这样做是显然的．如果 A 协调，显然 B 也协调；倘若 A 的协调性尚未确立，则称 B 具有相对于 A 的协调性．

模型法(model method)　见“几何公理系统的解释”．

罗巴切夫斯基几何(Lobachevskian geometry)　简称罗氏几何，亦称双曲几何．非欧几何的一种．由罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)创立．由于欧氏几何第五公设即平行公理比其他公理复杂，看起来像一个定理，且在《原本》中出现很晚，自古以来，许多数学家想用《原本》中其他公设和公理去证明它，均未获得成功．直到1826年，罗氏几何出现才初步解决了这一问题．罗巴切夫斯基对第五公设进行了长期研究，得出第五公设不能从《原本》的公理与其他公设推出的结论．他保留了欧氏几何中除第五公设外其他的公设和公理，而把第五公设改成“有这样

的直线和其外一点，过这点可以引两条直线与已知直线共面不交”，并由此推理下去，得到一连串命题，形成了一个严密完整的新体系. 建立了一种全新的几何学——罗氏几何. 在罗氏几何里，三角形的内角之和小于两直角. 与罗巴切夫斯基几乎同时得出第五公设不能从欧几里得(Euclid)其他公理和公设推得的结论的还有高斯(Gauss, C. F.)和波尔约(Bolyai, J.)，但高斯未正式发表自己的创见，波尔约的工作独立地发表，但稍晚于罗巴切夫斯基. 因此，也有人把罗巴切夫斯基几何称为罗巴切夫斯基-波尔约几何. 罗氏几何的发现扩大了几何学的内容和意义，扩大了空间的概念，解放了人们的思想，对数学的发展有深远的影响. 罗氏几何在分析、物理和量子力学等方面都有应用.

罗氏几何(Lobachevskian geometry)　罗巴切夫斯基几何的简称.

罗氏平行射线(Lobachevskian parallel half line)　罗氏几何的一个术语. 指罗氏平面上互相平行的两条射线. 在罗氏平面上，如图，若两射线 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 在直线 BC 之同侧且不相交，但 $\angle CBA$ 内部的任一射线 $\overrightarrow{BD}$ 均与 $\overrightarrow{CE}$ 相交，则称射线 $\overrightarrow{BA}$ 平行于射线 $\overrightarrow{CE}$，记为 $\overrightarrow{BA} /\!/ \overrightarrow{CE}$ (如图 1)，当 $BC \perp CE$ 时，$\angle CBA$ 称为线段 BC 的平行角，而线段 BC 称为 $\angle CBA$ 的平行距或指针(如图 2). 可以证明平行角是锐角.

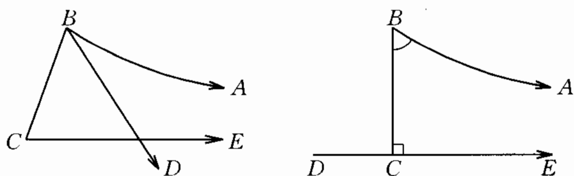


图1

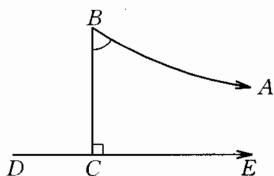


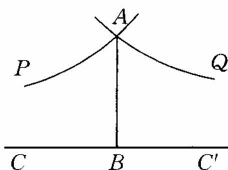
图2

设 B 不在直线 CE 上，对于方向 $\overrightarrow{CE}$，恰有一条射线 $\overrightarrow{BA} /\!/ \overrightarrow{CE}$.

罗氏几何中的平行距(parallel distance in Lobachevskian geometry)　见“罗氏平行射线”.

罗氏几何中的平行角(parallel angle in Lobachevskian geometry)　见“罗氏平行射线”.

罗氏平行直线(Lobachevskian parallel lines)　罗氏几何的主要研究对象. 在罗氏平面上，若 $\overrightarrow{AP} /\!/ \overrightarrow{BC}$，则称直线 AP 沿 $\overrightarrow{BC}$ 方向(或 $\overrightarrow{AP}$ 方向)平行于直线 BC，记为 $AP /\!/ BC$ 于方向 $\overrightarrow{BC}$ (或 $\overrightarrow{AP}$). 当方向一致时，直线间的平行具有对称性和传递性. 在罗氏平面上，过直线 CC' 外一点 A，有且仅有两条直线 AP 和 AQ 分别于不同的方向平行于 CC'. 在罗氏平面上，任何两对平行线可以互相叠合，且二平行线在平行方向上无限接近，而在反方向无限远离.



罗氏几何的离散直线(discrete lines in Lobachevskian geometry)　亦称超平行线或分散直线. 罗氏几何的一个术语. 指罗氏平面上既不相交又不在任何方向上平行的两条直线. 在罗氏平面上，对于任何直线 a 及不在其上的一点 B，恒有无穷多直线过 B 而与 a 是离散的. 设 $BA /\!/ a$ 于方向 $\overrightarrow{BA}$，$BA' /\!/ a$ 于 $\overrightarrow{BA'}$，凡落在 $\angle ABA'$ 的二邻补角内的任何直线 BI(有无穷多条)均与 a 离散(如图 1). 二直线是离散的充分必要条件是它们恰有一条公垂线，且二离散直线间的距离沿公垂线每一侧单调无界上升(如图 2).

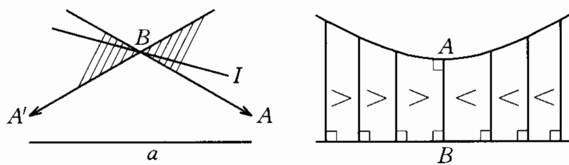


图1

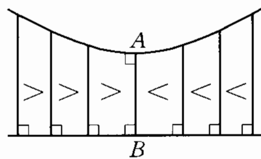


图2

超平行线(hyperparallel lines)　亦称分散直线. 即“罗氏几何的离散直线”.

罗氏三角形(Lobachevskian triangle)　罗氏几何的一个术语. 指罗氏平面上，由三条线段首尾顺序相接所组成的封闭图形. 罗氏三角形与欧氏三角形有许多不同点，主要有：

1. 罗氏三角形内角之和小于两直角.

2. 两个罗氏三角形若有三个内角对应相等，这两个三角形必全等(即不存在相似而不全等的三角形).

3. 罗氏三角形三条高线不一定相交于一点.

4. 罗氏几何中刻画三角形边角关系的正弦定理与余弦定理与欧氏几何中的情形完全不同.

例如，对于直角三角形，设 A, B, C 表示三个内角，C 是直角，a, b, c 分别为它们的对边，则有如下的关系成立：

$$\sinh\frac{a}{k}=\sinh\frac{c}{k}\sin A,\ \sinh\frac{b}{k}=\sinh\frac{c}{k}\sin B,$$

$$\tanh\frac{a}{k}=\sinh\frac{b}{k}\tan A,\ \tanh\frac{b}{k}=\sinh\frac{a}{k}\tan B,$$

$$\tanh\frac{a}{k}=\tanh\frac{c}{k}\cos B,\ \tanh\frac{b}{k}=\tanh\frac{c}{k}\cos A,$$

$$\cos B=\cosh\frac{b}{k}\sin A,\ \cos A=\cosh\frac{a}{k}\sin B,$$

$$\cosh\frac{c}{k}=\cot A\cdot\cot B,\ \cosh\frac{c}{k}=\cosh\frac{a}{k}\cosh\frac{b}{k}.$$

这十个公式称为罗氏直角三角形的基本公式. 而对于斜三角形，有正弦定理：

$$\frac{\sin A}{\sinh\frac{a}{k}}=\frac{\sin B}{\sinh\frac{b}{k}}=\frac{\sin C}{\sinh\frac{c}{k}},$$

以及余弦定理：

$$\cosh\frac{a}{k}=\cosh\frac{b}{k}\cdot\cosh\frac{c}{k}-\sinh\frac{b}{k}\sinh\frac{c}{k}\cdot\cos A$$

$$\cosh\frac{b}{k}=\cosh\frac{c}{k}\cdot\cosh\frac{a}{k}-\sinh\frac{c}{k}\sinh\frac{a}{k}\cdot\cos B$$

$$\cosh\frac{c}{k}=\cosh\frac{a}{k}\cdot\cosh\frac{b}{k}-\sinh\frac{a}{k}\sinh\frac{b}{k}\cdot\cos C,$$

式中 k 是一个正常数，表示曲率半径；sinh，cosh，tanh 分别是双曲正弦、双曲余弦、双曲正切.

罗氏直角三角形的基本公式(fundamental formulas of Lobachevskian right triangle)　见“罗氏三角形”.

罗氏三角形的正弦定理(sine theorem of a Lobachevskian triangle)　见“罗氏三角形”.

罗氏三角形的余弦定理(cosine theorem of a Lobachevskian triangle)　见“罗氏三角形”.

罗氏三角形的角亏(defect of Lobachevskian triangle)　罗氏几何的一个术语.在罗氏几何学中，三角形内角和小于二直角.二直角与三角形内角和的差称为三角形的角亏或角欠，常记成 $\varepsilon(A,B,C)$.角欠不是一个固定常数，罗氏平面上取不同的两个三角形，其角欠一般是不同的.角欠的取值范围是 0 到 π.它与三角形的面积成正比.特别地，当三个顶点都趋向无穷远时，角欠趋于 π；当三角形的三边都趋向于零时，角欠趋于零.

罗氏三角形的角欠(defect of Lobachevskian triangle)　即“罗氏三角形的角亏”.

罗巴切夫斯基函数(Lobachevskian function)　简称罗氏函数.罗氏几何中的重要函数关系.在罗氏平面上，若$\angle BAP$ 是线段 AB 的平行角，$d(AB)=x$，$\mu(\angle BAP)=\alpha$，则函数：$\alpha=\pi(x)$称为罗巴切夫斯基函数.罗巴切夫斯基函数是严格单调递减的连续函数.这个函数可以用初等函数表示如下

$$\pi(x)=2\operatorname{arccot}\mathrm{e}^{\frac{x}{\rho}},$$

其中 ρ 为曲率半径.

罗氏函数(Lobachevskian function)　罗巴切夫斯基函数的简称.

罗氏平面上的直线束(pencil of lines in a Lobachevskian plane)　罗氏平面几何的研究对象.罗氏平面上的直线束有下列三种情形：

1. 椭圆线束.通过同一点 O 的所有直线的集合.这种线束也称为有心线束，点 O 称为线束的中心(如图 1).

2. 双曲线束.亦称离散线束.垂直于同一条直线 l 的所有直线的集合，l 称为线束的底(如图 2).

3. 抛物线束.亦称平行线束.在一定的方向与定直线 l 平行的所有直线的集合，l 称为线束的轴(如图 3).

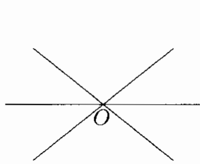


图1

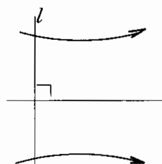


图2

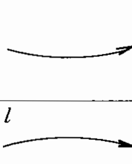
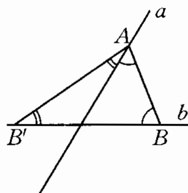


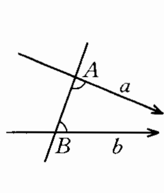
图3

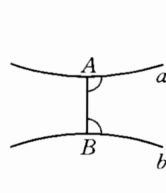
罗氏平面上的基本曲线(fundamental curves in a Lobachevskian plane)　罗氏平面几何的主要研究对象.在罗氏平面上，圆、极限圆和等距线称为三种基本曲线，这三种曲线是罗氏平面上三种直线束的正交轨线，是在直线束中任一直线 a 上取定一点 A，自 A 作束中任一直线与直线 a 的等倾割线的端点的轨迹.

罗氏平面的圆(circle in a Lobachevskian plane)　罗氏平面上的基本曲线之一.在罗氏平面上，设 a 是以 O 为中心的直线束中的一条直线，在 a 上取定一点 A，过 A 作束中任一直线与 a 的等倾割线，其端点的轨迹称为罗氏圆，点 O 为该圆的圆心.罗氏圆是与椭圆线束中所有直线都垂直相交的连续曲线.

等倾割线(isoclinal secant line)　罗氏平面上的基本曲线之一.与共面二直线 a,b 相交成相等的同侧内角的直线，称为二直线 a,b 的等倾割线.在罗氏平面上，共面二直线有相交、平行、离散三种位置







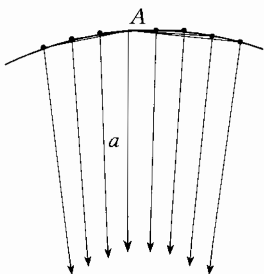
关系.过一直线上一定点都存在等倾割线 AB.在相交情形有两条等倾割线 AB,AB'，在平行和离散的情形，这样的割线是惟一的(如图所示).交点 A,B 称为等倾割线的端点.

等距曲线(equidistant curve)　简称等距线.罗氏平面上的基本曲线之一.罗氏平面上，在给定直线 a 的同一侧而且与 a 有相同距离的点的轨迹.直线 a 称为等距线的底，距离的数值 h 称为等距线的高.特别地，每条直线可以看成是高 $h=0$ 的等距线.等距线是在以直线 a 为底的双曲线束中，与线束中所有直线都垂直相交的连续曲线.等距线对于沿着直线 a 的直移是不变的，平面上的每条直线与等距线最多有两个公共点.在罗氏几何里等距线不像欧氏几何里那样是直线，所有 $h>0$ 的等距线都是曲线.

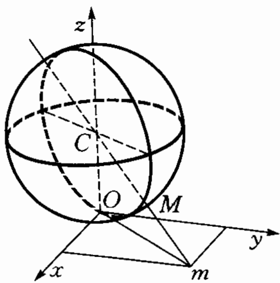
等距线(equidistant curve)　等距曲线的简称.

极限圆(horocycle)　罗氏平面上的基本曲线之一.即在罗氏平面上，从直线 a 上的一点 A，到在确定方向与它平行的直线束中的每一条直线做等倾割线的另一端点的轨迹.点 A 本身也是极限圆的

点.束中每一直线称为极限圆的轴线.极限圆是与抛物线束中所有直线都垂直相交的连续曲线.极限圆具有关于绕着轴线方向上的无穷远点旋转不变的性质.罗氏平面上的所有极限圆都是合同的,任意直线与极限圆最多只能有两个公共点(如图所示).



贝尔特拉米映射(Beltrami mapping) 球面到平面的一种特殊映射.在空间直角坐标系中,取一个半径为 a 的球面,设球心 C 在 z 轴上,且球面与平面 xOy 切于坐标原点.对于球面上任一点 M,过 C,M 作直线交 xOy 面于一点 m,称 m 为球面点 M 经过球心投射而得到的对应点,并规定球面上在一条直径上的点对应平面上的同一点.这样就得到球面到平面的一个映射(如图).这个映射是贝尔特拉米(Beltrami,E.)在研究罗氏几何时首先提出来的,称为贝尔特拉米映射.因为罗氏平面可以看成半径为纯虚数的球面,所以,利用贝尔特拉米映射可以导出罗氏几何的基本性质.设球面上点 M 的坐标为 $M(\xi,\eta,\varphi)$,M 的对应点 m 在 xOy 面上,记为 $m(x,y)$.又设 $a=\mathrm{i}\rho$,这里 ρ 称为罗氏曲率半径,由球面上弧长的微分式 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\varphi^2$.可以导出罗氏平面弧长的公式



$$\mathrm{d}s^2=\rho^2\frac{(1-y^2)\mathrm{d}x^2+(1-x^2)\mathrm{d}y^2+2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

半径为 s 的罗氏圆的面积是

$$4\pi\rho^2\sinh^2\left(\frac{s}{2\rho}\right).$$

罗氏三角形的内心(incenter of a Lobachevskian triangle) 罗氏三角形的特殊点之一.罗氏三角形三条内角平分线总交于一点,该点称为三角形的内心.每个罗氏三角形有惟一的内心,且内心在三角形的内部.

罗氏三角形的外心(circumcenter of a Lobachevskian triangle) 罗氏三角形的特殊点之一.若罗氏三角形三边垂直平分线交于一点,则称这点为三角形的外心.一个罗氏三角形不一定有外心,因为过三角形三边的中点所作的垂直平分线,有一个公共的交点,或者三条线相互分散,或者三条线在同一方向下互相平行.

罗氏三角形的重心(barycenter of a Lobachevskian triangle) 罗氏三角形的特殊点之一.罗氏三角形的三条中线交于一点,这点称为该罗氏三角形的重心.任一个罗氏三角形必有重心.

罗氏三角形的垂心(orthocenter of a Lobachevskian triangle) 罗氏三角形的特殊点之一.若罗氏三角形的两条高交于一点,则第三条高也通过这个交点,该点称为三角形的垂心.罗氏锐角三角形必有一个垂心,且垂心在三角形的内部.罗氏直角三角形的垂心与直角的顶点重合.存在没有垂心的罗氏钝角三角形.罗氏钝角三角形有垂心的话,垂心一定落在三角形的外部.

罗氏三角形的旁心(escenter of a Lobachevskian triangle) 罗氏三角形的特殊点之一.罗氏三角形两条外角平分线的交点称为旁心.罗氏三角形旁心的个数可能是 0,1,2,3 四种情形.

罗氏三角形内角之和(sum of interior angles of a Lobachevskian triangle) 罗氏三角形的一个重要性质.即罗氏三角形内角之和小于 π.但内角之和不是一个固定不变的常数,即对不同的三角形,内角之和一般也不同.

罗氏三角形的面积公式(area formula of a Lobachevskian triangle) 罗氏几何的面积公式之一.在罗氏几何中,罗氏三角形($\triangle ABC$)的面积是 $\rho^2\varepsilon(A,B,C)$.其中,ρ 是罗氏曲率半径,$\varepsilon(A,B,C)$ 是 $\triangle ABC$ 的角亏.由三角形的面积公式可知,无论罗氏三角形的边多长,其面积永远不能超过一个定值 $\pi\rho^2$.当三角形的三个顶点都在无穷远时,这种三角形常称为渐近三角形,它的面积是 $\pi\rho^2$,是一切罗氏三角形中面积最大的.当三角形的三边长都趋于零时,三角形的面积趋于零.即罗氏几何在局部的范围就是欧氏几何.

罗氏平面中多边形的面积公式(area formula of the polygon in a Lobachevskian plane) 罗氏几何的面积公式之一.在罗氏平面上简单 n 边形的面积是 $\rho^2[(n-2)\pi-(A_1+A_2+\cdots+A_n)]$.这里 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 为 n 边形的内角,ρ 为罗氏曲率半径,$(n-2)\pi-(A_1+A_2+\cdots+A_n)$ 称为 n 边形的角亏.由于面积是角亏的连续函数,对于任何实数 $\lambda\in[0,(n-2)\cdot\rho^2\pi]$,存在简单 n 边形使其面积为 λ.当 $n\to\infty$ 时,$(n-2)\rho^2\pi\to\infty$,于是对任何 $\lambda\in(0,\infty)$,存在 n 和 n 边形,使其面积为 λ.

罗氏空间中的直线把(bundle of lines in a Lobachevskian space) 罗氏几何研究的对象.指罗氏空间中的直线集合,其中每对直线在一平面上.罗氏空间中的直线把只存在如下三种类型:

1. 椭圆线把.通过某点 S 的所有直线的集合.这种直线把亦称为中心线把(如图 1).

2. 双曲线把.垂直于某平面 ω 的所有直线的集合(如图 2).

3. 抛物线把. 在一方向相互平行的所有直线的集合(如图 3).

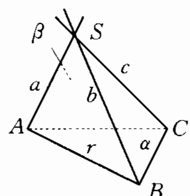


图1

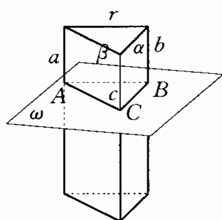


图2

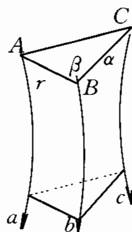
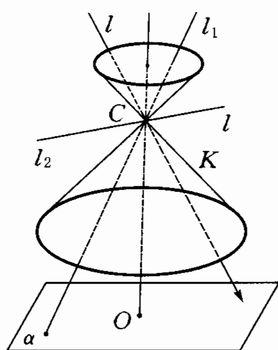


图3

罗氏几何的平行锥面(parallel conical surface in Lobachevskian geometry) 罗氏空间的一种重要曲面. 在罗氏空间中,通过平面 α 外一点 C 作平行于 α 的直线,所有这样的直线所形成的曲面称为平面 α 的平行锥面. C 称为平行锥面的顶点,每条平行直线都称为平行锥面的母线. 从点 C 作平面 α 的垂线 CO, O 为垂足,由于平行角的惟一性,所以,以 CO 为旋转轴,任一条过 C 的平行线绕着 CO 旋转就得到顶点为 C 的平面 α 的平行锥面. 平行锥面把过点 C 的线把中的直线分成三类:



1. 所有落在平行锥面内部的直线与平面 α 都相交,这样的直线称为 α 的会聚线.

2. 所有落在平行锥面外部的直线与 α 不平行也不相交,这样的直线称为 α 的离散直线.

3. 所有落在锥面上的直线(即母线)是和 α 平行的直线.

一条直线是平面 α 的会聚、离散或平行直线与点 C 的取法无关. 利用平行锥面可知:空间中任给一条直线和任给一个平面,它们的位置关系有四种情形:

1. 直线在平面上.

2. 直线是平面的会聚线.

3. 直线是平面的平行直线.

4. 直线是平面的离散直线.

罗氏空间中两平面的相互位置(mutually position of two planes in Lobachevskian space) 罗氏空间中两平面间的相对位置关系. 罗氏空间任意两个平面的相互位置有四种情形:会聚、平行、离散、重合. 设 α, β 是空间中任意两个不重合的平面, C 为 β 上的点但不在 α 上, K 为过 C 点的 α 的平行锥面. 若 β 与 K 交于锥面上的一双母线,则称 β 为 α 的会聚平面,若 β 与 K 相切(仅含 K 的一条母线),则称 β 为 α 的平行平面. 若 β 不含 K 的任何一条母线,则称 β 为 α 的离散平面. 两平面间的会聚、平行、离散关系与点 C 的取法无关. 平面间的会聚、平行、离散关系具有对称性,若 α 是 β 的会聚(平行、离散)平面,则 β 也是 α 的会聚(平行、离散)平面.

罗氏空间的会聚平面(coherence planes in Lobachevskian space) 见"罗氏空间中两平面的相互位置".

罗氏空间的平行平面(parallel planes in Lobachevskian space) 见"罗氏空间中两平面的相互位置".

罗氏空间的离散平面(discrete planes in Lobachevskian space) 亦称超平行平面. 罗氏空间中两平面的一种位置关系. 若两个平面,其中没有一个包含着平行于另一个平面的直线,则这两个平面称为离散的. 两个离散的平面总有惟一一条公垂线;反之,垂直于一条直线的两个相异平面是离散的. 两个离散平面在离开公垂线的所有方向上都互相无限远离(参见"罗氏空间中两平面的相互位置").

超平行平面(hyperparallel planes) 即"罗氏空间的离散平面".

罗氏空间的基本曲面(fundamental surfaces in Lobachevskian space) 罗氏几何的主要研究对象. 指罗氏空间中球面、等距曲面和极限球面三种曲面,这三种曲面分别是罗氏空间中三种线把——椭圆线把、双曲线把和抛物线把的直交曲面. 如果以椭圆、双曲、抛物三种线束中的任一条直线为旋转轴,把圆、等距线、极限圆旋转,就分别得到罗氏空间中的三种回转曲面:球面、等距曲面,及极限球面.

罗氏空间的球面(sphere in Lobachevskian space) 罗氏空间的三种基本曲面之一. 在罗氏空间中,设 a 是以 O 为中心的直线把中的一条直线,在 a 上取定一点 A,作线把中任一直线与 a 的等倾割线,其端点的轨迹称为罗氏球面, O 称为该球面的球心或中心. 罗氏球面可以看成罗氏圆绕着椭圆线束(中心线束)中任一条直线旋转所产生的曲面.

等距曲面(equidistant surface) 简称等距面. 罗氏空间的三种基本曲面之一. 指在罗氏空间中,在给定平面 α 的同一侧,到 α 的距离相等的点的轨迹. 平面 α 称为等距曲面的底,从曲面上的任一点所引的到底上的垂线称为高. 等距面是双曲线把的直交曲面. 它也可以看成等距线绕双曲线束中的任一条直线旋转而生成的曲面.

等距面(equidistant surface) 等距曲面的简称.

极限球面(horosphere) 罗氏空间的三种基本曲面之一. 指在罗氏空间中,从直线 a 的一个点 A,到在确定方向上与 a 平行的任意直线引等倾割线,其端点的几何轨迹. 点 A 也是极限球面上的点. 直

线 a 及与 a 在同方向平行的直线称为极限球面的轴线.极限球面是抛物线把的直交曲面,也是极限圆绕其任一轴线旋转一周所产生的曲面.

黎曼几何(Riemannian geometry) 亦称黎氏几何或椭圆几何.非欧几何的一种.其中又有单椭和双椭之分.这种几何的发现首先要归功于黎曼(Riemann,(G. F.)B.).他在1854年所作的一篇论文:《论几何学作为基础的假设》中指出了这种几何的存在性.黎曼平面几何(单椭)的公理如下:

A. 结合公理.基本概念与欧氏几何中的相同.

1. 对于两个不同的点 A,B,总存在过 A 点和 B 点的直线.

2. 对于两个不同的点 A,B,至多存在一条直线通过点 A 和 B.

3. 在每条直线上有三个点,至少存在着三个点不在一条直线上.

B. 顺序公理.基本概念:分离记为 $\div$,不分离,记为 $\overline{\div}$.

1. 对于直线 a 上的任意三个点 A,B,C,在直线 a 上总有一点 D,使 得 $A,B\div C,D$.

2. 若 $A,B\div C,D$,则点 A,B,C,D 在同一直线上,而且都是不同的点.

3. 若 $A,B\div C,D$,则 $C,D\div A,B$,而且 $B,A\div C,D$.

4. 若 $A,B\div C,D$,则 $A,C\ \overline{\div}\ B,D$.

5. 若 A,B,C,D 是一直线上四个不同点,则 $A,B\div C,D$,或 $A,C\div B,D$,或 $A,D\div B,C$.

6. 对于一直线上的五个不同点 A,B,C,D 和 E,若 $A,B\div D,E$,则或者 $A,B\div C,D$,或者

$$A,B\div C,E.$$

7. 分离性在透视对应之下是保持的.

C. 连续公理.即戴德金公理.

D. 合同公理.基本概念:线段合同,角合同.

1. 每条线段 AB,都有 $AB\equiv AB$,$AB\equiv BA$.

2. 若 $AB\equiv A'B'$,则 $A'B'\equiv AB$.

3. 若 $AB\equiv A''B''$,$A'B'\equiv A''B''$,则 $AB\equiv A'B'$.

4. 若 C 为线段 AB 的内点,则两线段 AC 和 CB 中的任何一条都不合同于线段 AB.

5. 若 $AB\equiv A'B'$,且 C 为线段 AB 的内点,则在线段 $A'B'$ 上存在惟一的一点 C',使得 $AC\equiv A'C'$,$BC\equiv B'C'$.

6. 若两线段合同,则其补线段也合同.

7. 对于直线 a 上的一切点 A 都存在相应的点 B,使直线 a 上以 A,B 为端点的两条互补线段彼此合同.

8. 一切半线皆合同.

9. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,若 $AB\equiv A'B'$,$AC\equiv A'C'$,$\angle A\equiv\angle A'$,则 $\angle B\equiv\angle B'$,$\angle C\equiv\angle C'$.

E. 平面上的任意两条直线必有公共点.

上述五条构成黎曼平面几何的公理体系.至于 n 维黎曼几何可以如下定义:n 维空间 R^n 中,若有一组函数:$g_{ij}(x)=g_{ji}(x)$,使得相邻两点 x^i,$x^i+\mathrm{d}x^i$ 之间的距离 $\mathrm{d}s$ 由一个正定二次型:$\mathrm{d}s^2=g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 决定,则称空间 R^n 为黎曼空间,黎曼空间中的几何学称为黎曼几何.二次型 $\mathrm{d}s^2$ 称为黎曼空间的线素,它是在坐标变换下的不变量,即在 $x^i=x^i(x^{i'})$下,

$$g_{i'j'}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

g_{ij}称为黎曼空间的度量张量或基本张量.现在,黎曼几何已受到人们的普遍重视而得到了很大发展,它不仅成为现代微分几何的基础,而且也是微分方程、变分法、复变函数论等数学分支学科所需要的研究工具.

黎曼空间(Riemannian space) 见“黎曼几何”.

黎曼三角形的角余(excess of a Riemannian triangle) 黎曼几何的基本概念.在黎曼几何中,三角形内角和大于二直角,三角形内角和与二直角之差称为黎曼三角形的角余或角盈.

黎曼三角形的角盈(excess of a Riemannian triangle) 即“黎曼三角形的角余”.

撰 稿 门树慧 王汇淳 王智秋 王新年 左铨如
白长珍 刘增贤 杨文茂 沈一兵 张毓新
倪焕泉 徐源富 郭卫中 裘光明
审 阅 刘增贤 沈一兵 黄正中 裘光明

数 学 分 析

数学分析(mathematical analysis)　分析学中最古老、最基本的分支.一般指以微积分学和无穷级数一般理论为主要内容,并包括它们的理论基础(实数、函数和极限的基本理论)的一个较为完整的数学学科.它也是大学数学专业的一门基础课程.数学分析的创立始于17世纪以牛顿(Newton,I.)和莱布尼茨(Leibniz,G.W.)为代表的开创性工作,而完成于19世纪以柯西(Cauchy,A.-L.)和外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))为代表的奠基性工作.从牛顿开始就将微积分学及其有关内容称为分析.其后,微积分学领域不断扩大,但许多数学家还是沿用这一名称.时至今日,许多内容虽已从微积分学中分离出去,成了独立的学科,而人们仍以分析统称之.数学分析亦简称分析(参见“分析学”).

数学分析的研究对象是函数,它从局部和整体这两个方面研究函数的基本性态,从而形成微分学和积分学的基本内容.微分学研究变化率等函数的局部特征,导数和微分是它的主要概念,求导数的过程就是微分法.围绕着导数与微分的性质、计算和直接应用,形成微分学的重要内容.积分学则从总体上研究微小变化(尤其是非均匀变化)积累的总效果,其基本概念是原函数(反导数)和定积分,求积分的过程就是积分法.积分的性质、计算、推广与直接应用构成积分学的全部内容.牛顿和莱布尼茨对数学的杰出贡献就在于,他们在1670年左右,总结了求导数与求积分的一系列基本法则,发现了求导数与求积分是两种互逆的运算,并通过后来以他们的名字命名的著名公式反映了这种互逆关系,从而使本来各自独立发展的微分学和积分学结合而成一门新的学科——微积分学.又由于他们及一些后继学者(特别是欧拉(Euler,L.))的贡献,使得本来仅为少数数学家所了解,只能相当艰难地处理一些个别具体问题的微分与积分方法,成为一种常人稍加训练即可掌握的近于机械的方法,打开了把它广泛应用于科学技术领域的大门,其影响所及,难以估量.因此,微积分的出现与发展被认为是人类文明史上划时代的事件之一.与积分相比,无穷级数也是微小量的叠加与积累,只不过取离散的形式(积分是连续的形式).因此,在数学分析中,无穷级数与微积分从来都是密不可分和相辅相成的.在历史上,无穷级数的使用由来已久,但只在成为数学分析的一部分后,才得到真正的发展和广泛应用.

数学分析的基本方法是极限的方法,或者说是无穷小分析.洛必达(L'Hospital,G.-F.-A.de)于1696年在巴黎出版的世界上第一本微积分教科书,欧拉于1748年出版的两卷本沟通微积分与初等分析的书,书名中都出现过无穷小分析这个词.在微积分学发展的初期,这种新的方法显示出巨大的力量,因而得到大批重要的成果.许多与微积分有关的新的数学分支,如变分法、微分方程以至于微分几何和复变函数论,都在18—19世纪初发展起来.然而,初期的分析还是比较粗糙的,被新方法的力量鼓舞的数学家们经常不顾演绎的逻辑根据,使用着直观的猜测和自相矛盾的推理,以致在整个18世纪,对这种方法的合理性普遍存在着怀疑.这些怀疑在很大程度上是从当时经常使用的无穷小的含义与用法上引起的.随意使用与解释无穷小导致了混乱和神秘感.许多人参与了关于无穷小本质的论争,其中有些人,如拉格朗日(Lagrange,J.-L.),试图排除无穷小与极限,把微积分代数化.论争使函数与极限的概念逐渐明朗化.越来越多的数学家认识到,必须把数学分析的概念与其在客观世界中的原型以及人的直觉区分开来.因而,从19世纪初开始了一个把分析算术化(使分析成为一种像算术那样的演绎系统)为特征的新的数学分析的批判改造时期.柯西于1821年出版的《分析教程》是分析严密化的一个标志.在这本书中,柯西建立了接近现代形式的极限,把无穷小定义为趋于零的变量,从而结束了百年的争论.在极限的基础上,柯西定义了函数的连续性、导数、连续函数的积分和级数的收敛性(后来知道,波尔查诺(Bolzano,B.)同时也做过类似的工作).进一步,狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)于1837年提出了函数的严格定义,外尔斯特拉斯引进了极限的 ε-δ 定义,基本上实现了分析的算术化,使分析从几何直观的局限中得到了“解放”,从而驱散了17—18世纪笼罩在微积分外面的神秘云雾.继而在此基础上,黎曼(Riemann,(G.F.)B.)于1854年和达布(Darboux,(J.-)G.)于1875年对有界函数建立了严密的积分理论,19世纪后半叶,戴德金(Dedekind,J.W.R.)等人完成了严格的实数理论.至此,数学分析的理论和方法完全建立在牢固的基础之上,基本上形成了一个完整的体系,也为20世纪现代分析的发展铺平了道路.

实 数 理 论

分析基础(foundation of analysis)　整个数学

分析的理论基础.分析基础主要包括以下三个部分:

1.实数理论——对实数连续统的严格描述.

2.变量与函数——数学分析的基本研究对象.

3.极限理论——数学分析的基本研究方法.

极限理论在分析基础中占主要地位,极限以各种形式出现并贯穿于整个数学分析之中.没有极限与连续的正确概念,根本不可能建立微积分的牢固基础.在这个意义上,分析基础主要是指极限理论.微分和积分是数学分析的两种基本极限过程.微积分的先驱者和创立者运用它们在理论上和应用上取得许多成果,却从来没有对它们明确定义过.他们无法避开极限概念,在解释他们获得的结果的正确性时,不断用到无穷小和极限这些词,却又始终说不清极限是什么.他们用常量数学中的概念来解释无穷小,其结果是不能自圆其说.因此,18世纪的一些数学家(如欧拉(Euler,L.)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等人),曾企图完全摆脱极限概念,将微积分这一崭新学科归入代数的范畴,将导数归结为对函数进行代数运算的结果.这样并未使微积分的概念严密化,反而加重了微积分的神秘色彩.直到19世纪上半叶,柯西(Cauchy,A.-L.)给出了严格的极限定义,在这个基础上,微积分和无穷级数中的一些基本概念才相继得到澄清.这些工作表明,必须以极限作为微积分的基础.与此同时,函数的概念也由狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)等人严密化了.分析的基础方面,至此只剩下对分析中的变量在其中取值的基本数域——实数系——还缺少足够的了解.19世纪下半叶,康托尔(Cantor,G. F. P.)和戴德金(Dedekind,J. W. R.)等人建立了严密的实数连续统理论,于是,分析基础的完整体系就确立起来了.由于极限的思想在数学中应用广泛,所以,分析基础不只是微积分的基础,其实是整个分析数学的基础.分析基础中的思想方法,在数学中很多地方有用,例如,康托尔构造完备实数系的方法,在泛函分析中被用来实现度量空间的完备化.由微积分的创立到分析基础全部理论的完成这一发展过程,恰如马克思所指出的:"……正如一切科学的历史进程一样,在摸到它们的真正出发点之前,总先走过许多弯路.科学家不同于其他建筑师,他不只画出空中楼阁,而且在打下地基之前,先进出房屋的各层."

实数(real number) 数学中最基本的概念之一.实数与数轴上的点可以一一对应.数学分析所研究的函数,其自变量都取实数值,因此,认识和了解实数是建立严格的分析理论不可缺少的基础.实数包括有理数与无理数,而从欧几里得(Euclid)以来,人们都把它们理解为与单位长线段可公度与不可公度的线段的长度.到17世纪,人们对实数的使用已经习以为常,并开始脱离其几何原型抽象地认识实数.但到19世纪中叶,在分析严格化的进程中,由于一些事实无法证明(例如,柯西(Cauchy,A.-L.)无法证明自己提出的收敛准则的充分性),一些证明出了错(如波尔查诺(Bolzano,B.)对连续函数介值性的证明),人们才发现对实数特别是无理数的认识仍然模糊不清,这才促使一批数学家关注于处理无理数的问题.通过他们的努力,终于在将近半个世纪的时间里,建立了多种形式上不同,而实质上等价的严格的实数理论.各种形式的构造性实数理论,都是首先从有理数出发去定义无理数,也就是说,数轴上有理点之间的所有空隙(无理点),都可以由有理数经过一定的方式来确定.然后证明这样定义的实数(原有的有理数和新定义的无理数)具有人们原来熟知的实数所应有的一切性质,特别是连续性.这些形式上不同的实数理论也就因确定空隙的方法不同而互相区分,它们主要有:戴德金(Dedekind,J. W. R.)用有理数的分割的方法,康托尔(Cantor,G. F. P.)用有理数的基本列的方法,外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))用无穷(非循环)十进小数的方法,以及用端点为有理点的闭区间套和有界单调有理数列的方法.站在现代数学的立场来看,上述各种方法都是从假定实数具有某种特性出发的(如戴德金的方法假定了实数的连续性,康托尔假定的是完备性,而用闭区间套的方法反映了实轴上有界闭集的紧性),而这些特性在实数范围内都是等价的,因而用这些方法定义出的实数都是完全相同的.此外,还有一种与上述构造法完全不同的定义实数的方法,那就是希尔伯特(Hilbert,D.)于1899年提出的公理化方法(参见"实数公理").他将实数应有的一些基本性质列为一个公理系统,然后将满足这个公理系统的对象定义为实数.基于这些公理的实数理论与上述基于构造法的也互相等价.

上确界(supremum) 数集的最小上界(参见本卷《集合论》同名条).称 β 是实数集合 E 的上确界,记为 $\beta=\sup E$ 或 $\operatorname{lub} E$,是指:

1. β 是 E 的上界,即对任意 $x\in E$,有 $x\leqslant\beta$.

2.若 b 是 E 的上界,则 $\beta\leqslant b$(即 β 是最小上界);或比 β 小的数不是 E 的上界,即对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x_0\in E$,使 $x_0>\beta-\varepsilon$.

β 是 E 的最大元,当且仅当 $\beta=\sup E$,且 $\beta\in E$.当非空实数集 E 没有上界时,常以 $\sup E=+\infty$ 表示;当它有上界时,上确界必存在,即上确界是实数(参见"确界原理").

下确界(infimum) 数集的最大下界(参见本卷《集合论》同名条).称 α 是实数集合 E 的下确界,记为 $\alpha=\inf E$ 或 $\operatorname{glb} E$,是指:

1. α 是 E 的下界,即对任意 $x\in E$,有 $\alpha\leqslant x$.

2.若 a 是 E 的下界,则 $a\leqslant\alpha$(即 α 是最大下

界);或对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x_0\in E$,使 $x_0<\alpha+\varepsilon$,即比 α 大的数不是 E 的下界.

α 是 E 的最小元,当且仅当 $\alpha=\inf E$,且 $\alpha\in E$. 有限集的上(下)确界就是最大(小)元. 任一有下界的非空实数集必有下确界. 当非空实数集 E 没有下界时,常以 $\inf E=-\infty$ 表示. 这样,在扩张的实数系 R^* 里,任何非空子集都有上确界或下确界(参见"确界原理").

实数系(real number system) 亦称实数连续统. 即所有实数的集合. 任何一个完备的阿基米德有序域均可称为实数系. 在保序同构意义下它是惟一的,常用 R 表示. 由于 R 是定义了算术运算的运算系统,故有实数系这个名称.

实数连续统(continuum of real number) 即"实数系".

扩张实数系(extended real number system) 实数加上无穷远点的集合. 把两个理想点 $+\infty$(读作正无穷大)与 $-\infty$(读作负无穷大)加进实数系所得到的数系,通常记为 R^* 或 $[-\infty,+\infty]$. R^* 的元素满足以下规定(不同文献中的提法略有差异):

1. 对任意实数 a,有 $-\infty<a<+\infty$,
   $a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=\pm\infty$,
   $a-(\pm\infty)=\mp\infty, a/(\mp\infty)=0$.
2. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$,
   $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.
3. 若 $a>0$ 或 $a=+\infty$,则
   $a\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot a=\pm\infty$;
   若 $a<0$ 或 $a=-\infty$,则
   $a\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot a=\mp\infty$.

实数系 R 可以用集合 $\{x\mid-\infty<x<+\infty\}$ 表示. 在数轴上,$+\infty$ 与 $-\infty$ 分别表示正向与负向的无穷远点. 引进理想元素 $+\infty$ 与 $-\infty$,主要是为了叙述与表示上的方便(例如,可以统一处理函数极限),另一方面,也是为了把 R 扩张为紧致集 R^*(赋予适当的距离后,它与闭线段同胚). 这种紧致化思想在现代数学中是相当有用的.

实数系的稠密性(density of real number system) 实数系的重要性质之一. 指任意两个不等的实数间有无穷个实数. 即:若 $a,b\in R$,$a<b$,则存在实数 c,使 $a<c<b$. 也可以限定 c 是有理数(或无理数). 这样,在两个不等的实数间有无穷多个有理数与无穷多个无理数. 在历史上,曾有一些数学家误认为稠密性就是连续性. 其实有理数也有稠密性,即任意两个不等的有理数间有无穷多个有理数,但有理数系没有连续性.

实数系的完备性(completeness of real number system) 指实数系 R 对极限运算封闭,也指对实数使用由有理数构造实数的方法不能再得到新的数. 与实数系的连续性一样,它是区分有理数系与实数系的关键性质. R 的完备性可以由柯西准则(R 中的基本列必收敛于某一实数)刻画,也可以用区间套定理反映. 在实数系的公理系统中,这两个定理用作完备性公理,与阿基米德公理合在一起刻画了实数的连续性.

实数系的连续性(continuity of real number system) 实数连续统的本质属性. 但这个词并不是演绎系统中的概念,而只是作为直线没有空隙这一几何直观形象的同义语使用. 由于实数与直线上的点一一对应,而直线是连续的,因而也称 R 有连续性. 这个连续与连续函数一词中的连续的内涵是不同的,一个更准确的术语是 R 的连通性,即不能把 R 分成互不相交的两个非空的闭集. 有许多命题反映 R 的连续性,主要是戴德金定理、上确界原理、单调收敛原理、聚点原理、列紧性定理、有限覆盖定理,以及 R 是连通的这个结论,它们是互相等价的. 还有许多结论也与它们等价. 它们还与阿基米德性质加上区间套定理或柯西准则等价. 这表明 R 的连续性蕴含 R 的完备性. 由于这个原因,文献中既把反映 R 的连续性的命题用作 R 的公理系统中的连续性公理,又把它们称为完备性公理,但却不能把单独的区间套定理或柯西准则用作连续性公理.

连续统(continuum) 指连续不断的数集. 原意是为了强调实数的连续性而给实数系的另一名称,现在的含义更广泛了. 由于实数与直线上的点一一对应,直觉上直线是连续而不断开的,因此,把实数系称作连续统. 由于区间内的点也有类似性质,故把区间也称作连续统. 这些是一维连续统或线性连续统. 类似地有二维连续统、三维连续统等称呼. 例如,平面是二维连续统,空间是三维连续统.

阿基米德性质(Archimedean property) 实数系的重要性质之一. 指对任意正数 x 及实数 y,存在正整数 n,使 $nx>y$. 在几何上这意味着,无论多长的线段,都能用有限条不管多短的等长线段覆盖;换句话说,无论采用多短的线段作单位,都能在有限次内把无论多长的线段量完. 这个性质是阿基米德(Archimedes)在其著作《论球与圆柱体》中明确的. 阿基米德性质还有几种等价形式:

1. 对任意实数 x,存在正整数 $n>x$.
2. 对任意正数 x,存在正整数 n,使 $x>1/n$.
3. 若实数 x 满足以下条件:对任意正整数 n 有 $0\leqslant x\leqslant 1/n$,则 $x=0$.
4. 正整数集 N_+ 无上界.

阿基米德将此性质用作几何公理(参见本卷《高等几何》中的"阿基米德公理").

确界原理(supremum and infimum principle) 刻画实数连续性的命题之一. 常叙述为:任一有上界

的非空实数集必有上确界(为实数). 对偶地,任一有下界的非空实数集必有下确界(为实数). 实数的这个性质是波尔查诺(Bolzano,B.)于1817年发现的. 在扩张的实数系 R^* 中,认为没有上(下)界的非空实数集的上(下)确界为 $+\infty(-\infty)$. 这样,在 R^* 中任何非空集都有上、下确界.

戴德金分割(Dedekind cut) 定义实数的一种方法. 指按如下方法将一个有大小顺序的数集(例如实数集或有理数集)分成两部分. 具体而言,用 S 表示有大小顺序的数集,若将 S 分成两部分 A 和 B,使其满足:

1. A 和 B 都至少含有 S 中的一个数(不空);
2. S 中的任一数或属于 A,或属于 B(不漏);
3. 对任意 $a\in A$ 和任意 $b\in B$,有 $a<b$(不乱),

则集偶 (A,B) 称为 S 的一个(戴德金)分割,A 和 B 分别称为其下类和上类. 若 (A,B) 是有理数集 Q 的一个分割,则可能 A 中无最大数,同时 B 中无最小数,即出现空隙,所以有理数系不连续;而对实数集 R 所作的分割,则不会出现这种情况,它反映出实数系是连续的,这促使戴德金(Dedekind,J. W. R.)用有理数系 Q 的所有这种分割(出现空隙的和不出现空隙的)来定义实数. 这样的实数的集合 R 一定有连续性及其他熟知的性质. 因此,它就给出了一种严格的实数理论,这也就是戴德金分割的意义所在. 1872年,戴德金在《连续性与无理数》一文中公布了这个理论,但同文中又说,他1858年12月曾把已完成的这个理论在小范围内公开过,只是在收到海涅(Heine,H. E.)构造无理数的论文后才决定发表的(参见本卷《高等几何》同名条).

戴德金定理(Dedekind theorem) 刻画实数连续性的命题之一. 它断言,若 (A,B) 是实数系 R(即有理数集的所有戴德金分割的集合,并以明显的方式定义了大小顺序及四则运算)的戴德金分割,则由它可确定惟一实数 α,若 $\alpha\in A$,则它为 A 中最大元,若 $\alpha\in B$,则它是 B 中最小元. 这个定理说明,R 的分割与全体实数是一一对应的,反映在数轴上,它又说明,R 的分割不再出现空隙,因此,这个定理可用来刻画实数的连续性(参见本卷《高等几何》中的"戴德金原理").

区间套定理(theorem of nested intervals) 刻画实数系完备性的命题之一. 该定理指出:一个套一个的一列闭区间的交集必定不是空集. 定理的严格表述如下:设 $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ 是 R 中的闭区间列,若对每一个正整数 k 有 $[a_{k+1},b_{k+1}]\subseteq[a_k,b_k]$,则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$$

非空;进一步,若还有 $b_k-a_k\to 0(k\to\infty)$,则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$$

是单元素集,即存在惟一的点 c 属于所有 $[a_k,b_k]$($k\in\mathrm{N}_+$),并且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c.$$

实数系的这个性质是康托尔(Cantor,G. F. P.)建立的. 对 R^n 有下列推广. 若 $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 R^n 的非空有界闭子集列,且 $F_1\supseteq F_2\supseteq\cdots\supseteq F_k\supseteq\cdots$,则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing;$$

若还有 $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}F_k=0$(这里diam表示直径),则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$$

是单元素集. 特别地,当 F_k 是非空有界闭区域时,就得到区域套定理(参见本卷《高等几何》中的"康托尔公理").

覆盖(covering) 实数理论的基本概念之一. 设 E 是 R^n 的子集,$\mathscr{U}=\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$($\Lambda$ 是某个集合)是 R^n 的子集族. 若

$$E\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda,$$

则 $\mathscr{U}$ 称为 E 的覆盖,或 $\mathscr{U}$ 覆盖 E. 特别地,当各个 U_λ 是开集时,$\mathscr{U}$ 称为 E 的开覆盖. 当 Λ 是可数集或有限集时,$\mathscr{U}$ 分别称为可数覆盖或有限覆盖. 例如,对任意 $\varepsilon>0$,

$$\mathscr{U}=\left\{\left(\frac{1}{n}-\varepsilon,\frac{1}{n}+\varepsilon\right)\middle|\,n\in\mathrm{N}_+\right\}$$

都是集合 $\{1/n:n\in\mathrm{N}_+\}$ 的可数开覆盖,但当 $0<\varepsilon<1$ 时,不是集合

$$\left\{2,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$$

的覆盖. 若 $\mathscr{V}\subseteq\mathscr{U}$,且 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 都是 E 的覆盖,则 $\mathscr{V}$ 称为 $\mathscr{U}$ 的子覆盖. 可以把 R^n 换成拓扑空间,对拓扑空间中的点集可完全一样地定义上述概念(参见本卷《集合论》中的"集合的覆盖").

开覆盖(open covering) 见"覆盖".

有限覆盖(finite covering) 见"覆盖".

子覆盖(subcovering) 见"覆盖".

有限覆盖定理(finite covering theorem) 亦称海涅-波莱尔定理,或波莱尔-勒贝格定理. 刻画实数连续性的命题之一. 指闭区间的任何开覆盖必含该区间的有限子覆盖. 即:若 $I_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是一族开区间,它们的并集包含闭区间 $[a,b]$,则存在该族中的有限个开区间,设为 $I_1,I_2,\cdots,I_k$,使其并集包含 $[a,b]$. 上述命题中的闭区间可以换成有界闭集,组成开覆盖的开区间可以换成开集,从而把定理叙述成:当 E 为 R^n 中的有界闭集时,E 的任何开覆盖必含 E 的有限子覆盖. 但对一般的度量空间中的有界闭集,这个定理不一定成立. 有限覆盖定理是波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)于1898年(另一说1895年)对 $[a,b]$ 及开区间族的情形予以证明,由勒贝格

(Lebesgue,H. L.)于20世纪初完善的.在此之前,海涅(Heine,H. E.)在关于函数的一致连续性的证明中已用过这一性质.这个定理是多种形式的覆盖定理中最简单而常用的一个.

海涅-波莱尔定理(Heine-Borel theorem) 即“有限覆盖定理”.

波莱尔-勒贝格定理(Borel-Lebesgue theorem)即“有限覆盖定理”.

实数公理(axioms of real number) 定义实数的一种途径.按照它,所谓实数系就是定义了两种二元运算(加法与乘法)和一种次序关系(>)的集合,并且这些运算和次序满足规定的公理.由这些公理可以推出实数的一切性质,具体内容如下:

设R是一个集合,若它满足下列三组公理,则称为实数系,它的元素称为实数:

Ⅰ(域公理) 对任意 $a,b\in$ R,有R中惟一的元素 $a+b$ 与惟一的元素 $a\cdot b$ 分别与之对应,依次称为 a,b 的和与积,满足:

1.(交换律) 对任意 $a,b\in$ R,有

$$a+b=b+a,\ a\cdot b=b\cdot a.$$

2.(结合律) 对任意 $a,b,c\in$ R,有

$$a+(b+c)=(a+b)+c,$$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

3.(分配律) 对任意 $a,b,c\in$ R,有

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

4.(单位元) 存在R中两个不同的元素,记为0,1,分别称为加法单位元与乘法单位元,使对所有 $a\in$ R,有 $a+0=a$, $a\cdot 1=a$.

5.(逆元) 对每个 $a\in$ R,存在R中惟一的元素,记为 $-a$,称为加法逆元;对每个 $a\in$ R\{0},存在R中惟一的元素,记为 a^{-1},称为乘法逆元,使

$$a+(-a)=0, a\cdot a^{-1}=1.$$

Ⅱ(序公理) 在任意两个元素 $a,b\in$ R之间存在一种关系,记为“>”,使对任意 $a,b,c\in$ R,满足:

1.(三歧性) $a>b,b>a,a=b$ 三种关系中必有一个且仅有一个成立.

2.(传递性) 若 $a>b$ 且 $b>c$,则 $a>c$.

3.(与运算的相容性) 若 $a>b$,则 $a+c>b+c$;若 $a>b,c>0$,则 $ac>bc$.

Ⅲ$_1$.(阿基米德公理) 对任意 $a,b\in$ R,$a>0$,存在正整数 n,使 $na>b$.

Ⅲ$_2$.(完备性公理) R的任何基本列都在R中收敛.

称满足公理组Ⅰ的集为域;满足公理组Ⅰ与Ⅱ的集为有序域;满足公理组Ⅰ,Ⅱ与Ⅲ$_1$.的集为阿基米德有序域;满足公理组Ⅰ~Ⅲ的集为完备阿基米德有序域或完备有序域.这样,实数系就是完备阿基米德有序域.所有有理数的集合Q是阿基米德有序域,但它不满足完备性公理.根据域公理,可以定义实数的减法和除法,并证明四则运算的所有性质.序公理的1与2表明关系“>”是R的全序.

用域公理和序公理可以定义正数、负数、不等式、绝对值,并证明它们具有通常的算术性质.加上阿基米德公理与完备性公理,可以证明实数的其他性质以及幂、方根、对数等的存在性.实数的公理有多种不同的提法,常见的另一种提法是把公理组Ⅲ换成

Ⅲ′(连续性公理):若 A,B 是R的非空子集,且 $A\cup B=$ R,又当 $x\in A,y\in B$ 时,$x<y$,则 A 有最大元或 B 有最小元.

这里把戴德金定理用作连续性公理.另一个经常用作连续性公理的是确界原理(参见“确界原理”).公理组Ⅰ~Ⅲ与公理组Ⅰ+Ⅱ+Ⅲ′是等价的(注意不是Ⅲ⇔Ⅲ′).完备性公理可以换成闭区间套定理的形式.类似地,单调收敛定理、聚点原理等也可用作连续性公理.公理组Ⅱ也有其他提法.用公理定义了实数系R后,可以继续定义R的特殊元素正整数、整数等.例如:由数1生成的子加群 Z $=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 的元素称为整数;由数1生成的子域 Q $=\{p/q\,|\,p,q\in$ Z$,q\neq0\}$ 的元素称为有理数.

实数公理是在集合论发展的基础上,由希尔伯特(Hilbert,D.)于1899年首次提出的.后来,他所提的公理系统在相容性与独立性方面得到进一步改进,逐步演变为前面所说的公理系统.

区间(interval) 数轴上一种最常用的点集.它有三类:闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$,其中 a,b 是实数(下同);开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$,$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$,$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=$ R;半开区间 $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$,$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$,$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$.半开区间又称半闭区间.上面的 a,b 分别称为相应的区间的左、右端点,区间中其他点称为该区间的内点.上述各种区间中,$[a,b]$,(a,b),$[a,b)$,$(a,b]$ 又称有界区间或有限区间,其他的称为无界区间或无限区间.对于 $a>0$,区间 $[-a,a]$,$(-a,a)$ 又称为对称区间.区间是数轴上的线段或射线或整个数轴,“开”(“闭”,“半开”)是指不包含(包含,只包含一个)其端点.在扩张的实数系R*中,四种开区间可以用一个记号 (a,b) 表示,其中 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.类似地,半开区间可以用 $[a,b)$($a\in$ R,$b\in$ R*)或 $(a,b]$($a\in$ R*,$b\in$ R)表示.$b-a$ 称为区间的长度.无界区间的长度是 $+\infty$.R*本身也可写作 $[-\infty,+\infty]$.除了单点集外,区间是R中仅有的连通集.文献中常有以“]”和“[”分别代替“(”和“)”,而把 (a,b) 写作 $]a,b[$ 的写法,类似地也有 $]a,+\infty[$ 等写法.

开区间(open interval) 见“区间”.

闭区间(closed interval) 见"区间".

半开区间(semi-open interval) 见"区间".

半闭区间(semi-closed interval) 见"区间".

对称区间(symmetric interval) 见"区间".

有限区间(finite interval) 见"区间".

无限区间(infinite interval) 见"区间".

n 维欧几里得空间(n-dimensional Euclidean space) 现实空间的抽象与推广. 简称 n 维欧氏空间. 见本卷《高等代数》同名条. n 维欧氏空间在代数中是定义了内积的 n 维线性空间,记为 R^n,其元素是 n 维向量,即 n 元有序(实)数值,并利用内积规定向量 $\boldsymbol{x}$ 的模 $|\boldsymbol{x}|$ 是其与自身的内积的平方根

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

在几何中,借用普通空间中点坐标与其向径作为以原点为起点的向量的坐标相同之例,也把 n 维欧氏空间的向量看做点而把 n 维欧氏空间 R^n 看做点空间,因而也可讨论 R^n 中的几何图形. 如直线、超平面等. 在数学分析中,经常借用代数和几何中 n 维欧氏空间的概念,特别是常使用 R^n 的向量(元素)$\boldsymbol{x}$ 的模 $|\boldsymbol{x}|$ 的另一名称范数的概念. 在提到 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n$ 时常只说 $\boldsymbol{x}$ 是 n 元数组而不一定提到它是 n 维欧氏空间的元素,因而还常把 $\boldsymbol{x}$ 的模,即范数 $|\boldsymbol{x}|$ 特别称为 $\boldsymbol{x}$ 的欧几里得范数.

欧几里得范数(Euclidean norm) 见"n 维欧几里得空间".

区间的长度(length of interval) 见"区间".

n 维区间(n-dimensional interval) 一种特殊点集. R 中区间概念的推广. 设(a_i,b_i),$[a_i,b_i]$$(i=1,2,\cdots,n;a_i,b_i\in\mathrm{R}^*)$是 R^* 中的区间. 积集

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i) \text{ 与 } \prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i],$$

即 n 维空间中的集$\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n\}$与$\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$分别称为 n 维开区间与 n 维闭区间,记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$与$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$,其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. (a_i,b_i)($[a_i,b_i]$)称为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$($[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$)的支区间. 若所有 a_i,b_i 是实数,则称$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$为 n 维有界区间,否则称为 n 维无界区间,上述区间统称为 n 维区间. 从几何上看,二维有界区间就是矩形,三维有界区间就是长方体,因此,也把 n 维有界区间称为 n 维长方体. 特别地,当 $b_1-a_1=b_2-a_2=\cdots=b_n-a_n$ 时,又称为 n 维方体或 n 维方区间. 例如

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i-\delta,a_i+\delta)$$

就是 n 维开方区间,$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为它的中心,$2\delta$ 是它的棱长. n 维区间$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$与$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$的 n 维体积是

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

n 维开区间(n-dimensional open interval) 见"n 维区间".

n 维闭区间(n-dimensional closed interval) 见"n 维区间".

n 维有界区间(n-dimensional bounded interval) 见"n 维区间".

n 维无界区间(n-dimensional unbounded interval) 见"n 维区间".

支区间(component interval) 见"n 维区间".

n 维长方体(n-dimensional cuboid) 见"n 维区间".

n 维方体(n-dimensional cube) 见"n 维区间".

子区间(subinterval) 区间的部分区间. 若 I_1 和 I_2 是区间,且 $I_1\subseteq I_2$,则称 I_1 为 I_2 的子区间. 特别地,任一区间是它自己的子区间.

邻域(neighborhood) 一点的附近这一直观概念的数学刻画. 在数学分析中,对于数轴上任意给定的点 a(即 $a\in\mathrm{R}$),以 a 为中心的开区间$(a-\delta,a+\delta)$(δ 为任意正数)称为 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,a 称为邻域中心,δ 称为邻域半径. 从 $U(a,\delta)$中去掉 a 点的集合称为 a 的去心(空心)δ 邻域. δ 邻域在不必指明其半径时简称邻域. 有时也分别称开区间$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$为 a 的左邻域和右邻域,统称单侧邻域. 为方便起见,$(-\infty,M)$和$(M,+\infty)$$(M\in\mathrm{R})$分别称为$-\infty$和$+\infty$的邻域. 对于 $\boldsymbol{a}\in\mathrm{R}^n$,以 $\boldsymbol{a}$ 为中心的任意开球和方形开区间分别称为 $\boldsymbol{a}$ 的球邻域和方邻域,统称邻域. 并且与 $n=1$ 时类似地有去心邻域的概念. 邻域的概念常用在极限理论中,或用在刻画函数在一点的性态时. 在点集拓扑中,某一点的邻域一般可以指含该点的任意开集,并且邻域概念有更重要的理论意义.

δ 邻域(δ-neighborhood) 见"邻域".

邻域中心(center of neighborhood) 见"邻域".

邻域半径(radius of neighborhood) 见"邻域".

单侧邻域(one-sided neighborhood) 见"邻域".

球邻域(spherical neighborhood) 见"邻域".

方邻域(square neighborhood) 见"邻域".

空心邻域(deleted neighborhood) 见"邻域".

去心邻域(deleted neighborhood) 见"邻域".

n 维球(n-dimensional ball) 球概念在 n 维欧氏空间中的推广. R^n 中的集合 $B(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n\ |$

$|x-a|<r\}$称为开 n 维球或 $\mathbb{R}^n$ 中的开球. 称 a 为球心,正数 r 称为球半径. 集合 $\bar{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x-a|\leqslant r\}$称为以 a 为中心、r 为半径的闭 n 维球或 $\mathbb{R}^n$ 中的闭球. 特别地,当 $a=0,r=1$ 时的球称为 $\mathbb{R}^n$ 的单位球. 开球是开集,闭球是闭集,它们都是凸集. 二维球就是圆,又称圆盘. n 维单位球的体积

$$\omega_n=\frac{\pi^{[n/2]}}{\Gamma(n/2+1)}=\begin{cases}\pi^k/k! & (n=2k),\\ 2^k\pi^{k-1}/(2k-1)!! & (n=2k-1).\end{cases}$$

其中 k 是正整数,$(2k-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)$,$\Gamma$ 表示 Γ 函数,例如 $\omega_1=2,\omega_2=\pi,\omega_3=4\pi/3,\omega_4=\pi^2/2,\omega_5=8\pi^2/15$ 等. 半径为 r 的 n 维球的体积是 $\omega_n r^n$. 体积一定的立体中,球的表面积最小,也就是表面积一定的立体中,球的体积最大.

开球(open ball) 见"n 维球".

闭球(closed ball) 见"n 维球".

单位球(unit ball) 见"n 维球".

***n* 维球面**(n-dimensional sphere) 球面概念的推广. 指 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中与某点 a 等距离的点的集合$\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid |x-a|=r\}$,记为 S^n. n 维球面就是 $n+1$ 维球的边界,其中 a 是球心,r 是球半径. 通常,相应于球的记号 $B(a,r)$,以 $S(a,r)$表示相应的球面. 一维球面就是圆周. 当 $n>2$ 时,n 维球面有时称为超球面. 半径为 r 的 $n-1$ 维球面的面积等于 $n\omega_n r^{n-1}$,其中 ω_n 是 n 维单位球的体积.

超球面(hypersphere) 见"n 维球面".

$\mathbb{R}^n$ 中的线段(line segment in $\mathbb{R}^n$) 一类特殊点集. $\mathbb{R}^n$ 中以点 $x_1,x_2(\in\mathbb{R}^n)$为端点的线段是集合$\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=tx_1+(1-t)x_2,t\in[0,1]\}$,即区间$[0,1]$在连续映射下的象. 线段的上述定义只涉及 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算,因此可以把它推广到实线性空间.

$\mathbb{R}^n$ 中的直线(straight line in $\mathbb{R}^n$) 一类特殊点集. 设 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n,x_1\neq x_2$,集合

$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=tx_1+(1-t)x_2,t\in\mathbb{R}\}$$

称为通过点 x_1,x_2 的直线,或由点 x_1,x_2 确定的直线. 若设 $v=x_2-x_1$,并以 $1-t$ 代替上面的 t,则可得到直线的等价定义:给定 $x_1\in\mathbb{R}^n$ 及 $v\in\mathbb{R}^n,v\neq0$,集$\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=x_1+tv,t\in\mathbb{R}\}$称为通过 x_1 且与 v 平行的直线. v 称为其方向向量,并称上述直线为通过 x_1 具有方向向量 v 的直线. 通过同一点的两条直线重合时,当且仅当它们的方向向量共线. 若两条不同直线的方向向量共线,则称这两条直线平行. 若令 $l(t)=x_1+tv(t\in\mathbb{R})$,则上述直线可看成实变向量值函数 l 的值域. 等式 $l(t)=x_1+tv$ 称为直线的参数式向量方程,简称直线的参数方程,t 称为参数,$n=3$ 时,它就是空间解析几何中直线的参数方程. 直线的上述定义可以类似地推广到任意的实线性空间中去.

方向向量(direction vector) 见"$\mathbb{R}^n$ 中的直线". 参见本卷《空间解析几何》中的"直线的方向向量".

$\mathbb{R}^n$ 中的折线(broken line in $\mathbb{R}^n$) 空间折线概念的推广. 依次用线段连结 $\mathbb{R}^n$ 中有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$(可不连结 x_m 与 x_1)得到的图形称为 $\mathbb{R}^n$ 中的折线. 即 $\mathbb{R}^n$ 中的点集

$$\bigcup_{i=1}^{m-1}\{x\in\mathbb{R}^n \mid x=tx_i+(1-t)x_{i+1},0\leqslant t\leqslant1\}.$$

也称它是由有限点列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 确定的折线.

$\mathbb{R}^n$ 中的超平面(hyperplane in $\mathbb{R}^n$) 平面概念的推广. 给定 $\mathbb{R}^n$ 的非零元素 a 及实数 c,集合$\{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle a,x\rangle=c\}$称为 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面,a 称为它的法向量. 上述超平面用 H_c 表示,$\langle a,x\rangle$表示 a 与 x 的内积,$\langle a,x\rangle=c$ 称为该超平面的方程. 当 $n=2$ 时,超平面方程为 $a_1x_1+a_2x_2=c$,就是 $\mathbb{R}^2$ 中的直线. $n=3$ 时,超平面就是 $\mathbb{R}^3$ 中的平面. 超平面在 $\mathbb{R}^n$ 中的作用,就相当于直线在 $\mathbb{R}^2$ 中或平面在 $\mathbb{R}^3$ 中的作用. 例如,超平面 H_c 把 $\mathbb{R}^n$ 分成两个半空间$\{x \mid \langle a,x\rangle\geqslant c\}$与$\{x \mid \langle a,x\rangle\leqslant c\}$,它们称为闭半空间;把"$\geqslant$"与"$\leqslant$"分别改成"$>$"与"$<$",便得到开半空间定义. 通过原点的超平面,即 H_0,称为齐次超平面. 它是 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-1$ 维子空间. 每个超平面都可由适当的齐次超平面平移而得. 因此,每个超平面都是仿射子空间.

超平面的法向量(normal vector of hyperplane) 见"$\mathbb{R}^n$ 中的超平面".

超平面的方程(equation of hyperplane) 见"$\mathbb{R}^n$ 中的超平面".

闭半空间(closed half space) 见"$\mathbb{R}^n$ 中的超平面".

开半空间(open half space) 见"$\mathbb{R}^n$ 中的超平面".

齐次超平面(homogeneous hyperplane) 见"$\mathbb{R}^n$ 中的超平面".

凸集(convex set) 指包含连结其任意两点的线段的集合. 若 $E\subseteq\mathbb{R}^n$(或 E 含于任一实向量空间),且对任意 $x,y\in E$ 及 $0\leqslant t\leqslant1$,有$(tx+(1-t)y)\in E$,则称 E 为凸集. $\mathbb{R}^n$ 中的区间、球、超平面都是凸集. $\mathbb{R}^n$ 中的凸集有许多良好的性质,这些性质经过不同程度的抽象,形成了总称为凸性的一些数学概念. 分析、几何的许多领域都涉及凸集或凸性. 例如,有研究有限维空间中凸集性质的凸几何,以及研究凸函数与凸集,介于分析与几何间的凸分析.

有界集(bounded set) 一类重要的集. 指可以被有界区间包含的实数集. 也就是被长度有限的区间包含的集合. E 有界,当且仅当下列等价条件之一成立:

1. 存在区间$[a,b]$，使对E中所有x，有

$$a\leqslant x\leqslant b.$$

2. 存在$M>0$，使对所有$\boldsymbol{x}\in E$，有$|\boldsymbol{x}|\leqslant M$.

3. E的直径有限.

若存在实数b不小于E中任一元素，即对所有$x\in E$，有$x\leqslant b$，则b称为E的上界，并称E上有界或有上界. 反之，若存在实数a不大于E中任一元素，即对所有$x\in E$，有$x\geqslant a$，则相应得到下界、下有界或有下界等概念. E是有界集当且仅当E既有上界又有下界. 若b是E的上界，且$b\in E$，则称b为E的最大元，记为$\max E$. 类似地可得到最小元$\min E$的定义. 最大元或最小元如果存在，必是惟一的. 上界或下界如果存在，必有无穷个.

有界集概念可推广到R^n中. 设$E\subseteq\mathrm{R}^n$，若E可以被有界(n维)区间或半径有限的球包含，则称E为R^n的有界集. 等价地，E有界是指存在$M>0$，使对所有$\boldsymbol{x}\in E$，有$|\boldsymbol{x}|\leqslant M$，或$E$的直径有限. 有限个有界集的并集与交集是有界集；有界集的子集有界；有界无穷集必有聚点(聚点原理).

最大元(greatest element)　见"有界集".

最小元(least element)　见"有界集".

无界集(unbounded set)　非有界集. 若$E\subseteq\mathrm{R}^n$，则E无界意味着对任意$M>0$，存在$\boldsymbol{x}\in E$，使得$|\boldsymbol{x}|>M$. 或者说，E的直径为$+\infty$. 对实数集E来说，E无界还意味着E没有上界或没有下界. 若$E\subset\mathrm{R}$没有上界(下界)，即$\sup E=+\infty$ ($\inf E=-\infty$)，则存在E中不同的点组成的点列$\{a_n\}$，使$a_n\to+\infty$ ($-\infty$)；反之也成立. 有穷集必是有界集，因此，无界集必是无穷集.

集合的直径(diameter of set)　关于点集的基本概念之一. 即若$A\subseteq\mathrm{R}^n$，则A中任意两点的距离的上确界称为A的直径，记为$\mathrm{diam}A$. 这样，

$$\mathrm{diam}A=\sup\left\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\,\middle|\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A\right\},$$

其中$|\cdot|$表示欧几里得范数.

连通集(connected set)　一类特殊的点集. 它是从圆、多边形这样一些直观上连成一片的图形抽象得到的一个概念. 这种图形不能分解成这样两个非空子集的并：其中任一集合不含另一集合的聚点和边界点. 对于集合E，若不存在非空集E_1,E_2，使$E_1\cup E_2=E$，$\overline{E_1}\cap E_2=E_1\cap\overline{E_2}=\varnothing$，则$E$称为连通集($\overline{E_1},\overline{E_2}$分别表示$E_1,E_2$的闭包). 若存在这样的$E_1,E_2$，则$E$称为不连通集. E连通当且仅当不存在与E相交的开集(或闭集)O_1,O_2，使$O_1\cup O_2\supseteq E$，$O_1\cap O_2\cap E=\varnothing$. 在$\mathrm{R}$中，只有区间或单点集是连通集. R^n中的凸集是连通的. 特别地，n维区间、n维球是连通的. 在某些重要的定理中，连通性是本质的前提，例如，连续函数的介值定理只对定义在连通集上的连续函数成立.

不连通集(disconnected set)　见"连通集".

R^n中的弧(arc in R^n)　亦称简单弧. 曲线弧概念的推广. 它有两种不同的定义. 一种定义是指连续的单射$\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathrm{R}^n$(这样，弧是特殊的路径)；另一种定义是指这样的$\boldsymbol{f}$的值域$\boldsymbol{f}([a,b])$. 后一种定义更具几何含义，按照它，弧是自身不相交的曲线，或曲线上任意两点间不包含重点的部分. 采用这种定义时，又称为若尔当弧，同时，把前一种定义中的$\boldsymbol{f}$称为简单路径.

简单弧(simple arc)　即"R^n中的弧".

若尔当弧(Jordan arc)　见"R^n中的弧".

简单路径(simple path)　见"R^n中的弧".

弧连通集(arcwise connected set)　亦称路径连通集. 可用弧连结其中任意两点的点集. 对于平面点集情形指它是这样的：若$E\subset\mathrm{R}^2$，若对于E中任意的两点(a,x)和(b,y)，存在区间$[a,b]$上的连续单调函数f，使得$f(a)=x$，$f(b)=y$，则称E为弧连通集. 弧连通集必是连通的，反之不一定，例如，平面曲线

$$y=\sin\frac{1}{x}\ (0<x\leqslant 1)$$

与x轴上的线段$-1\leqslant x\leqslant 0$的并集是连通的，但不是弧连通的. 在R^n中，连通的开集是弧连通的. R^n的凸子集总是弧连通的，因而是连通的. 当所用的弧是折线，即有限条线段的并集时，弧连通集称为折线连通集. 在R^n中，连通开集是折线连通的. n维球、n维区间、n维球面都是弧连通的.

路径连通集(path connected set)　即"弧连通集".

折线连通集(broken line connected set)　见"弧连通集".

区域(region)　亦称开域. 非空连通开集. R^n中的区域D，就是可以用D中的曲线或折线连结D的任何两个点的开集. R^n中的开凸集是区域. 例如，n维开球、n维开区间都是R^n的区域. 平面R^2中的区域称为平面区域. 圆$\{\boldsymbol{x}:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<r\}$、圆环$\{\boldsymbol{x}:r<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<R\}$ ($r>0$)、开半平面都是平面区域，平面简单闭曲线的内部也是平面区域. 由于区域是开集，因此这个集合的内点、外点、边界点、外部、边界、闭包等分别称为区域的内点、外点、边界点、外部、边界、闭包等. 特别地，区域的闭包称为闭区域. 类似地有有界区域、无界区域等名称.

开域(open region)　即"区域".

平面区域(plane region)　见"区域".

区域的内点(inner point of region)　见"区域".

闭区域(closed region)　见"区域".

单连通域(simply connected region)　直观上没有洞的平面区域的推广. 指 $\mathbb{R}^n$ 中这样的区域 D: 其内任一简单闭曲线可以在 D 中连续地收缩为一点. 设某闭曲线的参数表示为 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to D$,若存在连续函数 $\boldsymbol{h}:[0,1]\times[a,b]\to D$,使得对所有 $t\in[a,b]$,有 $\boldsymbol{h}(0,t)=\boldsymbol{f}(t)$,$\boldsymbol{h}(1,t)=\boldsymbol{x}_0\in D$,而对所有 $s\in[0,1]$,有 $\boldsymbol{h}(s,a)=\boldsymbol{h}(s,b)$,则称 D 是单连通的. 设由 $\boldsymbol{g}_s(t)=\boldsymbol{h}(s,t)$ 定义的函数 $\boldsymbol{g}_s:[a,b]\to D$ 表示曲线 Γ_s,则上述条件表明:曲线 Γ 在 D 中连续地变形(通过无数条中间曲线 Γ_s),最后成为 D 内的一点 $\boldsymbol{x}_0$. $\mathbb{R}^n$ 中的凸集是单连通域(取 $\boldsymbol{h}(s,t)=(1-s)\boldsymbol{f}(t)+s\boldsymbol{x}_0$). 在 $\mathbb{R}^2$ 中,单连通域就是直观上没有洞的区域,即区域内任何一条简单闭曲线的内部没有不属于 D 的点.

变量与函数

变量(variable)　亦称变数或变元. 指在某个过程中可以取不同的值的量. 像某时刻不同地区的气温,一年内某城市的人口,以及自由落体的瞬时速度等客观世界中的量,都是变量的原型. 在现代数学中,对变量的理解不再强调它取值的过程,而定义为能取某个集合 X 的一切元素为值的量,即可以代表 X 的一切元素的符号. 这里的 X 称为该变量的变域或定义域. 当说 x 在集合 X 上变动或 x 取遍 X,都表示 x 是以 X 为变域的变量,均以 $x\in X$ 表示. 这样定义的变量,甚至可以不代表数量(如泛函分析中的变量可以代表抽象空间的元素),而有变元等名称. 但是数学分析中所说的变量,基本上限制其变域 X 为实数集 $\mathbb{R}$ 的子集,可以更确切地称为实变量. 特别当 X 为区间时,该变量 x 称为连续变量;当 X 为 $\mathbb{R}$ 的可数子集时(如定圆的内接正多边形面积),x 称为离散变量;当 X 为有界(无界)集时,x 称为有界(无界)变量.

变量概念是笛卡儿(Descartes,R.)与费马(Fermat,P. de)建立解析几何时引进数学的. 他们不再像前人那样把方程中的未知量看做一个待求的常数,而是看做不取固定值的量,即变量. 牛顿(Newton,I.)等使用的"量"也就是变量. 例如,他说到"随时间变化而不断增加的量","量取极大值或极小值"等. 有人认为变量这个词是莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于 1673 年首先使用的. 实际上第一个给变量下定义的也许是洛必达(L'Hospital,G.-F.-A. de),他在《无穷小分析》(1696)中的定义就是:"变量是连续地增加或减小的量;常量或固定量是在其他量变动时保持不变的量."柯西(Cauchy,A.-L.)把"依次取许多互不相同的值的量"称为变量,狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)则把变量看做表示某个数集的任何一个元素的符号,这已接近现在对变量的理解. 中国清代的一些译作中把变量译作变数,至今仍有人沿用这个译名.

变数(variable)　即"变量".

变元(argument)　即"变量".

变域(variable domain)　见"变量".

实变量(real variable)　见"变量".

连续变量(continuous variable)　见"变量".

离散变量(discrete variable)　见"变量".

有界变量(bounded variable)　见"变量".

无界变量(unbounded variable)　见"变量".

常量(constant)　亦称常数. 在某个变化过程中保持不变的量,或者变域为单元素集的变量. 常量也可视为一种特殊的变量. 记号 $x=\text{const}$ 常用来表示 x 为常量. 常量与变量的划分是相对的,要视所研究的问题和条件而定. 例如,在计算多元函数的偏导数时,就只将其自变量中的一个视为变量,其余的自变量则视为常量.

常数(constant)　即"常量".

函数(function)　亦称映射. 变量之间确定的依从关系. 若 X 是一个实数的集合(即 $X\subset\mathbb{R}$),f 是某个确定的法则,每个 $x\in X$ 按照 f 对应惟一的 $y\in\mathbb{R}$(y 为实数),则 f 称为 X 上的函数,变量 x 与 y 分别称为函数 f 的自变量和因变量,x 通过法则 f 对应的 y 的值记为 $f(x)$,也称为函数值,于是可写 $y=f(x)$,实数的集合 X 和 $Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 分别称为函数 f 的定义域和值域. 习惯上常说"函数 $y=f(x)$"或"y 是 x 的函数",应理解为"由关系 $y=f(x)$ 给出的函数 f"或"存在一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数关系". 若 X_1,X_2 是两个实数的集合($X_1\subset\mathbb{R}$,$X_2\subset\mathbb{R}$),f 是某个法则,任一有序数组 (x_1,x_2)($x_1\in X_1$,$x_2\in X_2$)通过 f 对应惟一的 $y\in\mathbb{R}$,则 f 称为(定义在)$X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$($\mathbb{R}^2$ 的子集)上的二元函数. (x_1,x_2) 称为自变量,y 是因变量,$X_1\times X_2$ 为 f 的定义域,与 (x_1,x_2) 对应的 y 值记为 $f(x_1,x_2)$,称为函数值,可写 $y=f(x_1,x_2)$. 类似地可定义三元函数以至 n 元函数(n 为正整数). 与此相应,前面所说的函数可称为一元函数. 所有的 n 元函数当 $n>1$ 时称为多元函数. 一元函数及多元函数统称函数. 由此,数学分析中的函数是变量间取值的对应法则,是因变量依从于自变量的关系,而自变量和因变量都是取实数值的. 这种定义由戴德金(Dedekind,J. W. R.)于 1887 年最早给出.

函数是数学分析的基本概念之一,其含义经历过多次的推广. 最早是由莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于 1694 年(另两说为 1673 年和 1692 年)引进数学的,用以表示随曲线上的点变动的量,如曲线上点的

坐标和曲线的斜率等. 1718 年,约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)把函数定义为"由变量与常量以任何适当方式构成的量",这实际上是显函数的定义. 他的学生欧拉(Euler,L.)在《无穷小分析引论》(1748)中把它改述成包含隐函数的形式:变量的函数是由这个变量与一些数或常量以任何方式组成的解析式. 稍后,在《微分学》(1755)中,欧拉又给了更一般的定义:若某些量以这样的方式依赖于另一些量,即当后面这些量变化时前面这些量也发生变化,则前面这些变量称为后面这些变量的函数. 接着他又说,若 x 表示变量,则以某种方式依赖于 x,即由 x 确定的一切量都称作 x 的函数. 欧拉的定义保持了长期的影响,尤其是对于西方中学教育的影响. 符号 $f(x)$ 也是欧拉引进的(1734). 按欧拉的观点,函数都能用解析式表示. 实际上,18 世纪的许多数学家都有这种看法. 直到 1807 年,傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)在其《热的解析理论》中用三角级数表示比原先研究的更一般的函数关系后,函数与它的表达方式才逐步分离. 1837 年,狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)在一篇论文中给出了较为明确的函数定义:假设 x 取某个区间内的所有值,若对于每个 x 有惟一有限的 y 与之对应,则把 y 称为 x 在这个区间内的函数. 他紧接着指出,没有必要要求在整个区间内 y 只有一个解析式,甚至可以没有解析表达式. 在此之前的 1834 年,罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н. И.)也给出过含义相近的定义. 狄利克雷的定义有重要影响,在数学中至今仍在使用它. 因为在函数定义中,重要的是自变量与因变量(的值)之间的对应法则,因变量(或函数值)由此法则决定,而狄利克雷却把因变量称为函数,所以出现了本词条一开始就给出的函数是对应法则的定义. 这个定义目前在较为抽象的数学学科中,已经代替了狄利克雷的定义,但在数学分析中(特别是涉及微积分的计算时)和一些计算性较强的学科中,使用时会有很多明显的不便之处,因此,还较多地使用狄利克雷的定义,将 $f(x)$ 称为函数,而把 x 取特殊值 x_0 所对应的因变量的值 $f(x_0)$ 称为函数值. 由于现代数学的不同学科中出现很多名称不一,但本质相同的概念,因此又有了概括性更强的函数定义,即将任意集合 X 到另一集合 Y 的对应关系(法则,即映射)称为函数,并用原表示映射的记号表示为 $f:X\to Y$(集合 X 到集合 Y 的映射)或 $f:x\mapsto y$(将 X 的元素 x 映成 Y 的元素 y). 其实,映射作为数学的另一个基本概念,在数学史上与函数从不同的分支学科产生和发展,直到近代才与函数逐步融合,成为实质上相同概念的两个名称,而可以在集合论上给出它们的统一定义(参见本卷《集合论》中的"映射"),并使用统一记号. 然而,正因为这同一个概念的两个名称各有其历史地位和使用它们的数学分支的习惯用法,多数数学家乐于保留其各自的名称和用法而不强求统一. 因此,本条目只按函数这个名称的历史发展和实际使用现状加以诠释. 不仅如此,这一数学概念在近代数学中,尚有其他的名称如变换、算子等.

总之,函数作为变量之间依从关系的数学抽象,变量可以从任意集合取值,但常从实数集取值. 从函数概念的历史发展和现实使用看,变量从实数集取值是其主流. 循此主流论述的函数,严格说是实变量的实函数. 数学概念常只在一定的范围内加以诠述. 与函数作为同一概念的不同名称的映射是集合的元素之间的依从关系,另一名称变换是空间的点之间的依从关系,又一名称算子则常是函数空间的函数之间的依从关系. 它们的数学抽象是同一概念,但却以各在其恰当的位置上作完整的诠述更为合宜. 在同一条目内混为一谈只会搅乱数学各分支中本来的融洽. 正因为如此,不仅在本卷中会在不同的分支对此同一概念的三种不同的名称:函数、映射和变换按各自立条进行诠释,而且像在第三卷《泛函分析》等分支中甚至还会在需要时按其各自的习惯用法同时运用此同一概念的三种不同名称(函数、映射和算子)的最基本情形,自变量和因变量都在数域中取值的函数,称为数值函数. 其中自变量取实(复)数值的,称为实(复)变函数;因变量取实(复)数值的,称为实(复)值函数. 实变实值函数简称实函数,复变复值函数简称复函数. 函数当其自变量或因变量为(高于一维的)向量时,分别称为多元函数(向量元函数)和向量值函数. 有时也考虑因变量取多于一个数值的函数,称它为多值函数.

在中国,"函数"一词最早出现在 1859 年李善兰的译作《代微积拾级》中:"凡此变数中函彼变数,则此为彼之函数."书中同时介绍了阳函数(即显函数)、阴函数(即隐函数)、增函数和损函数(即减函数)等概念.

自变量(independent variable) 见"函数".

因变量(dependent variable) 见"函数".

数值函数(number valued function) 见"函数".

函数的定义域(domain of the definition of function) 见"函数".

函数的值域(range of function) 见"函数".

实函数(real function) 见"函数".

复函数(complex function) 见"函数".

一元函数(function of one variable) 定义于 $\mathbf{R}$(实数集)的子集上的函数(参见"函数"). 一元函数可表示为 $f:X(\subset\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 或 $f:x\in X(\subset\mathbf{R})\mapsto y\in\mathbf{R}$,在数学分析中更常用 $y=f(x)$来表示.

多元函数(function of several variables) 定义

域为 $\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$ 的子集的函数. 具体地说,可以是二元函数、三元函数以至一般的 n 元函数($n\in\mathrm{N},n\geqslant 2$). n 元函数可记为 $f:X(\subset\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}$. 数学分析中,更常用 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示这种函数关系. 若令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则 $\boldsymbol{x}$ 为 R^n 中一点,或 n 维向量,而在目前新的数学文献中也常用 $f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n)$ 代替 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 来表示多元函数. 这样,n 元函数也可看做是 n 维空间中的点(或向量)到实数的对应关系(映射)(参见"函数").

二元函数(function of two variables) 见"函数"和"多元函数".

向量值函数(vector-valued function) 函数值为向量的函数. 将 R^m 中的点(数)对应于向量的对应关系(法则). 若 X 是 R^m 的子集,$\boldsymbol{f}$ 是某个确定的法则,每一 $\boldsymbol{x}\in X$ 通过 $\boldsymbol{f}$ 对应惟一的 $\boldsymbol{y}\in\mathrm{R}^n$($n$ 维向量),则 $\boldsymbol{f}$ 称为(定义于)X 上的向量值函数,记为 $\boldsymbol{f}:X(\subset\mathrm{R}^m)\to\mathrm{R}^n$,也可记与 $\boldsymbol{x}\in X$ 相应的因变量(值)为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,而写成 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 若将 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 用它们的分量表示为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的分量也都是定义在 X 上的 m 元函数的值,若将它们记为 $f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x})$,于是在数学分析中,也常将定义在 $X(\subset\mathrm{R}^m)$ 上的 n 维向量值函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 说成是,由 f_i(或 $y_i=f_i(\boldsymbol{x})=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$)$(i=1,2,\cdots,n)$ 组成的 m 元函数组. 向量值函数也可按其定义域所在空间的维数区分为一元的和多元的. 相应于向量值函数,函数值为实数的函数也称为标量值函数.

标量值函数(scalar-valued function) 见"向量值函数".

多值函数(multivalued function) 对应于自变量的每个值,因变量取多个确定值的函数. 若 X 是数轴上的点集,f 是对应法则,使每个 $x\in X$ 通过 f 对应于多个(例如可数多个)实数,则称 f 为 X 上的多值函数. 例如,正弦函数的反函数即为多值函数.

映射(mapping) 数学分析的基本概念及研究对象. 映射与函数(还有变换、算子等)同样指集合之间的对应关系,是同一数学概念在不同数学分支及其不同发展过程中使用的不同称呼,现仍保留在各数学分支中. 由集合 A 到集合 B 的映射记为 $f:A\to B$. 但数学分析中函数仍限于是 $\mathrm{R}^n(n\in\mathrm{N}_+)$ 到 R 的映射(一元或多元函数)或 R^m 到 $\mathrm{R}^n(m,n\in\mathrm{N}_+)$ 的映射(一元或多元向量值函数),并且常用记号 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 表示函数(参见本卷《集合论》同名条).

函数图象(graph of a function) 函数的自变量与因变量之间关系的几何表示. 若 f 是以集合 X 为定义域的函数,则集合 $\{(x,f(x))\mid x\in X\}$ 称为 f 的图象. 一元实函数的图象是 R^2 的子集,即平面点集. 给定一个这样的函数,可以用坐标法并结合研究它的一阶、二阶导数(如果存在)画出它的图象. 当 X 是区间且 f 连续时,它的图象是一条连续曲线,并且常常冠以该函数的名称. 例如,幂(指数,对数,正弦……)函数的图象称为幂曲线(指数曲线,对数曲线,正弦曲线……). 任给 xy 坐标平面的一个点集 G,当且仅当平行于 y 轴的每条直线与 G 至多有一个交点时,即当 $(x,y_1)\in G,(x,y_2)\in G$ 时,有 $y_1=y_2$,G 是某个函数的图象. 这个函数的定义域是 $\{x\mid(x,y)\in G\}$,值域是 $\{y\mid(x,y)\in G\}$. n 元函数的图象是 R^{n+1} 的子集. $n=2$ 时,通常是三维空间中的曲面. 当 $n>2$ 时,已经不能画出图象的直观形状. $n=2,3$ 时,研究函数的等值集常有助于想像函数的图象. 当用关系定义函数时,函数关系、函数图象、函数是同义语,都指某个积集中的特定的子集. 上述 xy 平面上的集合 G 成为函数图象的充分必要条件,是用集合论语言给出的函数定义.

解析表达式(analytic expression) 简称解析式. 即表示自变量、常量与运算符号的组合,其中的运算符号至多有可数个. 除了算术运算、代数运算外,可以是数学分析中的任何运算,如复合、求极限、求导数、求积分等. 这些运算统称为解析运算,故有解析式这个名称. 特别地,只含代数运算的解析式称为代数式,其他的解析式皆称超越式. 例如

$$2x,ax+b,\sqrt{1-x^2},|x|(\sqrt{x^2}),\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n},\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)$$

等都是解析式. 前四个是代数式,其他的都是超越式. 超越这个词,来自欧拉(Euler,L.)的话:"它们超越了代数方法的能力."解析式主要用于指明如何按一定方法从常量及自变量的值计算函数值. 在上面这 8 个解析式中,后 4 个依次是指数函数 $\exp x$,对数函数 $\ln x$,勒让德多项式 $P_n(x)$,狄利克雷函数的解析式. 同一函数的解析表达式不是惟一的.

解析式(analytic expression) 解析表达式的简称.

解析运算(analytic operation) 见"解析表达式".

函数的扩张(extension of a function) 亦称函数的延拓. 指扩大一个已知函数的定义域而得到一个新函数. 给定函数 $f:A\to Y$ 与 $F:E\to Y$,若 $A\subset E$,且当 $x\in A$ 时,$F(x)=f(x)$,则称 F 为 f 在 E 上的扩张(或称延拓,开拓),亦称把 f 扩张到 E 上. 这时 f 是 F 在 A 上的限制. 若 F 是 f 的扩张,且 F 是奇(偶、周期、连续)函数,则称 F 是奇(偶、周期、连续)扩张. 例如,对定义在区间 $[0,a]$ 上的函数 f,它在 $[-a,a]$ 上的奇扩张和偶扩张分别是如下定义的函数 g_1 和 g_2: $x\in[0,a]$ 时,$g_1(x)=g_2(x)=f(x)$,$x\in[-a,0]$

时，$g_1(x)=-f(-x)$，$g_2(x)=f(-x)$；这里g_1是f的奇扩张，g_2是f的偶扩张。定义在$(0,a]$上的函数f在R上以a为周期的扩张是函数$g(x)=f(x-ka)$ $(x\in(ka,(k+1)a]$，k是整数)。可见一个函数的扩张可有多种结果，数学中常根据不同的用途作不同的扩张。

函数的延拓(extension of a function)　即“函数的扩张”。

奇扩张(odd extension)　见“函数的扩张”。

偶扩张(even extension)　见“函数的扩张”。

周期扩张(periodic extension)　见“函数的扩张”。

函数的限制(restriction of a function)　指缩小一个已知函数的定义域而得到一个新函数。设f：$A\to Y$，而且$B\subset A$，则称由$x\to f(x)(x\in B)$定义的函数为f在B上的限制，记为$f|_B$或$f|B$。例如，函数$g(x)=x^2(x\geqslant 0)$是$f(x)=x^2(x\in\mathrm{R})$在$[0,+\infty)$上的限制。若有两个函数$\varphi:A\to Y$，$\psi:B\to Y$，且$B\subset A$，$x\in B$时，$\varphi(x)=\psi(x)$，则ψ就是φ在B上的限制，而φ是ψ在A上的扩张。

等值集(level set)　亦称水平集。等高线、等高面的数学抽象。设函数$f:A\to\mathrm{R}$，$A\subseteq\mathrm{R}^n$，对于常数c，集合$\{\boldsymbol{x}\in A|f(\boldsymbol{x})=c\}$称为$f$的$c$等值集，简称等值集。当$n=2$或3时，等值集常常是曲线或曲面，称为等值线(又称等高线)或等值面(又称等高面)。例如，设想$f(x)$为R^3中的温度场，则等值面就是等温面。等值集常用于研究多元特别是二元实值函数的图象。

水平集(level set)　即“等值集”。

等高线(contour line)　见“等值集”。

等高面(contour surface)　见“等值集”。

复合函数(composite function)　按一定次序把有限个函数合成得到的函数。对两个函数$f:A\to B$，$g:B\to C$，由$h(x)=g(f(x))(x\in A)$确定的函数h称为f与g的复合函数，记为$g\circ f$。这样，$g\circ f$是A到C的函数，$(g\circ f)(x)=g(f(x))$，它的值域是$g(f(A))$。记号“$\circ$”表示两个函数的复合，它是二元运算。这个运算不满足交换律，即一般来说$g\circ f\neq f\circ g$，但它满足结合律：对$f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to D$，有

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

于是可以定义

$$h\circ g\circ f=h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

一般地，对$n+1$个满足$B_i\subseteq A_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$的函数$f_i:A_i\to B_i(i=1,2,\cdots,n+1)$可以定义$n$重复合函数$f_{n+1}\circ f_n\circ\cdots\circ f_1$。任给两个函数$f:A\to B$，$g:C\to D$，当且仅当$f(A)\subseteq C$时可以得到复合函数$g\circ f:A\to D$；当且仅当$g(C)\subseteq A$时可以得到$f\circ g:C\to B$。当函数用变量表示为$t=f(x)$，$y=g(t)$，且$f$的值域含于$g$的定义域时，称$t$为复合函数$y=g(f(x))$的中间变量。函数的复合是研究函数的一种工具。一方面它提供了构造各式各样的新函数的方法；另一方面，为研究复杂的函数，常将它们看成一些简单函数的复合(求函数的导数时常这样做)。

中间变量(intermediate variable)　见“复合函数”。

反函数(inverse function)　对调一个函数关系中的自变量和因变量的相对位置而得到的函数。对于以A为定义域的一元函数$y=f(x)$，若区间$I\subseteq A$，$B=f(I)=\{f(x)|x\in I\}$，且对于每个$y\in B$，I中只有一点x满足$f(x)=y$(因为$B=f(I)$，这样的x肯定存在)，则这个定义在B上，将自变量y对应因变量x的这样的值的函数称为f在区间I上的反函数，记为f^{-1}。很明显，$I=f^{-1}(B)$。要函数f有反函数，必须f本身和区间I满足一定条件。例如$y=x^2$ (x为自变量)在$(-\infty,\infty)$上没有反函数，但是它在$(0,+\infty)$和$(-\infty,0)$上的反函数分别为$x=\sqrt{y}$和$x=-\sqrt{y}$。若函数f在区间I上严格单调，则它在此区间上的反函数必定存在。在xy平面上，函数$y=f(x)(x\in I)$与它的反函数$x=f^{-1}(y)(y\in f(I))$的图象是重合的。习惯上将原来的函数f和反函数f^{-1}的自变量都用x表示，因变量都用y表示，这样，则f的图象$\{(x,y)|y=f(x),x\in I\}$和f^{-1}的图象$\{(x,y)|y=f^{-1}(x),x\in f(I)\}$在$xy$平面上对称于直线$y=x$。有时也允许一个函数的反函数是多值的，在这种意义下，一些原来没有反函数的函数可以有反函数。例如，三角函数在它的整个定义域内有反函数，又如$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上也有反函数，只不过反函数是多值的(二值)。但数学分析中一般不用这种意义下的反函数。多元函数以及向量值函数的反函数的定义，原则上与一元函数相同，但具体表述较复杂。

隐函数(implicit function)　由方程确定的函数。若$F(x,y)=0$是当变元$x\in X$，$y\in Y$时有意义的方程(这里X，Y都是实数集R的子集)，而对于任意$x_0\in E\subset X$，有惟一的$y_0\in Y$，使得$F(x_0,y_0)=0$，因而由此确定了一个定义在E上以x为自变量，y为因变量的函数，这个函数称为由方程$F(x,y)=0$ (在E上)确定的隐函数。相对而言，由$y=f(x)$ ($f(x)$包含一个或多个解析式)给出的函数称为显函数。因此，若当$x\in E$时，方程$F(x,y)=0$对于y的解存在而且惟一，则此方程在E上确定隐函数。而不论这个解是否能够求出(能否用x明确表示)，同理，若$G(x,y,z)=0$是一个三元方程，对任意$(x_0,y_0)\in F\subset\mathrm{R}^2$时，有惟一的实数解$z_0$，使得$G(x_0,y_0,z_0)=0$，则方程$G(x,y,z)=0$在$F$上确定二元

隐函数.隐函数也可以是 n 元函数.函数 $y=f(x)$ 的反函数是否存在,可看做是否能由方程 $F(x,y)=f(x)-y=0$ 确定以 y 为自变量而以 x 为因变量的隐函数.要求一个方程在某个集合上确定(单值)隐函数,一般要附加某些条件.例如,由于 $x\in(-1,1)$ 时有两个 y 值($-\sqrt{1-x^2}$ 和 $\sqrt{1-x^2}$)使得 $x^2+y^2=1$,所以,$x^2+y^2-1=0$ 在$(-1,1)$上不确定(单值)隐函数,但同一方程满足条件 $y|_{x=0}=1$ 的(单值)隐函数却是存在的(参见"隐函数定理").清代李善兰把显函数与隐函数译为阳函数与阴函数,这个译名至今在中国的港台书刊中还时有所见.

显函数(explicit function) 见"隐函数".

阳函数(explicit function) 见"显函数".

阴函数(implicit function) 见"隐函数".

实数的序(order of real number) 实数的基本关系之一.指任意两个实数之间的先后顺序关系.实数的序关系,由通常说的实数的大小关系给出,记号用"$>$".它是全序关系,实数集 R 是全序集.在实数公理系统中,序公理是一条独立的公理.

有界函数(bounded function) 值域是有界集的函数.设 f 是定义在 A(R 或 R^n 的子集)上的一元(或多元)函数,若存在 $M>0$,使得对于所有 $\boldsymbol{x}\in A$,有 $|f(\boldsymbol{x})|\leqslant M$,则 f 称为在 A 上有界,或者称 f 为 A 上的有界函数.否则称 f 在 A 上无界,或者称 f 为 A 上的无界函数.亦即,若 f 是定义在 A 上的(一元或多元)无界函数,当且仅当对任意的 $M>0$,存在 $\boldsymbol{x}\in A$,使 $|f(\boldsymbol{x})|>M$,或存在 A 中的序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$,使 $|f(\boldsymbol{x}_n)|\to+\infty\ (n\to\infty)$.函数的值域的界、上(下)界、上(下)确界和最大(小)元分别称为函数的界、上(下)界、上(下)确界和最大(小)值.函数有界的充分必要条件是,它既有上界又有下界.有界的一元(或多元)函数 $y=f(x)$ 的图象,必在与 y 轴垂直的两条直线(或平面、超平面)之间.函数的上(下)确界不一定能达到,即不一定是某点的函数值.

无界函数(unbounded function) 见"有界函数".

一致有界性(uniform boundedness) 一个函数族中的函数有共同的界.设 $\mathscr{F}=\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是定义在集 A 上的实值函数族,若存在数 M,使对所有 $\lambda\in\Lambda$ 及 $\boldsymbol{x}\in A$ 有 $f_\lambda(\boldsymbol{x})\leqslant M$,则称 $\mathscr{F}$ 在 A 上一致有上界,并称 M 为其一致上界.类似地,可定义一致有下界及一致下界.若 $\mathscr{F}$ 既一致有上界又一致有下界,即存在 $M>0$,使对所有 $\lambda\in\Lambda$ 及 $\boldsymbol{x}\in A$ 有 $|f_\lambda(\boldsymbol{x})|\leqslant M$,则称 $\mathscr{F}$(在 A 上)一致有界,并称 M 为 $\mathscr{F}$(在 A 上)的一致界.一致有界的函数族中每个函数均有界,反之不然.

单调函数(monotone function) 一类重要的函数.即当自变量的值增加时相应的函数值总增加(不减)或总减少(不增)的一元函数.即:若 $A\subseteq\mathrm{R}$,$f:A\to\mathrm{R}$,且对满足 $x_1<x_2$ 的任意 $x_1,x_2\in A$,差 $f(x_2)-f(x_1)$ 不变号,则称 $f(x)$ 为 A 上的单调函数或 $f(x)$ 在 A 上单调.当 A 为区间时,A 称为 $f(x)$ 的单调区间.并按照上述差恒为正、负、非负、非正数,将单调函数分为 4 种,依次称为严格增、严格减、增、减函数.严格单调函数必须首先是单调函数;反之,单调函数只有当其在任二不同点的函数值不相等时,才是严格单调函数.严格单调函数的反函数仍为严格单调的,其增减性与原来的函数相同.对于定义在区间上的单调函数,它在任一点总有单侧极限(有限数或 $\pm\infty$).例如,若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的增函数,$x_0\in(a,b)$,则 $f(x_0+)=\inf\{f(x)\,|\,x>x_0\}$,$f(x_0-)=\sup\{f(x)\,|\,x<x_0\}$.函数的增与减,还可说是递增与递减,也可用反义词的否定说成不减与不增.单调的概念也可推广到二元函数情形.若 $f(x,y)$ 是定义在全平面上的函数,若对任意的 $h>0$ 和 $k>0$,有

$$(f(x+h,y+k)-f(x+h,y))-(f(x,y+k)-f(x,y))\geqslant 0,$$

则称 $f(x,y)$ 为增函数,类似地可以定义减或严格增(减)的二元函数.依此,任何二元概率分布函数都是增函数.在《实变函数论》(见《数学辞海》第三卷)中还可进一步肯定,区间上的(一元)单调函数只有至多可数个(第一类)间断点,在除去一个勒贝格测度为 0 的点集后,是处处可微的.单调函数还与有界变差函数关系密切.

单调区间(monotone interval) 见"单调函数".

严格增函数(strictly increasing function) 见"单调函数".

严格减函数(strictly decreasing function) 见"单调函数".

增函数(increasing function) 见"单调函数".

减函数(decreasing function) 见"单调函数".

严格单调函数(strictly monotone function) 见"单调函数".

分段单调函数(piecewise monotone function) 若干个单调函数相接的函数.定义域可以分成有限个区间,在其中每一个区间上都是单调的一元函数.即:若存在区间$[a,b]$的分法 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,使在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$上函数 $f(x)$ 都是单调的,则称 $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ 是分段单调的.阶梯函数、单调函数都是分段单调函数.

在一点单调的函数(function monotone at a point) 当自变量逼近一点时,函数值单调变化的函数.设 f 是开区间 I 上的一元函数,$x_0\in I$,且若在 x_0 的某个左邻域和右邻域内 f 的值分别小于和大于

$f(x_0)$,即若存在 $\delta>0$,使得对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 及 $y\in(x_0,x_0+\delta)$,有 $f(x)<f(x_0)<f(y)$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处严格增.不等号反向时(即 $f(x)>f(x_0)>f(y)$),称 $f(x)$ 在 x_0 处严格减.当 $f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant f(y)$ 时,称 $f(x)$ 在 x_0 处增;当 $f(x)\geqslant f(x_0)\geqslant f(y)$ 时,称 $f(x)$ 在 x_0 处减.$f(x)$ 在 I 上严格增(严格减,增,减)当且仅当 $f(x)$ 在每个 $x_0\in I$ 处严格增(严格减,增,减).函数 $f(x)$ 在 x_0 单调,它在含 x_0 的任何区间上可能都不单调.

函数的奇偶性(odevity of a function) 函数的基本性质之一.指其图象有某种对称性的一元函数.定义在对称区间 $I=(-a,a)$ 或 $[-a,a]$(或数轴上关于原点对称的点集)上的(一元)实值函数 $y=f(x)$,对任意 $x\in I$,若 $f(-x)=f(x)$,即在关于原点的对称点的函数值相等,则 $f(x)$ 称为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,即对称点的函数值正负相反,则 $f(x)$ 称为奇函数.在平面直角坐标系中,偶函数的图象对称于 y 轴,奇函数的图象对称于原点.可导的奇(偶)函数的导函数的奇偶性与原来函数相反.定义在对称区间(或点集)上的任何函数 $f(x)$ 都可以表示成奇函数 $\varphi(x)$ 和偶函数 $\psi(x)$ 之和:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

奇函数(odd function) 见"函数的奇偶性".

偶函数(even function) 见"函数的奇偶性".

周期函数(periodic function) 一类重要的函数.指在彼此相距为定数的各点的函数值相等的一元函数.若 $f(x)$ 为定义在集合 A 上的一元函数,且存在常数 $T>0$,使对任意 $x\in A$,总有 $x+T\in A$,且 $f(x)=f(x+T)$,则 T 称为 $f(x)$ 的周期,$f(x)$ 称为以 T 为周期的周期函数.若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 T 的任何正整数倍也是 $f(x)$ 的周期.三角函数是常见的周期函数.一个周期函数的周期不是惟一的,它的所有周期中最小的一个称为最小正周期,通常所说函数的周期即指此,但不是任何周期函数都有最小正周期.例如,狄利克雷函数以任何正有理数为周期,但没有最小正周期.对于多元函数也可定义周期(例如,若存在常数 $h>0,k>0$,使对于任意 (x,y),有 $f(x+h,y+k)=f(x,y)$,则称 (h,k) 为 $f(x,y)$ 的周期),周期的概念还可以推广到复变函数和定义在阿贝尔群上的函数.

函数的周期(period of a function) 见"周期函数".

最小正周期(minimal positive period) 见"周期函数".

凸函数(convex function) 一类重要的实函数.若 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的(一元)函数,对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$ 和任意满足 $0<\lambda<1$ 的常数 λ,都有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则 $f(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的凸函数.它的几何特征是,以凸函数的图象(曲线)上的任意两点为端点所连结的线段,一定在图象的上方(或相重合),即凸函数的图象(曲线)是向下(y 轴负向)凸出的.如果凸函数的图象在某点有切线(这样的点是很多的),则它的整个图象都在这条切线的上方(y 轴正向).凸函数是绝对连续(定义见本卷《实变函数论》)的.由此可知,凸函数处处连续,且除去一个勒贝格测度为0的点集之外处处可微,在可微点集上导数递增.对于一阶(二阶)可微函数,它是凸的充分必要条件是:一阶(二阶)导函数递增(非负).凸函数还是其导函数的(勒贝格)不定积分.凸函数最早是由延森(Jesen,J. L. W. V.)于1905年及1906年的两篇论文中定义和系统研究的,他定义满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

(a,b 为任意实数)的一元函数 $f(x)$ 为凸函数(现称中点凸函数).他定义的这种函数不一定处处连续(不一定勒贝格可测),如果加上函数 $f(x)$ 连续的条件,他的定义与现在的定义是等价的.在他之前,赫尔德(Hölder,O. L.,1889)、施托尔茨(Stolz,O.,1893)、阿达马(Hadamard,J.(-S.),1893)已经得到过有关凸函数的零星结果.现在,凸函数的概念已被推广到多元函数以及泛函分析中的线性空间中的多种抽象背景之下,并已形成专门研究有关问题的独立数学分支(《凸分析》).

中点凸函数(midpoint convex function) 见"凸函数".

严格凸函数(strictly convex function) 见"凸函数".在凸函数的定义中,以"<"代替"≤",便得到严格凸函数的定义.

凹函数(concave function) 与某个凸函数的值正负相反的函数.对于函数 $f(x)$,若 $-f(x)$ 为凸函数,则 $f(x)$ 称为凹函数.亦即:若 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的(一元)函数,对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$ 和任意满足 $0<\lambda<1$ 的常数 λ,都有

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

凹函数的图象是向上(y 轴正向)凸出的,其他性质可由凸函数了解到.在给定区间上的函数,可以既不凸也不凹.既凸又凹的函数只可能是一次函数(图象为直线).

对数凸函数(logarithmic convex function) 取对数后为凸的函数.若 $\ln f$ 为区间 I 的凸函数,则称 $f(x)$ 为 I 上的对数凸函数.这等价于:$f(x)>0$,且对任意 $a,b\in I,\lambda\in(0,1)$,有

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant f^{\lambda}(a)f^{1-\lambda}(b).$$

由于不等式右端是乘积，故亦称乘法凸函数. 对数凸函数是凸函数. 对数凸函数类对加法、乘法及取极限(若对数凸函数列的极限函数存在且是正的)是封闭的. 类似于对数凸函数，容易得到对数凹、严格对数凸(凹)函数的概念. 对数凸函数的概念可对复函数建立. Γ 函数是对数凸函数.

乘法凸函数(multiplication convex function) 即“对数凸函数”.

对数凹函数(logarithmic concave function) 见“对数凸函数”.

有界变差函数(function of bounded variation) 亦称有限变差函数. 指某种意义下变化不大的函数. 对于闭区间$[a,b]$上的一元函数$f(x)$，下式

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\ \middle|\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\right\}$$

(上确界是对$[a,b]$的任意分法取的)称为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的全变差，记为

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \text{ 或 } \mathrm{Var}_{[a,b]}(f).$$

当 $a=b$ 时，定义 $\overset{a}{\underset{a}{\mathrm{V}}}f=0$. 若

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)<\infty,$$

即全变差有限，则 $f(x)$ 称为区间$[a,b]$上的有界变差函数. 有界变差函数必有界，它有广泛的应用. 例如，R^n 中用参数方程 $x_1=\psi_1(t), x_2=\psi_2(t),\cdots,x_n=\psi_n(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$表示的曲线是可求长曲线的充分必要条件为：函数$\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)$都是有界变差的. 有界变差函数的最重要的特征由下面的若尔当分解定理给出：$f(x)$是有界变差函数的充分必要条件为$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$，其中 $f_1(x)$与 $f_2(x)$ 都是增或减函数. 有界变差函数是若尔当(Jordan, M. E. C.)为了推广关于傅里叶级数收敛性的狄利克雷判别法于 1881 年引进的.

有限变差函数(function of finite variation) 即“有界变差函数”.

全变差(total variation) 见“有界变差函数”.

序列(sequence) 数学分析的基本概念之一. 即可用自然数编号，并按编号从小到大的次序排列的同一类数学对象. 若将序列看做集合，它的元素称为序列的项. 但序列并非一般的集合，序列的项有先后次序，并且不同的项可以是相同的元素. 序列可以只有有限项，称为有限序列. 不只有限项的序列称为无穷序列，这是数学分析中通常讨论的对象. 序列按各项顺序排列可写为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为$\{a_n\}$或$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 排在第 n 位的项 a_n 称为第 n 项，把 n 看做在自然数集 N 中变动时，亦把 a_n 称为通项. 序列常随其所包含的数学对象使用不同名称，例如：各项都是数的序列称为数列，各项都是点的称为点列，各项都是函数的称为函数列. 数列也可看做定义域为自然数集 N 或其部分 $\mathrm{N}_k=\{1,2,\cdots,k\}$的函数或映射($f: n\to a_n$)，因此亦称整序变量. 数列还常用数轴上的点列表示，所以数列与直线上的点列可以不加区分.

有限序列(finite sequence) 见“序列”.

无穷序列(infinite sequence) 见“序列”.

序列的通项(general term of a sequence) 见“序列”.

数列(sequence of numbers) 见“序列”.

整序变量(integral sequence variable) 见“序列”.

有界列(bounded sequence) 一种特殊的序列. 对于数列$\{x_n\}$，若存在实数 $M(m)$，使对所有 $n\in\mathrm{N}$，有 $x_n\leqslant M(x_n\geqslant m)$，则称$\{x_n\}$有上(下)界. 既有上界又有下界的数列称为有界数列，简称有界列. 收敛数列必有界，但有界数列不一定收敛. 当数列单调时，其有界性与收敛性是等价的. 对 R^m 中的点列$\{\boldsymbol{x}_n\}$，可类似地定义其有界性：即若存在 $M>0$，使对所有 $n\in\mathrm{N}$，有$|\boldsymbol{x}_n|\leqslant M$，即

$$\sup_{n\in\mathrm{N}}|\boldsymbol{x}_n|<+\infty,$$

这里$|\cdot|$表示欧几里得范数. 对定义在 A 上的函数列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，有两种有界性. 一种是逐点有界，指对每个 $\boldsymbol{x}\in A$，$\{f_n(\boldsymbol{x})\}$是有界列；另一种是一致有界，指

$$\sup_{x\in A}\sup_{n\in\mathrm{N}}|f_n(\boldsymbol{x})|<+\infty,$$

即存在 $M>0$，使对所有 $n\in\mathrm{N}$ 及所有 $x\in A$，有

$$|f_n(\boldsymbol{x})|\leqslant M,$$

这样的 M 称为$\{f_n(\boldsymbol{x})\}$的一致界.

逐点有界(pointwise bounded) 见“有界列”.

一致有界(uniformly bounded) 见“有界列”.

一致界(uniform bound) 见“有界列”.

无界列(unbounded sequence) 非有界的序列. R^m 中的点列$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$无界，当且仅当对任意 $M>0$，存在正整数 n，使$|\boldsymbol{x}_n|>M$，即

$$\sup_{n\in\mathrm{N}}|\boldsymbol{x}_n|=+\infty.$$

这时有子列$\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使

$$\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{n_k}|=+\infty.$$

当 $m=1$ 时就是无界数列.

$$\sup_{n\in\mathrm{N}}x_n=+\infty\ \ (\inf_{n\in\mathrm{N}}x_n=-\infty)$$

的实数列$\{x_n\}$称为无上(下)界的数列. $\{x_n\}$无上(下)界，当且仅当它有子列发散于$+\infty(-\infty)$. 有无穷极限的数列必无界，反之不一定，但无界的单调数列必有无穷极限.

子序列(subsequence) 简称子列. 指序列的一

部分项按原有次序排列而得的序列. 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是序列, $k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots$是一列正整数, 则称序列$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$为$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$的子序列或部分列.

子列(subsequence)　子序列的简称.

部分列(partial sequence)　见"子序列".

单调数列(monotone sequence of numbers)　一类重要的数列. 指各项的值总是依次增加(不减小)或总是依次减小(不增加)的数列. 单调数列有: (递)增数列, (递)减数列, 严格增数列, 严格减数列, 分别指项满足 $a_n\leqslant a_{n+1}$, $a_n\geqslant a_{n+1}$, $a_n<a_{n+1}$, $a_n>a_{n+1}$ (对所有 n)的数列$\{a_n\}$. 也有人把它们分别称作不减、不增、增、减数列. 严格增数列与严格减数列合称严格单调数列. 单调数列也就是定义在自然数集上的单调函数. 上述定义与把单调函数的定义用于数列所得到的结果是等价的.

增数列(increasing sequence of numbers)　见"单调数列".

减数列(decreasing sequence of numbers)　见"单调数列".

严格增数列(strictly increasing sequence of numbers)　见"单调数列".

严格减数列(strictly decreasing sequence of numbers)　见"单调数列".

严格单调数列(strictly monotone sequence of numbers)　见"单调数列".

摆动数列(oscillatory sequence of numbers)　各项数值大小作摆动的数列. 即满足下列条件的无穷实数列$\{a_n\}$: 存在固定实数 a, 使对任意自然数 n, 总有自然数 $n_1, n_2>n$, 使得

$$a_{n_1}>a, a_{n_2}<a.$$

基本列(fundamental sequence)　亦称柯西列. 极限存在的数列. 也就是满足柯西条件的数列. 即这样的$\{x_n\}$: 对任意正整数 ε, 存在正整数 N, 使当 n, $m>N$ 时, 有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. 反映在数轴上, 表示当项的编号无限增加时, 基本列中任意两项之间的距离将会任意地小. 不难想像这种点列中的点最终将聚集在某个点的周围, 即收敛于这个点. 反之, 如果一个点列收敛, 编号无限增大的项之间的距离也将任意地小. 这就是说: 实数列收敛, 当且仅当它是基本列. 这个结论称为柯西准则. 若一个基本列的所有各项都是有理数, 则它为基本有理数列. 但基本有理数列不一定收敛于有理数. 例如, 设

$$e_n=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}\right),$$

则$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$是基本有理数列, 但它的极限 e 是无理数. 康托尔(Cantor, G. F. P.)注意到基本有理数列与基本实数列之间的这个差别, 利用基本有理数列定义实数. 康托尔的实数定义, 是多种互相等价的实数定义中的一种, 主要反映了实数的完备性. 基本列的概念可以推广到 R^n 及一般的抽象空间, 并用以使这些空间完备化.

柯西列(Cauchy sequence)　即"基本列".

一致柯西列(uniform Cauchy sequence)　指随着项的序号无限增大, 各项的数值均匀地互相接近的函数列. 即满足下列条件的定义在集合 A 上的函数列$\{f_n(x)\}$: 任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使当 $m, n\geqslant N$ 时, 对所有 $x\in A$, 有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$. 函数列$\{f_n(x)\}$一致收敛, 当且仅当它是一致柯西列(一致地满足柯西准则).

递推列(recursive sequence)　亦称递归列. 由前面的项能推出后面的项的数列. 指对所有 $n>p$, 满足形如 $a_n=f(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-p})$的关系式的序列$\{a_n\}$, 其中 f 为某个函数. p 是某个固定的正整数, $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 为已知数. p 称为这个递推列的阶数. 上述关系式称为递推公式, 给定 $a_1, a_2, \cdots, a_p$, 可以从它得到所有 a_n. 形如 $a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_pa_{n-p}=0$($c_1, c_2, \cdots, c_p$ 是常数)的递推公式称为线性递推公式, 相应的序列称为线性递推列. 最简单的递推列是一阶递推列, 即满足 $a_n=f(a_{n-1})$的序列$\{a_n\}$. 它又称迭代列. 等差数列与等比数列都是线性的迭代列.

递归列(recursive sequence)　即"递推列".

递推列的阶数(order of recursive sequence)　见"递推列".

递推公式(recursive formula)　见"递推列".

线性递推公式(linear recursive formula)　见"递推列".

线性递推列(linear recursive sequence)　见"递推列".

迭代列(iteration sequence)　见"递推列".

差分数列(difference sequence of numbers)　由某个数列的差分构成的数列. 给定数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 记 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$, $\Delta^2a_n=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n$, $\cdots$, 数列$\{\Delta a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\Delta^2a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\cdots$分别称为原数列$\{a_n\}$的一阶差分数列, 二阶差分数列……a_n 与 Δa_k 之间有下列关系:

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\Delta a_k.$$

类似地,

$$\Delta a_n=\Delta a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\Delta^2a_k.$$

这样, 如果某一阶差分数列的部分和容易求出, 就能求出通项 a_n.

周期列(periodic sequence)　亦称循环序列. 即定义在自然数集 N 上的周期函数.

循环数列(periodic sequence of numbers)　即“周期列”.

凸数列(convex sequence)　定义在自然数集上的凸函数.指满足条件

$$a_n \leqslant \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1})\ (n=1,2,\cdots)$$

的实数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.在几何上,这意味着xy平面上以点(n,a_n)为顶点的折线向下方凸出.当$f(x)$是区间$[0,+\infty)$上的凸函数时,$\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$是凸数列.$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$是凸数列的充分必要条件是二阶差分$\Delta^2 a_n \geqslant 0(n=0,1,2,\cdots)$,这里$\Delta^2 a_n=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n, \Delta a_n=a_{n+1}-a_n$.凸数列$\{a_n\}$有界时必收敛,并且

$$\lim_{n\to\infty} n\Delta a_n = 0, \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n.$$

一致分布数列(uniformly distributive sequence)　各项的数值均匀地分布的数列.若数列$\{x_n\}$的值分布在区间$[a,b]$内,且对于任意区间$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$,用$N_n(\alpha,\beta)$表示诸点$x_1,x_2,\cdots,x_n$中落在区间$(\alpha,\beta)$内的点的数目,若总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(\alpha,\beta)}{n}=\frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

则$\{x_n\}$称为$[a,b]$上的一致分布数列.一致分布数列的概念在数值积分理论中有用.若$\{x_n\}$在$[a,b]$上一致分布,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

对$[a,b]$上的任意连续函数f成立.

有界变差数列(sequence of bounded variation)　一类重要的数列.指其差分绝对值之和有界的数列.对这样的数列$\{x_n\}$,存在常数C,满足:

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<C,$$

其中$n=1,2,\cdots$有界变差数列必是收敛数列,但反之不一定成立.

初等函数(elementary function)　一类最常用的函数的总称.常值函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数,以及由它们通过有限次四则运算(加,减,乘,除)及有限次复合得到的函数,统称为初等函数.例如,多项式、有理函数都是初等函数.初等函数都能用一个解析式表示,在定义域上连续.初等函数的导数也是初等函数,但初等函数的原函数不一定是初等函数.不是初等函数的函数称为非初等函数.无论在理论上还是应用中,初等函数都是最重要的一类函数.研究非初等函数的方法之一,就是用初等函数,特别是用代数多项式、三角多项式或有理函数去逼近它们,或者用初等函数的极限、导数、积分去表示它们.初等函数这个名称,是刘维尔(Liouville,J.)于1834—1835年在研究哪一类函数的原函数可以表示为有限形式时引进的.但他的定义与上面所说的不同.

基本初等函数(fundamental elementary function)　初等函数中最基本的一类函数.在文献中,把哪些函数称为基本初等函数是不一致的.范围最广的一种提法是:常值函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数与反三角函数统称为基本初等函数.范围最窄的提法是常值函数$y=1$,恒等函数$y=x$,正弦函数与以e为底的指数函数$y=\mathrm{e}^x$.它们经过数乘、有限次四则运算、有限次复合及求反函数便得到所有初等函数,故称基本初等函数.

幂函数(power function)　指形如$y=x^\alpha$(α为常数)的函数,即指数固定的幂,将底数当做自变量得到的函数.它的定义域与性质随常数α的不同而改变(见下表).通常约定指数为0的幂函数的值恒等于1.

x^α	$\alpha=n\in\mathrm{N}$		$\alpha=\frac{m}{n}(n\geqslant1$, 且$(m,n)=1)$		α为无理数
	n奇	n偶	n奇	n偶	
定义域	R		$m>0$时,R;$m<0$时,$\mathrm{R}\backslash\{0\}$	$m>0$时,$[0,+\infty)$;$m<0$时,$(0,+\infty)$	$\alpha>0$时,$[0,+\infty)$;$\alpha<0$时,$(0,+\infty)$
值域	R	$[0,+\infty)$	m奇时,同上;m偶时,见注1	同上	同上
奇偶性	奇	偶	m奇时,奇,m偶时,偶	无	/
单调性	严格增	注2	$m>0$时,严格增;$m<0$时,严格减		$\alpha>0$时,严格增;$\alpha<0$时,严格减

注1.　m偶、正时为$[0,+\infty)$,m偶、负时为$(0,+\infty)$.
注2.　在$[0,+\infty)$上严格增,在$(-\infty,0]$上严格减.

幂函数$y=x^\alpha(x>0)$,是区间$(0,+\infty)$上的,且满足方程$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$的惟一非零连续函数,无穷阶可微,并且可以在每个点$x_0(>0)$的邻域中展开为泰勒级数

$$x^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{C}_\alpha^n x_0^{\alpha-n}(x-x_0)^n \quad (|x-x_0|<|x_0|),$$

式中$\mathrm{C}_\alpha^n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

零函数(zero function)　即函数$f=0$,也就是只取值0的函数.

常值函数(constant function)　指值域为一元集的函数.当它为数值函数时常以$f(x)=\mathrm{const}$或$f(x)=c$表示,这里的const与c都是constant(常

数)的简写. 在 xy 坐标平面上,函数 $f(x)=c$ 的图象是直线 $y=c$.

恒等函数(identity function) 指自变量的值与函数值相等的函数. 即:若对所有 $x\in X$ 有 $f(x)=x$,则称函数 $f:X\to X$ 为 X 上的恒等函数,记为 I_X. I_X 是双射. $I_{\mathbb{R}}$ 的图象是直线 $y=x$. $I_{\mathbb{R}}$ 是满足下列条件的惟一的非零函数 f:

1. $f(x+y)=f(x)+f(y)\ (x,y\in\mathbb{R})$.
2. $f(xy)=f(x)f(y)\ (x,y\in\mathbb{R})$.

幂平均(power mean) 一种常用的平均. 幂为 p 时又称 p 阶平均. 正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 $p(-\infty\leqslant p\leqslant+\infty)$ 幂平均,记为 $M_p(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$M_p(\boldsymbol{a})$ 或 M_p 是如下的数:

$$M_p=\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{1/p}\ (p\neq 0),$$

$$M_0=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n},$$

$$M_{+\infty}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

$$M_{-\infty}=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

易知 M_1 是算术平均,M_0 是几何平均,M_{-1}是调和平均. M_0 与 $M_{\pm\infty}$的定义来源于

$$\lim_{p\to 0}M_p=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n},$$

$$\lim_{p\to+\infty}M_p=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

$$\lim_{p\to-\infty}M_p=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

$p>0$ 时,M_p 是 p 的增函数,即 $p<q$ 时,$M_p\leqslant M_q$,等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立. 当 $p<0$ 时,按上式定义的 M_p 不一定是 p 的增函数. 区间$[a,b]$上正的可积函数 f 的 p 幂平均是

$$M_p(f)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\quad(p\neq 0),$$

$$M_0=\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x\right),$$

$$M_{-\infty}=\inf\{f(x)\,|\,a\leqslant x\leqslant b\},$$

$$M_{+\infty}=\sup\{f(x)\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

M_1,M_0,M_{-1}分别称为 f 在$[a,b]$上的算术平均、几何、调和平均.

p 阶平均(mean of order p) 见"幂平均".

加权平均(weighted mean) 幂平均的推广. 设 $w_1,w_2,\cdots,w_n>0$,φ是区间 I 上严格单调的连续实值函数. 对 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in I$,数

$$M_\varphi^{(n)}(a,w)=\varphi^{-1}\left(\frac{w_1\varphi(a_1)+w_2\varphi(a_2)+\cdots+w_n\varphi(a_n)}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\right)$$

称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的以 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 为权的加权 φ 平均,简称加权平均. 记号 $M_\varphi^{(n)}(a,w)$是 $M_\varphi^{(n)}(a_1,a_2,\cdots,a_n;w_1,w_2,\cdots,w_n)$的缩写. 当不会混淆时,也采用 $M_\varphi(a,w)$,$M(a,w)$这样的记号. $M_\varphi^{(n)}(a,w)$的另一个名称是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的以 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 为权的拟算术 φ 平均. 这个名称来源于定义中的平均数

$$\frac{w_1\varphi(a_1)+w_2\varphi(a_2)+\cdots+w_n\varphi(a_n)}{w_1+w_2+\cdots+w_n},$$

上式是 $\varphi(a_1),\varphi(a_2),\cdots,\varphi(a_n)$的加权算术平均. 若记 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$,常把 $M_\varphi^{(n)}(a,w)$称为 a 的以 w 为权的加权 φ平均或拟算术 φ平均. 取不同的 φ得到不同的平均. 最常用的加权平均是 p 幂加权平均,亦称 p 阶加权平均. 当 $p\neq 0$时,它是取 $\varphi(x)=x^p$ 得到的,记为 $M_p^{(n)}(a,w)$或 $M_p(a,w)$. 这样,

$$M_p(a,w)=\left(\frac{w_1a_1^p+w_2a_2^p+\cdots+w_na_n^p}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\right)^{1/p}\quad(p\neq 0).$$

当 $p=0$ 与$\pm\infty$时,定义

$$M_0(a,w)=\lim_{p\to 0}M_p(a,w)=(a_1^{w_1},a_2^{w_2},\cdots,a_n^{w_n})^{1/(w_1+w_2+\cdots+w_n)},$$

$$M_{+\infty}(a,w)=\lim_{p\to+\infty}M_p(a,w)=M_{+\infty}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

$$M_{-\infty}(a,w)=\lim_{p\to-\infty}M_p(a,w)=M_{-\infty}=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

$M_{-1}(a,w)$,$M_0(a,w)$,$M_1(a,w)$依次称为 a 的以 w 为权的加权调和平均、加权几何平均、加权算术平均;当 $w_1=w_2=\cdots=w_n$ 时便得到调和平均、几何平均、算术平均. 连续变量的函数 $f(x)$在$[a,b]$上的 p 幂加权平均是

$$M_p(f,w)=\left(\int_a^b w(x)f^p(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\ (p\neq 0),$$

$$M_0(f,p)=\exp\left(\int_a^b w(x)\ln f(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b w(x)\mathrm{d}x\right),$$

$$M_{+\infty}(f,w)=\sup_{x\in[a,b]}f(x),$$

$$M_{-\infty}(f,p)=\inf_{x\in[a,b]}f(x),$$

其中 w 是定义在$[a,b]$上的正值可积函数.

p 阶加权平均(weighted mean of order p) 见"加权平均".

加权算术平均(weighted arithmetic mean) 见"加权平均".

加权几何平均(weighted geometric mean) 见"加权平均".

加权调和平均(weighted harmonic mean) 见"加权平均".

合成平均(compound mean) 一种特殊平均. 设 $a>b>0$,$a_0=a$,$b_0=b$,a_n,$b_n(n=1,2,\cdots)$分别是 a_{n-1}与 b_{n-1}的算术平均与调和平均,则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}.$$

这说明几何平均可以通过算术平均与调和平均构成的数列得到. 这种思想的一般化就是合成平均. 设 $a>b>0$, $M(a,b)$, $N(a,b)$ 表示 a,b 的某两种平均. 定义 $a_0=a$, $b_0=b$, $a_n=M(a_{n-1},b_{n-1})$, $b_n=N(a_{n-1},b_{n-1})$. 若

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ 与 } \lim_{n\to\infty} b_n$$

存在且相等, 则这个极限值记为 $M\otimes N(a,b)$. 若

$$M\otimes N(a,a)=a, M\otimes N(a,b)=M\otimes N(b,a),$$

则 $M\otimes N(a,b)$ 称为 a,b 关于 M 与 N 的合成平均. 前述结果可表示为 $G=A\otimes H$, 其中 G,A,H 分别表示几何平均、算术平均、调和平均. 对任意实数 p,q, 幂平均 M_p 与 M_q 的合成平均 $M_p\otimes M_q$ 总存在, 且 $M_p\otimes M_q=M_r$ 当且仅当 $p+q=r=0$. 合成平均可交换, 即

$$M\otimes N=N\otimes M.$$

算术-几何平均(arithmetic-geometric mean) 一种特殊平均. 即算术平均与几何平均的合成平均 $A\otimes G$. 设 $a_0=a>b=b_0>0$,

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}), b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},$$

则
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n.$$

这个极限称为 a,b 的算术-几何平均. 这是由高斯(Gauss, C. F.)命名的. 一些文献用 $A\otimes G(a,b)$ 表示这个平均. 用积分与级数表示, 有

$$\frac{1}{A\otimes G(a,b)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}},$$

$$\frac{1}{A\otimes G(1-x,1+x)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 x^{2n} \quad (|x|<1).$$

反调和平均(contra-harmonic mean) 一种特殊平均. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是正数列, $p\in\mathbf{R}$. 数

$$H_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w}) = H_p^{(n)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w}) = \sum_{k=1}^n w_k a_k^p\Big/\sum_{k=1}^n w_k a_k^{p-1}$$

称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的以 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 为权的 p 阶反调和平均. 当 $p=\pm\infty$ 时, 定义

$$H_\infty^{(n)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$
$$H_{-\infty}^{(n)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

当 $w_1=w_2=\cdots=w_n$ 时, 把

$$\sum_{k=1}^n a_k^p\Big/\sum_{k=1}^n a_k^{p-1}$$

记为 $H_p^{(n)}(\boldsymbol{a})$ 或简单地记为 H_p. 易知 H_1, H_0 分别是算术平均、调和平均. 又 $H_p^{(n)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的以 $a_k^{p-1}w_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为权的算术平均.

$H_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})$ 的基本性质如下:

1. $-\infty\leqslant p<q\leqslant+\infty$ 时, $H_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})\geqslant H_q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})$, 等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

2. $1\leqslant p\leqslant 2$ 时, $H_p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{w})\leqslant H_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})+H_p(\boldsymbol{b},\boldsymbol{w})$, $0\leqslant p\leqslant 1$ 时反向, 等号当且仅当 $p=1$ 或 $a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$ 时成立.

3. 当 $1\leqslant p\leqslant+\infty$ 时, $H_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})\geqslant M_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})$ ($M_p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{w})$ 表示 p 幂加权平均), $-\infty\leqslant p\leqslant 1$ 时反向, 等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 或 $p=1,\pm\infty$ 时成立.

指数函数(exponential function) 即固定幂的底数, 以指数作为自变量得到的函数. 指形如 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1, x\in\mathbf{R}$) 的函数. 它的全称是以 a 为底的指数函数. 指数函数 $f(x)=a^x$ 满足: $f(x)f(y)=f(x+y)$, $(f(x))^y=f(xy)$; 可以把指数函数定义为函数方程 $f(x)f(y)=f(x+y)$ ($x,y\in\mathbf{R}$) 的非零连续解. 还可采用以下方法定义指数函数: 由

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! \ (x\in\mathbf{R})$$

定义的函数称为以 e 为底的指数函数; 或由

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

定义. 它是严格增函数, 它的反函数称为自然对数函数, 记为 $\log_e x$ 或 $\ln x$. 对任意 $a>0, a\neq 1, x\in\mathbf{R}$, 定义 $a^x=\exp(x\ln a)$, 并称为以 a 为底的指数函数. 因为 $e^x=\exp(x\ln e)=\exp x$, 故可把 $\exp x$ 写成 e^x. 除了以上这些方法外, 还可以先定义对数函数, 再把指数函数定义为它的反函数. 指数函数可以推广为复指数函数.

自然对数函数(natural logarithmic function) 见"指数函数"和"对数函数".

双曲函数(hyperbolic function) 从双曲线形面积引出的如下六种函数的总称:

双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;

双曲正切 $\operatorname{th} x=\tanh x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$;

双曲余切 $\operatorname{cth} x=\coth x=\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$;

双曲正割 $\operatorname{sech} x=\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$;

双曲余割 $\operatorname{csch} x=\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$,

如图 1. "双曲"这个名称来源于在几何上这些函数与双曲线的关系, 在很大程度上类似于三角函数与单位圆的关系. 如图 2, 双曲线 $x^2-y^2=1$ 上点 P 的坐标为 $(\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta)$, 其中 θ 等于扇形 OAP 的面积的 2 倍. 这与单位圆 $x^2+y^2=1$ 上点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 的参数 θ 等于扇形 OAP 面积的 2 倍是类似的. 双曲函数的基本关系式是:

$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$,

$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$,

$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$.

从它们可以推出其他许多关系式，如

$\mathrm{sh}\,2x=2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$,

$\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2 x+\mathrm{sh}^2 x$.

$(\mathrm{sh}\,x)'=\mathrm{ch}\,x$,

$(\mathrm{ch}\,x)'=\mathrm{sh}\,x$.

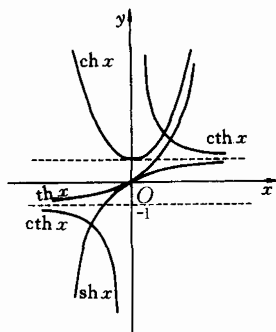


图 1

$$\mathrm{sh}\,x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,$$

$$\mathrm{ch}\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

双曲函数在工程技术中有许多应用. 它的值有表可查. 第一个系统研究双曲函数的是朗伯(Lambert, J. H.).

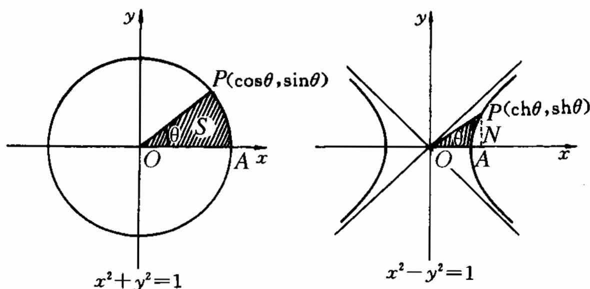


图 2

反双曲函数(inverse hyperbolic function)　双曲函数的反函数. 相应地有六种反双曲函数：

反双曲正弦

$$\mathrm{arsh}\,x=\mathrm{Arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ (x\in\mathrm{R}),$$

反双曲余弦

$$\mathrm{arch}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1),$$

$$\mathrm{Arch}\,x=\pm\mathrm{arch}\,x,$$

反双曲正切

$$\mathrm{arth}\,x=\mathrm{Arth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1).$$

它们之间有一些联系，如

$$\mathrm{arsh}\,x=\mathrm{arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\pm\mathrm{arch}\sqrt{x^2+1}$$

($x>0$ 时取正号，$x<0$ 时取负号)，

$$\mathrm{arth}\,x=\mathrm{arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

等. 其他反双曲函数有：

反双曲余切

$$\mathrm{arcth}\,x=\mathrm{Arcth}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ (|x|>1),$$

反双曲正割

$$\mathrm{Arsech}\,x=\pm\mathrm{arsech}\,x$$

$$=\pm\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

$$(0<|x|\leqslant 1),$$

反双曲余割

$$\mathrm{arcsch}\,x=\mathrm{Arcsch}\,x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\ (x\neq 0).$$

又

$$(\mathrm{arsh}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$(\mathrm{arch}\,x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\mathrm{arth}\,x)'=\frac{1}{1-x^2}.$$

反双曲函数的记号中，“ar”表示area(面积). 之所以采用这样的记号，是因为函数 $\theta=\mathrm{arsh}\,y$ 作为 $y=\mathrm{sh}\,\theta$ 的反函数，表示与等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 有关的面积(参见“双曲函数”). 也由于这个原因，有时称反双曲函数为面积函数.

面积函数(area function)　见“反双曲函数”.

对数函数(logarithmic function)　指数函数 a^x ($x\in\mathrm{R}$)的反函数，记为 $\log_a x$. 它称为以 a 为底的对数函数. 它的定义域是$(0,+\infty)$. 特别地，$a=\mathrm{e}$ 时，$\log_a x$ 记为 $\ln x$，此时 $\ln x$ 称为自然对数函数. 这是在高等数学中最常用的对数函数. 可以不用指数函数而用其他方法直接定义对数函数. 例如：

1. 定义

$$\ln x=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}\ (x>0),$$

再用 $\ln x/\ln a$ 定义 $\log_a x$ ($a\neq 1, a>0$).

2. 满足函数方程

$$f(xy)=f(x)+f(y)\ (x,y>0)$$

及 $f(a)=1$ 的惟一非零连续函数称为以 a 为底的对数函数.

对数函数是无穷阶可微的，当 $a>1$ 时严格增，当 $0<a<1$ 时严格减，对数函数的值域是$(-\infty,+\infty)$；当 $a>1$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+}\log_a x=-\infty;$$

对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0,$$

即对数函数的增长比任何幂函数的增长慢得多. 以 10 为底的对数(称为常用对数)，用于人工计算较为方便. 对数函数也可以对复变量定义.

幂指函数(power-exponential function)　指数

和底数都是变量的函数.形如

$$f(x)=u(x)^{v(x)}\ (x\in E, E\text{ 是数集})$$

的函数称为幂指函数,其中 u,v 是 E 上的函数.当不给出 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的具体形式时,总要求 $u(x)>0$ $(x\in E)$.因此,幂指函数可改写成由 $f(y)=e^y$ 与 $y=g(x)=v(x)\cdot\ln u(x)$ 复合而成的函数 $f(g(x))$,从而当 u,v 连续时它连续,u,v 可微时它也可微.

有理函数(rational function) 由有理式表示的函数,即两个多项式函数的商(分母不是零多项式).一元有理函数是由 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 表示的实函数或复函数,这里的 P,Q 是多项式,$Q(x)\neq0$.当 Q 的次数 $n\neq0$ 时,称为有理分式;$n=0$ 时,即为多项式.有理函数的导数仍是有理函数;它的原函数可以用有理函数、对数函数与反正切函数的有限组合表示.如果 P,Q 的次数分别为 m,n,有的文献把数偶 (m,n) 或数 $\max\{m,n\}$ 称为 $R(x)$ 的次数.

符号函数(signum function) 即以下面的方法定义的函数,记为(sgn):

$$\text{对 } x\in\mathrm{R}, \operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x<0);\end{cases}$$

$$\text{对 } z\in\mathrm{C}, \operatorname{sgn} z=\begin{cases}z/|z| & (z\neq0),\\ 0 & (z=0).\end{cases}$$

记号 sgn 由拉丁文 signum(符号,正负号)得来.用符号函数,可把绝对值写成 $|x|=x\operatorname{sgn}x$,在一些场合,这样做是方便的.例如 $x\neq0$ 时,$(|x|)'=\operatorname{sgn}x$,

$$\int|x|\mathrm{d}x=\int x\operatorname{sgn}x\mathrm{d}x=\operatorname{sgn}x\int x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{sgn}x+c=\frac{1}{2}x|x|+c.$$

符号函数是由克罗内克(Kronecker, L.)引进的,所以又称克罗内克函数.

克罗内克函数(Kronecker function) 即"符号函数".

狄利克雷函数(Dirichlet function) 即在有理点取值 1,在无理点取值 0 的实函数.即有理数集 Q 的特征函数.这个函数可以用二次极限表示

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x).$$

它是由狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)于 1829 年给出的,本来用于说明函数不一定有解析表达式.不过后来发现它也有上面所写的解析式.它是偶函数,以任何非零有理数为周期,处处不连续.它在任何区间上都不黎曼可积.

代数函数(algebraic function) 即满足多项式方程 $F(x,y)=0$ 的函数 $y=f(x)$.方程 $F(x,y)=0$ 可以按 y 的幂展开成

$$P_0(x)y^m+P_1(x)y^{m-1}+\cdots+P_m(x)=0,$$

式中 $P_0(x),P_1(x),\cdots,P_m(x)$ 是 x 的多项式.$P_0(x)\neq0$,按 $x\in\mathrm{C}$(复数域)或 C^n(复 n 维空间)分别称所确定的函数 f 为一元的或 n 元的代数函数.代数函数是解析函数.当 $m=1$ 时,得到有理函数;当 $m=2,3,4$ 时,得到用开方或开立方表示的无理函数.当 $m\geqslant5$ 时,上述方程一般不能用代数运算求解,即代数函数一般不能用有理、无理函数或其他初等函数表示.在代数函数的系统理论中,一般是将它看做复变函数来研究.从 19 世纪初阿贝尔(Abel, N. H.)开始研究代数函数以来,它的丰富内容已成为函数论的重要部分,并成为代数几何学的来源之一.

超越函数(transcendental function) 非代数函数.

线性函数(linear function) 指一次函数及其推广.有两种理解:

1. 一次函数的别称(参见本卷《初等代数》同名条).

2. 在现代的数学文献中,按照函数(映射)的定义,也常将线性空间上的线性算子(线性变换)称为线性函数.

分式线性函数(fractional linear function) 由一次有理分式表示的函数.即形如

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{b_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n}$$

的 n 元函数 L,式中 $a_k,b_k(k=0,1,\cdots,n)$ 是常数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 取实数值,且

$$\sum_{k=0}^{n}|b_k|>0.$$

当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时就是线性函数.若 $n=1$,且 $a_0b_1\neq a_1b_0$,则函数

$$y=L(x)=\frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x}$$

的图象是等轴双曲线,以 $x=-b_0/b_1$ 与 $y=a_1/b_1$ 为渐近线.若 $n=2$,且

$$\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ b_0 & b_1 & b_2\end{pmatrix}$$

的秩为 2 时,函数 L 的图象是双曲抛物面.

复分式线性函数

$$w=\frac{a_0+a_1z}{b_0+b_1z}\ (z\text{ 为复变量}, a_0,a_1,b_0,b_1\text{ 为复数})$$

在复变函数论中有着重要的作用.

齐次函数(homogeneous function) 齐次多项式的推广.p 取任意值的 p 次齐次函数的统称.设集合 $D\subseteq\mathrm{R}^n$ 满足条件:对任意 $\boldsymbol{x}\in D$ 及正数 t,$t\boldsymbol{x}\in D$,对于数值函数 $f:D\to\mathrm{R}$(或 C),若有实数 p,使对任意 $\boldsymbol{x}\in D$ 及所有正数 t,有 $f(t\boldsymbol{x})=t^pf(\boldsymbol{x})$,则 f 称为 p 次齐次函数.n 元多项式为 p 次齐次函数的充分必要条件是它仅含次数为 p 的项.两个次数为 p,q 的齐次函数的积、商、复合仍是齐次函数,其次数分别为 $p+q,p-q,pq$.非零常值函数是零次齐次函

数.若

$$D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{R}^n\,|\,x_i>0,i=1,2,\cdots,n\},$$

则定义在集合 D 上的函数 f 为 p 次齐次函数的充分必要条件是存在定义在集合

$$\left\{\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1}\right)\in\mathrm{R}^{n-1}\,\middle|\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\right\}$$

上的 $n-1$ 元函数 g,使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^p g\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1}\right).$$

若 D 是开集,且 f 在 D 上可微,则 f 是 p 次齐次函数的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=pf.$$

这个结论称为关于齐次函数的欧拉定理,而上述等式称为欧拉公式.

齐次函数的欧拉公式(Euler formula for homogeneous function) 见"齐次函数".

线性齐次函数(linear homogeneous function) 既是齐次又是(多元)线性的函数.即常数项为零的线性函数.又称线性型.它的一般形式是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\,(a_1,a_2,\cdots,a_n\text{ 是常数}).$$

它是一次齐次函数,但一次齐次函数不一定是线性齐次函数,如 $g(x,y)=(xy^2)^{1/3}$.

阶梯函数(step function) 图象成阶梯状的函数.若 f 是定义在区间$[a,b]$上的(一元)函数,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.对 $x\in(x_{i-1},x_i)$有 $f(x)=c_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 f 称为阶梯函数.在 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$处 f 的值可任意取.上述定义中的$[a,b]$可以是任意有界区间.若 f 定义在无界区间上,且在该区间的任意有界子区间上f的限制是阶梯函数,则称 f 是该无界区间上的阶梯函数.一般地,若 I 是 R^n 中的 n 维区间,分法 P 把它分成 m 个 n 维区间 $I_1,I_2,\cdots,I_m$,且对所有 $\boldsymbol{x}\in I_k^0$(I_k 的内部),$f(\boldsymbol{x})=c_k(k=1,2,\cdots,m)$,则称$f$为阶梯函数,又称为分片常值函数.在积分理论中,阶梯函数起着重要作用.

分片常值函数(piecewise constant function) 见"阶梯函数".

黎曼函数(Riemann function) 指由黎曼(Riemann,(G. F.)B.)提出的,一般用来说明黎曼可积函数可以有稠密间断点集的函数.即下列函数

$$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},$$

$$f(x)=\begin{cases}1/q & x=p/q\ (p,q\text{ 互质},q\geqslant1),\\ 0 & x=\text{无理数},\end{cases}$$

$$f(0)=1.$$

它以 1 为周期,在无理点连续,在有理点间断,对任意 $x_0\in\mathrm{R}$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.它在任何有限区间上黎曼可积,且积分为零.

极限理论

极限(limit) 数学分析的基础概念.它指的是变量在一定的变化过程中,从总的来说逐渐稳定的这样一种变化趋势以及所趋向的数值(极限值).极限方法是数学分析用以研究函数的基本方法,分析的各种基本概念(连续、微分、积分和级数)都是建立在极限概念的基础之上,然后才有分析的全部理论、计算和应用.所以极限概念的精确定义是十分必要的,它是涉及分析的理论和计算是否可靠的根本问题.历史上是柯西(Cauchy,A.-L.)首先较为明确地给出了极限的一般定义.他说,"当为同一个变量所有的一系列值无限趋近于某个定值,并且最终与它的差要多小就有多小"(《分析教程》,1821),这个定值就称为这个变量的极限.其后,外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))按照这个思想给出严格定量的极限定义,这就是现在数学分析中使用的 ε-δ 定义或 ε-N 定义等(参见"数列的极限"和"函数的极限").从此,各种极限问题才有了切实可行的判别准则.在分析学的其他学科中,极限的概念也有同样的重要性,在泛函分析和点集拓扑等学科中还有一些推广.

极限思想的萌芽可以追溯到古希腊时期及中国战国时期.现代形式的极限概念是从古希腊的穷竭法逐渐发展而来的,但同时期的中国哲学家庄周也认识到"一尺之棰,日取其半,万世不竭"(《庄子·天下篇》).公元 263 年,魏晋时代的刘徽创立了与穷竭法相近的割圆术,用圆内接正多边形的面积逼近圆面积,相当于建立了极限式

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

极限概念首次出现于沃利斯(Wallis,J.)的《无穷算术》中.牛顿(Newton,I.)在其《自然科学的哲学原理》一书中明确使用了极限这个词并作了阐述.但极限作为微积分的工具与基础却迟至 18 世纪下半叶,才由达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)等人认识到.真正把微积分建立在极限概念的基础上则是柯西完成的.

数列的极限(limit of number sequence) 当数列的项的序号无限增大时,该数列的变化趋势.设$\{a_n\}$为实数列,若对于某个实数 a,任意给定正数 ε,必存在正整数 N,使得对于所有正整数 $n>N$,有$|a_n-a|<\varepsilon$,就称 a 是$\{a_n\}$的极限,或$\{a_n\}$收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

或

$$a_n\to a\quad(n\to\infty).$$

这也可说成：对 a 的任一邻域 V，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$a_n\in V$. 通常笼统说"存在正整数 N，使得 $n>N$ 时"一语可以用"当 n 充分大时"代替. 只要数列 $\{a_n\}$ 有确定的极限，就称 $\{a_n\}$ 的极限存在.

数列的极限有下列主要性质：

1.（惟一性） 如果 $\{a_n\}$ 同时收敛于 a 和 b，则

$$a=b.$$

2.（有界性） 收敛数列必有界.

3.（保号性） 若 $\{a_n\}$ 收敛于 a，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时，数 a_n 与 a 有相同的符号.

4.（保序性） 若 $n\to\infty$ 时，$a_n\to a$，$b_n\to b$，且当 n 充分大时，$a_n\leqslant b_n$，则 $a\leqslant b$.

5.（夹逼性） 若 n 充分大时，$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=a，则\lim_{n\to\infty}b_n=a.$$

6.（四则运算性质） 若

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a，\lim_{n\to\infty}b_n=b，$$

则
$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b，\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab，$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\ (b\neq 0).$$

7.（柯西准则） 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{a_n\}$ 是基本列.

8. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\{a_n\}$ 的任意子列 $\{a_{k_n}\}$ 也收敛于 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{k_n}=a$；反之，若 $\{a_n\}$ 的任意子列都收敛于同一个数 a，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

9.（波尔查诺-外尔斯特拉斯定理） 有界数列必有收敛子列.

10.（单调收敛原理） 有上界的增数列，或有下界的减数列，都一定是收敛的.

点列的极限（limit of a sequence of points） 一系列点当其序号无限增大时，它们无限接近某一定点的变化趋势. 若 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 分别是 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点列和定点，当它使得数列 $|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|$ 当 $k\to\infty$ 时，极限为 0，则点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 称为收敛于 $\boldsymbol{a}$，记为

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{a}\ 或\ \boldsymbol{a}_k\to\boldsymbol{a}\quad(k\to\infty).$$

这里 $|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|$ 表示 n 维向量 $\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}$ 的模，它等于点 $\boldsymbol{a}_k$ 与点 $\boldsymbol{a}$ 之间的 n 维距离. 点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的 ε-N 定义，可由数列 $|\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}|\to 0$ 按数列极限的 ε-N 定义叙述. 点列 $\boldsymbol{a}_k$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的定义也可叙述成：对 $\boldsymbol{a}$ 的任意邻域 V，存在正整数 K，使得当 $k>K$ 时，$\boldsymbol{a}_k\in V$. 点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 中的点 $\boldsymbol{a}_k$ 和点 $\boldsymbol{a}$ 都有 n 个分量（坐标），于是，点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}$ 收敛于点 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：当 $k\to\infty$ 时，$\boldsymbol{a}_k$ 的任意一个分量（坐标）收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的相应分量. 一维空间中（即直线上）点列的极限与数列的极限完全一致. 收敛数列的很多性质都可推广到（任意 n 维空间中的）收敛点列上来，例如柯西准则、收敛子列原理、收敛列的惟一性与有界性等.

收敛性（convergence） 数学分析的基本概念之一. 它与"有确定的（或有限的）极限"同义，"收敛于……"相当于说"极限是……（确定的点或有限的数）". 例如"当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{1/n\}$ 有极限，极限（值）为 0"与"当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{1/n\}$ 收敛于 0"完全一样. 但"$1/x$ 当 $x\to 0$ 的极限为 ∞"不能说成"$1/x$ 当 $x\to 0$ 时收敛于 ∞"（因 ∞ 不是有限数）. 在一些一般性叙述中，收敛和收敛性这两个词（在外语中通常是同一个词）有时泛指函数或数列是否有极限的性质，或者按哪一种意义（什么极限过程）有极限. 在这个意义下，数学分析中所讨论的收敛性的不同意义（不同类型的极限过程）大致有：对数列（点列）只讨论当其项序号趋于无穷的收敛性；对一元和多元函数最基本的有自变量趋于定值（定点）的和自变量趋于无穷的这两类收敛性，此外，对多元函数还有沿特殊路径的和累次极限意义下的收敛性；对函数列（级数）有逐点收敛和一致收敛. 不收敛称为发散.

发散（divergence） 见"收敛性".

收敛序列（convergent sequence） 有有限极限的序列. 称 $\{a_n\}$ 是收敛序列，只说明它有有限极限，并未说明其极限值是什么. 序列可以是数列，也可以是函数列. 收敛序列的具体定义和性质可参见有关条目.

发散序列（divergent sequence） 不收敛的序列. 发散的实数列分两类，一类是有无限极限 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的，称为定向发散序列，其他的称为不定向发散序列. 例如，数列 $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$，当 $|q|<1$ 及 $q=1$ 时，分别收敛于 0 与 1；当 $q\leqslant -1$ 时，不定向发散；当 $q>1$ 时，定向发散于 $+\infty$.

定向发散序列（directed divergent sequence） 见"发散序列".

不定向发散序列（undirected divergent sequence） 见"发散序列".

数 e（number e） 一个重要的常数. 即自然对数的底.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\\&=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\\&=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots\end{aligned}$$

e 这个记号是欧拉（Euler，L.）于 1748 年在《无穷小分析引论》一书中正式引进的. 埃尔米特（Hermite，C.）于 1873 年证明了 e 是超越数.

欧拉常数（Euler constant） 即常数

$$\begin{aligned}c&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\\&=0.577\ 215\ 664\ 90\cdots\end{aligned}$$

它是由欧拉（Euler，L.）首先指出的（1740）. 其存在

性可从数列

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right\}$$

递减且有下界得到. 迄今尚不知道它是有理数还是无理数.

沃利斯公式(Wallis formula)　圆周率 π 的有理数极限表达式. 形如

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1}.$$

它可以通过

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (m\text{ 为偶数}),\\[2mm] \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & (m\text{ 为奇数}),\end{cases}$$

得到. 这个公式最早由沃利斯(Wallis, J.)得到,并于 1655 年发表. 他原来的结果是

$$\frac{4}{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots$$

这不仅是数学史上较早的无穷乘积的例子,也是第一个将 π 表为容易计算的有理数列的极限的公式. 但对 π 的计算,现在已有快速的方法.

函数的极限(limit of a function)　在自变量的某个变化过程中,相应函数值的变化趋势. 按自变量的变化过程可分为两类:

1. 自变量趋于定值(定点)时的极限. 若 A 是有限实数,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n(n\in\mathbf{N}_+)$ 为定点,函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 的某个空心邻域内有定义,对任给的正数 ε,存在 $\delta>0$,使得对于一切 $\boldsymbol{x}\in U^{\circ}(\boldsymbol{a},\delta)$($\boldsymbol{a}$ 的以 δ 为半径的空心邻域),有 $|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$,则 A 称为 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时 f 的极限,记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A.$$

2. 自变量趋于无穷时的极限. 若函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在某个中心在原点的 n 维球外有定义,A 为有限实数,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得对于一切满足 $|\boldsymbol{x}|>M$ 的 $\boldsymbol{x}$,有 $|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$,则 A 称为 $\boldsymbol{x}\to\infty$ 时 $f(\boldsymbol{x})$ 的极限,记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}f(\boldsymbol{x})=A.$$

当 f 只在某个集合 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上有定义时,只要 f 再满足相应的补充条件,也可以定义 f 在 D 上的上述两类极限. 如上述 1 的情形,只需 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的某个空心邻域与 D 的交集上有定义,$\boldsymbol{a}$ 为 D 的聚点即可,这时定义中的"一切 $\boldsymbol{x}\in U^{\circ}(\boldsymbol{a},\delta)$"应改为"一切 $\boldsymbol{x}\in U^{\circ}(\boldsymbol{a},\delta)\cap D$",而 A 称为在 D 上当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 的极限. 对上述 2 的情形,也可作类似的修改. 在上述情形中,函数 f 也可以有无穷极限(参见"无穷极限"). 函数极限有与数列极限类似的主要性质(参见"数列极限"),但保号性与有界性应改为局部保号性和局部有界性,即只在 $\boldsymbol{a}$ 点的某邻域内函数才具有相应性质. 函数极限与数列极限的最重要的关系,由海涅定理反映.

重极限(multiple limit)　多元函数的一种极限. 因为对 $n(\geqslant 2)$ 元函数而言,极限

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$$

中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 意味着同时有 $x_1\to a_1,x_2\to a_2,\cdots,x_n\to a_n$,故称相应的极限为 n 重极限. 作为多元函数特例的多重数列的极限也称为重极限. 如二重极限

$$\lim_{m,n\to\infty}a_{mn}.$$

累次极限(repeated limits)　亦称逐次极限. 对多元函数的各个变量逐个取极限而得到的函数极限. 例如,对二元函数 $u=f(x,y)$ 与点 (a,b),有两种累次极限:

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y),$$

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y).$$

前者即

$$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a}f(x,y)),$$

指先固定 y,让 $x\to a$ 取极限(若极限存在,则它是 y 的函数),再令 $y\to b$. 类似地理解后者的含义. 二元函数的这两种累次极限称为二次极限. 一般地,n 元函数的累次极限称为 n 次极限. 函数的某一个累次极限存在不能保证它的其他的累次极限也存在;即使都存在,也不一定相等. 累次极限是与重极限完全不同的另一类极限. 重极限存在时累次极限不一定存在,累次极限存在且相等时重极限也不一定存在.

逐次极限(successive limits)　即"累次极限".

方向极限(directional limit)　点(自变量)沿一射线变动时函数的极限. 即在 $\mathbf{R}^n$ 中,自变量 $\boldsymbol{x}$ 沿某方向趋于 $\boldsymbol{a}$ 时函数的极限. $n=1$ 时,只有两种方式:$\boldsymbol{x}$ 沿 x 轴从左方或从右方趋于 $\boldsymbol{a}$. 这时得到左、右极限. 当 $n>1$ 时,有无穷个方向极限:若 $\boldsymbol{x}$ 沿方向向量为 $\boldsymbol{v}$ 的直线趋于 $\boldsymbol{a}$,则直线方程为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$,方向极限可表示为

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}}}f(\boldsymbol{x})=\lim_{t\to 0+}f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}).$$

当 $n=2$ 且 $\boldsymbol{a}=0$ 时,$\boldsymbol{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$,$(x,y)\to(0,0)$ 的方向极限可表示为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=r\cos\theta,y=r\sin\theta}}f(x,y)=\lim_{r\to 0+}f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

$n>1$ 时,从重极限存在可知(在同一点)所有方向极限存在且相等,反之不然.

沿曲线的极限(limit along a curve)　在 $\mathbf{R}^n(n>1)$ 中,自变量 $\boldsymbol{x}$ 沿曲线趋于 $\boldsymbol{a}$ 时函数的极限. 若曲线的参数表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)(0\leqslant t\leqslant 1,\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{a})$,则沿

该曲线的极限就是

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x=\varphi(t)}} f(\boldsymbol{x})=\lim_{t\to 0+} f(\boldsymbol{\varphi}(t)).$$

它是函数关于其定义域子集的极限的特例，方向极限又是它的特例. 若重极限存在，则沿任何曲线的极限都存在且相等.

上极限(upper limit)　在某一极限过程中，变量的收敛子列的极限值中的最大者. 分数列与函数两种情形：

1. $\{a_n\}$是数列，取其收敛子列(即有极限的那种子列)，考虑它们的极限，这些极限值之中的最大者就称为$\{a_n\}$的上极限，记为$\overline{\lim}\, a_n$ 或 $\lim\sup a_n$. 可以证明，任何实数列$\{a_n\}$的上极限，

$$\overline{\lim}\ a_n = \lim_{N\to\infty}\ \sup_{n>N}\{a_n\}.$$

2. 若 f 是 n 元函数($n\geqslant 1$)，$\boldsymbol{a}\in\mathrm{R}^n$，则极限值

$$\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta} f(\boldsymbol{x})$$

称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 点的上极限，记为

$$\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}}\ f(\boldsymbol{x})\ 或\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\sup\ f(\boldsymbol{x}).\ \overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}}\ f(\boldsymbol{x})$$

是所有以 $\boldsymbol{a}$ 为极限的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$对应的数列$\{f(\boldsymbol{x}_k)\}$的极限(若存在)之中的最大者. 任意函数 $f(x)$在任一点 $\boldsymbol{a}$ 一定有上极限(可能等于$+\infty$).

下极限(lower limit)　变量的收敛子列的极限的最小者. 下极限可与上极限在某种意义下相反地定义(参见"上极限")：

1. 数列$\{a_n\}$的下极限$\underline{\lim}\, a_n$(也记为 $\lim\inf a_n$)是它的收敛子列的极限的最小者，即

$$\underline{\lim}\, a_n=\lim_{N\to\infty}\inf_{n>N}\{a_n\}.$$

2. 函数 f 在点 $\boldsymbol{a}\in\mathrm{R}^n$ 的下极限

$$\underline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}} f(\boldsymbol{x})(或\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\inf f(\boldsymbol{x}))$$

是

$$\lim_{\delta\to 0}\ \inf_{0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta} f(\boldsymbol{x}).$$

上极限与下极限都可以对其他极限过程定义. 任何情形的下极限一定会有的(可能是$-\infty$). 对任意函数 f 和 $\boldsymbol{a}\in\mathrm{R}^n$，存在下列关系：

$$\underline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}}\ f(\boldsymbol{x})\leqslant\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}}\ f(\boldsymbol{x}),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n.$$

极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$(或$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$)存在的充分必要条件是：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\ 与\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n(或\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}}\ f(\boldsymbol{x})与\underline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}}\ f(\boldsymbol{x}))$$

都存在并相等，对数列有：$\lim a_n=\underline{\lim}\, a_n=\overline{\lim}\, a_n$. 对函数也一样有：

$$\lim f(\boldsymbol{x})=\underline{\lim} f(\boldsymbol{x})=\overline{\lim} f(\boldsymbol{x}).$$

单侧极限(one-sided limit)　一元函数的一种特殊形式的极限. 设 f 为一元函数，如果 $a\in\mathrm{R}$ 为定点(常数)，而函数 f 在 $D_+=\{x\mid x\in\mathrm{R},x>a\}$上当 $x\to a$ 时的极限为 A，则称 $f(x)$在点 a 的右极限为 A，记为

$$\lim_{x\to a+} f(x)=A;$$

若函数 f 在 $D_-=\{x\mid x\in\mathrm{R},x<a\}$上当 $x\to a$ 时极限为 B，则称 $f(x)$在点 a 的左极限为 B，记为

$$\lim_{x\to a-}\ f(x) = B.$$

左(右)极限的名称，来自于所讨论的极限，是当自变量 x 沿数轴从左侧(右侧)趋于点 a 的. 函数 f 在点 a 的左、右极限(如果存在)常记为 $f(a-0)$，$f(a+0)$(或 $f(a-)$，$f(a+)$). 函数的左、右极限统称单侧极限. 当 $x\to x_0$ 时函数存在(双侧)极限的充分必要条件是它在 x_0 处的两个单侧极限存在且相等(参见"函数的极限").

左极限(left limit)　见"单侧极限".

右极限(right limit)　见"单侧极限".

不定式(indeterminate form)　几种特殊求极限的式子. 即在求当 $x\to a$(a 为实数或$\pm\infty$或∞)某函数的极限时，如果出现下列不能直接用运算法则确定其极限的形式：

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty,$$

则称该函数为 $x\to a$ 时的不定式. 如 $x\to 0$ 时，

$$\frac{a^x-b^x}{x}$$

是$\frac{0}{0}$型，x^x 是 0^0 型等. 不定式的各种形式中，最基本的是$\frac{0}{0}$型，因为其他类型都可化为$\frac{0}{0}$型；对$\frac{\infty}{\infty}$型

$$\frac{f(x)}{g(x)}(f(x)\to\infty,g(x)\to\infty),$$

由

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{g(x)}\Big/\frac{1}{f(x)}$$

可化为$\frac{0}{0}$型；对 $0\cdot\infty$型，由

$$f(x)g(x)=f(x)/\frac{1}{g(x)}=g(x)/\frac{1}{f(x)}$$

可化为$\frac{0}{0}$型；对$\infty-\infty$型 $f(x)-g(x)$，先将其化为

$$\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right)\Big/\frac{1}{f(x)g(x)},$$

也变成$\frac{0}{0}$型；对 $0^0,\infty^0,1^\infty$型可先取对数化为 $0\cdot\infty$型，再化为$\frac{0}{0}$型. 这样，为了求不定式的极限，掌握求$\frac{0}{0}$型不定式的极限是最基本的. 在简单情形，可以通过约去分子与分母的公因式把$\frac{0}{0}$型化为非不定式的极限. 求$\frac{0}{0}$型不定式的极限的一种常用方法是洛必达法则(参见"洛必达法则")，另一种基本方法是用

带佩亚诺余项的泰勒公式.设

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0,$$

$$f(x)=\alpha(x-a)^p+o((x-a)^p),$$

其中 $\alpha(x-a)^p$ 是 $f(x)$ 在 a 处的泰勒公式中第一个系数不等于 0 的项.类似地设

$$g(x)=\beta(x-a)^q+o((x-a)^q)(\beta\neq 0),$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to a}o((x-a)^{p-q})$$

$$=\begin{cases}0 & (p>q),\\ \alpha/\beta & (p=q),\\ \infty & (p<q).\end{cases}$$

无穷小(量)(infinitesimal) 以 0 为极限的变量.也就是在变化过程中绝对值最终将小于任何正数的变量.一个变量在某极限过程中是无穷小量且不为 0,则其倒数在同一极限过程中是无穷大量;反之亦然.莱布尼茨(Leibniz,G. W.)最初用这个词表示大于 0 且小于任何正数的常量,严密化以后的数学分析认为,莱布尼茨说的这种量是不存在的,并如上严格定义了无穷小量.正确理解无穷小,是正确理解极限的关键.

无穷大(量)(infinity) 具有无穷极限的变量(数列、函数、函数列等).即在变化过程中其绝对值最终将超过任何有限数的变量.符号∞是沃利斯(Wallis,J.)引进的.

无穷小的阶(order of an infinitesimal) 反映无穷小量变化快慢的概念.若 $x\to a$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小(无穷大),

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则称 $x\to a$ 时,$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶(低阶)的无穷小(无穷大),或称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶(高阶)的无穷小(无穷大);若对于某个正数 k,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{|g(x)|^k}$$

为非零实数,则称 $x\to a$ 时,$f(x)$ 是关于 $g(x)$ 的 k 阶无穷小(无穷大).特别地,当 $k=1$ 时,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶.若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

则称 $x\to a$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 等价,记为 $f(x)\sim g(x)$ ($x\to a$ 时).上述所有 $x\to a$ 均可换成 $x\to a+$ 或 $x\to a-$.当 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小时,表示 $f(x)$ 趋于零的速度比 $g(x)$ 趋于零的速度快得多.当它们同阶时速度相当.

无穷大的阶(order of infinity) 见"无穷小的阶".

无穷极限(infinite limit) 变量在变化过程中其绝对值无限变大的趋势.主要有以下几种情形:

1. $\{a_n\}$ 为实数列时.若对于任意正数 M,总存在相应的自然数 N,使得只要 $n>N$,就有 $a_n>M$,则称 $\{a_n\}$ 的极限为正无穷大,记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty;$$

若对于任意正数 M,总存在相应正整数 N,使得只要 $n>N$,就有 $a_n<-M$,则称 $\{a_n\}$ 的极限为负无穷大,记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty.$$

2. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 为 $\mathrm{R}^m(m>1)$ 中的点列时.若有

$$\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{a}_n|=+\infty,$$

则称 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 的极限为无穷大,记为

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n=\infty.$$

3. f 为一元函数时.若对于任意正数 M,总存在正数 X,使得只要 $x>X$,就有 $f(x)>M$,则称 $x\to+\infty$ 时,函数 f 的极限是正无穷大,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty;$$

若是对上面所说的 M 及 X,只要 $x<-X$,就有 $f(x)>M$,则称 $x\to-\infty$ 时,f 的极限为正无穷大.类似于数列的情形,还可以给出

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

和

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

的定义.

4. f 为多元函数时.若对于任给的 $M>0$,总有 $X>0$,使得当 $|\boldsymbol{x}|>X$ 时,有 $f(\boldsymbol{x})>M(f(\boldsymbol{x})<-M)$,则称 $\boldsymbol{x}\to\infty$ 时 $f(\boldsymbol{x})$ 的极限为正无穷大(负无穷大),记为

$$\lim_{x\to\infty}f(\boldsymbol{x})=+\infty\ (\lim_{x\to\infty}f(\boldsymbol{x})=-\infty)$$

(参见"函数的极限").

5. f 为 n 元函数($n\geqslant 1$)时.若 $\boldsymbol{x}_0\in\mathrm{R}^n$ 为定点,且对于任给的 $M>0$,存在 $\delta>0$,使当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 时,有 $f(\boldsymbol{x})>M(f(\boldsymbol{x})<-M)$,则称当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 时 f 的极限为正无穷大(负无穷大),记为

$$\lim_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})=+\infty\ (\lim_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})=-\infty).$$

在其他的极限过程的情形中(如一元函数的单侧极限,多元函数的沿曲线的极限等),也都可以类似地定义无穷极限.在所有这些情形中,也可以说该变量(数列或函数)发散于∞(无穷大).由于这时变量的绝对值无限变大,也算有确定的变化趋势,因而称极限为无穷大,但∞不是确定的数,所以不能说极限存在.

记号 O 与 o(notations O and o) 用于表示在某一极限过程中两个变量数值大小关系的记号.将 O 读作大 O,o 读作小 o.若 f 与 g 都在点 a 的某一空心邻域内有定义,则 $f(x)=O(g(x))(x\to a)$ 表示

存在正数 M,使得对于这一空心邻域中任意 x,有 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$;而 $f(x)=o(g(x))(x\to a)$则表示

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

对于数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,$a_n=O(b_n)$和 $a_n=o(b_n)$分别表示:存在常数 $M>0$,使对任意 n,有

$$|a_n|\leqslant M|b_n|$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=0.$$

上面的 $x\to a$ 可换成在 a 点的单侧极限或 $x\to\infty$ 以及其他极限过程,只是空心邻域需相应地改成单侧邻域. ∞的邻域等. 使用记号 O 与 o 时必须注明或说明自变量的变化过程,$x\to a$ 时的 $O(1)$与 $o(1)$分别表示 $x\to a$ 时的有界量与无穷小量(其他极限过程情形也一样). 记号 O 与 o 主要用在说明在同一极限过程中两个无穷小量(或无穷大量)的数量级大小关系,以避免书写和叙述中烦琐的细节,例如可以写 $1-\cos x=O(x^2)(x\to 0)$. 若 $f(x)$和 $g(x)$当 $x\to a$ 时都是无穷小,则 $f(x)=O(g(x))(x\to a$ 时)表示 $f(x)$是 $g(x)$的同阶或高阶的无穷小(也可能二者不能比较,即极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

不存在),而 $f(x)=o(g(x))(x\to a)$则说明 f 一定是 g 的高阶无穷小. O 和 o 并不是确定量或函数关系的记号,例如 $x\to 0$ 时的 $o(x)$可以表示 $x\to 0$ 时除以 x 后极限为 0 的 x 的任一函数,因此有$O(o(f))=o(f)$,$O(f)+o(f)=O(f)$及 $o(O(f))=o(f)$等关系. 这两个记号是兰道(Landau, E. G. H.)于1909 年引进的,故也称兰道记号. 这两个字母是德文 ordnung(阶)的第一个字母.

兰道记号(Landau symbols)　见“记号 O 与 o”.

无穷小的主部(principal part of an infinitesimal)　与给定无穷小量等价的一个无穷小量. 如果 f 和 g 都是同一极限过程中的无穷小量,而且 $f(x)-g(x)$是比 $g(x)$高阶的无穷小量,即$f(x)=g(x)+o(g(x))$(在上述极限过程中),则$g(x)$称为 $f(x)$的主部. 这时 $f(x)$也是 $g(x)$的主部. 一个无穷小的主部一般取较它形式上简单而与它等价的无穷小量,例如,称 x 是$\sin x$ 当 $x\to 0$ 时的主部.

渐近相等(asymptotically equal)　无限接近的两函数之间的关系. 指在某极限过程中,值可以无限接近的两个函数 f,g,若在 a 的某空心邻域内满足 $f=hg$,并且函数 h 满足

$$\lim_{x\to a}h(x)=1,$$

则称 $x\to a$ 时$f(x)$与$g(x)$渐近相等,记为$f(x)\sim g(x)(x\to a)$或 $f\sim g(x\to a)$,读作$f(x)$渐近等于 $g(x)$. 若$g(x)$在该邻域内没有零点,则 $f(x)\sim g(x)$,当且仅当

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

特别地,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1,$$

则 $n\to\infty$时,$a_n\sim b_n$. 例如 $n\to\infty$时,

$$\frac{1}{n}\sim\sin\frac{1}{n},$$

$x\to 0$ 时,$x^2\sim\sin x^2$,$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$. 关系$\sim$是等价关系,故渐近相等又称为 f 与 g 等价. 若 $n\to\infty$时 $a_n\sim b_n$,则$\sum a_n$ 与$\sum b_n(a_n,b_n>0)$同时收敛或发散. 若 $x\to a$ 时 $f\sim f_1$,$g\sim g_1$,则从

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}与\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

之一存在,可知另一也存在且两者相等.

渐近公式(asymptotic formula)　两个函数之间的包含 o,O(小 o,大 O)的等式. 例如:$\sin x=x+o(x^2)(x\to 0)$,$e^x=1+x+O(x^2)(x\to 0)$,$x^3+x\sim x^3(x\to\infty)$等. 当平面曲线 $y=f(x)$有渐近线 $y=kx+b$ 时,$f(x)=kx+b+o(1)$.

渐近多项式(asymptotic polynomial)　逐渐接近于某一确定函数的多项式. 若 f 是区间$(a,+\infty)$上的实函数,$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,且 $x\to+\infty$时,$f(x)=P_n(x)+\varepsilon(x)$,其中

$$\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0,$$

则 P_n 称为 f 的渐近多项式. P_n 为 f 的渐近多项式,当且仅当

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{k-1}x^{n-k+1})}{x^{n-k}}=a_k$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n).$$

即当 $x\to+\infty$时,$f(x)\sim P_n(x)$.

曲线的渐近线(asymptote of a curve)　与给定平面曲线无限接近的直线. 设有平面曲线 Γ 与直线 l,若 Γ 上的点 P 沿 Γ 的某个方向无限远移时,P 与 l 的距离趋于零,则称 l 为 Γ(沿此方向)的渐近线. 若 Γ 的方程为 $y=f(x)$,则 Γ 有垂直渐近线 $x=a$,当且仅当

$$\lim_{x\to a+}f(x)=+\infty\ (或-\infty;a+可换成\ a-);$$

Γ 有水平渐近线 $y=b$,当且仅当

$$\lim_{x\to+\infty(或-\infty)}f(x)=b;$$

Γ 有斜渐近线 $y=kx+b(k\neq 0)$,当且仅当

$$\lim_{x\to+\infty(或-\infty)}\frac{f(x)}{x}=k,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty(或-\infty)}(f(x)-kx)=b.$$

垂直渐近线只可能在函数的间断点处存在,而另两

种渐近线只在定义域无界时才可能有.若

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=k,$$

则 k 就是斜渐近线的斜率.若 Γ 的方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$,则 Γ 有垂直渐近线 $x=a$,当且仅当对某个数 t_0,

$$\lim_{t\to t_0+(\text{或}t_0-)} x(t)=a,$$

$$\lim_{t\to t_0+(\text{或}t_0-)} y(t)=\infty;$$

Γ 有水平渐近线 $y=b$,当且仅当 $t\to t_0+$ 或 t_0- 时, $x(t)\to\infty, y(t)\to b$;Γ 有斜渐近线 $y=kx+b(k\neq 0)$,当且仅当 $t\to t_0+$ 或 t_0- 时, $x(t)\to\infty, y(t)\to\infty$, $y(t)/x(t)\to k, y(t)-kx(t)\to b$.当 Γ 由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 给出时,可化为参数式求渐近线,也可直接求.Γ 有渐近线 $\rho\sin(\alpha-\theta)=c$,当且仅当

$$\lim_{\rho\to\infty}\theta(\rho)=\alpha,\quad \lim_{\theta\to\alpha+(\text{或}\alpha-)}\rho(\theta)\sin(\alpha-\theta)=c.$$

极限点(limit point) 点列的收敛子列的极限.$\boldsymbol{a}$ 是 R^n 中的点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 的极限点的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}$ 的任何邻域内有 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 的无穷多项,或等价地,对任意正整数 n_0,在 $\boldsymbol{a}$ 的任何邻域内都有 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 的下标 $\geqslant n_0$ 的项.点列可以有一个或多个极限点,也可以没有极限点.当且仅当只有一个极限点时点列收敛.每个有界点列至少有一个极限点.对实数列,为了便于处理某些问题,也把定向发散子列的极限(即 $\pm\infty$)算作极限点.这样,实数列的极限点就是它的收敛子列或定向发散子列的极限.根据收敛子列原理,实数列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 有上(下)界当且仅当 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 的所有极限点的集合 $\mathscr{L}$ 有上(下)界,并且 $\sup\mathscr{L}\in\mathscr{L}$, $\inf\mathscr{L}\in\mathscr{L}$,即 $\sup\mathscr{L}$ 与 $\inf\mathscr{L}$ 也是 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 的极限点,因而是 $\mathscr{L}$ 的最大元与最小元(可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$).在文献中,聚点与极限点这两个名称的使用是混乱的.许多人把数集的聚点称为极限点,也有一些书籍把数列的极限点称为数列的聚点.

部分极限(partial limit) 子列的极限.由于子列也称为部分列,故极限点作为子列的极限也称为部分极限.

单调收敛原理(monotonic convergence principle) 指有界单调实数列必收敛.上(下)有界的增(减)数列必收敛于以它的各项为元素的集合的上(下)确界,无上(下)界的增(减)数列定向发散于 $+\infty(-\infty)$.同时,由于它的条件简单明了,所以常用于判定数列的收敛性.根据这个原理,单调数列收敛当且仅当它有界,在扩张的实数系中单调数列总有极限.这个原理也为定义实数提供了一条途径:把实数定义为有界单调有理数列.它也提供了定义无理数指数幂的一种方法:对 $a>1, x>0$,定义

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{p_n},$$

其中 $\{p_n\}$ 是递增的正有理数列, $p_n\to x$.单调收敛原理是外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))首先提出并证明的.

聚点原理(accumulative point principle) 亦称外尔斯特拉斯定理,或波尔查诺-外尔斯特拉斯定理.刻画实数系 R 的连续性的常用命题之一.它断言:R(R^n 或度量空间)的每个有界无穷子集至少有一个聚点.它是外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))于 1860 年得到的,在他的证明中采用了波尔查诺(Bolzano, B.)首创的对分法.

收敛子列原理(convergent subsequence principle) 刻画实数连续性的命题之一.存在收敛子列的条件.每个有界实(或复)数列有收敛的子列,也就是说,每个有界实(或复)数列至少有一个极限点属于 R(或 C).这个定理是波尔查诺(Bolzano, B.)于 1817 年证明的,后来又由外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))重新发现,故又称波尔查诺-外尔斯特拉斯定理.它与聚点原理是等价的,也刻画了实数的连续性.它还能使许多困难的定理得到简单的证明,如柯西准则和闭区间上连续函数的一些性质.这个定理对 R^n 中的点列也成立.在更一般的空间中,这个定理的内容被作为列紧性、自列紧性的定义.按照这样的术语,这个定理说明实数系是自列紧的,因此又称致密性定理.

列紧性(sequential compactness) 见“收敛子列原理”.

致密性定理(compact theorem) 即“收敛子列原理”.

海涅定理(Heine theorem) 反映函数极限与数列极限之间关系的重要定理.该定理断言:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A\ \ (\boldsymbol{x}\in\mathsf{R}^n, A\in\mathsf{R})$$

的充分必要条件是:对于任意以 $\boldsymbol{a}$ 为极限的点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$,数列 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 都收敛,极限为 A.对于限制在集合 D 上的极限,或一元函数的单侧极限,类似结论也成立.这一结果由海涅(Heine, H. E.)发现,它的重要意义在于,建立了函数极限与数列极限间的桥梁,将前者归结为后者,故又称为归结原理.

归结原理(principle of summing up) 见“海涅定理”.

波尔查诺-外尔斯特拉斯定理(Bolzano-Weierstrass theorem) 既指聚点原理,又指收敛子列原理.

柯西准则(Cauchy criterion) 判别收敛性或一致收敛性的充分必要条件.它揭示了收敛性或一致收敛性的内在特征.该准则由柯西(Cauchy, A.-L.)于 1821 年对数列根据下列直观事实提出:若某数列收敛于 a,则它的项最终将靠近 a,从而这些项彼此也将靠近;柯西断言反之也是正确的,后来由外

尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))给出严格的证明.这样,柯西准则是从数列的内在变化特征判别其收敛性,而不涉及具体的极限值.这一思想被推广应用到各种形式的极限:

1.收敛性柯西准则:

1)数列.实或复数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是:对于任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,使当$m,n>N$时,$|x_m-x_n|<\varepsilon$.这个条件也可以叙述成:对任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,使得当$n>N$时,对所有正整数p,有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.关于实数列的柯西准则是刻画实数完备性的等价命题之一.下面所举的各种场合中的条件都有如上述的两种写法.

2)点列.n维欧几里得空间R^n中,点列$\{\boldsymbol{x}_n\}$收敛的充分必要条件是:对任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,使当$m,n>N$时,$|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|<\varepsilon$.这里$|\cdot|$表示欧几里得范数(可以把$\mathrm{R}^n$换成更一般的完备度量空间).

3)无穷级数.级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

收敛,当且仅当对任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,使当$m>n>N$时,

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<\varepsilon.$$

4)函数极限.设$f:E\to\mathrm{R}$,$\boldsymbol{x}_0$是$E\subseteq\mathrm{R}^m$的聚点,极限

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})$$

存在且有限的充分必要条件是:对于任意$\varepsilon>0$,存在$\boldsymbol{x}_0$的邻域U,使$\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in E\cap U\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$时,$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$.这里$|\cdot|$表示欧几里得范数($\mathrm{R}^n$可换成完备度量空间,$E$可以是满足第一可数公理的拓扑空间).

5)广义积分.设$-\infty<a<b\leqslant+\infty$,$f:[a,b]\to\mathrm{R}$,$b$为奇点的瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是:对任意$\varepsilon>0$,存在$T\in[a,b)$,使$x',x''\in[T,b)$时,

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

同样有a是奇点时的柯西准则以及对无穷积分和广义重积分的柯西准则.

6)无穷乘积.无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n$$

收敛的充分必要条件是:对任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,当$m>n>N$时,有$|u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_m-1|<\varepsilon$.

7)重序列与重级数.二重序列$\{x_{mn}\}$$(m,n\in\mathrm{N})$收敛的充分必要条件是:对任意$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,当$n',n>N$,$m',m>N$时,$|x_{m'n'}-x_{mn}|<\varepsilon$.对二重级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn},$$

设

$$S_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.$$

以S_{mn}代上面的x_{mn}便得到对二重级数的柯西准则.可以用明显的方式从二重推广到多重的情形.对其他对象的收敛性,均可仿照以上各种情形写出相应的柯西准则.

2.一致收敛性柯西准则(参见有关同名独立条目).

柯西条件(Cauchy condition) 柯西准则中所说的条件.见"柯西准则".

施托尔茨极限定理(Stolz limit theorem) 给出求极限的一种方法的命题.该定理断言:若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l\in\mathrm{R}^*,$$

且满足下列条件中的一个:

1.$\{y_n\}$严格增,$y_n\to+\infty$

(或$\{y_n\}$严格减,$y_n\to-\infty$).

2.$x_n\to0$,$y_n\to0$,$\{y_n\}$严格减.

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l.$$

对函数极限的类似结论如下:设$f:(a,+\infty)\to\mathrm{R}$在任意有限区间$(a,b)$内有界;当$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,且$g(x)$严格增.若

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x-1)}{g(x)-g(x-1)}=l\in\mathrm{R}^*,$$

则
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

增量(increment) 亦称改变量.自变量所取不同的值之差以及相应的函数值之差的名称与记号.设f是从A到B的函数,A,B是某线性空间的子集,$x_0\in A$.对任意$x\in A$,称$x-x_0$为自变量在x_0处的增量,记为Δx.相应地,称$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$为$f$在$x_0$处的增量,记为$\Delta f(x)$或$\Delta y$(如果函数以$y=f(x)$表示).增量这个词可理解成增加的量,但可以取负值或0.

改变量(increment) 即"增量".

全增量(total increment) 多元函数的一种增量.设函数f定义在集$A\subseteq\mathrm{R}^n$上,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0\in A$,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$,则$\Delta\boldsymbol{x}=(x_1-x_1^0,x_2-x_2^0,\cdots,x_n-x_n^0)=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$,$\Delta\boldsymbol{y}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$.相对于偏增量,把$\Delta\boldsymbol{y}$称为全增量.这个名词并不是必须的,

使用者日益减少.

偏增量(partial increment) 多元函数的一种增量.即把 n 元函数看做它的某一个自变量的一元函数时得到的增量.这样,若设 f 定义在集 $A\subseteq \mathrm{R}^n$ 上,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$,$\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in A$,$\Delta x_i=x_i-x_i^0$,则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于第 i 个变量的偏增量就是 $f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_i^0+\Delta x_i,\cdots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_i^0,\cdots,x_n^0)$.

函数的连续性(continuity of a function) 运动连续性的数学刻画.函数在一点连续的概念是数学上各种形式的函数连续性概念的基础.若一元函数 f 在点 x_0 的某个邻域内有定义,则当

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

时,f 称为在点 x_0 连续.若用 ε-δ 语言或邻域的语言叙述

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

或用增量形式将它叙述成

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x)=0$$

(这里 $\Delta x,\Delta f(x)$ 均为在点 x_0 的增量),也可得到函数在一点 x_0 连续的定义的其他等价形式.它还等价于函数 f 在邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义,且对任意以 x_0 为极限但不含 x_0 的点列 $\{x_n\}$,有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

(参见"海涅定理").这个定义反映了连续运动没有突变的特征.函数在一点连续与否,只涉及这个函数在这点附近的值,属于函数的局部性质.若函数 f 在 (a,b) 区间的每一点连续,则称它在 (a,b) 上连续,若 $f(a),f(b)$ 也有意义,且还有

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),$$

$$\lim_{x\to b-} f(x)=f(b),$$

则 f 称为在闭区间 $[a,b]$ 上连续,或称它是闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数.函数是否在一个区间上连续,只需逐点考察当自变量趋于该区间的任一点时,函数是否收敛于该点的函数值.若再进一步要求在各点的这种收敛的速度都差不多,这就是一致连续.具体来说,若对于任意的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得对于区间 I 上的任一点 x_0,都有:只要 $|x-x_0|<\delta$,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则 f 称为在区间 I 上一致连续.对于定义在 n 维区间 I 上的多元函数,它在 I 的一点或在整个 I 上连续和一致连续的定义,形式上与上面的叙述相同,只需把所有出现的极限理解为多元函数的极限即可.客观世界的大量运动具有连续不断的性质,也就是说刻画运动的量是连续变化的,数学上函数的连续性概念正是反映的这种性质.开始人们只有函数在整体上连续或间断的直观概念,很久以后,到 19 世纪才逐步认识清楚,函数的连续性是可以逐点考察的,而整体的连续性是建立在逐点连续的基础上的,而在一点的连续性,又与极限联系,并由外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))用极限概念和 ε-δ 语言给出现在通用的连续性的精确定义.

连续函数(continuous function) 一类最基本、最重要的函数.若 f 是定义在区间 I 上的一元函数,或是定义在区域 D 上的多元函数,只要它在 I 或 D 上的每一点连续,即对 I 或 D 的任一点 x_0,f 在 I 或 D 上的极限(分别理解为一元函数的极限或多元函数的极限)等于 $f(x_0)$,则 f 称为 I 或 D 上的连续函数.连续函数是整体性质良好的函数.有限个连续函数的和、差、积、商(分母不为 0)仍为连续函数(在参与运算的各个函数的连续区域的交集上).若一元函数 f 在区间 I 上连续,而一元函数 g 在 f 的值域 $f(I)$ 上连续,则复合函数 $g\circ f$ 在 I 上连续;连续的多元函数的复合也有类似性质.但是,连续函数的反函数与连续函数列的极限函数不一定仍为连续函数.在闭区间上连续的一元函数,或在有界闭区域上连续的多元函数,有一些在理论上与应用中十分重要和经常用到的性质,因而受到特别注意.这些性质主要是:若 f 是有界闭区域(闭区间)D 上的(一元或多元)连续函数,则 f 在 D 上有界,且在 D 上达到最大值和最小值(最大值与最小值定理);对于任意的 $x_1,x_2\in D$,f 在连结 x_1,x_2 的折(曲)线上取到 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的一切值(介值定理),若 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$,则 x_1,x_2 的连线上(f 为一元函数时,在 x_1,x_2 之间)$f(x)=0$ 有解(根的存在定理);f 在 D 上是一致连续的(康托尔定理).最大最小值定理是外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))首先证明的,介值定理是波尔查诺(Bolzano,B.)(1817)与柯西(Cauchy,A.-L.)(1812)叙述并证明的,一致连续性定理是康托尔(Cantor,G. F. P.)与海涅(Heine,H. E.)(1812)发现的.

右连续(right continuity) 指函数在一点右侧连续.若一元函数 f 在 x_0 处的右极限为 $f(x_0)$,即 $f(x_0+0)=f(x_0)$,则称 f 在 x_0 处右连续.

左连续(left continuity) 函数在一点左侧连续.若一元函数 f 在 x_0 处的左极限为 $f(x_0)$,即 $f(x_0-0)=f(x_0)$,则称 f 在 x_0 处左连续.

单侧连续(one-sided continuity) 右连续和左连续的统称.

函数的振幅(amplitude of a function) 函数值变化的幅度.设 f 是实值函数,E 是 f 的定义域的子集.f 在 E 上的振幅,记为 $\omega(f,E)$,定义为

$$\omega(f,E)=\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|\mid x_1,x_2\in E\}.$$

设 $x_0\in E$,$E_\delta=E\cap B(x_0,\delta)$,这里 $B(x_0,\delta)$ 是以

x_0 为中心、δ 为半径的开球，则

$$\omega(f,x_0)=\inf_{\delta>0}\omega(f,E_\delta)=\lim_{\delta\to 0+}\omega(f,E_\delta)$$

称为 f 在 x_0 处的振幅. $\omega(f,x_0)$ 也就是 $f(x)$ 在 x_0 处的上、下极限之差. 无界函数的振幅是 $+\infty$，有界函数的振幅是实数. 函数 f 在 x_0 连续，当且仅当 f 在 x_0 的振幅等于 0. 这表明在连续点处函数不会有突然的跳跃. 对于实数列 $\{a_n\}$，它的振幅是指

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n-\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n.$$

因此，当 $\{a_n\}$ 的振幅为 0 时收敛，否则发散. 在发散时，振幅可以是实数，也可以是 $+\infty$. 在前一种情形，称 $\{a_n\}$ 是有有限振幅的数列；在后一种情形，称 $\{a_n\}$ 是有无限振幅的数列.

间断点(discontinuous point)　指这样的点：在该点函数不连续. 实函数的间断点分两类：设 a 是实函数 f 的间断点. 若 $f(a+)$ 与 $f(a-)$ 都存在且有限，则称 a 为第一类间断点，否则称为第二类间断点. 这里，a 是第二类间断点，当且仅当 $f(a+0)$ 与 $f(a-0)$ 至少有一个不存在或为 $\pm\infty$. 若 $f(a+0)=f(a-0)$，但它不等于 $f(a)$ 或 f 在 a 无定义，则称 a 为 f 的可去间断点. 对于可去间断点 a，可以改变或补充 f 在 a 处的定义，得到在 a 处连续的函数. 第一类间断点又称为简单间断点或跳跃间断点，数值 $f(a+0)-f(a-0)$ 称为跃度(参见"跃度").

跳跃间断点(jump discontinuous point)　见"间断点"和"跃度".

第一类间断点(discontinuous point of the first kind)　见"间断点".

第二类间断点(discontinuous point of the second kind)　见"间断点".

可去间断点(removable discontinuous point)　见"间断点"和"跃度".

跃度(jump)　函数在一点的两侧极限之差. 设在 a 处一元函数 $f(x)$ 的左、右极限 $f(a-)$ 与 $f(a+)$ 均存在(有限或无限)，则称 $f(a+)-f(a-)$(不出现正负相同的 ∞ 相减)为函数 $f(x)$ 在 a 处的跃度或跳跃. 若 $f(a)$ 也存在，则称 $f(a)-f(a-)$ 为 $f(x)$ 在 a 处的左跃度，$f(a+)-f(a)$ 为 f 在 a 处的右跃度. 跃度与左、右跃度都可以是无穷大. 如果跃度、左跃度和右跃度中有一个不等于 0，则 $f(x)$ 在 a 处间断. 这时称 a 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 当跃度为 0 且 $f(x)$ 在 a 间断时，显然 a 是 $f(x)$ 的可去间断点.

左跃度(left jump)　见"跃度".

右跃度(right jump)　见"跃度".

分段连续函数(piecewise continuous function)　指定义在闭区间上，除有限个第一类间断点外在其他点处都连续的函数. 若函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，且存在 $[a,b]$ 的分法 $a_0=a<a_1<\cdots<a_n=b$ 与在 $[a_{i-1},a_i]$ 上连续的函数 $f_i(x)$，使在 (a_{i-1},a_i) 上 $f(x)=f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段连续. 分段连续函数可由阶梯函数一致逼近.

达布连续函数(Darboux continuous function)　一种具有介值性的函数. 即具有下列性质的函数：介于任意两个函数值之间的任意数都是该函数的函数值. 这个性质又称函数的介值性. 即：对于区间 I 及函数 $f: I\to\mathrm{R}$，若对任意 $x_1,x_2\in I$ 及 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任何 k，存在 x_1 与 x_2 之间的 x_0，使 $f(x_0)=k$，则称 f 在 I 上达布连续. 由介值定理，定义在区间上的连续函数必是达布连续的. 但反之不一定成立. 例如，由

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$$

与 $f(0)=0$ 定义在 $[-1,1]$ 上的函数 f 达布连续，但在 $x=0$ 处不连续. $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ 达布连续的充分必要条件是 f 把 $[a,b]$ 的任何闭子区间映为区间或一个点. 达布连续函数的复合是达布连续的. 因此，$f(x)$ 达布连续时，$|f(x)|$，$f^2(x)$，$cf(x)$ $(c\in\mathrm{R})$，$1/f(x)$ $(f(x)\neq 0)$ 也达布连续. 对于单调函数而言，达布连续与连续是等价的. 若 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$，且 f 在每个 $x\in\mathrm{R}$ 处的左、右极限存在，则 f 达布连续当且仅当 f 连续. 还有，达布连续函数之和不一定达布连续；达布连续函数列的一致极限不一定达布连续；达布连续函数没有第一类间断点；一个函数的导函数必达布连续(达布定理). 尤其是下列结论：任何函数 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 是两个达布连续函数之差. 历史上有些数学家曾以为介值性与连续性是等价的，达布(Darboux，(J.-)G.)澄清了这两个概念的差别.

一致连续(uniformly continuous)　亦称均匀连续. 反映函数均匀变化的性质. 设 f 是从集合 $E\subseteq\mathrm{R}$ 到 R 的实函数，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|\,|\,x_1,x_2\in E,|x_1-x_2|<\delta\}<\varepsilon$，或对 $x_1,x_2\in E$，$|x_1-x_2|<\delta$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则 f 称为在 E 上一致连续. 函数 $f: E(\subseteq\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}^m$ 一致连续的定义可完全类似给出，只要把 $|\cdot|$ 理解为 R^n 或 R^m 中的范数 $|\cdot|$. 相对于一致连续，把 f 在 E 上连续称为逐点连续. 一致连续函数必逐点连续，反之不一定. 但在 R^n 的有界闭集上连续的函数必一致连续. 若 f 定义在开区间 (a,b) 上，则 f 一致连续当且仅当 f 连续，且 $f(a+)$ 与 $f(b-)$ 存在且有限. 例如，对函数 $g(x)=1/x$，有 $g(0+)=+\infty$，故 g 不在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. 一致连续函数把柯西列映为柯西列，即若 f 一致连续，$\{x_n\}$ 是柯西列，则 $\{f(x_n)\}$ 也是柯西列；反之，定义在有界集上，把柯西列映为柯西列的函数必一致连续. 一致连续函数的线性组合一致连续. 两个一致连续函数的复合函数一致连续. 一致连续性是由海涅(Heine，H. E.)于

1870年引入的.

均匀连续(uniformly continuous) 即"一致连续".

逐点连续(pointwise continuous) 见"一致连续".

连续扩张(continuous extension) 亦称连续延拓. 扩大一个连续函数的定义域,使它保持连续的过程与结果. 若 f 与 g 同是 n 元函数,分别在集合 A 与 B 上连续,而 $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$,且当 $\boldsymbol{x} \in A$ 时,$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$,则 g 称为 f(在 B 上)的连续扩张. 对任意的 A 与 $B(A \subset B)$,这种扩张的结果一般来说是不惟一的. 当 $B = \overline{A}$(A 的闭包)时,定义在 A 上的连续函数 f 可以连续扩张到 B 的充分必要条件是:对任意 $\boldsymbol{x}_0 \in \overline{A} \setminus A$,

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$$

存在(有限);若这个条件得到满足,可以定义

$$g(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}_0 \in \overline{A} \setminus A)$$

和 $g(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_0 \in A)$,则这个 g 是 f 在 $B = \overline{A}$ 上的惟一连续扩张. 已知 f 在 A 上一致连续,就属于这种情况.

连续延拓(continuous extension) 即"连续扩张".

半连续函数(semi-continuous function) 连续函数概念的推广. 是上、下半连续函数的统称. 设 f 是定义在 $E \subseteq \mathbb{R}$ 上的一元函数,$a \in E$,若对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $x \in E$ 且 $|x-a| < \delta$ 时,

$$f(x) < f(a) + \varepsilon \text{ (或 } f(x) > f(a) - \varepsilon),$$

则称 f 在 a 处上(下)半连续. 这是把 f 在 a 连续的定义中的不等式 $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ 拆成两半得到的. 因此,f 在 a 处连续,当且仅当 $f(x)$ 在 a 处既上半连续又下半连续. $-f(x)$ 在 a 处下半连续,当且仅当 f 在 a 处上半连续. f 在 a 处上半连续 $\Leftrightarrow$ 对 E 中收敛于 a 的任何点列 a_n,有

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} f(a_n) \leqslant f(a) \Leftrightarrow \overline{\lim_{x \to a}} f(x) = f(a).$$

若 f 在 E 的每个点上(下)半连续,则 f 称为在 E 上上(下)半连续. 这当且仅当对任意实数 α,$\{x \mid f(x) < \alpha\}$($\{x \mid f(x) > \alpha\}$)是 E 的开子集(即是 E 与 $\mathbb{R}$ 的某个开子集的交集). 上(下)半连续函数的和及非负数乘是上(下)半连续的;非负上(下)半连续函数之积是上(下)半连续的;上(下)半连续函数的一致极限是上(下)半连续的. 有界闭集上的上(下)半连续函数有上(下)界,且达到最大(小)值. 半连续函数是由贝尔(Baire,R. L.)于1899年引进的. 关于它的更深刻的性质在实变函数论中研究.

上半连续(upper semi-continuous) 见"半连续函数".

下半连续(lower semi-continuous) 见"半连续函数".

等度连续(equicontinuous) 函数族的一种连续性. 设 $\mathscr{F}$ 是从集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数族. 若对 $\boldsymbol{x} \in X$ 及任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 U,使对所有 $\boldsymbol{t} \in U$ 及 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{F}$,有 $|f(\boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$,则 $\mathscr{F}$ 称为在 $\boldsymbol{x}$ 处等度连续. 若 $\mathscr{F}$ 在 X 的每个点处等度连续,则 $\mathscr{F}$ 称为在 X 上等度连续. 若对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得对于所有 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$ 及 $f \in \mathscr{F}$,当 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ 时,$|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$,则 $\mathscr{F}$ 称为在 X 上一致等度连续. 当 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集时,等度连续与一致等度连续等同. 设 X 为有界闭集,若 $\mathscr{F}$ 为函数列且一致收敛,则 $\mathscr{F}$ 等度连续;反之,若 $\mathscr{F}$ 等度连续且逐点有界,即对于每个 $\boldsymbol{x} \in X$,集 $\{f(\boldsymbol{x}) \mid f(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{F}\}$ 有界,则 $\mathscr{F}$ 中的每个函数列有一致收敛子列. 等度连续概念主要用于刻画连续函数空间中子集的紧致性. 这个概念及上述结论可以推广到一般的度量空间之间的函数.

一致等度连续(uniformly equicontinuous) 见"等度连续".

李普希茨条件(Lipschitz condition) 亦称赫尔德条件. 限制函数增量变化大小的一种不等式形式的条件. 若 f 是区间 I 上的函数,存在正的常数 L 和 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$,使得只要 $x_1, x_2 \in I$,就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|^{\alpha},$$

则函数 f 称为在区间 I 上满足 α 阶李普希茨条件,或称为 I 上的 α 阶李普希茨函数,记为 $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha(I)$ 或 $f \in \Lambda_{\alpha}(I)$. 对任意 $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$,$\alpha$ 阶李普希茨函数都是连续函数. 特别地,属于 Lip1 的函数为绝对连续函数(定义见本卷《实变函数论》),因而除去一个勒贝格零测度集之外处处可微. 一阶李普希茨条件是李普希茨(Lipschitz,R. (O. S.))于1864年研究傅里叶级数的收敛判别法时引进的. 不少作者把一阶李普希茨条件称为李普希茨条件. 1876年,他把它用于微分方程有惟一解问题的讨论. $0 < \alpha < 1$ 的 α 阶李普希茨条件其实是赫尔德(Hölder,O. L.)引进的,所以又称为 α 阶赫尔德条件.

赫尔德条件(Hölder condition) 即"李普希茨条件".

函数方程(functional equation) 指未知量是函数的方程. 在指数函数、对数函数和三角函数等条目中,可以见到这些函数所满足的一些函数方程. 这些方程的求解是柯西(Cauchy,A.-L.)首先研究的. 但是,一般的函数方程的求解和分类还没有什么好的方法. 函数方程中含有未知函数的微分、积分和差分的,分别称为微分方程、积分方程和差分方程,一般不再称它们为函数方程. 对一些特殊的有重要意义的函数方程的研究,分属于各个数学领域.

微 分 学

微积分学(calculus) 经典数学分析的主体,包括微分学与积分学两大部分.微分学包括导数与微分的基本概念、运算法则及以此为基础对函数性态进行一系列的研究;积分学包括一元函数的定积分、不定积分和多元函数的各种积分的概念、理论、计算,以及它们的直接应用.

微积分的创立是科学技术发展史上最重大的事件之一.微积分的思想在古代已有萌芽.古希腊的阿基米德(Archimedes)发展欧多克索斯(Eudoxus,(C))的"穷竭法",解决了许多求积(面积、体积)问题,他的结果标志着古希腊数学的高峰.公元5世纪时,中国南北朝时期祖冲之、祖暅发现的祖氏原理和用它求得的球体积的准确公式,也含有微积分的思想.但是,当时的社会生产和科学技术尚未迫切要求解决这类问题,因此,这些方法没有得到进一步的发展.16世纪的欧洲处在封建主义向资本主义过渡的时期,社会生产的巨大发展和科学技术的各种需要,向数学提出了一系列本质上新的问题.例如,求非匀速运动的速度和曲线的切线的问题;求函数的极值的问题;曲线求长、曲边形求面积的问题等.这些问题都要求数学家创造新的方法来解决.17世纪的一大批卓越的数学家和物理学家,如卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)、开普勒(Kepler,J.)、沃利斯(Wallis,J.)、巴罗(Barrow,I.)等,为此作了大量的研究.他们把曲线的切线看做割线的极限位置(尽管当时还没有清晰的极限概念),把平面图形的面积看做是宽度无限减小的矩形面积之和,把曲线看做由长度无限减小的直线段组成的折线的极限.这些数学思想的积累和在这些思想指导下有成效的工作,是创建微积分的基础和前奏.

在这些工作的基础上,最终创立微积分这个学科的是牛顿(Newton,I.)和莱布尼茨(Leibniz,G.W.).牛顿是侧重于力学方面的思考而建立微积分的,而莱布尼茨则侧重于几何问题的思考.牛顿关于微积分的最早工作记述在1665年的一篇论文手稿中,在1687年的《自然哲学的数学原理》中正式发表.莱布尼茨对微积分的研究始于1676年,第一篇论文载于1684年的《学艺》杂志上,公开发表时间早于牛顿三年.牛顿将微积分称为流数术,它的中心问题是:

1.已知连续运动的路程,求给定时刻的速度(即微分法).

2.已知物体运动的速度,求给定时间内所经历的路程(即积分法).

莱布尼茨把微积分称为差的运算与和的运算,而把求曲线的切线和函数的极值问题归结为前者,把求面积、体积的运算归结为后者.

牛顿和莱布尼茨创立的微积分,与前人的工作根本不同,它不是只能解决个别问题的具体计算方法的简单堆砌,它的理论和方法有相当大的普遍性,运算法则是系统的,特别是现在所谓的微积分基本定理,是他们首次创立的,它是联系微分与积分这两类貌似无关的问题的桥梁,使微分和积分统一于一个整体,组成一门崭新的数学学科.莱布尼茨还为微积分创造了一整套沿用至今的记号(如 $\mathrm{d}x$, $\int$ 等),促进了微积分的发展.

在中国,第一本微积分的汉译本是1859年清代李善兰的《代微积拾级》十八卷.其中,"代"指解析几何,"微"指微分,"积"指积分(参见"微分学"与"积分学").

微分学(differential calculus) 数学分析的分支学科.即微积分学中研究函数的导数、微分及其计算和应用的部分.主要内容为导数和微分的概念及其运算法则,它们在几何及物理上的直接应用和用于研究函数.经典的微分几何学正是从这里的几何应用起步而发展起来的.在研究函数方面的应用是微分学的主要理论部分,它由一系列的中值定理构成,并成为在几何及物理方面应用的理论基础.导数和微分所反映的是函数的局部的特征,微分是函数微小改变量(增量)的主要部分;导数对函数来说是变化率,对表示函数的曲线而言则是切线的斜率,二者是微分学中密不可分的一对基础概念.而微分学与积分学又是相伴发展起来的.

17世纪中期,在力学、光学和天文学等发展的推动下,费马(Fermat,P. de)最早研究了求函数的极值和曲线的切线的问题(1637年前后),其后牛顿(Newton,I.)等人又考虑了变速运动物体速度的求法(1670年前后),在他们的研究中都导致形如

$$\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]_{h=0}$$

的量,牛顿称之为流数.这实质上就是现在的导数,牛顿还建立了许多求导公式和法则,但他们在推导中开始设 $h\neq 0$,后来又令 $h=0$ 的做法很不合逻辑.同时代的莱布尼茨(Leibniz,G. W.)从几何问题出发,首先导出了微分的概念,而他的微分是非零且小于任何正数的真实无穷小,所以也是缺乏逻辑基础的.现在所谓的导数在莱布尼茨的体系中是作是函数的微分与自变量微分之商引入的.由于微积分方法的有效性,18世纪,在微分学方面有很大进展,像微分学中值定理及泰勒公式等微分学的主要理论成果,都是这段时间取得的.这段时间微分学的发展主要还是按照莱布尼茨的思路进行的,即先建立微分,而微分的系数即导数,但是逻辑基础的问题仍然存

在,因而拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等人转向用代数的方法导出这些基本概念,当然更不可能成功.导数和微分系数的名称却由那时起流传下来.微分学的基础是在19世纪初柯西(Cauchy,A.-L.)、外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))等建立了严格的极限理论之后,才得以巩固的.在此后的微分学里,重又回到牛顿的模式,建立在极限基础上的导数成了先于微分的基本概念.

20世纪以来,微分学的许多基本内容已被推广到更抽象的背景之下,但作为微积分学一部分的微分学,它的体系和内容已经基本定型.在20世纪60年代,由鲁宾孙(Robinson,R.M.)建立的非标准分析里,微分真正成了小于任何正数而非零的真实无穷小,在某种意义上严格体现了莱布尼茨的思想;但应注意,这样的无穷小数只在扩大了的非阿基米德的非标准实数域中才能存在,这并不是数学分析(鲁宾孙称之为标准分析)的发展.

导数(derivative) 亦称微商.微分学的基本概念之一.设一元函数 f 在 $a\in\mathrm{R}$ 的某邻域内有定义,若极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (1)$$

存在且有限,则 f 称为在 a 处可微,a 是 $f(x)$ 的可微点,此极限称为 f 在 a 处的导数,记为 $f'(a)$.若 f 在 a 连续,且上述极限为 $\pm\infty$,这时有人把 $\pm\infty$ 也称为 f 在 a 处的导数,仍记为 $f'(a)$,但这时不说 f 在 a 处可微,而把导数 $\pm\infty$ 称为无穷导数,相应把有限的导数称为有穷导数(有些文献定义无穷导数时不要求 f 在 a 连续).若 f 在某个集合 $E\subseteq\mathrm{R}$ 的每个点处可微,则称 f 在集合 E 上可微.这时,对每个 $x\in E$,由 $f'(x)$ 定义的函数 $f':E\to\mathrm{R}$ 称为 f 在集合 E 上的导数.有时为了强调 f' 是函数而称为 f 的导函数.f 在 a 的导数 $f'(a)$,就是函数 f' 在 a 的值,是 f 在 a 处的变化率.符号 $f'(x)$ 是拉格朗日(Lagrange,J.-L.)于18世纪末引进的.除此以外还使用着其他记号.一个是阿博加斯特(Arbogast,L.F.A.)于1800年引进的 $\mathrm{D}f$,它形象地反映从函数 f 经过微分运算 D (differentiation 的第一个字母)得到新函数 $\mathrm{D}f$,现在仍然使用这个记号并把 D 称为微分算子.若把函数 f 写成 $y=f(x)$ 时,则另一个常用记号就是莱布尼茨(Leibniz,G.W.)引进的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.这里 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 表示对于变量 x 求导数.$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是两个微分 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 之商.由于微分与导数间有关系式 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$,故可用 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 表示导数.在表示复合函数求导法则、反函数求导法则及变量代换时,用这个记号最为醒目.$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $f'(x)$ 也可写成 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 与 y',表示 f 在 a 的导数的记号有

$$(\mathrm{D}f)(a),\mathrm{D}f(a),\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a},\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a},$$

$$\left.y'\right|_{x=a},\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_a,\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_a$$

等.以左、右极限代替(1)式中的极限,得到左、右导数的定义.f 在 a 的左、右导数分别以 $f'_-(a)$,$f'_+(a)$ 表示.相应地,f 的左、右导(函)数则分别以 $f'_-(x)$,$f'_+(x)$ 表示.当说函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可微时,是指 f 在 (a,b) 内处处可微,且 $f'_+(a)$,$f'_-(b)$ 均存在且有限.左、右导数统称单侧导数.若 f 在 a 处有有穷导数,则 f 在 a 连续.

更一般地,若 $f'_+(a)$ $(f'_-(a))$ 有穷,则 f 在 a 右(左)连续.若 f 是某个区间上的可微函数,则它在此区间上处处连续,且 f' 是达布连续的.f 在 a 可微的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(a,f(a))$ 处有切线,它的斜率是 $f'(a)$.类似地,$f'_-(a)$ 与 $f'_+(a)$ 存在表示曲线 $y=f(x)$ 在 a 处分别有左、右切线,其斜率分别为 $f'_-(a)$ 与 $f'_+(a)$.$f'(a)=+\infty(-\infty)$ 意味着曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(a,f(a))$ 处有垂直于 x 轴的切线;$f'_-(a)=+\infty(-\infty)$ 表示有垂直于 x 轴的左切线,$f'_+(a)=\pm\infty$ 表示有垂直于 x 轴的右切线.

变化率(rate of change) 函数值变化快慢的量度.设 $y=f(x)$,商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

称为 y 关于 x 在区间 $[x_0,x_0+h]$(或 $[x_0+h,x_0]$)上的平均变化率,它的极限(即导数)称为 f 关于 x 在 x_0 处的变化率,即 $f'(x_0)$ 的意义为在 x_0 处 x 每增加一个单位时 y 所增加的量.许多量以变化率的形式出现,例如:速度是质点的位置函数关于时间的变化率,加速度是速度关于时间的变化率,电流强度是电量关于时间的变化率等,因此这些量都可用相应的导数表示.

微分系数(differential coefficient) 即导数.18世纪,拉格朗日(Lagrange,J.-L.)在企图用代数方法定义微积分的基本概念时,先定义 x 的函数的微分 $A\cdot\Delta x$,再求出它的系数 A,并称为微分系数,用通用的语言来说,它就是导数.这个名词今已少用.

微商(differential quotient) 导数的别名.由微分 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$ 知,导数 y' 可以看成函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 而得名.

单侧导数(one-sided derivative) 左、右导数的统称.设一元函数 f 在 $a\in\mathrm{R}$ 的某个左邻域内及 $x=a$ 处有定义,若

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

为实数,则此极限称为 f 在 a 处的左导数,并记为 $f'_-(a)$,同时 f 称为在 a 处左可微.若此极限为 $\pm\infty$,且 f 在 a 连续,则 $\pm\infty$ 也称为 f 在 a 处的左导数,并仍以 $f'_-(a)$ 表示.完全类似地可定义右导数 $f'_+(a)$ 及右可微.若 $f'_-(a)\in\mathrm{R}^*$(即 $f'_-(a)\in\mathrm{R}$ 或是 $\pm\infty$),则 f 在 a 左连续.$f'(a)$ 有意义,当且仅当 $f'_+(a)=f'_-(a)\in\mathrm{R}^*$,这时 $f'_+(a)=f'_-(a)=f'(a)$.若左极限

$$\lim_{x\to a-} f'(x)\in\mathrm{R}^*,$$

则它就是左导数 $f'_-(a)$.这些结论对右导数也成立.函数 f 在 a 可微的充分必要条件是:f 在这一点的两个单侧导数都存在且相等.

左导数(left derivative) 见"单侧导数".

右导数(right derivative) 见"单侧导数".

广义单侧导数(generalized one-sided derivative) 单侧导数的推广.设实函数 f 在 $a\in\mathrm{R}$ 的某个左邻域内有定义且左极限 $f(a-)$ 存在,若极限

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a-)}{h}$$

存在,则此极限称为 f 在 a 处的广义左导数,记为

$$f'_-(a-)\text{或} f'_-(a-0).$$

类似地,定义广义右导数

$$f'_+(a+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a+)}{h}.$$

若 f 在 a 处连续,则广义单侧导数即为单侧导数.

高阶导数(derivative of higher order) 二阶及二阶以上导数的统称.设一元函数 f 在开区间 I 上可微,若 f 的导函数 $f':I\to\mathrm{R}$ 在 $a\in I$ 处有有穷或无穷导数,即 $(f')'(a)\in\mathrm{R}^*$,则将它称为 f 在 a 处的二阶导数,记为 $f''(a)$;若 $f''(a)$ 有限,则 f 称为在 a 处二次可微.f'' 是 I 到 R 的函数.一般地,f 在 a 处的 n 阶导数可用归纳法定义为 $n-1$ 阶导数的导数,记为 $f^{(n)}(a)$.若 $f^{(n)}(a)\in\mathrm{R}$,则 f 称为在 a 处 n 次可微.若 $f^{(n-1)}(x)$ 在 I 上处处可微,则 f 称为在 I 上 n 次可微,$f^{(n)}$ 称为 f 在 I 上的 n 阶导函数.$f^{(n)}$ 是 I 到 R 上的函数.$f^{(n)}$ 存在时,$f^{(n)}(a)$ 就是 $f^{(n)}$ 在 a 的值.表示 n 阶导数的其他记号有

$$\mathrm{D}^n f,\ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},\ y^{(n)}$$

等(若 f 以 $y=f(x)$ 表示).有时,为了与高阶导数的记号一致,约定 $f^{(0)}=f,f^{(1)}=f'$,并把 f' 称为一阶导数.若 $f:I\to J$ 在 a 处 n 次可微,$g:J\to\mathrm{R}$ 在 $f(a)$ 处 n 次可微,I,J 是开区间,则 $g\circ f$ 在 a 处 n 次可微.

对称导数(symmetric derivative) 导数的一种推广.设一元函数 f 在 x 附近有定义,f 在 x 处的一阶对称导数是数

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

(若此极限存在,下同),记为 $\mathrm{D}_s^1 f(x)$ 或 $f^{(')}(x)$.二阶对称导数是数

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2},$$

记为 $\mathrm{D}_s^2 f(x)$ 或 $f^{('')}(x)$.n 阶对称导数为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right)}{h^n},$$

记为 $\mathrm{D}_s^n f(x)$ 或 $f_s^{(n)}(x)$.分式中的分子记为 $\Delta_s^n f(x,h)$,称为 f 在 x 处的 n 阶对称差.记号中的 s 是 symmetric(对称)的第一个字母.f 可微时,$f^{(')}$ 存在且等于 f',反之不然,如 $f(x)=2|x|+x$ $(x\in\mathrm{R})$,当 f 与 $f^{(')}$ 均连续时 f 可微.对称导数常特指二阶对称导数.它是黎曼(Riemann,(G. F.)B.)于1854年研究三角级数时首先引进的,后来由施瓦兹(Schwarz,H. A.)详细研究过,故又称为黎曼导数或施瓦兹对称导数.

黎曼导数(Riemann derivative) 即"对称导数".

施瓦兹对称导数(Schwarz symmetric derivative) 即"对称导数".

偏导数(partial derivative) 多元函数的一种导数.指多元函数看做某一自变量(其他自变量固定)的函数时的导数.例如,若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义,则 $f(x,y)$ 关于 x 在 (x_0,y_0) 的偏导数,记为 $f_x(x_0,y_0)$,它是 x 的函数 $g(x)=f(x,y_0)$ 在 x_0 的导数 $g'(x_0)$.换句话说,

$$f_x(x_0,y_0)=g'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

这个偏导数的其他记号有 $\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)$("D_1"表示对 f 的第一个自变量求导数),以及

$$f'_x(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)},z_x(x_0,y_0),\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

等.类似地,$f(x,y)$ 关于 y 在 (x_0,y_0) 的偏导数 $f_y(x_0,y_0)=h'(y_0)$,其中 h 由 $y\to f(x_0,y)$ 定义.在几何上,$z=f(x,y_0)$ 表示平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线,$f_x(x_0,y_0)$ 表示这条曲线在点 (x_0,y_0) 处的切线的斜率.即使各个偏导数都存在,函数也不一定连续.但若各个偏导数都连续,则函数可微,从而连续.偏导数是特殊的方向导数.方向导数可用偏导数表示

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{\nu}} f(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{n}\nu_j\mathrm{D}_j f(\boldsymbol{a}),$$

其中 $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$.以 ∂ 表示偏导数是从莱布尼

茨(Leibniz,G. W.)开始的. 与$\frac{dy}{dx}$不同,$\frac{\partial y}{\partial x}$已不再是微分的商.

方向导数(directional derivative) 多元函数的一种导数. 指多元函数限制在直线或直线段上的导数,即函数沿该直线的一个方向的变化率. 若 E 是 R^n 的开集,$f:E\to\mathrm{R}$,$\boldsymbol{a}\in E$,则通过 $\boldsymbol{a}$ 具方向向量 $\boldsymbol{v}$ 的直线的方程为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}(t\in\mathrm{R})$,$f(\boldsymbol{x})$在此直线与 E 的交集上的限制为由 $g(t)=f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})$定义的函数 g,其中的 t 使 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}\in E$. 导数$g'(0)$称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿 $\boldsymbol{v}$ 方向的导数,记为 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a})$或$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})}$. 这样,

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a})=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})=g'(0)=\lim_{t\to0}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

例如,当 $n=2$,$\boldsymbol{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$,$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$时,

$$g(t)=f(a_1+t\cos\theta,a_2+t\sin\theta),$$

则 $f(x,y)$在 $\boldsymbol{a}$ 处沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数为

$$g'(0)=\cos\theta\mathrm{D}_1f(a_1,a_2)+\sin\theta\mathrm{D}_2f(a_1,a_2).$$

一般地,记 $\boldsymbol{v}=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$,则方向导数可用偏导数表示

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^{n}\nu_i\mathrm{D}_if(\boldsymbol{a}).$$

当 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a})$存在时,$f$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿 $\boldsymbol{v}$ 方向连续,但一般不能得到 f(作为多元函数)在 $\boldsymbol{a}$ 连续. 一些文献不考虑直线而考虑通过 $\boldsymbol{a}$ 具 $\boldsymbol{v}$ 方向的射线,并定义 $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}}f(a)=g'_{+}(0)$,这里 g 同上.

高阶偏导数(partial derivative of higher order) 二阶与二阶以上的偏导数的统称. $k(\geqslant2)$阶偏导数是对多元函数求 k 次偏导数的结果. 例如,对定义在开集 $E\subseteq\mathrm{R}^n$ 上的函数 f,若 D_jf 在 E 上存在,$\boldsymbol{a}\in E$,则当 $\mathrm{D}_i(\mathrm{D}_jf)(\boldsymbol{a})(i,j=1,2,\cdots,n)$存在时,将它称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处(关于第 j,i 个自变量)的二阶偏导数,记为

$$\mathrm{D}_{ji}f(\boldsymbol{a})\text{或}f_{x_jx_i}(\boldsymbol{a})\text{或}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

当 $i\neq j$ 时,称为二阶混合偏导数. 上述记号中

$$\mathrm{D}_{ji},f_{x_jx_i},\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$$

表示先对 x_j 求偏导数,后对 x_i 求偏导数. 有些文献中同一记号表示对 x_i 和 x_j 次序正好相反的相继两次偏导数,即上述 D_{ji}等表示先对第 i 个、后对第 j 个自变量求偏导数. 一般说来,高阶偏导数与各次求导的次序有关,即当 $i\neq j$ 时,$\mathrm{D}_{ij}f(\boldsymbol{a})$与 $\mathrm{D}_{ji}f(\boldsymbol{a})$不一定相等. 有几个充分条件保证它们相等:最常用的一个是 $\mathrm{D}_{ij}f$ 与 $\mathrm{D}_{ji}f$ 都在 $\boldsymbol{a}$ 处连续;另一个是 $\mathrm{D}_{ij}f$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续,D_if 在 $\boldsymbol{a}$ 的某邻域内存在;还有一个是 D_if 与 D_jf 均在 $\boldsymbol{a}$ 可微. 特别地,当 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处二次可微时所有二阶混合偏导数相等. $k(>2)$阶偏导数的定义是类似地,

$$\mathrm{D}_{i_1\cdots i_{k-1}i_k}f(\boldsymbol{a})=\mathrm{D}_{i_k}(\mathrm{D}_{i_1\cdots i_{k-1}}f)(\boldsymbol{a}),$$

这里的 $i_1,i_2,\cdots,i_k=1,2,\cdots,n$. 例如 $\mathrm{D}_{112}f(a)=\mathrm{D}_2(\mathrm{D}_{11}f)(\boldsymbol{a})$. 这个偏导数也记为

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2\partial x_1^2}(\boldsymbol{a})\text{或}f_{x_1^2x_2}.$$

$\mathrm{D}_{i_1,i_2,\cdots,i_k}f(\boldsymbol{a})$当 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 中至少有两个不等时,称为 k 阶混合偏导数. k 阶非混合偏导数有

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(\boldsymbol{a})$$

的形状,其中 $i=1,2,\cdots,n$. 当 f 是 k 次可微函数,特别是 $C^{(k)}$类函数时,所有 $p(\leqslant k)$阶偏导数与求导的变元次序无关. 例如,当 f 是 $C^{(3)}$类函数时,$\mathrm{D}_{112}f=\mathrm{D}_{211}f=\mathrm{D}_{121}f$. f'_x,f''_{x^2}等是拉格朗日引进的符号. 对 $f(x,y)$的二阶偏导数,蒙日(Monge,G.)则以 p,q,r,s,t 分别表示 $f'_x,f'_y,f''_{x^2},f''_{xy},f''_{y^2}$,至今仍在使用.

混合偏导数(mixed partial derivative) 见"高阶偏导数".

向量值函数的导数(derivative of vector valued function) 实函数导数概念的推广. 设 E 是 R^n 中的开集,$\boldsymbol{f}:E\to\mathrm{R}^m$,$\boldsymbol{a}\in E$,若存在 n 元(齐次)线性函数 $\boldsymbol{L}:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$,使

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to0}\frac{1}{|\boldsymbol{h}|}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{L}(\boldsymbol{h})|=0$$

(这里分子与分母上的$|\cdot|$分别表示 R^m 与 R^n 中的欧几里得范数),即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{L}(\boldsymbol{h})+\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|,$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{h})\to0(\boldsymbol{h}\to0$ 时),则 $\boldsymbol{f}$ 称为在 $\boldsymbol{a}$ 处可微,$\boldsymbol{L}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处的全微分,简称微分,记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$. 若 $\boldsymbol{f}$ 在 E 的每一点可微,则 $\boldsymbol{f}$ 称为在 E 上可微,并把由 $\boldsymbol{x}(\in E)\to\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$定义的函数 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}:E\to\mathscr{L}(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^m)$称为 $\boldsymbol{f}$ 在 E 上的微分,这里 $\mathscr{L}(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^m)$表示由 R^n 到 R^m 的所有(齐次)线性函数(线性变换)的集合. $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$($\mathrm{R}^n$ 到 R^m 的线性函数)关于 R^n 和 R^m 的标准基的表示矩阵记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$,称为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处的雅可比矩阵或导数.

设 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_1,\cdots,f_m)$,则

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})=(\mathrm{D}_jf_i(\boldsymbol{a}))_{m\times n}=\begin{bmatrix}\mathrm{D}_1f_1(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_1(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_1(\boldsymbol{a})\\ \mathrm{D}_1f_2(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_2(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_2(\boldsymbol{a})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{D}_1f_m(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_m(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_m(\boldsymbol{a})\end{bmatrix}.$$

其中,当 $m=1,n\neq1$(f 为 n 元实函数)时,$f'(\boldsymbol{x})=\mathrm{grad}\,f|_{x=a}$;$m=n=1$,$f'(a)$即一元实函数 f 的导数;$m\neq1,n=1$($\boldsymbol{f}$ 为一元向量值函数)时,$\boldsymbol{f}'(a)=(f'_1(a),f'_2(a),\cdots,f'_n(a))$. 向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$与其雅可比矩阵(导数)$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$的关系是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h},$$

$\boldsymbol{h}$ 是 n 维向量$(h_1,h_2,\cdots,h_n)$的转置，“·”表示矩阵乘法. 向量值函数的可微及导数概念，完全是多元函数可微及全微分概念的直接推广. 关于向量值函数的高阶导数，只叙述以下两个特殊情况. 设向量值函数 $\boldsymbol{f}:E\to\mathrm{R}^m$($E$ 是 R^n 中的开集)，当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{f}$ 为一元向量值函数(函数组)，它 k 次可微当且仅当各分量函数 k 次可微，$\boldsymbol{f}$ 的 k 阶导数的第 i 个分量即第 i 个分量的 k 阶导数. 当 $m=1$ 时，f为多元实函数，其二阶微分 $\mathrm{D}^2f(h)$为 R^n 上的线性函数(线性变换)，它关于 R^n 的标准基的表示矩阵为(D_{ij}表示二阶偏导数)

$$f''(\boldsymbol{a})=\begin{bmatrix}\mathrm{D}_{11}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{12}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{1n}f(\boldsymbol{a})\\ \mathrm{D}_{21}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{22}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{2n}f(\boldsymbol{a})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{D}_{n1}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{n2}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{nn}f(\boldsymbol{a})\end{bmatrix},$$

它称为 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{a}$ 处的黑塞矩阵. 即梯度的雅可比矩阵. 黑塞(Hesse, L. O.)于 1844 年用它求代数方程组的解. 向量值的复合函数的求导法则可参见“链式法则”.

黑塞矩阵(Hessian matrix)　见“向量值函数的导数”.

微分法(differentiation)　求一元或多元函数的导数(微分、偏导数、高阶导数等)的过程与方法. 求微分或导数作为一种运算的法则称为微分法则：

1. 四则运算法则.

$$(f+g)'=f'+g',\ (cf)'=cf'\ (c\text{ 是常数}),$$

$$(fg)'=f'g+fg',\ \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

2. 复合函数微分法. $(g\circ f)'=(g'\circ f)f'$(参见“链式法则”).

3. 反函数微分法. 对一元函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

严格地，设 f 在包含 a 的开区间 I 上严格单调，$f'(a)$存在(有限或无限)，则反函数 f^{-1}在点 $f(a)\in f(I)$处有导数：当 $f'(a)\neq0$ 时为 $1/f'(a)$，当 $f'(a)=0$ 时为$+\infty$(若 f 严格增)或$-\infty$(若 f 严格减)，当 $f'(a)=\pm\infty$时为 0. 一般地，若在 I 上 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，则 f 的反函数 $f^{-1}:f(I)\to\mathrm{R}$ 也可微，且$(f^{-1})'=1/(f'\circ f^{-1})$.

4. 对高阶导数，有

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)},$$

$$(cf)^{(n)}=cf^{(n)}\ (c\text{ 是常数}).$$

还有

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}g^{(k)},$$

其中 C_n^k 表示组合数. 这个公式称为莱布尼茨公式，是莱布尼茨(Leibniz, G. W.)于 1695 年首先使用的. 用数学归纳法可以把它推广到有限个函数的积的高阶导数情形.

5. 对由参数式 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$($t\in I\subseteq\mathrm{R}$，$I$ 是开区间，φ,ψ 可微，$\varphi'(t)\neq0$)表示的函数 $y=f(x)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

莱布尼茨公式(Leibniz formula)　见“微分法”.

微分(differential)　函数增量的线性主部. 设 f 是定义在 $a\in\mathrm{R}$ 的某邻域内的一元函数，若对该邻域内的 x，存在常数 A，使得 f 在 a 的增量 $\Delta y=f(x)-f(a)=A\Delta x+o(\Delta x)$，这里 $\Delta x=x-a$，即

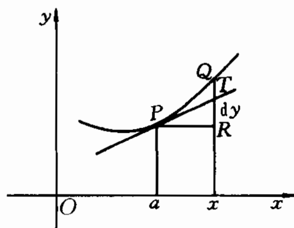
$$f(x)=f(a)+A(x-a)+\varepsilon(x-a)\cdot(x-a),$$

其中$\varepsilon(x-a)$是 $x-a$ 的函数，且

$$\lim_{\Delta x\to0}\varepsilon(x-a)=\lim_{x\to0}\varepsilon(x-a)=0,$$

则 f 称为在 a 处可微，并将 $A(x-a)$称为f在 a 处的微分，记为 $\mathrm{d}f(a)$或 $\mathrm{d}y|_{x=a}$或$(\mathrm{d}f)_a$ 或 $\mathrm{d}f|_{x=a}$. 因为 $\Delta x\to0$ 即 $x\to a$ 时，$A\Delta x$ 是无穷小量 Δy 的主部(若 $A\neq0$)，又是 Δx 的(齐次)线性函数，故微分 $\mathrm{d}f(a)$是增量 Δy 的线性主部. 按这种观点，微分是无穷小量. 同时上述定义可改述为：若存在(齐次)线性函数 $L:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$，使

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+\varepsilon(h)h,$$



则函数 f 称为在 a 处可微，$L(h)$称为f在 a 处的微分. 对于自变量 x，作为它自身的函数时显然它的微分 $\mathrm{d}x$ 就是它的增量 Δx，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 这样就有 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$. 可微与存在有限导数(可导)互为充分必要条件. 在几何上，如图，PT 表示点$P(a,f(a))$处曲线的切线，$QR=f(x)-f(a)=\Delta y$，则 $TR=f'(a)(x-a)=\mathrm{d}f(a)$. 即微分 $\mathrm{d}\,f(a)$是曲线 $y=f(x)$在 P 处的切线上动点坐标的增量. 微分是 Δy 的线性主部的几何意义是：在 P 的附近，用 P 处的切线 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$代替曲线 $y=f(x)$，其误差很小. 用线性函数逼近给定的非线性函数，是微分学的基本思想之一.

设 E 是 R^n 的开集，对于 n 元函数 $f:E\to\mathrm{R}$，可以完全类似地定义微分：对 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in E$，若存在常向量 $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$($A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是固定常数)，使

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$$

(在这里，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$是向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ 的内积)，即

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=A_1(x_1-a_1)+A_2(x_2-a_2)+\cdots+A_n(x_n-a_n)+\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|$，其中

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0,$$

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|=\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\Big]^{1/2},$$

则 f 称为在 $\boldsymbol{a}$ 处可微，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$ 称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的微分或全微分（相对于偏微分而给的名称），记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$. 它仍是函数增量 $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})$ 的线性主部. 它的等价定义是：若存在线性变换 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+L(\boldsymbol{h})+\varepsilon(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

（ε 是函数，当 $\boldsymbol{h}\to 0$ 时，$\varepsilon(\boldsymbol{h})\to 0$），则 $L(\boldsymbol{h})$ 称为 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的（全）微分. 一般地，若以 $y=f(\boldsymbol{x})$ 表示 f，并认为 $\mathrm{d}x_i=x-x_i=h_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

全微分(total differential)　见“微分”.

对数求导法(logarithmic differentiation)　求导数的一种方法. 为求一元函数 $y=f(x)$ 的导数，对它的绝对值取对数并设 $g(x)=\ln|f(x)|$，求导数得 $f'(x)=f(x)g'(x)$. 在某些场合，如 $f(x)$ 呈多个因式的积或商的形式或 f 的表示式是幂指函数时，求函数 g 的导数比直接求 f 的导数容易，这个方法是有用的. 对数求导法是约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ)于1697年前后提出的.

链式法则(chain rule)　求复合函数的导数(偏导数)的法则. 若 I,J 是直线上的开区间，函数 $f(x)$ 在 I 上有定义，在 $a(\in I)$ 处可微，函数 $g(y)$ 在 J 上有定义($J\supset f(I)$)，在 $f(a)$ 处可微，则复合函数 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ 在 a 处可微($g\circ f$ 在 I 上有定义)，且 $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$. 若记 $u=g(y)$，$y=f(x)$，而 f 在 I 上可微，g 在 J 上可微，则在 I 上任意点 x 有

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x),$$

即 $(g\circ f)'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x)$，或写成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

这个结论可推广到任意有限个函数复合的情形. 于是复合函数的导数将是构成复合的这有限个函数在相应点的导数的乘积，就像锁链一样一环套一环，故称链式法则. 若多元函数 $u=g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 在点 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$ 处可微，$b_i=f_i(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，每个函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 处都可微，则函数 $u=g(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 也在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 处可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

这就是多元函数的链式法则. 若同时考察一组(p 个)复合函数 $u_1,u_2,\cdots,u_p$，其中 $u_k=g_k(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ $(k=1,2,\cdots,p)$，将它们的偏导数写成矩阵(雅可比矩阵)，则可看到链式法则在形式上更有规律性. 这时，

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1} & \frac{\partial u_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_p}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1} & \frac{\partial g_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

若对于上面考察的这些函数，令 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_p)$，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$，于是，$\boldsymbol{g}$ 是 p 维向量值函数（定义于 $\mathbb{R}^m$ 的子集上），$\boldsymbol{f}$ 是 m 维向量值函数（定义于 $\mathbb{R}^n$ 的子集上），按照定义，它们的导数是相应的雅可比矩阵（参见“向量值函数的导数”），

$$(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$$

（等式右端为两矩阵 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ 与 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 的矩阵乘积），其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 这就是向量值函数的链式法则，它在形式上与一元函数的链式法则完全相同.

微分形式的不变性(invariance of the form of a differential)　微分表示式不变的性质. 不论 x 是否自变量，只要 $f(x)$ 在 x 处可微，总成立着 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$. $f(x)$ 在 x 处的（一阶）微分的形式总是 $f'(x)\mathrm{d}x$，不会因为 x 不是自变量而变化. 这种不变性是用链式法则证明的，它是一阶微分的重要性质. 高阶微分的形式没有不变性.

高阶微分(differential of higher order)　二阶与二阶以上微分的统称. 若 f 是在包含 a 的某开区间 I 上可微的实函数，即对所有 $x\in I$，有 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}f$ 可看成函数 $x\to f'(x)\mathrm{d}x$，这里 $\mathrm{d}x$ 已与 x 无关. 函数 $\mathrm{d}f$ 在 a 处的微分 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a)$，记为 $\mathrm{d}^2f(a)$，称为 f 在 a 处的二阶微分. 对正整数 $n\geqslant 2$，可定义 n 阶微分

$$\mathrm{d}^nf(a)=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}f)(a),$$

只要在 a 的某邻域内 $\mathrm{d}^{n-1}f$ 存在. 当 n 阶导数 $f^{(n)}(a)$ 存在时，也可直接定义

$$d^n f(a)=f^{(n)}(a)dx^n,$$

这里 dx^n 是 $(dx)^n$ 的简写. 微分 $df(a)$ 又称一阶微分.

当 f 为 n 元实值函数时,df 由 $\boldsymbol{x}\to f'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h}$ 定义,其中 $\boldsymbol{h}=d\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n$,$f'(\boldsymbol{x})$是梯度,"·"表示内积.

$$\begin{aligned}d^2 f(\boldsymbol{a})&=d(df)(\boldsymbol{a})=(df)'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[D_i\left(\sum_{j=1}^{n}D_j f(\boldsymbol{x})h_j\right)\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}}h_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}D_{ij}f(\boldsymbol{a})h_i h_j\\&=\sum_{i,j=1}^{n}D_{ij}f(\boldsymbol{a})dx_i dx_j,\end{aligned}$$

其中 D_j 表示对第 j 个变量的偏导数. 一般,

$$\begin{aligned}&d^m f(\boldsymbol{a})\\&=\sum_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n}D_{i_m i_{m-1}\cdots i_1}f(\boldsymbol{a})h_{i_m}h_{i_{m-1}}\cdots h_{i_1}\\&=\sum_{1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n}D_{i_m i_{m-1}\cdots i_1}f(\boldsymbol{a})dx_{i_m}dx_{i_{m-1}}\cdots dx_{i_1}\\&=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

(这里

$$\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m$$

是括号内的这个微分算子的 m 次幂). 例如,对二元函数$z=f(x,y)$,

$$\begin{aligned}d^2 f(x,y)&=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\\&=\left(dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dxdy\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2.\end{aligned}$$

偏微分(partial differential) 多元函数的一种微分. 指多元函数作为其某一自变量(固定其他自变量)的(一元)函数时的微分. 设 f 是定义在开集 $E\subseteq\mathrm{R}^n$ 上的实函数,$\boldsymbol{a}\in E$,则 f 关于其第 j 个变量 x_j 在 $\boldsymbol{a}$ 处的偏微分 $d_j f(\boldsymbol{a})$是函数 $f(a_1,\cdots,a_{j-1},x,a_{j+1},\cdots,a_n)$在 a_j 处的微分:

$$d_j f(\boldsymbol{a})=D_j f(\boldsymbol{a})dx_j.$$

类似地定义 $k(\geqslant 2)$阶偏微分

$$d_j^k f(\boldsymbol{a})=D_j^k f(\boldsymbol{a})dx_j^k.$$

二阶与二阶以上偏微分统称高阶偏微分.

高阶偏微分(partial differential of higher order) 见"偏微分".

C^n类函数(function of class C^n) 具有 n 阶连续导数的函数. 设函数 f 定义在开集 E 上,若 f 的 n 阶导数在 E 上连续,则 f 称为 E 上的 C^n类函数或在 E 上 n 次连续可微,常以 $f\in C^n(E)$或 $f\in C^n$表示. C^n表示所有这样的函数的集合(函数类). 当 f 是多元函数时,$f\in C^n(E)$当且仅当它的各个 n 阶偏导数均在 E 上连续. 若对所有正整数 n,f 的 n 阶导数均在 E 上存在(这相当于说它们均连续),则 f 称为在 E 上无穷次可微或属于 E 上的 C^∞类函数,常以 $f\in C^\infty(E)$或 $f\in C^\infty$表示. 当 f 是多元函数时,这当且仅当它的所有各阶偏导数均存在且连续. 若 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$,则定义 $\boldsymbol{f}\in C^n(C^\infty)$当且仅当 $f_j\in C^n(C^\infty)(j=1,2,\cdots,m)$. 为了统一,也把连续函数称作 C^0类函数. C^n类函数必是 C^{n-1}类函数. 若函数 f 在点 a 的某邻域上存在 n 阶导数,且该导数在 a 连续,则 f 称为在 a 处 n 次连续可微. f 在开集 E 上属于 C^n类当且仅当它在 E 的每个点处 n 次连续可微. 对定义在任意集 A 上的函数 f,若存在包含 A 的开集 E 与函数 $\varphi\in C^n(E)(C^\infty(E))$,使在 A 上 $f=\varphi$(即 f 是 φ 在 A 上的限制),则 f 称为 A 上的 $C^n(C^\infty)$类函数.

连续可微函数(continuously differentiable function) 见"C^n类函数".

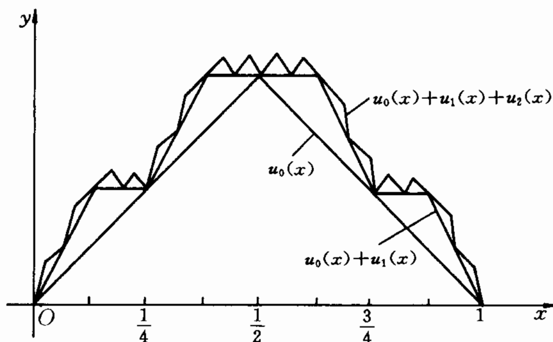
分段可微函数(piecewise differentiable function) 可微函数的推广. 若在区间$[a,b]$上,(一元)函数 f 只有有限个第一类间断点,且在这些点存在广义单侧导数(参见"广义单侧导数"),在$[a,b]$上其余点 f 可微,则 f 称为$[a,b]$上的分段可微函数. 若 f 定义在无穷区间上,且在其任意闭子区间上分段可微,则 f 称为在此无穷区间上分段可微. 分段可微函数的图象处处有切线或单侧切线.

分段光滑函数(piecewise smooth function) 光滑函数的推广. 若一元函数 f 在闭区间 I 上分段连续,至多除有限个点之外可微且导数连续,在这有限个点存在有限的广义单侧连续导数(参见"广义单侧导数"),则 f 称为 I 上的分段光滑函数. 若 f 定义在无界区间上,而在此区间的任何闭子区间上分段光滑,则 f 称为在该无界区间上分段光滑. 分段光滑函数是分段可微的.

不可微函数(non-differentiable function) 微分不存在的函数. 若一元函数 f 在 x_0 处没有(有限)导数,则 f 称为在 x_0 不可微. 例如,函数$f(x)=|x|$在 $x=0$ 处连续,但不可微. 在几何上,这意味着在点$(x_0,f(x_0))$处曲线 $y=f(x)$没有切线或切线与 y 轴平行. 对多元函数,当偏导数之一不存在或为无穷时函数不可微. 在不可微点处函数的图象没有切平面或切平面与某一坐标轴垂直. 数学史上的一件引人注目的事是,1860 年前后,外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))发现了在$(-\infty,+\infty)$上处处连续但无处可微的函数. 他的例子于 1874 年由他的学生发表:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)\quad(x\in\mathrm{R}),$$

其中 $0<b<1$，a 是正奇数且 $ab>1+3\pi/2$（例如 $a=7$，$b=6/7$）. 这个函数有时称为外尔斯特拉斯函数. 波尔查诺(Bolzano, B.)早已于 1834 年以几何形式给出一个这类函数例子，但迟至 1930 年才由后人发表. 继外尔斯特拉斯之后，不断有人举出这样的例子，其中，被公认为形式与思想都比较简单的是，由范·德·瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)于 1930 年给出的下述函数（范·德·瓦尔登函数）：对 $x\in\mathrm{R}$，设 $u_0(x)=\min\{x-[x],[x]+1-x\}$，即 x 与离它最近的整数点的距离，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. $u_0(x)$ 的图象是以 1 为周期的折线，在



$[0,1]$ 上的端点是 $(0,0)$，$(1/2,1/2)$，$(1,0)$（见图）. 对 $k\in\mathrm{N}$，设

$$u_k(x)=4^{-k}u_0(4^kx),\ f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x),$$

则 f 在 R 上连续但处处不可微. 1918 年，克诺普(Knopp, K.)在一篇论文中给出了构造无处可微连续函数的一般方法. 发现函数可以有处处连续但无处可微这样的反常性质，对于区分连续性与可微性，加深对函数本质的了解（仿此，人们又发现了诸如在无理点可微在有理点不可微的连续函数，处处可微而又无处单调的函数等）有重大推动作用. 对诸如此类的病态函数的研究直接促进了实变函数论的建立. 现在已经知道，处处连续但无处可微的函数是非常多的，它们的集合是贝尔第 2 范畴集.

外尔斯特拉斯函数(Weierstrass function)　见“不可微函数”.

范·德·瓦尔登函数(Van der Waerden function)　见“不可微函数”.

雅可比矩阵(Jacobian matrix)　元素是偏导数的一种函数矩阵. 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是从包含 $\boldsymbol{a}$ 的开集 $E\subseteq\mathrm{R}^n$ 到 R^m 的向量值函数，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$. 若 $f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的各个偏导数均存在（有限），则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处的雅可比矩阵，记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$，是 $m\times n$ 矩阵，其第 i 行第 j 列元素是 $\mathrm{D}_jf_i(\boldsymbol{a})$，即第 i 行是 f_i 的各个偏导数，或者称第 i 个行向量是 $f_i(\boldsymbol{x})$ 的梯度

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\mathrm{D}_1f_1(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_1(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_1(\boldsymbol{a})\\ \mathrm{D}_1f_2(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_2(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_2(\boldsymbol{a})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{D}_1f_m(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_m(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_m(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{D}_1f_1 & \mathrm{D}_2f_1 & \cdots & \mathrm{D}_nf_1\\ \mathrm{D}_1f_2 & \mathrm{D}_2f_2 & \cdots & \mathrm{D}_nf_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{D}_1f_m & \mathrm{D}_2f_m & \cdots & \mathrm{D}_nf_m\end{pmatrix}_{\boldsymbol{a}}.$$

这样，当 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微时，$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处的雅可比矩阵就是 $\boldsymbol{f}$ 的导数 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 的表示矩阵. 在多元向量值函数的微分学中，它起着在一元函数微分学中导数的类似作用（参见“向量值函数的导数”）. 雅可比矩阵因雅可比行列式而得名.

雅可比行列式(Jacobian determinant)　雅可比矩阵（为方阵时）的行列式. 若 $y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\cdots$，$y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一组 n 元函数，其数目与它们的自变量数相等，则在它们可微的点集上，以

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$$

为元素的 n 阶行列式（$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数）称为这组函数的雅可比行列式，记为

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

或

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

即

$$\frac{\mathrm{D}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}.$$

若另有一组（n 个）n 元函数 $u_i=g_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则当变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 通过 $y_j=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 作变量代换时，由多元函数的链式法则可见，相应的雅可比行列式有关系式：

$$\frac{\mathrm{D}(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{\mathrm{D}(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\mathrm{D}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\cdot\frac{\mathrm{D}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)},$$

它与一元函数的链式法则在形式上极为相似. 对于上述函数组，若令 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，$\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 都是 n 元（n 维）向量值函数，函数组 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的雅可比行列式可记为 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})=\det(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))$，这里 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 是向量值函数的导数（雅可比矩阵）. 作变量代换时，雅可比行列式之

间的关系可写成：

$$J(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=[(J\boldsymbol{g})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

由于$|J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})|\approx|\boldsymbol{g}(A)|/|A|$（$A$是含$\boldsymbol{t}$的小区域，$|A|$是$A$的若当测度，$|\boldsymbol{g}(A)|$是象集$\boldsymbol{g}(A)$的测度），所以，雅可比行列式$J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$的绝对值在几何上近似表示微小单位体积在映射$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$之下的象的体积（参见"换元积分法"）. 雅可比行列式是雅可比(Jacobi, C. G. J.)于1833年研究重积分的变量代换时引进的，它还在函数相关性及向量值函数的微分学中起重要作用.

函数行列式(functional determinant)　元素是函数的行列式. 如雅可比行列式、朗斯基行列式等. 有时这个名称用来特指雅可比行列式.

微分中值定理(mean value theorem of differential calculus)　亦称拉格朗日中值定理、有限增量定理、有限增量公式. 数学分析中最重要的定理之一. 若一元函数f在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可微，则存在$\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

或存在$\theta\in(0,1)$，使

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a).$$

进一步，若f在闭区间I上连续，在I的内部有导数，$a,a+h\in I$(h可以是负数)，则存在$\theta\in(0,1)$，使

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h).$$

这个定理是拉格朗日(Lagrange, J.-L.)于1797年发表的. 它的几何意义是：在处处有切线的曲线$y=f(x)$上，至少有一点处的切线平行于连结点$(a,f(a))$与$(b,f(b))$的线段. 它又表示在时间区间$[a,b]$中，运动的质点至少在一个时刻的瞬时速率等于它在$[a,b]$内的平均速率. 中值定理是存在性定理. 它断言存在着某个点ξ满足一定条件，但是并没有给出这种点的个数和确切位置. 尽管如此，它仍是用导数研究函数的许多性质的基础. 例如，可以用它研究可微函数的单调、凹凸、极值，证明可微函数为常值函数的充分必要条件是其导数为0等. 在应用中，中值定理的下列不等式形式的变形也是经常使用的：在定理的条件下，若$m\leqslant f'(x)\leqslant M$ ($x\in(a,b)$)，则

$$m\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant M.$$

微分中值定理已被推广到多元函数的情形：

1. 多元函数的中值定理. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$，$l$是连结$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的线段，$E$是包含$l$的某个开集，$f:E\to\mathbb{R}$. 若$f(\boldsymbol{x})$在$l$上可微($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$两点可除外)，则存在$\boldsymbol{\xi}\in l\subset E$，使得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})&=f'(\boldsymbol{\xi})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\\&=\operatorname{grad}f(\boldsymbol{\xi})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

"·"表示内积. 可以把$\boldsymbol{\xi}$写成$\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$0<\theta<1$.

2. 多元函数中值定理的另一种形式. 设$f:E\to\mathbb{R}$在区域$E\subseteq\mathbb{R}^n$中连续，$\boldsymbol{a}\in E$，在$\boldsymbol{a}$的某邻域$B(\boldsymbol{a},\delta)$内$\mathrm{D}_jf(j=1,2,\cdots,n)$存在，则对任意$|\boldsymbol{h}|<\delta$，有

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{D}_jf(\boldsymbol{\xi}_j)h_j,$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_j=\boldsymbol{a}+\theta_jh_j\boldsymbol{e}_j+\sum\limits_{k=j+1}^{n}h_k\boldsymbol{e}_k$，$\boldsymbol{\xi}_n=\boldsymbol{a}+\theta_nh_n\boldsymbol{e}_n$，

($0<\theta_j<1$，$j=1,2,\cdots,n-1$，

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$是$\mathbb{R}^n$的标准基).

拉格朗日中值定理(Lagrange mean value theorem)　即"微分中值定理".

有限增量定理(finite increment theorem)　即"微分中值定理".

推广的中值定理(generalized mean value theorem)　柯西中值定理的推广形式. 通常指：若一元函数f,g在包含实数a的某开区间I上n次连续可微、$n+1$次可微，且对所有$x\in I$，$g^{(n+1)}(x)\neq0$，则对所有$x\in I$，存在a与x间的ξ，使

$$\begin{aligned}&\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)g^{(n+1)}(\xi)\\=&\left(g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)f^{(n+1)}(\xi).\end{aligned}$$

当取$g(x)=(x-a)^{n+1}$时，这就是带拉格朗日型余项的泰勒公式. 当$n=0$时，是柯西中值定理. 有时，推广的中值定理仅指柯西中值定理.

***k*阶中值定理**(mean value theorem of order k)　微分中值定理的推广. 若$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上k次可微，$h=(b-a)/k$，则存在$\xi\in(a,b)$，使

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^if(a+ih)=h^kf^{(k)}(\xi).$$

罗尔定理(Rolle theorem)　微分中值定理的特殊情形. 若一元函数f在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可微，且$f(a)=f(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$. 从这个定理可知：可微函数f的两个零点间必有f'的零点. 一般地，若f有n个零点，且f有k阶导数($k<n$)，则$f^{(k)}$至少有$n-k$个零点. 罗尔定理原是罗尔(Rolle, M.)于1690年确定多项式的根的位置时所加的一个注，后人在此基础上发展起来，罗尔本人并未明确给出并证明它(参见本卷《高等代数》同名条).

柯西中值定理(Cauchy mean value theorem)　微分中值定理的一种推广. 设一元函数f和g在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可微，则存在$\xi\in(a,b)$，使

$$[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi).$$

若f,g还满足下列两条件之一：

1. 对所有$x\in(a,b)$，$g'(x)\neq0$.

2. 对所有$x\in(a,b)$，$f'(x)$与$g'(x)$不同时为

0，且 $g(a)\neq g(b)$，则有

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

在几何上，柯西中值定理表示在有切线的参数曲线 $x=g(t),y=f(t)$ 上，至少有一个点处的切线与连结两点 $(g(a),f(a)),(g(b),f(b))$ 的线段平行.

达布定理(Darboux theorem)　由达布(Darboux,(J.-)G.)给出的有关导数和可积性的两个定理. 指下面两个定理：

1. 若定义在区间上的一元函数处处可微，则它的导函数必是达布连续的，即在这个区间的任意两点的导数之间的数，必是该函数在这两点之间的某个点的导数. 这种情形的达布定理又称导数介值定理. 根据这个定理，若 $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ 在 $[a,b]$ 上可微，则 f' 没有第一类间断点；特别地，若 f' 没有零点，则 f' 不变号，换句话说，在 f' 的两个相邻零点间 f 必严格单调.

2. 设 S_P,s_P 是有界函数 $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ 关于 $[a,b]$ 的分法 P 的上、下和，则

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{|P|\to 0} S_P,$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{|P|\to 0} s_P.$$

因此，$f(x)$ 可积当且仅当

$$\lim_{|P|\to 0}(S_P-s_P)=\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})=0,$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅.

洛必达法则(L'Hospital rule)　求某些类型极限的一个重要法则. 指求 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法. 它把某两个函数的商的极限，化为求这两个函数的导数的商的极限. 即若：

1. 函数 f,g 在 $(a,b)(a,b\in\mathrm{R}^*)$ 内可微；
2. 对所有 $x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$；
3. $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$，或 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=+\infty$(或 $-\infty$)(不要求 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\pm\infty$)；
4. $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\mathrm{R}^*$；

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

类似的结论对 $x\to b-$ 与 $x\to+\infty$(或 $-\infty$)也成立. 在使用这个法则时，如果

$$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ 仍然是}\frac{0}{0}\text{ 型},$$

可以继续使用这个法则，直到出现非 $\frac{0}{0}$ 型为止；如若总出现 $\frac{0}{0}$ 的情况，本法则失效. 洛必达法则告知，在一定条件下，可以从

$$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ 求 }\lim\frac{f(x)}{g(x)},$$

但如前者不存在，不能推断后者不存在，这时本法则也失效. 例如，若

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x},g(x)=x,$$

则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

不存在，但

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

洛必达法则是由约翰第一·伯努利(Bernoulli Johann Ⅰ)发现，由他的学生洛必达(L'Hospital, G.-F.-A.de)于1696年发表的.

零导数定理(zero derivative theorem)　可微函数为常值函数的充分必要条件. 若一元函数 f 在区间 I 上连续，在 I 的内部可微，则 f 为 I 上为常值函数的充分必要条件是 $f'=0$. 这个定理的条件可以减弱为：在 I 上连续，除可数个点外存在等于零的右导数. 一般地，对向量值函数 $\boldsymbol{f}:E(\subseteq\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}^m$，若 E 是连通开集，则 $\boldsymbol{f}$ 为常值的充要条件是：对任意 $\boldsymbol{x}\in E$，有 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0$，即对任意 $i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$，$\mathrm{D}_jf_i(\boldsymbol{x})=0$. 特别地，当 $m=1$ 时，条件成为 $\mathrm{grad}\,f=0$. 这个定理中，f 的定义域的连通性是必不可少的. 例如：设 $m=n=1$，$E=(-2,-1)\cup(0,1)$，且 $x\in(-2,-1)$ 时，$f(x)=1$，$x\in(0,1)$ 时，$f(x)=0$，则 $f'=0$，但 f 非常值. R^n 和 R^m 换成任意赋范线性空间时这个定理仍成立.

伯努利不等式(Bernoulli inequality)　一个有关幂的不等式. 指不等式

$$(1+x)^p\geqslant 1+px,$$

其中 $x>-1$，$p\geqslant 1$ 或 $p\leqslant 0$，等式当且仅当 $p=0$ 或 $p=1$ 或 $x=0$ 时成立. 当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时，不等号反向. 当 $p\geqslant 1$ 时，这个不等式对 $-2\leqslant x\leqslant -1$ 也成立. 当 p 为正整数 n 时，有下列推广：$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)>1+x_1+x_2+\cdots+x_n$，其中 $x_i>-1(i=1,2,\cdots,n)$，且同正或同负. 当 n 为正偶数时，对每个 $x\neq 0$，有 $(1+x)^n>1+nx$. 一般地，若 $F(x)=(1+x)^p-(1+px+\mathrm{C}_p^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_p^kx^k)(x>-1)$，则当 $\mathrm{C}_p^{k+1}x^{k+1}>(=,<)0$ 时，$F(x)>(=,<)0$. 若设 $x=a/b-1$，则可把伯努利不等式写成 $b^p-a^p\leqslant pb^{p-1}(b-a)$；若设 $x=b/a-1$，则可把伯努利不等式写成 $b^p-a^p\geqslant pa^{p-1}(b-a)$. 还可归并为下列对称形式：

$$pa^{p-1}(b-a)\leqslant b^p-a^p\leqslant pb^{p-1}(b-a),$$

其中 $p\geqslant 1$ 或 $p\leqslant 0$. 等式当且仅当 $a=b$ 时成立.

马尔可夫不等式(Markov inequality) 多项式的导数估计式. 若 P_n 为 n 次多项式,

$$M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |P_n(x)|,$$

则
$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |P_n'(x)| \leqslant \frac{2n^2M}{b-a}.$$

右端不能再减小. 它由马尔可夫(Марков, A. A.)于1889年建立. 当 $P_n(x)>0$ 时, 右端的 2 可以去掉. 一般地, 对 $k=1,2,\cdots,x\in(a,b)$时, 有

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{2^k n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{(b-a)^k(2k-1)!!}M = \frac{2^{2k}k!\ n}{(b-a)^k(n+k)}\mathrm{C}_{n+k}^{n-k}M.$$

右端是最好的. 这是由另一个马尔可夫的兄弟(Марков, B. A.)得到的.

伯恩斯坦不等式(Bernstein inequality) 多项式或三角多项式导数的一种估计式. 设 P_n 是 n 次多项式,

$$M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |P_n(x)|,$$

则对 $x\in(a,b)$, 有

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{Mn}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

它不能再改善. 对 n 阶三角多项式 $T_n(x)$ 及其共轭式 $\widetilde{T}_n(x)$, 若

$$M = \sup_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |T_n(x)|,$$

则对任意 $x\in\mathrm{R}$, 有

$$|T_n^{(k)}(x)| \leqslant n^k M (k=1,2,\cdots)$$

与 $|\widetilde{T}_n'(x)|\leqslant nM$. 系数 n^k 是最好的. 一般地, 若 f 是不超过 α 阶的整函数, 则对任意 $x\in\mathrm{R}$, 有

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant \alpha^k \max_{x\in\mathrm{R}} |f(x)|.$$

上述这些不等式都称为伯恩斯坦不等式. 它在函数逼近论中有重要应用, 是由伯恩斯坦(Бернштейн, C. H.)建立的.

泰勒多项式(Taylor polynomial) 逼近给定函数的一类多项式. 形如

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

的多项式称为函数 f 在 a 处的 n 次泰勒多项式. 它是泰勒级数的第 $n+1$ 部分和, 从而得名. 只要 f 在 a 处 n 次可微, 泰勒多项式就存在, 并且它是满足 $f^{(k)}(a)=P_n^{(k)}(a)(k=0,1,\cdots,n)$的惟一 n 次多项式; 它也是满足 $f(x)-P(x)=o((x-a)^n)(x\to a)$ 的惟一的多项式. 这表明, 当用多项式逼近函数时, 在 $x=a$ 附近, 上述泰勒多项式是相当好的. 特别地, 多项式 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 在 $x=0$ 处的泰勒多项式就是它自己.

泰勒公式(Taylor formula) 反映给定函数与其泰勒多项式之间误差的公式, 即

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^k + r_n(x)$$

称为 f 在 a 处的 n 阶泰勒公式, 其中函数 f 在 a 处 n 次可微, r_n 称为余项. 在不同的条件下, 余项可以写成不同的形式. 常用的有以下几种:

1. 佩亚诺余项: $r_n(x)=o((x-a)^n)$, 只要 f 在 a 处 n 次可微就可写成这种形式.

2. 施勒米尔希-罗什余项:

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\ p} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) = \frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n+1-p}}{n!\ p} f^{(n+1)}(\xi),$$

其中 $0<\theta<1, p=1,2,\cdots,n+1, \xi$ 在 a,x 之间, 条件是: f 在 a 的包含 x 的邻域内 $n+1$ 阶可微.

3. 拉格朗日余项:

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),$$

其中 θ, ξ 及条件同 2.

4. 柯西余项:

$$r_n(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),$$

其中 θ, ξ 及条件同 2.

5. 积分余项:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t,$$

条件: $f^{(n+1)}$ 在以 x,a 为端点的区间上可积.

余项 3 和 4 分别是余项 2 在 $p=n+1$ 与 $p=1$ 时的特例. 泰勒公式及其拉格朗日余项是由拉格朗日(Lagrange, J.-L.)于 1797 年给出的. 柯西余项是由柯西(Cauchy, A.-L.)于 1826 年给出的, 而余项 2 中的余项是由施勒米尔希(Schlömilch, O.)于 1848 年给出的.

泰勒公式可以推广到多元函数. 设 f 在 $\boldsymbol{a}\in\mathrm{R}^n$ 的某邻域 $B(\boldsymbol{a},\delta)$ 内 $m+1$ 次可微, 若 f 以 $y=f(\boldsymbol{x})$ 表示, 则对所有 $|\boldsymbol{h}|<\delta$ 有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}^k f(\boldsymbol{a})}{k!} + r_m \\ &= f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\bigtriangledown)^k f(\boldsymbol{a}) + r_m \\ &= f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_k\leqslant n} \mathrm{D}_{i_1\cdots i_k} f(\boldsymbol{a}) h_{i_1}\cdots h_{i_k} + r_m. \end{aligned}$$

其中
$$\boldsymbol{h}\cdot\bigtriangledown = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathrm{D}_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

按多项式展开$(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k$,并规定$D_iD_j=D_{ij}$等. 当$f$在$a$处$m+1$次可微时,余项$r_m$的两种形式分别为拉格朗日余项

$$r_m=\frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{m+1}f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$$
$$=\frac{1}{(m+1)!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^{m+1}f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$$
$$=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_{m+1}\leqslant n}\mathrm{D}_{i_1\cdots i_{m+1}}f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})h_{i_1}\cdots h_{i_{m+1}}$$
$$(0<\theta<1)$$

及积分余项

$$r_m=\frac{1}{m!}\int_0^1(1-t)^m\mathrm{d}^{m+1}f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})\mathrm{d}t.$$

其中$\mathrm{d}^{m+1}f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})$是多元函数$f$在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}$,且$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}$的$m+1$阶微分. 当$f$在$\boldsymbol{a}$处$m$次可微时,$r_m=o(|\boldsymbol{h}|^m)(\boldsymbol{h}\to 0)$(佩亚诺余项). 特别地,当$m=2$时,把$\boldsymbol{a},\boldsymbol{h}\in\mathrm{R}^2$写成$(a,b)$,$(h,k)$,则有(拉格朗日余项)

$$f(a+h,b+k)$$
$$=f(a,b)+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(a,b)$$
$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1}f(a+\theta h,b+\theta k)$$
$$=f(a,b)+\sum_{p+q=1}^{m}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}f(a,b)}{\partial x^p\partial y^q}h^pk^q$$
$$+\sum_{p+q=m+1}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{m+1}f(a+\theta h,b+\theta k)}{\partial x^p\partial y^q}h^pk^q,$$

其中p,q是非负整数. 泰勒公式还可进一步推广到线性赋范空间中. 当$m=1$时,带拉格朗日余项的泰勒公式就是微分中值定理.

麦克劳林公式(Maclaurin formula) 泰勒公式的特殊情况. 即$a=0$时的泰勒公式.

极值的费马定理(Fermat theorem of extremum) 关于函数极值的必要条件的定理. 若$f:A(\subseteq\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}$,$a$是$A$的内点且是$f$的局部极值点,又$f'(\boldsymbol{a})$存在,则$f'(\boldsymbol{a})=0$,即$\boldsymbol{a}$是驻点. 当$n\geqslant 2$时,$f'(\boldsymbol{a})=\mathrm{grad}\,f(\boldsymbol{a})=0$,即$f$的所有偏导数在$\boldsymbol{a}$的值为0. $n=1$时,该定理由费马(Fermat,P. de)于1637(另一说是1629)年得到的,于1679年发表. 不过他没有导数概念,而且没有指出这仅是必要条件. 当$n=1$时,上述定理中的条件$f'(a)$存在可减弱如下:设f定义于A,a是A的内点,$f'_+(a)$与$f'_-(a)$存在. 则当$f(a)$为局部极大(局部极小)值时$f'_+(a)\leqslant 0$,$f'_-(a)\geqslant 0$ ($f'_+(a)\geqslant 0$,$f'_-(a)\leqslant 0$). 在几何上,费马定理表示:在成为局部极值点的内点处,若函数图象的切线存在,则必是水平的.

驻点(stationary point) 亦称稳定点、逗留点、临界点. 指导数为0的点. 对多元向量值函数,指相应的雅可比矩阵为零矩阵,即使得该函数的所有一阶偏导数为0的点. 若可微点既是内点又是局部极值点,必是驻点(费马定理),反之不一定. 若把可微函数$x=f(t)$理解为质点的运动方程,则在驻点处质点的瞬时速度为0,即有瞬间的停留,故称驻点.

稳定点(stable point) 即"驻点".

临界点(critical point) 即"驻点".

拐点(inflection point) 曲线凹向改变的点. 在该点两侧附近,曲线的严格凹凸性相反,即在一侧严格凸(凹),而在另一侧严格凹(凸). 若P是拐点且在P处有切线,则曲线将在P处穿过切线,而且在P点附近的曲线段位于由该切线与P处的法线形成的一对对顶角内. 若该曲线是实函数$y=f(x)$的图象,且$P(a,f(a))$是曲线的拐点,则称a为函数f的拐点. 若a是f的拐点且$f''(a)$存在(有限),则$f''(a)=0$. 反之,若f在a连续,$f''(a)$不存在或$f''(a)=0$或$=\pm\infty$,且在a的某个左邻域内$f''(x)>0(<0)$,某个右邻域内$f''(x)<0(>0)$,则a是拐点. 若$f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$,$f^{(n)}(a)$存在(有限或无限)$(n\geqslant 3)$,且$f^{(n)}(a)\neq 0$,则当$n$是奇数时$a$是拐点.

转向点(turning point) 平面曲线的升降性改变的点. 曲线经过它时由上升变成下降,或由下降变成上升. 设$f(x)$在x_0的某邻域内可微,且在x_0的某左、右邻域内导数$f'(x)$异号,则称x_0为$f(x)$的转向点. 若在转向点存在切线,则此点既是驻点又是局部极值点.

鞍点(saddle point) 多元函数定义域内非极值点的驻点. 因此,若$\boldsymbol{a}$是f的鞍点,当且仅当$f'(\boldsymbol{a})=0$,且在$\boldsymbol{a}$的任何邻域内既有$\boldsymbol{x}$使$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{a})$,又有$\boldsymbol{x}$使$f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{a})$. 原点是双曲抛物面

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

的鞍点. 由于双曲抛物面呈马鞍形,鞍点由此得名. 若光滑曲面有鞍点,则该曲面在鞍点附近将被分成两部分,一部分在鞍点处的切平面的一侧,另一部分在另一侧.

函数的零点(zero of a function) 使函数值为0的自变量的值. 函数$f(x)$的零点就是方程$f(x)=0$的根(解). 从几何上看,即曲线$y=f(x)$与x轴的交点的横坐标. 若$f(x)=(x-x_0)^k\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$在$x_0\in\mathrm{R}$附近有意义,k为某个正数,且$\varphi(x_0)\neq 0$,则x_0称为f的k阶零点,也称$f(x)=0$有k重根x_0. 当k为正整数时,$f(x)=0$有k重根x_0的充分必要条件是:$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$,$f^{(k)}(x_0)\neq 0$(设这些导数均存在).

函数的最大值(maximum of a function) 亦称函数的绝对极大值或整体极大值. 函数值所能取到的最大者. 对函数$f:A\to\mathrm{R}$,若存在$a\in A$,使对所有$x\in A$,有$f(x)\leqslant f(a)$,则f称为在A上存在最大

值(严格最大值),或 f 在 a 处达到最大值(严格最大值)$f(a)$,a 是 f 的最大值点(严格最大值点).若上述不等号反向,则得到最小值与严格最小值的定义.最大值、最小值统称绝对极值或整体极值.函数的最大(小)值如果存在,必是惟一的,但相应的最大(小)值点不一定惟一.在 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集上连续的函数必有最大值与最小值.这是判断一个函数是否有绝对极值的主要依据.为了求最大、最小值,基本的方法是:先确定它们的存在性,然后比较函数在驻点,定义域端点或边界点、不可微点处的函数值,其中最大(小)的就是最大(小)值.在许多应用问题中,最大值与最小值的存在性往往可以由具体问题的背景确定.最早用微分学方法求最大、最小值的是费马(Fermat,P. de).他发现了现在称为费马定理的极值必要条件(不是现在的形式),并认定函数在驻点达到最大或最小值.极值问题一直是数学家关心的问题,有几个数学学科研究更复杂的极值问题,例如凸分析、数学规划、变分学等.

函数的绝对极大值(absolute maximum of a function) 即"函数的最大值".

函数的整体极大值(global maximum of a function) 即"函数的最大值".

函数的最小值(minimum of a function) 见"函数的最大值".

函数的绝对极小值(absolute minimum of a function) 即"函数的最小值".

函数的整体极小值(global minimum of a function) 即"函数的最小值".

函数的绝对极值(absolute extremum of a function) 函数的绝对极大值和绝对极小值的统称.

函数的整体极值(global extremum of a function) 函数的整体极大值和整体极小值的统称.

函数的局部极值(local extremum of a function) 局部极大值与局部极小值的统称.函数在它的定义域的某个开子集上的最大值与最小值.设函数 $f:A\to\mathbb{R}$,$\boldsymbol{a}\in A\subseteq\mathbb{R}^n$.若存在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域 U,使对所有 $\boldsymbol{x}\in A\cap U$ 有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{a})$($f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{a})$),则 $f(x)$ 称为在 $\boldsymbol{a}$ 取得局部极大(小)值,$f(\boldsymbol{a})$是 f 的局部极大(小)值,$\boldsymbol{a}$ 是 f 的局部极大(小)值点.当把 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{a})$($f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{a})$)改为 $f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{a})$($f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{a})$)($\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a}$)时,便得到严格局部极大(小)值的定义.局部极值又称相对极值,因此,又有相对极大值、相对极小值等名词.当 $f(\boldsymbol{a})$是局部极值时,$\boldsymbol{a}$ 称为 f 的局部极值点.局部极值反映函数的局部性质,它常常不是惟一的.而且一个函数的局部极大值不一定比它的局部极小值大.用微分学方法,可以帮助寻找函数定义域的内点中的局部极值点(因此,许多文献只对定义域的内点定义局部极值.这里,局部极值点总是内点).如果局部极值点是内点,且是可微点,则必是驻点(费马定理).这样,局部极值点只能在驻点与不可微点达到.关于什么样的驻点与不可微点是局部极值点,除了用定义判断外,在函数性态较好时可以用导数判断(参见"极值的导数判别法").

函数的相对极值(relative extremum of a function) 即"函数的局部极值".

极值的导数判别法(derivative test for extremum) 即利用导数来判别函数的驻点或可微点是否为局部极值点的方法.设一元函数 f 在 a 的某邻域内连续,$f'(a)=0$ 或 $f'(a)$不存在或 $f'(a)=\pm\infty$,若在 a 的某个左邻域内 $f'(x)\leqslant 0(\geqslant 0)$,在 a 的某个右邻域内 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$,则 a 是 f 的局部极小(极大)点.当上述不等式成为严格不等式时,a 是严格极值点.或者,若 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$,而 $f^{(n)}(a)$存在(有限或无限)且不等于零,则当 $n(>1)$为奇数时,a 是拐点;当 n 为偶数且 $f^{(n)}(a)>0(<0)$时,a 是严格局部极小(极大)点.特别地,若 $f'(a)=0$,$f''(a)>0(<0)$,则 a 是严格局部极小(极大)点.上述判别法只是充分条件.

多元函数的极值的处理方法与一元函数是类似的,但形式复杂得多.设 n 元实值函数 $f(\boldsymbol{x})$在其驻点 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 的某邻域 U 内二次连续可微,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\in U$,若对任意 $\boldsymbol{h}\neq 0$,

$$Q(\boldsymbol{h})=\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{D}_{ij}f(a)h_ih_j>0(<0),$$

则 $\boldsymbol{a}$ 是 f 的严格局部极小(极大)点,若 $Q(\boldsymbol{h})$变号,则 $\boldsymbol{a}$ 不是极值点(即是鞍点).即二次型 $Q(\boldsymbol{h})$正定(负定)时,$\boldsymbol{a}$ 是严格局部极小(极大)点,不定时是鞍点,半定时无确定结论.这样,应用代数的结论,二次型 $Q(\boldsymbol{h})$的表示矩阵,即

$$\begin{pmatrix}\mathrm{D}_{11}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{12}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{1n}f(\boldsymbol{a})\\ \mathrm{D}_{21}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{22}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{2n}f(\boldsymbol{a})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathrm{D}_{n1}f(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_{n2}f(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_{nn}f(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}$$

的 n 个顺序主子式都大于零时,$\boldsymbol{a}$ 是严格局部极小点;n 个顺序主子式负、正相间时,$\boldsymbol{a}$ 是严格局部极大点;当 n 个顺序主子式有一个为 0 时不能判定;在其他情形,$\boldsymbol{a}$ 是鞍点.对二元函数 f(设驻点为(a,b)),设

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mathrm{D}_{11}f(a,b) & \mathrm{D}_{12}f(a,b)\\ \mathrm{D}_{21}f(a,b) & \mathrm{D}_{22}f(a,b)\end{vmatrix},$$

则 $\Delta>0$,$\mathrm{D}_{11}f(a,b)>0(<0)$时,$f(a,b)$是严格局部极小(极大);$\Delta<0$ 时,(a,b)是鞍点;$\Delta=0$ 时,不能判定.上述判别法中,$Q(h)$正是二阶微分 $\mathrm{d}^2f(\boldsymbol{a})=\mathrm{D}^2f(\boldsymbol{a})(h,h)$,故它是一元函数极值的二阶导数判别法的推广.

隐函数定理(implicit function theorem) 判定

隐函数存在及其可微性的命题. 最简单的隐函数定理是关于一元隐函数的. 若：

1. 二元函数 F 在点 $(a,b)\in\mathrm{R}^2$ 某邻域内是 $C^{(q)}$ 类的 $(q>0)$.

2. $F(a,b)=0$.

3. $F_y(a,b)\neq 0$.

则存在 a 的邻域 V 及惟一的 $C^{(q)}$ 类函数 $f:V\to\mathrm{R}$，使：

1. 对所有 $x\in V$，有 $F(x,f(x))=0, b=f(a)$.

2. $f'(a)=-F_x(a,b)/F_y(a,b)$.

当 $q=0$ 时，条件 3 可减弱为存在 $\delta>0$ 与 $\varepsilon>0$，使对任意固定的 $x\in(a-\delta,a+\delta)$，函数 F 关于 y 在 $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 上严格单调，但这时结论 2 不成立.

多元向量值函数的隐函数定理如下：设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathrm{R}^m$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathrm{R}^n$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathrm{R}^m\times\mathrm{R}^n$，$\mathrm{R}^m$，$\mathrm{R}^n$ 中的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 若：

1. $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_n)$ 是从包含 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的开集 $E\subseteq\mathrm{R}^{m+n}$ 到 R^n 的 $C^{(q)}(q\geqslant 1)$ 类函数.

2. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$.

3. $$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\neq 0,$$

即 $$\left.\frac{\mathrm{D}(F_1,\cdots,F_n)}{\mathrm{D}(y_1,\cdots,y_n)}\right|_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\neq 0,$$

则存在包含 $\boldsymbol{a}$ 的开集 $V\subseteq\mathrm{R}^m$ 及惟一的 $C^{(q)}$ 类函数 $\boldsymbol{f}:V\to\mathrm{R}^n$，使：

1. 对所有 $\boldsymbol{x}\in V$，有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=0, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

2. $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})=-B^{-1}A$，其中

$$B=\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n},\quad A=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant m}}.$$

A，B 分别是雅可比矩阵 $F'(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的前 m 列与后 n 列所成的矩阵. 此定理的古典形式为：给定 n 个方程

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,\\F_2(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\F_n(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0.\end{cases}\tag{1}$$

在条件 1～3 下，$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 的附近可解出 $y_j=f_j(x_1,x_2,\cdots,x_m)(j=1,2,\cdots,n)$，并且，对固定的 $k=1,2,\cdots,m$，偏导数

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

可以从解 n 个方程的方程组（即由所给方程组(1)对 x_k 求偏导数得到的方程组）

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

得到. 隐函数定理与反函数定理可以推广到更抽象的空间上.

反函数定理（inverse function theorem） 关于保证反函数存在及可微条件的命题. 设

$$\begin{aligned}y_1&=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\y_2&=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\y_n&=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

是一组（n 个）n 元的 $C^{(q)}(q\geqslant 1)$ 类函数（即每个 $f_i(\boldsymbol{x})$ 都 q 阶连续可微），定义于 R^n 中的开集 E 上，且在 E 内某点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

$$\frac{\mathrm{D}(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq 0,$$

则分别存在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 及 $(f_1(a_1,a_2,\cdots,a_n), f_2(a_1,a_2,\cdots,a_n),\cdots,f_n(a_1,a_2,\cdots,a_n))$ 的邻域 U 及 V，使得 V 是 U 在函数组 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 下的象，且存在惟一一组定义于 V 的 $C^{(q)}$ 类 n 元函数 $x_i=g_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $x_i=g_i(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 对于一切 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V$ 成立，还有

$$\frac{\mathrm{D}(g_1,g_2,\cdots,g_n)}{\mathrm{D}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=\left(\frac{\mathrm{D}(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right)^{-1}.$$

其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的关系由 $y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 或 $x_j=g_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 给出.

反函数定理的向量值函数形式为：若 $\boldsymbol{f}$ 是从 R^n 的开集 E 到 R^n 的 $C^{(q)}(q\geqslant 1)$ 类 n 元（n 维）向量值函数，且在 $\boldsymbol{a}\in E$ 处 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\neq 0$，则分别存在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 的邻域 U 与 V，使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 U 的限制 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|_U$ 成为 U 到 V 的双射，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|_U$ 的反函数（逆映射）$\boldsymbol{g}:V\to U$ 是 $C^{(q)}$ 类的 n 元（n 维）向量值函数，$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 的导数满足 $\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\mathrm{D}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}$，即 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))^{-1}$（对任意 $\boldsymbol{x}\in U$）. 若 $\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{y})=(f_1(\boldsymbol{y}),f_2(\boldsymbol{y}),\cdots,f_n(\boldsymbol{y}))$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),\cdots,g_n(\boldsymbol{x}))$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则也有

$$\frac{\mathrm{D}(g_1,g_2,\cdots,g_n)}{\mathrm{D}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=\left(\frac{\mathrm{D}(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right)^{-1}.$$

对向量值函数，反函数定理也可简述为：若 $C^{(q)}$ 类向量值函数的微分（R^n 上的线性变换）的矩阵（雅可比矩阵）是可逆的，则这个函数是局部可逆的. 当 $n=1$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是一元（实值）函数，反函数定理说明：对于 q 次 $(q\geqslant 1)$ 连续可微函数 $f(x)$，若 $f'(a)\neq 0$，则在 a 的某个邻域上，$y=f(x)$ 的反函数存在，且反函数 $x=g(y)$ 是 q 次连续可微的，

$$g'(y)=g'(f(x))=(f'(x))^{-1}.$$

反函数定理是局部性命题. $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\neq 0$ 只保证在 a 的某个邻域内 $\boldsymbol{f}$ 是单射，从而有反函数. 即使在 E 上处处 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$，也不保证 $\boldsymbol{f}$ 在 E 上是单射. 例如，在 $E=\{(r,\theta)\mid 0<r<+\infty,-\infty<\theta<+\infty\}$ 上，对于 $\boldsymbol{f}(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 有 $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})>0$，但 $\boldsymbol{f}$ 不是单射（平面上点的极坐标不惟一）.

函数的相关性(dependence of functions)　几个函数之间的相依关系. 函数组(作为向量空间内的向量组)的线性相关概念的推广. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 是定义在区域 $D\subseteq \mathrm{R}^n$ 上的 n 元连续函数,若存在 k 及可微函数 F,使对任意 $x\in D$,有 $f_k(x)=F(f_1(x),\cdots,f_{k-1}(x),f_{k+1}(x),\cdots,f_m(x))$,则 f_k 称为在 D 上与 $f_1,\cdots,f_{k-1},f_{k+1},\cdots,f_m$ 相关. 这里,F 定义在 R^{m-1} 的某个开集上,这个开集包含 D 在向量值函数 $(f_1,\cdots,f_{k-1},f_{k+1},\cdots,f_m)$ 下的象集 $\{(f_1(x),\cdots,f_{k-1}(x),f_{k+1}(x),\cdots,f_m(x))\in \mathrm{R}^{m-1}\mid x\in D\}$. 若 F 是线性函数,则上述意义下的相关就是线性相关. 若 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 中有某一个与其他 $m-1$ 个函数相关,则函数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 称为在 D 上相关. 否则称为无关的或独立的. 若 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 连续可微,$m\leqslant n$,$\boldsymbol{a}\in D$,$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$,则当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} \mathrm{D}_1f_1(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_1(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_1(\boldsymbol{a}) \\ \mathrm{D}_1f_2(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_2(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_2(\boldsymbol{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{D}_1f_m(\boldsymbol{a}) & \mathrm{D}_2f_m(\boldsymbol{a}) & \cdots & \mathrm{D}_nf_m(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

的秩为 m 时,存在 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域,在这个邻域内 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 无关. 因此,若对任意 $\boldsymbol{x}\in D$,$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 的秩都是 m 时,$f_1,f_2,\cdots,f_m$ 在 D 上无关. 若对任意 $\boldsymbol{x}\in D$,$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 的秩都不超过 r,$r<m\leqslant n$,但存在 $\boldsymbol{a}\in D$,使 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ 的秩为 r,则在 $\boldsymbol{a}$ 的某个邻域内,$f_1,f_2,\cdots,f_m$ 中恰有 r 个函数无关,而其他 $m-r$ 个函数与这 r 个函数相关. 当对任意 $\boldsymbol{x}\in D$,$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 的秩均为 r 时,在 D 上 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 中有 r 个函数无关. 例如,对三元函数 $f_1(x,y,z)=x+y+z$,$f_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,$f_3(x,y,z)=xy+yz+zx$ $(x,y,z\in \mathrm{R})$,相应的雅可比矩阵在 R^3 的任意点的秩都是 2,于是这三个函数中有两个无关,第三个可用另两个表示. 如 $f_1^2=f_2+2f_3$. 当 $m=n$ 时,连续可微函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 D 上相关的充分必要条件是它们的雅可比矩阵行列式在 D 上恒等于零.

秩定理(rank theorem)　有关雅可比矩阵的秩的一个定理. 设 $\boldsymbol{f}$ 是从 R^m 的区域 A 到 R^n 的区域 B 的连续可微函数,在每个 $\boldsymbol{x}\in A$ 处雅可比矩阵 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 的秩均为 r,$r\leqslant m$,$r<n$,则对每个 $\boldsymbol{x}\in A$,存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $U\subseteq A$,使点 $\boldsymbol{y}\in f(U)$ 的某 $n-r$ 个坐标是另 r 个坐标的可微函数. 例如:设 $m=2$,$n=3$,$\boldsymbol{F}(u,v)=(x,y,z)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$,$(u,v)\in A$,$\boldsymbol{F}$ 连续可微,$(x_0,y_0,z_0)=(f(u_0,v_0),g(u_0,v_0),h(u_0,v_0))$. 若在 (u_0,v_0) 处,$\boldsymbol{F}$ 的雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

的秩为 2,并且有

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\neq 0,$$

则在包含 (u_0,v_0) 的某个区域上

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

上述雅可比矩阵的秩为 2. 由秩定理,在 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内,$\boldsymbol{F}(A)$ 中点的坐标 (x,y,z) 可表示为形如 $z=\varphi(x,y)$. 这就是说,以参数式 $x=f(u,v)$,$y=g(u,v)$,$z=h(u,v)$ 表示的曲面,在对应于使

$$\begin{pmatrix} f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{pmatrix}$$

的秩为 2 的 (u_0,v_0) 的曲面上的点 (x_0,y_0,z_0) 附近,可以用 $z=\varphi(x,y)$ 表示.

约束极值(constrainted extremum)　亦称条件极值. 多元函数在一定限制条件下的极值. 约束极值问题的典型形式是:已知 $g_i:E(\subseteq \mathrm{R}^n)\to \mathrm{R}$,$g_i(\boldsymbol{x})=0$,$\boldsymbol{x}\in D\subseteq E$ $(i=1,2,\cdots,m;1\leqslant m<n)$,求函数 $f:E\to \mathrm{R}$ 的极值,即求函数 $f(\boldsymbol{x})$ 限制在集合

$$D=\{\boldsymbol{x}\in E\mid g_i(\boldsymbol{x})=0,i=1,2,\cdots,m\}$$

上的极值. 这个极值就称为 $f(\boldsymbol{x})$ 的满足条件 $g_i(\boldsymbol{x})=0(i=1,2,\cdots,m)$ 的约束极值. 这样,$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}\in D$ 达到约束极小(极大)值,意味着存在开球 $B(\boldsymbol{a},r)$,使 $\boldsymbol{x}\in D\cap B(\boldsymbol{a},r)$ 时,$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{a})$ $(f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{a}))$. f 称为目标函数,$g_i(\boldsymbol{x})=0(i=1,2,\cdots,m)$ 称为约束条件. 相对而言,$f(\boldsymbol{x})$ 在其定义域 E 上的(绝对、局部)极值称为无约束极值或自由极值. 解约束极值问题的基本方法是把它化为新目标函数的无约束极值问题. 这有两条途径:一是设法取消约束条件,例如从所给的 m 个约束条件中解出 m 个自变量,设为 $x_i=\varphi_i(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)$,$i=1,2,\cdots,m$,把目标函数变成 $n-m$ 元函数 $\varphi(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)=f(\varphi_1(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n),x_{m+1},\cdots,x_n)$,然后求 φ 的无约束极值,这种方法称为代入法. 或以其他参数表示 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$,设为 $x_j=\psi_j(t_1,t_2,\cdots,t_k)$ $(k<n)$,把 $f(\boldsymbol{x})$ 变成 k 元函数 $\psi(t_1,t_2,\cdots,t_k)=f(\psi_1(t_1,t_2,\cdots,t_k),\cdots,\psi_n(t_1,t_2,\cdots,t_k))$,然后求 ψ 的(无约束)极值. 另一途径是不取消约束条件,把它与目标函数一起考虑,建立适当的新目标函数. 这方面一种最常用的方法是拉格朗日乘数法(参见"拉格朗日乘数法"). 除了上述等式形式的约束条件外,还可以用不等式给出约束条件:

$$\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x})=0 & (i=1,2,\cdots,m_1), \\ g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0 & (i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m_2), \\ g_i(\boldsymbol{x})\geqslant 0 & (i=m_2+1,m_2+2,\cdots,m). \end{cases}$$

$$(1\leqslant m\leqslant n).$$

若所有 $g_i(x)$ 与目标函数都是线性函数,则相应的约束极值问题称为线性规划问题,否则称为非线性规划问题. 这些问题在最优化理论中研究.

条件极值(conditional extremum)　即“约束极值”.

拉格朗日乘数法(method of Lagrange multipliers)　求约束极值的一种方法. 其基本思想是引进参数,把约束极值问题化为无约束极值问题. 设需要求目标函数 $f:E(\subseteq \mathrm{R}^n)\to \mathrm{R}$ 在约束条件 $g_i(x)=0$ $(g_i:E\to \mathrm{R}, i=1,2,\cdots,m, m<n)$ 下的极值. 拉格朗日乘数法是:若 E 是开集,$f, g_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 C^1 类的,$\mathrm{D}=\{\boldsymbol{x}\in E \mid g_i(\boldsymbol{x})=0, i=1,2,\cdots,m\}$,矩阵 $(\mathrm{D}_j g_i(\boldsymbol{a}))_{m\times n}$(即向量函数 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$ 的雅可比矩阵 $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$)的秩是 m,则 f 在 $\boldsymbol{a}\in D$ 达到约束极值的必要条件是存在常数 $\lambda_1^0,\lambda_2^0,\cdots,\lambda_m^0$,使

$$\mathrm{D}_j f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 \mathrm{D}_j g_i(\boldsymbol{a}) = 0$$
$$(j=1,2,\cdots,n),$$

即 $\mathrm{D}f(\boldsymbol{a})+\lambda_1^0\mathrm{D}g_1(\boldsymbol{a})+\cdots+\lambda_m^0\mathrm{D}g_m(\boldsymbol{a})=0$. 这样就把 f 的约束极值问题化为函数

$$F(\boldsymbol{x};\lambda)=f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

的无约束极值问题. 这个函数称为拉格朗日函数,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 称为拉格朗日乘数. 拉格朗日函数是 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$ 的 $n+m$ 元函数. 它的驻点加上使 $f,g_1,g_2,\cdots,g_m$ 之一不连续或不可微的点及使得矩阵 $(\mathrm{D}_j g_i(\boldsymbol{x}))_{m\times n}$ 的秩小于 m 的点,就是所有可能达到条件极值的点. 当这样的点惟一时,往往可以从具体问题的背景判断其为极大或极小. 当有若干个这样的点时,除通常用拉格朗日函数的黑塞矩阵判定外,还可用其他方法判定. 下面是其中的一个充分条件:设 $f,g_1,g_2,\cdots,g_m$ 都是 C^2 类的,$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)$ 是拉格朗日函数的驻点,若对满足

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{D}_j g_i(x_0)h_j = 0\ \ (i=1,2,\cdots,m)$$

的 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\neq 0(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in \mathrm{D}\cap B(\boldsymbol{x}_0,r))$ 均有

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{D}_{ij}F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)h_i h_j > 0(<0),$$

则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处达到条件极小(极大)值. 在约束条件包含不等式的情形,也可写出适当的拉格朗日函数并得到类似的必要条件,这在规划论中研究.

拉格朗日乘数(Lagrange multipliers)　见“拉格朗日乘数法”.

拉格朗日函数(Lagrange function)　用拉格朗日乘数法把约束极值问题化为非约束极值问题时得到的目标函数(参见“拉格朗日乘数法”).

切向量(tangent vector)　切线的方向向量. 对于曲线 $\Gamma:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t), t\in[a,b], \boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^n$,当向量 $\boldsymbol{\varphi}'(t_0)$ 存在且不等于零时,它称为 Γ 在点 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ 处的切向量. $\boldsymbol{\varphi}'(t_0)/|\boldsymbol{\varphi}'(t_0)|$ 称为曲线 Γ 在 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ 处的单位切向量. 通过 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ 且与切向量 $\boldsymbol{\varphi}'(t_0)$ 平行的直线就是 Γ 在 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ 处的切线.

单位切向量(unit tangent vector)　见“切向量”.

法向量(normal vector)　与切向量正交的非零向量. 空间曲线上一点处的法向量有无穷个,它们均在过该点与切向量垂直的平面内,这个平面称为法平面. 对 R^n 中的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)(t\in[a,b], \boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^n)$,在点 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$ 处的(超)法平面方程是 $\boldsymbol{\varphi}'(t_0)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(t_0))=0$. 若曲线在某个平面内,则曲线上一点处的单位法向量中有两个在该平面内且它们的指向相反. 平面区域及 R^3 中的曲面上一点处的单位法向量有指向相反的两个. 若曲面 S 的参数表示为 $\boldsymbol{\varphi}, P\in S$, $\mathrm{D}_1\boldsymbol{\varphi}(P)\times \mathrm{D}_2\boldsymbol{\varphi}(P)\neq 0$,这里 $\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2$ 表示偏导数,则 $\pm \mathrm{D}_1\boldsymbol{\varphi}(P)\times \mathrm{D}_2\boldsymbol{\varphi}(P)$ 称为 S 在点 P 处的法向量. 若曲面 S 由方程 $f(x,y,z)=0$ 表示,则非零向量 $\pm \mathrm{grad}\ f(P)=\pm(f_x,f_y,f_z)|_P$ 为 S 在 P 处的法向量. 特别地,$\pm(f_x,f_y,-1)$ 为由方程 $z=f(x,y)$ 表示的曲面的法向量,平面 $ax+by+cz=d(x,y,z\in \mathrm{R})$ 的法向量为 $\pm(a,b,c)$. 模为 1 的法向量称为单位法向量. 对于闭曲面(平面闭曲线),指向内部的法向量称为内法向量,相反方向的向量称为外法向量.

法平面(normal plane)　见“法向量”.

单位法向量(unit normal vector)　见“法向量”.

内法向量(internal normal vector)　见“法向量”.

外法向量(external normal vector)　见“法向量”.

切线(tangent line)　通过曲线上某点的割线的极限位置. 设 Γ 是 n 维欧几里得空间 R^n 的曲线,P 是 Γ 上一点,Q 是 Γ 上另一点. 若 Q 沿 Γ 趋于 P 时,直线 PQ 趋于直线 PT,则 PT 称为 Γ 在 P 处的切线,P 称为切点. 在切点附近,与其他直线相比,切线与该曲线最接近. 切线与曲线不一定只交于一点. 在一点处可以不存在切线. 若 Γ 的参数表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t), t\in[a,b], \boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^n$,点 P 对应 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)$,则当 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 t_0 可微且 $\boldsymbol{\varphi}'(t_0)\neq 0$ 时,Γ 在 P 处存在惟一的切线,其方程为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t_0)+t\boldsymbol{\varphi}'(t_0)(t\in \mathrm{R})$. 特别,若 Γ 是在 x_0 处可微的一元函数 $y=f(x)$ 的图象,则在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的方程为 $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. 当平面曲线的方程是 $F(x,y)=0$ 时,在 $(x_0,y_0)(F(x_0,y_0)=0)$ 处的切线方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0,$$

这里已设 $\partial F/\partial x, \partial F/\partial y$ 在 (x_0,y_0) 处不同时为零. 极坐标方程表示的曲线在 $\theta=\theta_0$ 处的切线的方程为

$$\rho=\frac{(\rho(\theta_0))^2}{\rho(\theta_0)\cos(\theta-\theta_0)-\rho'(\theta_0)\sin(\theta-\theta_0)}.$$

对曲面 S 及 S 上的点 P，S 上过点 P 的任一曲线在 P 处的切线称为 S 在 P 处的切线. 在公共点 P 处有相同的切线的两条曲线称为在 P 处相切. 两个圆的内切与外切是两曲线相切的特殊情形.

法线(normal)　过切点与切线正交的直线. 通过 R^n 中曲面(曲线)上一点，并与该点处的法向量平行的直线. 若该点的向径为 $\boldsymbol{p}$，法向量为 $\boldsymbol{n}$，则法线方程为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{n}(t\in\mathrm{R})$. 对平面曲线 $F(x,y)=0$，在 $(x_0,y_0)(F(x_0,y_0)=0)$ 处若 F_x'，F_y' 不同时为 0，则它在这点的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0)}.$$

曲线 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 在 t_0 处的法线方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)=0$$

(设 $\varphi'(t_0)$ 和 $\psi'(t_0)$ 不同时为 0). 极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 表示的曲线在 θ_0 处的法线方程为

$$\rho=\frac{\rho(\theta_0)\rho'(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)\cos(\theta-\theta_0)+\rho(\theta_0)\sin(\theta-\theta_0)}.$$

切平面(tangent plane)　指过 R^3 中曲面上的一点与该曲面的法向量垂直的平面. 设 S 是 R^3 中的曲面，$S=\boldsymbol{\varphi}(D)$，$D$ 中点的曲线坐标为 (u,v)，点 P 对应 $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)\in S$，则 S 在 P 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\varphi}_u\times\boldsymbol{\varphi}_v|_{(u_0,v_0)}$ (设不为零向量)，切平面方程为 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0))=0$，其中 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in\mathrm{R}^3$. 若曲面 S 由 $z=f(x,y)$ 给定，则在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切平面方程为

$$z-f(x_0,y_0)$$
$$=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

若 S 由 $f(x,y,z)=0$ 给定，则 S 在 $P=(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $\mathrm{grad}\,f(P)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0))=0$ $(\mathrm{grad}f(P)\neq0)$，即 $f_x(P)(x-x_0)+f_y(P)(y-y_0)+f_z(P)(z-z_0)=0$. 切平面也可以定义为由向量 φ_u 与 φ_v 确定的平面，或将 S 在 P 处的切平面定义为有下列性质的平面：从 S 上的点 Q 到它的距离与 Q 到 P 的距离之比当 Q 趋于 P 时的极限为 0.

积　分　学

积分学(integral calculus)　数学分析的分支学科. 即研究各种积分(理论、计算和应用)以及它们之间的关系的学科. 数学分析中的积分指的是一元和多元实函数在黎曼意义下的积分. 各类积分中最基本的是定积分和作为微分逆运算并为计算定积分服务的不定积分，其他的还有重积分、曲线积分、曲面积分和各种情形下的反常积分. 这些都是定积分的推广. 积分这个词是雅各布第一・伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)于 1690 年首先使用的. 1696 年，莱布尼茨(Leibniz, G. W.)与他确定用积分学这个词代替莱布尼茨原来使用的求和计算这个名称. 积分学源于求曲线形的面积、弧长和立体体积等几何问题，以及由变速运动物体的速度求它经过的路程的力学问题. 它的思想萌芽可追溯到古希腊时期用以求面积和体积的穷竭法. 莱布尼茨实质上接受了卡瓦列里(Cavalieri, (F.)B.)不可分量法的思想，将图形看成无穷多个宽度为无穷小的矩形之和，从而导致了积分. 以求曲线 $y=x^2$，x 轴与直线 $x=0$，$x=1$ 围成的图形面积为例，莱布尼茨将此图形看做由无穷多个高为 x^2 宽为 $\mathrm{d}x$ 的矩形合成(如图)，这里的 $\mathrm{d}x$ 是无穷小，它不等于 0，但比任何正数都小. 这样，所要求的面积 S 等于无穷多个 $x^2\mathrm{d}x$ 之和. 他于 1675 年开始用"$\int$"(拉长了的 summa(求和)的第一个字母 S)表示求和，于是

$$S=\int x^2\mathrm{d}x,$$

这就是积分. 牛顿(Newton, I.)从另一途径导致积分概念. 他首先确定曲线下的面积 S 对曲线的横坐标 x 的变化率(即导数)为纵坐标 y，这样面积 S 就可以由 y 经过反微分得出. 在本例中曲线是 $y=x^2$，按牛顿的方法就是先有 $S'(x)=y=x^2$，然后得出

$$S(x)=\int x^2\mathrm{d}x$$

($S(x)$ 是对应于 x 的变动的面积). 所以，莱布尼茨的积分是无穷多个无穷小之和，牛顿的积分则是反微分. 两人又几乎同时互相独立地得出积分与微分的互逆关系(前者在 1675 年，后者在 1666 年)，由此得到在很多情况下可行的积分计算方法，即通过求原函数算积分，这样积分才成为真正有意义的概念，它也标志着积分学这个新学科的创立. 当然，牛顿和莱布尼茨的积分概念是缺少逻辑基础的. 严格的定积分定义由 19 世纪的柯西(Cauchy, A.-L.)和黎曼(Riemann, (G. F.)B.)建立. 柯西事先假定了求积分的函数连续，而且对连续函数的积分存在的证明也不够严密. 黎曼则是对有界函数给出积分定义，然后在此基础上证明了连续函数的积分存在. 仍以上面提到的求曲线 $y=x^2$ 下的面积为例，他们的作法是：先将区间 $[0,1]$ 任意分成 n 个小区间(不一定等分) $[a_k,a_{k+1}]$ $(k=1,2,\cdots,n)$，在任一个小区间 $[a_k,a_{k+1}]$ 上，以它为底，以其上任一点 ξ_k(不一定 $\xi_k=a_k$)处的曲线高度为高作小矩形，用这样的小矩形并起来逼近曲线图形，于是

$$S=\lim\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)\xi_k^2,$$

其中的极限过程是使所有的小矩形宽度 $a_{k+1}-a_k$ 趋于 0. 而这就是黎曼定义的积分，现已被普遍接受. 它与穷竭法的思想有明显的共同之处，都是用直线形去逼近曲线形. 但用穷竭法求不同的曲线形面积时，用不同类型的直线形逼近，而黎曼则一律用矩形. 再者穷竭法还要用反证法去证明所得结果（参见“穷竭法”），回避极限. 而黎曼积分则是建立在严格的极限概念基础之上的. 在柯西（1823）和黎曼（1854）的积分定义出现之后，接着二重积分的严格理论也有了，积分概念被推广到了无界函数，还有各种广义积分，其中最有意义的推广是勒贝格积分（参见《数学辞海》第三卷同名条）.

积分(integral)　各种类型的积分的统称（参见“积分学”）. 有时积分一词也指求（定）积分或求原函数（反微分）的过程.

定积分(definite integral)　积分学的最基本概念. 在历史上由求面积问题导出，莱布尼茨（Leibniz，G. W.）视为无穷多个无穷小之和，后经黎曼（Riemann，(G. F.)B.）严密化定义为某种和的极限的量（参见“积分学”），亦即黎曼积分. 对于在区间 $[a,b]$ 上有定义的函数 f，它在此区间上的定积分（如果存在）记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ \left(\text{或}\int_a^b f\right),$$

其定义为：作 $[a,b]$ 的任意分法 $P:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i,i=1,2,\cdots,n)$，求和

$$\sigma_{P,\xi}(f)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

若对于某数 I，任给 $\varepsilon>0$，总存在相应的 $\delta>0$，使得对于满足

$$|P|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})<\delta$$

的任意分法 P 及任意选择的 $\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i,i=1,2,\cdots,n)$ 都有 $|\sigma_{P,\xi}(f)-I|<\varepsilon$，则 $f(x)$ 称为在 $[a,b]$ 上可积（$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分存在），I 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上（或从 a 到 b）的定积分，即

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f.$$

这里 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})(=\sigma_{P,\xi}(f))$

称为函数 $f(x)$（相应于 $[a,b]$ 的分法 P 及点 ξ_i 的取法）的积分和. 由积分和 $\sigma_{P,\xi}(f)$ 到求得定积分值 I 的过程也是一个极限过程，因此也记

$$I=\lim_{|P|\to 0}\sigma_{P,\xi}(f).$$

在数学分析中，这是不同于数列极限和函数极限的一类特殊形式的极限. 定积分的两种记法

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ \text{与}\int_a^b f$$

大致上都是从莱布尼茨开始使用的，其后，经过欧拉（Euler，L.）、傅里叶（Fourier，J.-B.-J.）和柯西（Cauchy，A.-L.）等人的修改，逐渐演变成了这个形式. 其中的 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$[a,b]$ 为积分域（积分区间），a 为积分下限，b 为积分上限，a,b 统称为积分限，表示积分变量的变化范围. 于是，整个（前一种）记法表示，函数 $f(x)$ 对于 x 从 a 到 b 积分. 当积分变量不致弄错时可用后一种记法.

定积分的主要性质有（以下设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的可积函数，α,β 均为实数）：

1.（线性性）$\alpha f+\beta g$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g.$$

2. 若 $f(x)\leqslant g(x)$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立，则

$$\int_a^b f\leqslant\int_a^b g;\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

若处处 $f(x)<g(x)$，则

$$\int_a^b f<\int_a^b g;-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

3. $|f(x)|$ 可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

4.（对积分区间的有限可加性）设 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$ 都是 $[a,b]$ 上的点，则

$$\int_a^b f=\int_a^{c_1}f+\int_{c_1}^{c_2}f+\cdots+\int_{c_{n-1}}^{b}f$$

$$\left(\text{注：}c<b\text{ 时，定义}\int_b^c f=-\int_c^b f\right).$$

5. 第一中值定理和第二中值定理（参见“第一积分中值定理”和“第二积分中值定理”）.

积分号(integral sign)　见“定积分”.

被积函数(integrand)　见“定积分”.

积分变量(integral variable)　见“定积分”.

积分域(domain of integration)　见“定积分”.

积分区间(interval of integration)　见“定积分”.

积分上限(upper limit of integration)　见“定积分”.

积分下限(lower limit of integration)　见“定积分”.

积分限(limit of integration)　积分上限和积分下限的统称.

原函数(primitive function)　任何可微函数相

对于它的导函数的名称. 对于函数 f 和 F,若在某区间 I 上,处处有 $F'(x)=f(x)$(即 f 是 F 的导函数),则 F 称为 f 在区间 I 上的原函数;不指明区间时,就称 F 是 f 的原函数. 由于牛顿-莱布尼茨公式,求原函数对于计算定积分有重要意义. 因为导函数是达布连续的,所以 f 有原函数的必要条件是 f 达布连续. 又由微积分基本定理,f 有原函数的充分条件是 f 在某区间上处处连续. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)$$

是它在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 原函数这个词是拉格朗日(Lagrange,J.-L.)开始使用的.

不定积分(indefinite integral) 即一个函数的原函数的全体. 定义在区间 I 上的函数 f 在 I 上的所有原函数都称为它在 I 上的不定积分,记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x \text{ 或} \int f.$$

函数 f 有不定积分与它有原函数条件相同,若 F 是 f 的一个原函数,则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

其中 C 为一个可取任意实数值的常数(相对于 x 而言),称为积分常数. 特别地,当 f 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续时,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C \ (a \leqslant x \leqslant b).$$

这个式子也表现了不定积分与定积分的关系. 不定积分的"不定",就在于常数 C 的不确定性. 求 f 的不定积分而不指明区间时,可理解为在 f 的整个定义区间上求它的不定积分.

积分常数(integral constant) 见"不定积分".

积分曲线(integral curve) 函数的原函数或不定积分的图象. 由于函数 f 的原函数或不定积分是微分方程 $y'=f(x)$ 的解,所以,微分方程 $y'=f(x)$ 的任何解的图象也称为该方程的积分曲线.

分法(division) 亦称分划、分割. 一个区域的分解方法. 把直线上的区间(或 R^n 中的区域、曲面、曲线以至一般集合)分解为有限个至多有公共边界点的子区间(或子区域、小块曲面、小段曲线、子集)的并集,这些子区间(或子区域等)组成的集合即称为原区间(或区域等)的一个分法. 若用 P 记直线上区间 $[a,b]$ 的一个分法,则它是由取分点 $x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$,使满足 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,而将 $[a,b]$ 分成为 n 个小区间的集合,数 $|P|=\max\{x_i-x_{i-1}|i=1,2,\cdots,n\}$ 称为分法 P 的模(或细度). 若 P_1,P_2 都是 $[a,b]$ 的分法,且 P_2 中的区间都是 P_1 中区间的子区间,则 P_2 称为 P_1 的加密或细分. 若 E 是 R^n 中的若尔当可测集,则其分法 $P=\{E_1,E_2,\cdots,E_k\}$,其中 $E_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都是 E 的若尔当可测的子集,各 E_i 互相间至多有公共的边界点,它们的最大直径称为 P 的模,记为 $|P|$. 加密的含义同上. 曲面、曲线的分法与此类似,注意分出的必须也是曲面、曲线. 分法的概念主要用以定义各类积分.

分划(partition) 即"分法".

分割(partition) 即"分法".

分划的模(norm of partition) 见"分法".

分划的细度(norm of partition) 见"分法".

积分和(integral sum) 为定义积分而作的某种特殊的和数. 对于每种积分,几乎都有与其相应的积分和. 相应于区间 $[a,b]$ 上的定积分的积分和(也称黎曼和)是这样作出的:设 P 是 $[a,b]$ 的一个分法,在 P 的每个小区间上取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,对于在 $[a,b]$ 上有定义的函数 f,和数

$$\sigma_{P,\xi}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

称为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上关于 P 及 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ 的积分和. 若 f 在区间 $[a,b]$ 上可积,则定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

可说成是 f 的积分和当分法无限加细($|P|\to 0$)时的极限. 其他各种积分(不定积分与广义积分除外)的积分和定义及其与积分的关系跟这里说的类似.

黎曼和(Riemann sum) 与定积分相应的积分和(参见"积分和"). 有时把黎曼意义下的其他积分也称为黎曼积分,则相应的积分和也可称为黎曼和.

达布和(Darboux sum) 与积分有关的一种和式. 上和与下和的统称. 若 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数,P 是以 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 为分点集的 $[a,b]$ 的任意分法,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,M_i,m_i 分别是 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界和下确界,则下面两个和数

$$S_P(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$s_P(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

分别称为函数 f 在 $[a,b]$ 上关于分法 P 的上和与下和. 达布和是达布(Darboux,(J.-)G.)于 1875 年引进的,它的意义在于:

$$\lim_{|P|\to 0}(S_P(f) - s_P(f)) = 0$$

(此处极限的意义与定积分定义中的相同)是有界函数 f 可积的充分必要条件. 对于多元函数也可建立类似的达布和的概念,它与相应重积分的关系也与上述类似.

上和(upper sum) 见"达布和".

达布上和(Darboux upper sum) 即"上和".

黎曼上和(Riemann upper sum) 即"上和".

下和(lower sum)　见"达布和".

达布下和(Darboux lower sum)　即"下和".

黎曼下和(Riemann lower sum)　即"下和".

黎曼上积分(Riemann upper integral)　当分法无限加细时上和的极限.有界函数 f 在$[a,b]$上的黎曼上积分记为

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

它也是关于$[a,b]$的所有分法 P 的上和 $S_P(f)$的下确界,即

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{|P|\to 0} S_P(f)=\inf_{P\in\mathscr{P}} S_P(f)$$

(其中 $\mathscr{P}$ 表示$[a,b]$的所有分法之集合).与此类似,有界函数 f 关于$[a,b]$的任意分法 P 的下和当分法无限加细时的极限,或对于所有分法 P 的上确界,称为 f 在$[a,b]$上的黎曼下积分,记为

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{|P|\to 0} s_P(f)=\sup_{P\in\mathscr{P}} s_P(f)$$

(参见"达布和").有界函数 f 可积的充分必要条件是 f 的黎曼上、下积分相等.当 f 的黎曼上、下积分相等时,它们也等于 f 的定积分值.黎曼上、下积分的名称和记号是沃尔泰拉(Volterra,V.)于 1881 年引进的.

黎曼下积分(Riemann lower integral)　见"黎曼上积分".

变上限积分(integral with changing upper limit)　变动区间上的定积分.设 f 在区间$[a,b]$上可积,则对任意 $x\in[a,b]$,函数 f 在$[a,x]$上亦可积,积分

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

称为 f 的变上限积分,它在$[a,b]$上是 x 的函数.特别地,当 f 在$[a,b]$上连续时,则

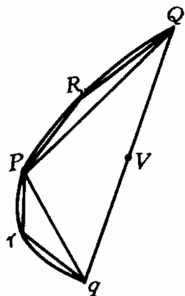
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

由此可见,这时

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$的一个原函数,于是可知:连续函数的原函数一定存在,此即所谓连续函数的原函数存在定理.

穷竭法(method of exhaustion)　历史上用以求面积和体积的一种方法,用积分(方法)求面积的思想渊源之一.一般认为,穷竭法是由欧多克索斯(Eudoxus,(C))创立的,阿基米德(Archimedes)把它发展到了顶峰.穷竭法这个名称则是在 16 或 17 世纪才使用的.用穷竭法求曲线形的面积包含两个步骤:首先要根据曲线形的几何特性,选定用某种类型的直线形去逼近.像阿基米德求圆的面积时,用内接或外切的正 $2n(n\geqslant 2)$边形去逼近圆;而他在求抛物弓形 PQq 的面积时(见图),先作$\triangle PQq$(P 是该段抛物线弧的顶点,即弧上到弓形底边的垂线距离最大的点,也是过底边 Qq 的中点 V 平行于抛物线对称轴的直线与弧的交点),再在以$\triangle PQq$ 的另两边为底边的两个弓形内,类似地,作$\triangle PQR$ 和$\triangle Pqr$,如此下去得到一系列三角形.阿基米德就用由这些三角形组成的内接多边形去逼近抛物弓形,由此求得其面积的值.然后用反证法(穷举法)证明曲线形的面积等于求得的值.这种方法蕴含了极限思想的萌芽(在第二步的证明中,用到当内接多边形的边数很大时,以其边为底的曲线弓形面积之和可小于任何给定的正数),但它不是极限方法,也没有无穷小的思想,而恰恰由于表达上排除了极限,而需要第二步的证明.用积分求面积时,在区间的分法基础上,作小矩形的面积之和逼近曲线形面积的作法,肯定继承了穷竭法前一步的思想,而穷竭法由于要根据曲线特点确定内接直线形的类型,因而只在少数特殊情况才能奏效,局限性很大,不如用积分的方法是程序化的,具有一般性.穷竭一词的含义可以从两个方面来理解:首先它是用边数无限增加的内接直线形去"穷竭"曲线形;其次,在后一步的证明中,它要"穷竭"曲线形面积与所求得的数值之间大于、小于和等于三种关系,否定前两种而得出所需结论.



黎曼积分(Riemann integral)　即定积分.由于其严格定义最初是由黎曼(Riemann,(G.F.)B.)给出的,故有此名.数学分析中的各种积分都是它的推广,因此,这些积分也被冠以黎曼的名字,或说是在黎曼意义下的积分.

黎曼可积函数(Riemann integrable function)　即其定积分(黎曼积分)存在的函数.在数学分析中,常省略名称中的黎曼二字,直接称其为可积函数,或称该函数可积(对某个区间而言).函数 f 在区间 I 上可积的必要条件是:f 在 I 上有界;可积的充分条件是:f 在闭区间上连续或单调;可积的充分必要条件是:它的黎曼上、下积分相等或

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i - x_{i-1}) = 0$$

(此处 P 为 I 的任一分法,P 含 n 个小区间,第 i 个小区间是$[x_{i-1},x_i]$,

$$\omega_i = \sup_{x,x'\in[x_{i-1},x_i]}|f(x) - f(x')|$$

为 $f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅).函数 f 在区间 I 上可积的最深刻的特征是由勒贝格(Lebesgue,H.L.)

于 1904 年给出的下列条件：f 在 I 上有界且间断点集的勒贝格测度为 0.

绝对可积函数(absolutely integrable function) 指绝对值可积的函数. 对黎曼积分(包括重积分)，可积函数必绝对可积，且函数的绝对值的积分不小于该函数的积分的绝对值，即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$$

但在黎曼意义下绝对可积的函数不一定可积. 例如，在有理点等于 1 在无理点等于 -1 的函数. 对一元函数的广义积分，情形极不相同：$|f(x)|$ 广义可积(即 $f(x)$ 的广义积分绝对收敛)时 f 广义可积，反之不一定. 对广义重积分，通常采取这样的方式定义：使绝对可积与可积等价，即广义重积分收敛当且仅当它绝对收敛.

纵标集(ordinate set)　一种实数集. 设 f 是定义在集 $A\subseteq \mathbb{R}^n$ 上的非负函数. $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子集 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})\mid (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A, 0\leqslant x_{n+1}\leqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$ 称为 $f(x)$ 在 A 的纵标集. 当 f 连续且 $n=1$ 时，通常称为曲边梯形. $n=1$ 且 f 可积时，若 $A=[a,b]$，则纵标集的面积是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $A\subseteq \mathbb{R}^n$ 是若尔当可测的区域(即有若尔当意义下的体积的区域)，f 连续，则纵标集是 $n+1$ 维若尔当可测的，且体积为

$$\int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)).$$

曲边梯形(trapezoid with curve side)　见“纵标集”.

微积分基本定理(fundamental theorem of calculus)　沟通积分与微分关系的重要命题. 有以下两种形式：

1. 若一元函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，又令

$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ \ (a\leqslant x\leqslant b),$$

则在 f 的任意连续点 x_0 处，函数 G 可微，且 $G'(x_0)=f(x_0)$. 特别地，若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 G 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 也就是说，连续函数的原函数一定存在.

2. 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积且存在原函数，则对于 f 的任一原函数 F，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则上述公式必定成立. 这里，形式 2. 中的公式又称牛顿-莱布尼茨公式，它是形式 1. 的推论. 当 f 是连续函数时，形式 1. 和形式 2. 的结论可改写为

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x);$$

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

由此可见，微积分基本定理的重要意义在于：揭示了在一定范围内(先积分时要求被积函数连续，先求导时要求导函数连续)，积分与微分(求导数)是互逆的运算. 同时，牛顿-莱布尼茨公式还给出定积分的一种重要而有效的计算方法. 微积分基本定理最初由牛顿(Newton, I.)(1666)和莱布尼茨(Leibniz, G. W.)(1675)发现并用于计算积分. 对它的第一个严格的叙述和证明(对连续函数)由柯西(Cauchy, A.-L.)于 1823 年给出，上面叙述的牛顿-莱布尼茨公式的条件是达布(Darboux, J.-G.)于 1875 年给出的.

牛顿-莱布尼茨公式(Newton-Leibniz formula) 联系积分与导数的公式. 即指下列公式：当 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，F 是 f 的任一原函数时，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

这里的 $F(b)-F(a)$ 常记为 $F(x)|_a^b$. 所以，此公式的常用形式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)|_a^b$$

(f 连续，F 是 f 的原函数).

它给出了定积分的一个常用的有效计算方法(参见“微积分基本定理”).

第一积分中值定理(first mean value theorem for integrals)　有关积分平均值的定理. 该定理断言：若函数 f,g 在区间 $[a,b]$ 上可积，g 不变号，M，m 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的上、下确界，则存在 $\mu\in[m,M]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g\mathrm{d}x.$$

此外，若 f 还连续，则存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，当 $g=1$ 时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)\text{(若 } f(x) \text{ 可积)}$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)\text{(若 } f(x) \text{ 连续)}.$$

在几何上，这表明：$f(x)\geqslant 0$ 时，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b, y=0$ 包围的曲边梯形的面积等于以区间 $[a,b]$ 为一边，适当的 μ 或 $f(\xi)$ 为另一边长度的矩形的面积. 对广义积分，第一积分中值定理仍然成立(f,g 可积的条件改为广义可积且有界). 对定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当可测集 A 上的函数 f 的重积分，第一积分中值定理也成立. 若函数 $f,g:A\to\mathbb{R}$ 可

积，g 不变号，M,m 分别是 f 在 A 上的上、下确界，则存在 $\mu\in[m,M]$，使

$$\int_A f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mu\int_A g(x)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

此外，若 A 连通，$f(\boldsymbol{x})$ 连续，则存在 $\xi\in A$，使

$$\int_A f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=f(\xi)\int_A g\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

特别地，有

$$\int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mu|A|$$

或

$$\int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=f(\xi)|A|,$$

这里 $|A|$ 表示 A 的若尔当容度.

第二积分中值定理(second mean value theorem for integrals)　定积分的又一中值定理. 设函数 g 在区间 $[a,b]$ 上可积. 若 $f(x)\geqslant 0$，且递减(或递增)，则存在 $\zeta\in[a,b]$，使

$$\int_a^b fg\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\zeta g\mathrm{d}x\left(\int_a^b fg\mathrm{d}x=f(b)\int_\zeta^b g\mathrm{d}x\right);$$

若 f 单调，则存在 $\zeta\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\zeta g\mathrm{d}x+f(b)\int_\zeta^b g\mathrm{d}x.$$

这个定理是博内(Bonnet, P.-O.)于 1849 年发表的，因此又称为博内中值定理. 其中等式右边两项的系数还可进一步改进：当 f 递减时，$f(a),f(b)$ 可以用满足 $\alpha\geqslant f(a+)$，$\beta\leqslant f(b-)$ 的任意 α,β 代替；当 f 递增时，可以用满足 $\alpha\leqslant f(a+)$，$\beta\geqslant f(b-)$ 的任意 α,β 代替. 特别地，定理中的 $f(a),f(b)$ 总可用 $f(a+),f(b-)$ 代替. 对无穷积分，增加条件 $f(x)$ 有界后，第二积分中值定理仍然成立.

博内中值定理(Bonnet theorem of mean value)　即“第二积分中值定理”.

若尔当容度(Jordan content)　长度(或面积、体积)概念的一种推广. 以平面情形为例，设 A 为 xy 平面上的有界点集，先用平行于 x 轴和平行于 y 轴的直线，将 xy 平面分为边长为 1 的闭正方形网格，第二次再将这每个正方形分为四个大小相同的闭正方形，如此下去. 用 K_n 表示至少含 A 的一个点的那些第 n 次所得闭正方形组成之集，用 G_n 表示第 n 次得到的正方形中全部含于 A 的那些组成之集，并且用 $|K_n|$ 和 $|G_n|$ 分别表示 K_n 和 G_n 中的闭正方形的面积之和. 数 $\overline{\gamma}(A)=\inf\{|K_n|\mid n=1,2,\cdots\}$ 和 $\underline{\gamma}(A)=\sup\{|G_n|\mid n=1,2,\cdots\}$ 分别称为 A 的外容度和内容度. 当 A 的内、外容度相等时，A 称为若尔当可测，这个公共值称为 A 的若尔当容度，简称容度，记为 $|A|$. 对直线上以及一般 $\mathbb{R}^n$ 中的集合可以类似地定义它的可测性及容度. 可以证明，一个集合在若尔当意义下可测与否以及可测时的容度数值，与上述定义中的分法及坐标轴方向无关.

若尔当容度具有非负、单调、有限可加及在正交变换下(可测性及容度)不变等性质. 它是由佩亚诺(Peano, G.)于 1887 年、若尔当(Jordan, M. E. C.)于 1892 年提出的. 若尔当在其 1893 年出版的《分析教程》中对它作了详细阐述，提出的目的主要是为了完善黎曼意义下的二重积分理论. 黎曼积分只能在若尔当可测集上进行. 若尔当容度是与黎曼积分相适应的，它的局限性在于，可测集类不够广泛和只有有限可加性(例如有理点集就是不可测的). 这也说明了黎曼积分的局限性.

内容度(inner content)　见“若尔当容度”.

外容度(outer content)　见“若尔当容度”.

若尔当可测集(Jordan measurable set)　其若尔当内、外容度相等的有界集. 有界集 A 若尔当可测有许多充分必要条件，A 的边界的若尔当容度为 0 是其一. 由此可见，通常的图形如多边形、球形和多面体形区域都是若尔当可测集，但也很容易举出若尔当不可测集来(参见“若尔当容度”).

累次积分(repeated integral)　亦称逐次积分. 多元函数的一种积分. 指多元函数对它的所有各个自变量按某种次序逐次求(单)积分. 例如

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

与

$$\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

都是累次积分，前者是先固定 x 对 y 积分(结果是 x 的函数)，然后再对 x 积分(结果是数)；后者是先对 x 然后对 y 积分. 通常把它们分别写成

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

与

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

当 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积时，它们都等于二重积分

$$\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若 f 在 D 上可积，而区域 D 可表示成

$$D=\{(x,y)\mid\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x);a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ 都是逐段光滑曲线，则 f 在 D 上的二重积分可化为如下形式的累次积分：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

一般来说，n 重积分可化为先后积分 n 次的累次积分. 累次积分是计算重积分的主要工具.

逐次积分(successive integral)　即“累次积分”.

二重积分(double integral)　二元函数的定积分. 若 f 是定义在 xy 平面内的若尔当可测集 E 上

的有界函数，P 是 E 的任意分法，$P=\{E_1,E_2,\cdots,E_k\}$，在每个 E_i 上任取一点 (ξ_i,η_i)，若对于某数 I，任给 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得任意满足 $|P|<\delta$ 的分法 P 和任意的 $(\xi_i,\eta_i)\in E_i(i=1,2,\cdots,k)$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i,\eta_i)|E_i| - I\right| < \varepsilon,$$

则函数 f 称为在 E 上可积，I 称为 f 在 E 上的二重积分，记为

$$I = \iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 E 为积分域（平面上的集合），x 和 y 为积分变量，$f(x,y)$ 为被积函数，用两个积分号“$\iint$”表示二重积分. 若用一个字母表示平面上的点，二重积分也可写成

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \text{ 或} \int_E f.$$

后一种写法不写出积分变量，特别在非计算的场合常这样写. 这时记号的外形几乎与定积分相同，但从积分域 E 是平面区域还是直线上的区间，可以确定它表示的是二重积分还是定积分. 二重积分的主要性质有：

1. 定义在若尔当容度为 0 的集上的任何有界函数都可积，且积分值为 0；改变函数 f 在若尔当测度为 0 的集上的值，只要它仍保持有界，则 f 的可积性与积分值都不改变.

2. 若 f,g 在 A 上可积，且 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

特别地，

$$\left|\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_A \left|f(x,y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3.（线性性）若 f,g 在 A 上可积，α,β 为实数，则 $\alpha f+\beta g$ 在 A 上可积，且

$$\iint_A (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.（对积分域的有限可加性）若 f 在 A,B 上可积，且 A 与 B 至多只有公共的边界点，则

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5.（积分中值定理）若 f,g 在 A 上可积，$M=\sup\{f(x)\,|\,x\in A\}$，$m=\inf\{f(x)\,|\,x\in A\}$，$g$ 在 A 上不变号，则存在 μ 满足 $m\leqslant\mu\leqslant M$，使得

$$\iint_A f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地，当 A 为区域，f 连续时，存在 $(\xi,\eta)\in A$，使得

$$\iint_A f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta) \iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

二重积分的直接计算方法主要是化为累次积分. 二重积分也可通过换元（变量替换）进行计算，具体方法参见有关条目. 当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在几何上表示以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶，区域 D 为底的曲顶直柱体的体积.

重积分(multiple integral)　多元函数的定积分. 一般的 n 重积分的定义与二重积分定义类似，只不过积分域的分法是将它分成 n 维子区域的并集，然后在每个小的 n 维区域上取一点，求出在这些点被积函数的值，再作积分和，最后求出积分和当分法无限加细时的极限（如果存在）. n 重积分的性质也与二重积分类似. 相对于重积分，一元函数的定积分也称为单积分. n 重积分的记号是

$$\overbrace{\iint_D\cdots\int}^{n\text{重}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

或简记为

$$\int_{D\subset\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

如三重积分是

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

单积分(single integral)　见“重积分”.

三重积分(triple integral)　见“重积分”.

黎曼-斯蒂尔杰斯积分(Riemann-Steinmetz integral)　简称斯蒂尔杰斯积分. 黎曼积分的一种推广. 它是一个函数关于另一个函数的积分. 设函数 f 和 α 在 $[a,b]$ 上有界，P 是 $[a,b]$ 的分法，数

$$\sigma(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$$

$(\xi_i\in[x_{i-1},x_i])$ 称为黎曼-斯蒂尔杰斯和. 若存在数 I，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $|P|<\delta$ 时，$|\sigma(P,f,\alpha)-I|<\varepsilon$，则 I 称为 $\sigma(P,f,\alpha)$ 当 $|P|\to 0$ 时的极限，记为

$$\lim_{|P|\to 0} \sigma(P,f,\alpha)=I,$$

I 称为 f 在 $[a,b]$ 上关于 α 的斯蒂尔杰斯积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) \text{ 或} \int_a^b f\mathrm{d}\alpha \text{（若 } f,\alpha \text{ 的自变量为 } x\text{）}.$$

f 称为被积函数，α 称为积分子. 同时函数 f 称为在 $[a,b]$ 上关于 α 黎曼-斯蒂尔杰斯可积，记为 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$. 显然，当 $\alpha(x)=x$ 时，斯蒂尔杰斯积分成为黎曼积分. 但由于 α 可以是间断函数，因此，斯蒂尔杰

斯积分比黎曼积分广得多，并且有一些不同的性质. 当 f 与 α 满足下列条件之一时，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$：

1. f 连续，α 是有界变差函数.
2. f 黎曼可积，α 满足李普希茨条件.
3. f 是有界变差函数，α 连续.
4. f 黎曼可积，存在绝对可积函数 g，使

$$\alpha(x)=c+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

(c 是常数，$x\in[a,b]$).

另一方面，若 α 递增，则 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 的必要条件是 f 与 α 没有公共间断点. 如果下列条件之一成立：

1. $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，α 连续可微；
2. f 黎曼可积，α 可微且其导数 α' 可积，

那么计算斯蒂尔杰斯积分可以化为黎曼积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)=\int_a^b f(x)\alpha'(x)\mathrm{d}x,$$

又在上段 4 的条件下，

$$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha=\int_a^b fg.$$

斯蒂尔杰斯积分是斯蒂尔杰斯(Steinmetz，T. (J).)于 1894 年研究展布在直线上的质量时引进的. 它有许多应用. 例如，曲线积分就是一类斯蒂尔杰斯积分. 这种积分还有其他的等价的定义方法.

黎曼-斯蒂尔杰斯和(Riemann-Steinmetz sum) 见“黎曼-斯蒂尔杰斯积分”.

积分子(integrator) 见“黎曼-斯蒂尔杰斯积分”.

区域函数(region function) 以区域为自变量的函数. 对任意的 $n\in\mathrm{N}_+$，若 D 是 R^n 中的区域，而对 D 的每个子区域 D'，对应着惟一的实数，这个对应关系(法则)F 就称为定义在 D 上的一个区域函数. 若对于 D 的任意两个没有公共内点的区域 D_1 和 D_2，F 还满足 $F(D_1\cup D_2)=F(D_1)+F(D_2)$($D_1\cup D_2$ 仍为区域时)，则 F 可进一步称为加性区域函数. $n=1$ 时，(加性)区域函数可称为(加性)区间函数. 数学分析中研究区域函数(区间函数)的意义在于，只有加性区域函数(区间函数)，才可能用重积分或定积分表示. 例如，面积、体积、位移、功等都是加性区域(区间)函数，因此，它们都能用重积分或定积分来进行计算；而像平均速度、平均密度、曲边梯形的平均高度这些物理量和几何量，则是没有加性的区域(区间)函数，所以，它们不可能表示成积分. 在数学中，加性区域函数实质上是特殊的测度，有关它的一般理论，可参见《数学辞海》第三卷《测度论》有关条目.

积分法(integration) 亦称反微分法. 指求积分的过程与方法. 这里的“积分”主要是指不定积分与定积分. 不定积分的积分法，就是求原函数的方法，它的基本法则实质上都是由逆转微分法则得到的，主要有：

1. (线性运算法则) 当 α,β 为常数，

$$\int f(x)\mathrm{d}x,\int g(x)\mathrm{d}x$$

都存在(在同一区间上)时，

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x.$$

2. 换元积分法与分部积分法(参见“分部积分法”和“换元积分法”).

3. (反函数积分法) 若 f,g 互为反函数，即 $y=f(x)$，$x=g(y)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int g(y)\mathrm{d}y$$

$$\left(即\int y\mathrm{d}x=xy-\int x\mathrm{d}y\right).$$

这其实是法则 2. 的推论.

具体情况下不定积分的积分法在于，灵活运用上述法则，化为可利用基本积分表的情形. 对于某些特殊类型的积分，也可用一些一般有效的方法(参见“有理函数积分法”、“三角代换”、“有理代换”等条目). 由于微积分基本定理，凡是求不定积分的方法，稍加改变都适用于定积分. 例如，对于定积分有

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x$$
$$=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=bf(b)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)}g(y)\mathrm{d}y.$$

前式中 α,β 为常数，后式中的 g 与 f 互为反函数. 定积分的换元及分部积分法则见另条. 求定积分还可化为含参量积分，展成无穷级数，利用积分变换、复变方法以及各种近似方法. 多元函数的各类积分基本上都是化为重积分或定积分进行计算. 对于重积分，上述被积函数作线性运算(加、减和数乘)的积分法则和变量替换法则(参见“换元积分法”)仍然成立，分部积分法则形式上有变化(参见“分部积分法”)，并且它的意义主要不在计算方面. 除上述基本方法外，主要是化为各种形式的累次积分(重积分化为累次单积分，曲面积分化为累次线积分等)，最后化为定积分计算.

反微分法(anti-differentiation) 即“积分法”.

分部积分法(integration by parts) 指从逆转乘积的微分法则得到的积分法则. 即

$$\int fg'=fg-\int f'g$$

或

$$\int f\mathrm{d}g=fg-\int g\mathrm{d}f.$$

称为分部积分公式. 它成立的条件是 $\int f'g$ 存在，g

可微. 它的右端的项 fg 已不含积分,故有此名. 应用这个公式求积分的方法称为分部积分法. 对定积分,分部积分公式是:若在$[a,b]$上函数 f,g 的导数 f',g'存在且可积,则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$
$$=f(x)g(x)|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$
$$=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

对重积分有类似的公式,在二重积分情形是

$$\iint_D f\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}fg\cos\alpha\mathrm{d}s-\iint_D g\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\iint_D f\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D}fg\cos\beta\mathrm{d}s-\iint_D g\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为闭区域,∂D 为围成 D 的分段光滑曲线,$(\cos\alpha,\cos\beta)$是 ∂D 的外法线单位向量的方向余弦,$\oint_{\partial D}$ 是沿 ∂D 的曲线积分(参见“格林公式”).

换元积分法(integration by substitution)　亦称变量替换积分法. 指由复合函数求导数的链式法则逆转得到的积分法. 这是用替换积分变量,使被积函数的形式改变,然后再计算积分的方法. 对于不定积分,其一般公式是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\quad(x=\varphi(t)).\qquad(1)$$

具体应用此公式有两种方式. 一种是欲求的积分呈公式左端的形式,直接将积分变量 x 以 t 的适当的函数 $\varphi(t)$代入,变成形如右端以 t 为积分变量的积分,化简后求出原函数(t 的函数),然后再按关系 $x=\varphi(t)$将原函数由用变量 t 表示换回用 x 表示. 这种方法有时称为第一换元积分法,适用于 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$(化简后)的原函数易求的情形,如三角代换、有理代换均属此类. 另一种用法,是先将欲求的积分写成公式右端的形式,再化为对 x 的积分(公式左端),求出原函数后,按关系 $x=\varphi(t)$代回用 t 表示. 由于公式(1)也可写成

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t),$$

可见关键在于选择 $\varphi(t)$,凑出微分 $\mathrm{d}\varphi(t)$,所以它又称凑微分法或第二换元法. 对于定积分,换元积分法的一般公式是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

其中 $a=\varphi(\alpha)$,$b=\varphi(\beta)$,并且 $\varphi(t)$满足条件:

1. $\varphi(t)$当 t 在 α,β 之间取值时可微,φ'可积.

2. 当 t 在 α,β 之间取值时,φ之值不超出$[a,b]$之外. 通常应用时,只需 φ严格单调或 φ'不变号且可积即可. 对于重积分,变量替换公式是

$$\int_A f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_B f(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}))|J\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})|\mathrm{d}\boldsymbol{t}.$$

其中 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是若尔当可测的,$A=\varphi(B)$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$是 n 元(n 维)向量值函数(n 个 n 元函数),属于 C^1类且使雅可比行列式 $J\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$在 A 上不等于 0(因此,在 A 上,$\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 通过 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$的对应是一一的). 取 $f(\boldsymbol{x})=1$,由此可见

$$|J\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})|\approx\frac{|\varphi(A)|}{|A|},$$

这表示了 $J\boldsymbol{\varphi}$ 的几何意义.

变量替换积分法(variable replacement integration)　即“换元积分法”.

有理代换(rational substitution)　求积分时常用的一种代换. 用有理函数作的变量代换. 在积分法中,有理代换主要用于含有根式的积分,使被积函数有理化后再求原函数. 设 R 是 $k+1$ 元有理函数,a,b,c,d 是实数,$m_1,m_2,\cdots,m_k$ 是整数,p 是正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 的最小公倍数. 有理代换

$$x=\frac{dt^p-b}{a-ct^p},$$

即

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$$

可把积分

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\cdots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right)\mathrm{d}x$$

化为关于 t 的有理函数的积分.

欧拉代换(Euler substitution)　求积分时常用的一种代换. 即对于积分

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$$

(R 是二元有理函数,a,b,c 是实数,$a\neq0$)常使用的变量替换. 分三种情形:

1. 若 $a>0$,则设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\mp\sqrt{a}\,x$,即

$$x=(t^2-c)/(\pm2\sqrt{a}\,t+b).$$

2. 若 $a<0$,则 ax^2+bx+c 必有实根 α,β,设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)}=t(x-\alpha)$,即

$$x=(a\beta-\alpha t^2)/(a-t^2).$$

情形 1 和情形 2 中的 t 都可以换成$-t$. 有时还使用第三种欧拉代换.

3. 若 $c>0$,则设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm tx$. 特别地,对

$$\int R(x,\sqrt{x^2+a})\mathrm{d}x,$$

可设 $\sqrt{x^2+a}=t\mp x$,对

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x\ (a>0),$$

可设 $\sqrt{a^2-x^2}=a-tx$ 或 $t(a+x)$.

三种欧拉代换都是有理代换，在相应情况下分别使用它们，都能使被积函数有理化.

三角代换(trigonometric substitution)　由三角函数构成的变量替换. 在积分法中，主要用于把无理函数、三角函数的积分化为有理函数的积分. 常用的三角代换列举如下. 设 R 是一元或二元有理函数：

1. 对 $\int R(\tan x)\mathrm{d}x$，设 $\tan x = t$，化为 $\int \frac{R(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ (有理函数的积分).

2. 对 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，设 $\tan\frac{x}{2}=t$，化为

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

(有理函数的积分)，$\tan(x/2)=t$ 俗称万能代换. 特别地，当 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 时，用代换 $\cos x=t$；当 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ 时，用代换 $\sin x=t$；当 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ 时，用代换 $\tan x=t$，更为简便.

3. 对 $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x\ (a>0)$，用代换 $x=a\sin t(|t|<\pi/2)$ 化为类型 2，再用万能代换，即可化为有理函数的积分.

4. 对 $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})\mathrm{d}x\ (a>0)$，用代换 $x=a\tan t(|t|<\pi/2)$ 化为类型 2.

5. 对 $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\mathrm{d}x\ (a>0)$，用代换 $x=a/\cos t(0<t<\pi/2,\pi<t<3\pi/2)$ 化为类型 2.

万能代换(universal substitution)　见"三角代换".

有理函数积分法(integration of rational functions)　按一定步骤求有理函数不定积分的方法. 求有理函数的积分时，先将有理式分解为多项式与部分分式之和，再对所得到的分解式逐项积分. 有理函数的原函数必是有理函数、对数函数与反正切函数的有理组合. 详述如下. 设需要求

$$\int\frac{Q(x)}{P(x)}\mathrm{d}x,$$

其中 P,Q 都是多项式. 如果 Q 的次数大于或等于 P 的次数，则先用除法分出商多项式 R. 设多项式 $P(x)$ 在 R 上已分解为既约多项式之积：$P(x)=a_0\cdot[p_1(x)]^{m_1}[p_2(x)]^{m_2}\cdots[p_k(x)]^{m_k}$，$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_k(x)$ 为一次或二次多项式，则有

$$\begin{aligned}\frac{Q(x)}{P(x)}&=R(x)\\&+\left\{\frac{q_{11}(x)}{p_1(x)}+\frac{q_{12}(x)}{(p_1(x))^2}+\cdots+\frac{q_{1m_1}(x)}{(p_1(x))^{m_1}}\right\}+\cdots\\&+\left\{\frac{q_{k1}(x)}{p_k(x)}+\frac{q_{k2}(x)}{(p_k(x))^2}+\cdots+\frac{q_{km_k}(x)}{(p_k(x))^{m_k}}\right\},\end{aligned}$$

$q_{ij}(i=1,2,\cdots,k,j=1,2,\cdots,m_k)$ 是次数比 p_i 的次数低的多项式. 对上式积分，右边出现三类积分：多项式的积分；形如

$$\int\frac{A\mathrm{d}x}{(x+a)^k}=\begin{cases}A\ln|x+a| & (k=1),\\ \dfrac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}} & (k>1),\end{cases}$$

$(a,A,k\in\mathrm{R})$ 的积分；和形如

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\mathrm{d}x\ (B,C,p,q,m\in\mathrm{R})$$

的积分. 对第三类积分，改写

$$Bx+C=(2x+p)\cdot(B/2)+(C-pB/2),$$

将它分解为两个积分

$$\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\mathrm{d}x+\left(C-\frac{pB}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m},$$

其中，第一个积分已可求出，对第二个积分，如 $m=1$，则易于求出；如 $m>1$，用分部积分法，得

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m}\\&=\frac{2}{(m-1)(4q-p^2)}\left\{\frac{x+p/2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+(2m-3)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{m-1}}\right\};\end{aligned}$$

如 $m-1>1$，则可再利用此公式，逐次递推，最后便可求出积分.

奥斯特罗格拉茨基方法(Ostrogradski method)　简称奥氏方法. 一种直接求出有理函数积分的有理部分的方法. 有理函数的积分是有理函数、对数函数与反正切函数的有限组合，奥斯特罗格拉茨基方法是不经积分，直接求出其中的有理函数部分的一种方法. 设 $Q(x)/P(x)$ 为有理真分式，则有下列奥氏公式

$$\int\frac{Q(x)}{P(x)}\mathrm{d}x=\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}+\int\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x,\qquad(1)$$

式中 $Q_1(x)/P_1(x)$ 与 $Q_2(x)/P_2(x)$ 均为有理真分式，$P_1(x)P_2(x)=P(x)$. 当已知 $P(x)=(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{n_l}$ 时，有 $P_2(x)=(x-a_1)^{m_1-1}\cdots(x-a_k)^{m_k-1}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1-1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{n_l-1}$，$P_1(x)=P(x)/P_2(x)$，而 $Q_1(x),Q_2(x)$ 的系数可用待定系数法从

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\right)+\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}$$

求出. 即使不知道 $P(x)$ 的分解式，也可从 $P_1(x)$ 是 $P(x)$ 与它的导数 $P'(x)$ 的最大公因式求得 $P_1(x)$，再从 $P_2(x)=P(x)/P_1(x)$ 求得 $P_2(x)$. 写出公式(1)后，再通过通常的有理函数积分法求

$$\int\frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\mathrm{d}x,$$

它是对数函数与反正切函数的有限组合，因此 $Q_1(x)/P_1(x)$ 正是

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} \mathrm{d}x$$

的有理函数部分. 这种方法是奥斯特罗格拉茨基(Остроградский, M. B.)于1845年发表的.

二项积分(binomial integral) 指形如

$$\int x^m (a + bx^n)^p \mathrm{d}x$$

的不定积分,其中 $a,b \in \mathbb{R}, m,n,p \in \mathbb{Q}, abn \neq 0$. 二项积分当且仅当

$$p, \ \frac{m+1}{n}, \ \frac{m+1}{n} + p$$

之一是整数时可以有理化. 在不能有理化时这个积分不能用初等函数表示. 如

$$\int \sqrt{1 + x^3} \mathrm{d}x, \ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^4}}$$

都不能用初等函数表示. 上面三种情况可分别作下列代换: $p \in \mathbb{Z}$ 时, $(m+1)/n = s/r$, 其中 r,s 为整数, 可令 $x^n = t^r$; $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$ 时, 令 $a + bx^n = t^r$, 其中 $r > 0$ 是 p 的分母; $(m+1)/n + p \in \mathbb{Z}$ 时, 令 $ax^{-n} + b = t^r$, 其中 $r > 0$ 是 p 的分母. 上述结果是切比雪夫(Чебышев, П. Л.)于1853年证明的.

椭圆积分(elliptical integral) 指形如

$$\int R(cx, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) \mathrm{d}x$$

及 $$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}) \mathrm{d}x$$

的积分,其中 R 为二元有理函数, a,b,c,d,e 为实数. 最早在计算椭圆弧长时遇到. 除一些特殊情况(如根式下的代数式有重根,这时称为伪椭圆积分)外,一般均不能用初等函数表出. 通过初等变换及变量代换,上述积分总可化成

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + kx^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

三种形式之一,分别称为第一、二、三类椭圆积分. 再引进代换 $x = \sin \varphi (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$, 又可将上述三种形式归结为以下的三种形式

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \ \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, \mathrm{d}\varphi,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 + k \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

椭圆积分的理论、计算与应用是十分丰富的.

伪椭圆积分(pseudoelliptic integral) 见"椭圆积分".

欧拉求和公式(Euler summation formula) 把积分与被积函数在积分区间中整数点处的值联系起来的公式. 若函数 f 在$[a,b]$上连续可微,则

$$\sum_{n=[a]+1}^{[b]} f(n) = \sum_{a<n\leqslant b} f(n)$$
$$= \int_a^b f'(x)(x - [x]) \mathrm{d}x + f(a)(a - [a]) - f(b)(b - [b]),$$

其中$[\cdot]$表示整数部分. 特别当 a,b 为整数时,有

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x) + \int_a^b f'(x)(x - [x] - \frac{1}{2}) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)).$$

梯形公式(trapezoid formula) 积分的近似公式之一. 形如

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \approx h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right),$$

其中 $h = (b-a)/n, x_k = a + kh (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, 即 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$是$[a,b]$的 n 等分点. 当 f 在$[a,b]$上有二阶连续导数时,使用梯形公式的绝对误差不超过

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M,$$

其中 $M = \sup\{|f'(x)| \,|\, x \in [a,b]\}$. 梯形公式得名于推导该公式时以梯形代替曲边梯形.

辛普森公式(Simpson formula) 计算定积分近似值的两个公式:

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \approx \frac{b - a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)),$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})),$$

其中 $h = (b - a)/2n, x_k = a + kh (k = 1, 2, \cdots, 2n - 1)$, 即 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}$是把$[a,b]$ $2n$ 等分时的分点. 当$f(x)$在$[a,b]$上有连续的 4 阶导数时,用此式计算积分的绝对误差不超过$(b-a)^5 M/2880n^4$,其中 $M = \sup\{|f^{(4)}(x)| \,|\, x \in [a,b]\}$. 上述公式出现在辛普森(Simpson, T.)于1743年出版的论文集中. 但在此之前,格雷果里(Gregory, J.)于1668年就已知道它. 由于推导这个公式时使用抛物线弧代替一般曲线弧,故又称为抛物线公式. 对重积分有相应的推广.

抛物线公式(parabolic formula) 即"辛普森公式".

富比尼定理(Fubini theorem) 联系重积分与累次积分的定理. 指用于计算重积分的下列两个命题. 设 R,S 分别是欧氏空间 $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k}$的有界闭区间, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in R, y = (y_1, y_2, \cdots, y_{n-k}) \in S$. 若 n 元实函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$在 $R \times S$ 上可积,则由

$$\varphi(\boldsymbol{y}) = \int_R f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \ \psi(\boldsymbol{x}) = \int_S f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

定义的函数 φ,ψ 分别在 S,R 上可积，且

$$\int_{R\times S} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_S \varphi(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_R \psi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

特别地，若

$$\int_R f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \left(\text{或}\int_S f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)$$

存在，则

$$\int_{R\times S} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_S \left(\int_R f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

$$\left(\text{或}\int_R \left(\int_S f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right).$$

这样，当 f 可积且 f 作为 $\boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{y}$ 的函数均可积时，重积分与两个累次积分均相等（注意积分域是区间）. 一般地，设 $\Omega\subset \mathsf{R}^n$，$P(\Omega)=\{\boldsymbol{x}\in \mathsf{R}^k \mid \text{存在 } \boldsymbol{y}, \text{使} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Omega\}$，$\Omega(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}\in\mathsf{R}^{n-k}\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Omega\}$（$P(\Omega)$ 是 Ω 在 R^k 上的投影，$\Omega(\boldsymbol{x})$ 是 Ω 的截口）. 若 $\Omega,P(\Omega)$ 若尔当可测，对每个 $\boldsymbol{x}\in P(\Omega)$，$\Omega(\boldsymbol{x})$ 均若尔当可测，$f:\Omega\to\mathsf{R}$ 可积，

$$\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

存在，则

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{P(\Omega)}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_{\Omega(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

例如：若 $\Omega=\{(x,y)\in\mathsf{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b, \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x), \varphi_1,\varphi_2 \text{ 连续}\}$，则 $P(\Omega)=[a,b]$，$\Omega(x)=[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$，当 $f(x,y)$ 连续时，

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y;$$

若 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathsf{R}^3\mid(x,y)\in D, \varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)\}$，则 $P(\Omega)=D$，$\Omega(x,y)=[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$，当 f 连续时，

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

富比尼定理的逆命题不成立. 即使相应累次积分均存在且相等，重积分也不一定存在. 例如，由

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\ (x^2+y^2>0), f(0,0)=0$$

定义的函数 $f(x,y)$，在矩形 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上的两个累次积分均为 0，而 $f(x,y)$ 无界，不可积. 富比尼定理用于把重积分化为累次积分计算. 反复应用它，可把重积分化为仅出现单积分的累次积分. 由于富比尼（Fubini, G.）于 1907 年对勒贝格积分证明了类似于上述的定理，因而现在通常把关于黎曼积分的上述定理也称为富比尼定理.

柯西不等式（Cauchy inequality） 指形如

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

的不等式，其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实数，等号当且仅当 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 成比例，即

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

时成立. 它是最常用的不等式之一，由柯西（Cauchy, A.-L.）于 1821 年发表. 在几何上，它表示 R^n 中单位向量的内积的绝对值不大于 1，从而可以定义向量的夹角. 用欧几里得内积及范数，它可写成 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$（$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$），并可推广到复内积空间. 又称为柯西-施瓦兹不等式. 其积分形式是

$$\left(\int_a^b fg\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2\mathrm{d}x\int_a^b g^2\mathrm{d}x.$$

也称为布尼亚科夫斯基-施瓦兹不等式，是由布尼亚科夫斯基（Буняковский, В. Я.）于 1859 年首先发表，后来又由施瓦兹（Schwarz, H. A.）得到. 柯西不等式是赫尔德不等式在 $p=2$ 时的特例，它有许多推广形式.

布尼亚科夫斯基-施瓦兹不等式（Buniakowsky-Schwarz inequality） 见“柯西不等式”.

延森不等式（Jensen inequality） 有关凸函数的一个不等式. 它的离散形式是

$$f\left(\sum_{i=1}^n q_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^n q_i f(x_i),$$

式中 f 是区间 I 上的凸函数，$x_i\in I$，$q_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，$q_1+q_2+\cdots+q_n=1$，等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 或 f 是线性函数时成立；

延森不等式的积分形式是

$$f\left(\int_I q(t)x(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\int_I q(t)f(x(t))\mathrm{d}t,$$

式中 I 是区间，f 在包含 $x(I)$ 的区间上是凸函数，函数 x 在 I 上可积，$q(t)\geqslant 0$，且

$$\int_I q(t)\mathrm{d}t=1,$$

等号当且仅当 x 是常值函数或 f 是线性函数时成立. 上述不等式等价于

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

式中 p_i 不全为 0，非负，f 同上；

$$f\left(\int_I p(t)x(t)\mathrm{d}t\Big/\int_I p(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant\int_I p(t)f(x(t))\mathrm{d}t\Big/\int_I p(t)\mathrm{d}t,$$

式中 $p(t)>0$，其他条件同上. 以上不等式中，I 可以

换成凸集(这时积分应为勒贝格积分). 当 f 是凹函数时不等号反向. 适当地选择 f, q_i 或函数 q,可以得到许多著名的不等式. 例如,取 $f(x)=-\ln x(x>0)$ 及 $x^p(x>0,p>1)$,可以得到平均不等式与赫尔德不等式. 离散形式的延森不等式是赫尔德(Hölder,O. L.)于1889年得到的,积分形式是延森(Jensen,J. L. W. V.)于1906年建立的.

杨不等式(Young inequality)　有关函数及其反函数积分的不等式. 设 f 在$[0,+\infty)$上连续,且严格增,$f(0)=0$,则对任意的 $a\geqslant 0$ 及

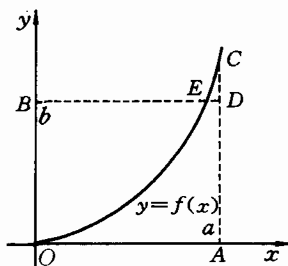
$$0\leqslant b\leqslant \lim_{t\to\infty} f(t)\leqslant +\infty,$$

有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y\geqslant ab,$$

其中 f^{-1}是 f 的反函数,等号当且仅当 $b=f(a)$时成立. 这个不等式是杨(Young,W. H.)于1912年建立的. 它有明显的几何意义:如图,图形 OAC 与 OEB 的面积之和不小于矩形 $OADB$ 的面积. 反之,若 f,g 在$[0,+\infty)$上连续,且严格增,$f(0)=g(0)=0$,$g^{-1}(x)\geqslant f(x)$,且对任意 $a,b>0$,有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y\geqslant ab,$$



则 $g=f^{-1}$. 从杨不等式可以得到一些有用的不等式,如 $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$(也有人称为杨不等式),其中 $1/p+1/q=1,p>1,q>1,a,b\geqslant 0$,等号当且仅当 $a^p=b^q$ 时成立. 若 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$,右连续且增,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

则 $f(x)$称为杨函数. 若对杨函数 $f(x)$,定义其右反函数 f^{-1}为:$y\in[0,f(0)]$时,$f^{-1}(y)=0$;而 $y\in[f(0),+\infty)$时,$f^{-1}(y)=\sup\{x\,|\,f(x)\leqslant y\}$. 则对 $a,b\geqslant 0$,有

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y,$$

等号当且仅当 $f(a)=b$ 或 $a=f^{-1}(b)$时成立.

杨不等式可以推广(1989)为

$$\varphi(a)\psi(b)-\varphi(f(c))\psi(c)$$

$$\leqslant\int_c^a(\psi\circ f)\varphi'+\int_{f(c)}^b(\varphi\circ f^{-1})\psi',$$

其中 f 在$[c,+\infty)$上连续,严格增,φ,ψ 分别在

$$[c,+\infty)\text{与}[f(c),\lim_{t\to+\infty} f(t))$$

上可微,且同增或同减,等式当且仅当 $b=f(a)$,或 φ 在 a 与 $f^{-1}(b)$之间为常值,或 ψ 在 $f(a)$与 b 之间为常值时成立. 当 φ,ψ 之一增,另一减时不等号反向. 一般地,对$(0,+\infty)$上的任意实函数 f,g 及 $x>0,y>0$,$xy\leqslant f(x)+g(y)$称为杨型不等式. 杨型不等式成立的一个充分必要条件(1984)是:存在$(0,+\infty)$上的非负函数 p,q,常数 c 及杨函数 φ,使

$$f(x)=\int_0^x\varphi+p(x)+c,$$

$$g(y)=\int_0^y\varphi^{-1}+q(y)-c.$$

上述不等式中的等号成立,当且仅当 $p(x)=q(y)=0$,且 $\varphi(x)=y$ 或 $x=\varphi_{-1}(y)$时.

杨函数(Young function)　见"杨不等式".

杨型不等式(Young type inequality)　见"杨不等式".

赫尔德不等式(Hölder inequality)　有关乘积和的不等式. 若 a_k,b_k 是实数$(k=1,2,\cdots,n,p>1,1/p+1/q=1)$,则

$$\sum_{k=1}^n|a_kb_k|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\Big)^{1/q},$$

其中,等号当且仅当

$$\frac{|a_1|^p}{|b_1|^q}=\frac{|a_2|^p}{|b_2|^q}=\cdots=\frac{|a_n|^p}{|b_n|^q}$$

时成立. 当 $0<p<1$ 或 $p<0$ 或 $q<0$ 时,不等号反向. 当 $p=1$ 时,

$$\sum_{k=1}^n|a_kb_k|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n|a_k|\Big)\sup\{|b_k|\,|\,k=1,2,\cdots,n\}.$$

上面的有限和可以改为无穷级数,并且从不等号右边两个级数收敛可以推知左边的级数收敛. 这个不等式的积分形式是

$$\int_a^b|fg|\mathrm{d}x\leqslant\Big(\int_a^b|f|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_a^b|g|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q},$$

等号当且仅当存在常数 c,使 $|f|^p=c|g|^q$ 时成立. 赫尔德不等式是赫尔德(Hölder,O. L.)于1889年发表的. 它有广泛的应用,因此有各种推广. 例如,有

$$\sum_{k=1}^n|a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_m}|\leqslant\prod_{j=1}^m\Big(\sum_{k=1}^n|a_{kj}|^{p_j}\Big)^{1/p_j},$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 均大于1,且

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1;$$

$$\Big(\sum_{k=1}^n|a_kb_k|^r\Big)^{1/r}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\Big)^{1/q},$$

其中 $1/p+1/q=1/r,p>0,qr>0$;当 $q<0,pr<0$ 时不等号反向. 它们也有类似的积分形式.

闵科夫斯基不等式(Minkowski inequality)　有关绝对值幂的不等式. 若 $p>1,x_k,y_k(k=1,2,\cdots,n)$为复数,则

$$\Big(\sum_{k=1}^n|x_k+y_k|^p\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p},$$

等号当且仅当$|x_k|$与$|y_k|(k=1,2,\cdots,n)$成比例时成立.它是由闵科夫斯基(Minkowski,H.)于1896年提出的.当$p<1,p\neq 0$时,不等号反向($p<0$时,设x_k,y_k均不为0).类似地,闵科夫斯基不等式的积分形式为

$$\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

等号当且仅当存在常数c,使$|f(x)|=c|g(x)|$时成立.闵科夫斯基不等式有各种推广.

切比雪夫不等式(Chebyshev inequality)　有关平均数乘积的不等式.设有限数列$\{a_k\}_{k=1}^n$与$\{b_k\}_{k=1}^n$同增或同减,则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

若$\{a_k\}_{k=1}^n$与$\{b_k\}_{k=1}^n$之一增,另一减,则不等式反向.等式当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时成立.类似地,若非负函数f,g在$[a,b]$上同增或同减,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x;$$

当$f(x),g(x)$之一增,另一减时不等号反向.等式当且仅当$f(x)$或$g(x)$为常值时成立.上述不等式是由切比雪夫(Чебышев,П.Л.)于1882年建立.另一方面,若$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积,$m\leqslant f(x)\leqslant M,k\leqslant g(x)\leqslant K,m,M,k,K$为系数,则有格吕斯不等式

$$\left|(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}(M-m)(K-k),$$

常数1/4是最好的.又,若$m>0,k>0$,则

$$\frac{b-a}{c^2}\leqslant\frac{\int_a^b f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}\leqslant(b-a)c^2,$$

其中

$$c=\frac{\sqrt{mk}+\sqrt{MK}}{\sqrt{mK}+\sqrt{kM}}.$$

格吕斯不等式(Grüss inequality)　见“切比雪夫不等式”.

卡尔松不等式(Carleson inequality)　有关级数或积分四次幂估计的不等式.设非负实数列$a_1,a_2,\cdots$不全为0,若$\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2$收敛,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^4<\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n^2.$$

类似地,有

$$\left(\int_0^{\infty}f\mathrm{d}x\right)^4<\pi^2\left(\int_0^{\infty}f^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty}x^2f^2(x)\mathrm{d}x\right),$$

其中f非负,不恒等于零,且右端的两个广义积分收敛.常数π^2是最好的.上述不等式是由卡尔松(Carleson,F.)于1934年建立的.

卡莱曼不等式(Carleman inequality)　关于项为乘积幂的级数的估计式及其推广.对任意不全为零的非负数$a_1,a_2,\cdots$,若

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

收敛,则

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1a_2\cdots a_k)^{1/k}<\mathrm{e}\sum_{k=1}^{n}a_k,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}<\mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

这个不等式由卡莱曼(Carleman,T.)于1923年发表.e是最好的.对积分,有

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x\ln f(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x<\mathrm{e}\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

其中$f(x)>0$,$\int_0^{\infty}f(x)$收敛.更一般地,有(1986):

$$\int_0^{\infty}x^r\exp\left(\frac{p}{x^p}\int_0^x t^{p-1}\ln f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x<\mathrm{e}^{\frac{r+1}{p}}\int_0^{\infty}t^rf(t)\mathrm{d}t,$$

其中$p>0,r$为实数.

哈代不等式(Hardy inequality)　与二重级数有关的不等式.即哈代(Hardy,G.H.)研究二重级数时,于1920年建立的不等式.若$a_1,a_2,\cdots$是不全为零的非负数,$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,B_n=a_n+a_{n+1}+\cdots,p>1$,则可证明下式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n^p<p^p\sum_{n=1}^{\infty}(na_n)^p.$$

称其为哈代不等式.它的积分形式是:

$$\int_0^{\infty}x^{-p}\left|\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{\infty}\left|f(y)\right|^p\mathrm{d}y,$$
$$\int_0^{\infty}\left|\int_x^{\infty}f(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x<p^p\int_0^{\infty}\left|xf(x)\right|^p\mathrm{d}x,$$

其中常数$[p/(p-1)]^p$与p^p都不能减小.哈代不等式有许多推广.如

$$\int_a^b\left|x^{\alpha-1}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\leqslant c\int_a^b\left|x^{\alpha}f(x)\right|^p\mathrm{d}x,$$

其中$0\leqslant a<b\leqslant+\infty,p\geqslant 1,\alpha<1-1/p,c$是某个常数.$\alpha>1-1/p$时,上式中

$$\int_a^x f(y)\mathrm{d}y \text{ 换为} \int_x^b f(y)\mathrm{d}y.$$

一般地，存在 c，使

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(x)\int_0^x f(y)\mathrm{d}y|^p \mathrm{d}x \leqslant c\int_0^{+\infty} |\psi f|^p \mathrm{d}y,$$

其中 φ 和 ψ 满足充分必要条件

$$\sup_{x>0}\left[\left(\int_0^{+\infty}|\varphi|^p\right)^{1/p}\left(\int_0^x|\psi|^{-q}\right)^{1/q}\right]<+\infty,$$

其中 $1/p+1/q=1$.

希尔伯特不等式(Hilbert inequality)　有关双指标和或重级数的一种不等式及其推广. 关于有限和的下列不等式

$$\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n+1}\leqslant \pi\sum_{m=0}^{N}a_m^2,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_N\geqslant 0$. 它是希尔伯特(Hilbert, D.)于 1888 年提出的. 等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_N=0$时成立，π 可以用更小的数

$$(N+1)\sin\frac{\pi}{N+1}$$

代替. 更精确些，有

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n}\leqslant c_N\sum_{n=1}^{N}a_n^2,$$

其中 $c_N=\pi-\pi^5/2(\ln N)^{-2}+\mathrm{O}(\ln\ln N(\ln N)^{-3})$ ($N\to\infty$)是最好的. 令 $N\to\infty$，得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{m+n}<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m^q\right)^{1/q}$$

($p>1, 1/p+1/q=1, a_n\geqslant 0, b_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$)，常数 $\pi/\sin(\pi/p)$是最好的. 它的积分类似是

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\int_0^{\infty}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^{\infty}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q},$$

其中 f,g 非负，p,q 同上. 希尔伯特不等式有许多推广，同时还可找到许多希尔伯特型不等式. 如

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max(m,n)}\leqslant pq\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_m b_n}{mn\ln(mn)}<\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left(\sum_{m=2}^{\infty}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=2}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln m-\ln n}{m-n}a_m b_m$$
$$\leqslant\left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right]^2\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

它们也有明显的积分类似.

反赫尔德不等式(inverse Hölder inequality)与赫尔德不等式相反的不等式. 指形如

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{1/q}\leqslant A\sum_{k=1}^{n}a_k b_k$$

及其积分形式的不等式，其中 $a_k\geqslant 0, b_k\geqslant 0$，$A$ 是某个常数，$p>1, 1/p+1/q=1$. 迄今已建立了许多这类不等式. 例如：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leqslant\frac{(M_1M_2+m_1m_2)^2}{4m_1m_2M_1M_2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2,$$

其中 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2$ ($k=1,2,\cdots,n$)；和

$$\left(\int_a^b f^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b g^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant c_{p,q}\int_a^b fg\mathrm{d}x,$$

其中 $0<m_1\leqslant f(x)\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant g(x)\leqslant M_2, c_{p,q}=(M_1^pM_2^q-m_1^pm_2^q)[p(M_1m_2M_2^q-m_1M_2m_2^q)]^{-1/p}\cdot[q(m_1M_1^pM_2-M_1m_1^pm_2)]^{-1/q}$. 调和分析中另有意义不同的同名不等式.

反常积分(improper integral)　亦称广义积分. 黎曼积分最直接的推广. 这里的黎曼积分可以是一元函数的定积分，也可以是重积分或线、面积分. 但由于多元函数的性态和积分区域情况复杂，所以后几种情形下的广义积分尚无合适的一般定义，必要时可作为特殊的勒贝格积分(参见第三卷《实变函数论》)来对待，而数学分析中的反常积分，主要是定积分常用的直接推广. 它分为两大类：当积分区间有限，但被积函数在积分区域上的有限个点的邻域内无界(这些点称为该函数的瑕点或奇点)，这时相应积分称为瑕积分；若积分区间为无穷区间，而被积函数在该区间上无瑕点，这时相应积分称为无穷积分. 有时，积分区间是无穷区间，被积函数在该区间上又有瑕点，则可先将积分区间化为有限个不相交的区间之并，使原来的被积函数在这些子区间上的积分，或为瑕积分，或为无穷积分，分别处理后再相加. 相对于反常积分，定积分亦可称为常义积分或正常积分. 两类反常积分本质上是一致的. 如果对于无穷积分，将$+\infty$与$-\infty$都看做被积函数的瑕点，那么这两类积分都是被定义为在积分域中去掉瑕点的任意小邻域以后的常义积分的极限(当邻域无限缩小时). 两类反常积分可以通过换元互化，其中一类所具有的性质与收敛判别法，对于另一类积分都可找到对应物. 两类反常积分都与无穷级数关系密切. 两类反常积分都当绝对收敛时一定收敛(与级数相似)，这与常义积分情形的“绝对可积不保证可积”不相同. 两类反常积分在一定意义下仍可使用牛顿-莱布尼茨公式进行计算.

广义积分(generalized integral)　即“反常积分”.

正常积分(proper integral)　见“反常积分”.

积分的奇点(singular point of an integral)　见“反常积分”.

积分的瑕点(singular point of an integral)　见“反常积分”.

无穷积分(infinite integral)　亦称无限区间上的积分. 一种反常积分. 一般形式是

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 f 在积分区间的任意有限子区间上可积. 当

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x$$

存在时,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

称为收敛的,且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\mathrm{d}x,$$

f 称为在$(a,+\infty)$上(广义)可积;此极限为∞或无意义时,相应无穷积分称为发散的,积分值无意义. 类似地,可用

$$\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在与否,定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$$

的收敛与发散,以及收敛时的积分值. 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

的收敛与发散由

$$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 及} \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x(c \text{ 为任意有限数})$$

决定,后二积分都收敛时称它收敛,且

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

否则,称原积分发散. 原积分的收敛与发散以及收敛时的值与 c 的选取无关. 无穷积分与无穷级数关系密切. 例如

$$\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \text{ 与} \int_a^{[a]+1} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[a]+k}^{[a]+k+1} f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或发散(设 f 在$[a,+\infty)$的每个有限子区间上可积),收敛时相等. 无穷级数和无穷积分还有一些相应的收敛判别法(参见"狄利克雷判别法"、"阿贝尔判别法"和"迪尼定理").

无限区间上的积分(integral over infinite interval)　即"无穷积分".

瑕积分(integral of an unbounded function)　亦称无界函数的积分. 一种广义积分. 设 f 是直线上的半闭区间$[a,b)$上的函数,对任意 $\varepsilon>0$, f 在$[a,b-\varepsilon]$上可积,而

$$\lim_{\varepsilon\to0+} f(b-\varepsilon)=\infty(b \text{ 为 } f \text{ 的瑕点}),$$

则积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为瑕积分. 当

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

存在(有限)时,称此积分收敛, $f(x)$在$[a,b]$(广义)可积,并定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x;$$

否则称此瑕积分发散. 若 f 在$[a+\varepsilon,b](\varepsilon>0)$可积, a 为 f 的瑕点,则当

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在(有限)时,称瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

收敛,其值等于上述极限,并称 f 在$[a,b]$(广义)可积;否则称此瑕积分发散. 若 f 在积分区间$[a,b]$上的惟一瑕点为内点 $c(a<c<b)$时,则当积分

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 与} \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛时,即当极限

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \text{ 与} \lim_{\delta\to0+}\int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x$$

都存在(有限)时,称瑕积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

收敛,并且定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x;$$

否则称

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

发散. 当被积函数 f 在积分区间$[a,b]$上有 $n(>1)$个瑕点,总可将$[a,b]$分为 n 个内部不相交的小闭区间$[a_{k-1},a_k](k=1,2,\cdots,n,a_0=a,a_n=b)$的并集,使每个$[a_{k-1},a_k]$只含 $f(x)$的一个瑕点,而令

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

此式右端各项的积分都收敛时,称原积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

收敛,并由此式给出其值(与$\{a_k\}_{k=0}^n$的选取无关);否则称原积分发散.

无界函数的积分(integral of an unbounded function)　即"瑕积分".

瑕积分收敛(convergence of intergral of an unbounded function)　见"瑕积分".

瑕积分发散(divergence of intergral of an unbounded function)　见“瑕积分”.

含参量积分(integral with parameters)　多元函数对其一部分自变量的积分.即形如

$$\int_B f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

的积分,其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in B\subseteq\mathrm{R}^m$,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A\subseteq\mathrm{R}^n$,$f$ 是实函数.当这个积分作为常义或反常积分有意义时,分别称为含参量常义或广义积分,$\boldsymbol{x}$ 是其参量.这时它定义了一个 A 上的实函数

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\int_B f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

含参量积分理论的主要内容就是研究这个函数的连续性、可微性、可积性,并在可能的情况下求出这个函数以及利用含参量积分计算定积分或表示一些超越函数.下面就 f 是二元函数情况(即只含一个参量的积分)略述含参量积分的一些主要性质.

1.含参量的常义积分的性质:

1)若 f 在 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续,则由积分定义的函数

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上连续.

2)若 f 在 D 上可微,$f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微,且

$$\varphi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

2.含参量的无穷积分的性质:

1)若 f 在 $E=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y<+\infty\}$ 上连续,且

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则由此积分定义的函数在 $[a,b]$ 上连续.

2)若 f 及 $f_x(x,y)$ 在1)中 E 上连续,存在 $x_0\in[a,b]$,使

$$\int_c^{+\infty} f(x_0,y)\mathrm{d}y$$

收敛,且

$$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$$

关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上处处可微,且可以在积分号下求导数,即

$$\left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)'=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

3)若 $f(x,y)$ 及相应积分满足1)的条件,则

$$\int_a^b\left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

4)若 f 在 $F=\{(x,y)\mid a\leqslant x<+\infty,c\leqslant y<+\infty\}$ 上连续,

$$\int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty,$$

则

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

为有限数.

以上各条性质对于瑕积分均成立,只需对条件和结论作相应的修改即可.含参量的广义积分的收敛概念、收敛判别法及有关性质与函数项级数极为相似(参见“函数项级数”和“一致收敛性”).

含参量常义积分(proper integral with parameters)　见“含参量积分”.

含参量广义积分(generalized integral with parameters)　见“含参量积分”.

柯西主值积分(Cauchy principal value integral)　以特殊方式定义的反常积分,其值又称为相应积分的柯西主值.若一元函数 f 在 $[a,b]$ 上以 $[a,b]$ 的内点 c 为惟一瑕点,则当

$$\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

存在(有限)时,此极限值称为 f 在 $[a,b]$ 上关于 c 的柯西主值积分,或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的柯西主值,记为

$$\mathrm{V.P.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里V.P.是主值的法文Valeur Principale的缩写.柯西主值积分是柯西(Cauchy,A.-L.)于1823年引入连续函数的积分定义时同时给出的.他将此作为反常积分的定义,而现有的广义积分的定义则在晚一些时候才出现.一个广义积分的主值存在不保证其收敛,但收敛时其柯西主值必存在,且两种定义下的积分值相等.对无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

其柯西主值定义为

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} f(x)\mathrm{d}x.$$

它与收敛的关系同前述.

柯西主值(Cauchy principal value)　见“柯西主值积分”.

广义积分的收敛判别法(convergence criterion of generalized integral)　判定广义积分收敛的法则. 设$\int_a^b |f|$是瑕积分,b是惟一瑕点. 此广义积分的收敛判别法如下:

1. 若$\int_a^b |f|$收敛,则$\int_a^b f$收敛.

2. $\int_a^b |f|$收敛,当且仅当存在$M>0$,使对任意$t\in[a,b)$,有$\int_a^t |f|\leqslant M$.

3. (比较判别法) 若有$c\in[a,b)$,使在$[c,b)$上$|f|\leqslant|g|$,则当$\int_a^b|g|$收敛时,$\int_a^b|f|$收敛,当$\int_a^b|f|$发散时,$\int_a^b|g|$发散. 特别若$x\to b-$时,$f(x)=O(g(x))$,且$g(x)=O(f(x))$,则$\int_a^b|f|$与$\int_a^b|g|$同敛散. 比较判别法的极限形式为:若在b附近$g(x)\neq 0$,

$$\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=l(\leqslant+\infty),$$

则当$l<+\infty$时,由$\int_a^b|g|$收敛可得$\int_a^b|f|$收敛,当$l>0$时,由$\int_a^b|g|$发散可得$\int_a^b|f|$发散. 特别取$g(x)=(b-x)^{-p}$时有下列判别法:若

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^p|f(x)|=l(\leqslant+\infty),$$

则当$p<1$且$0\leqslant l<+\infty$时,$\int_a^b|f|$收敛,当$p\geqslant 1$且$l>0$时,$\int_a^b|f|$发散.

4. 若$f(x)\geqslant 0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛,当且仅当存在$b_n\in[a,b)(n\in\mathbf{N})$,使$b_n\to b$,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛,这时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{b_1}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x.$$

以上是$\int_a^b f\mathrm{d}x$绝对收敛的判别法. 为了判别它的条件收敛性,可用下列方法:

1. (柯西准则) $\int_a^b f\mathrm{d}x$收敛当且仅当对任意$\varepsilon>0$,存在$T\in[a,b)$,使对任意$s,t\in[T,b)$,有

$$\left|\int_s^t f\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

2. (狄利克雷判别法) 若函数

$$F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x(t\in(a,b))$$

有界,$x\to b-$时$g(x)$递减且趋于0,则$\int_a^b fg\mathrm{d}x$收敛.

3. (阿贝尔判别法) 若$\int_a^b f\mathrm{d}x$收敛,g单调且有界,则$\int_a^b fg\mathrm{d}x$收敛.

上述判别法均适用于无穷积分,但叙述上要作一些相应的改动. 例如,各条中$x\to b-$应改为$x\to+\infty$或$-\infty$. 对于

$$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

方法3. 中取$g(x)=(b-x)^{-p}$所得判别法,应改取$g(x)=x^{-p}$. 若

$$\lim_{x\to+\infty}x^p|f(x)|=L,$$

则当$p>1$且L为有限数时,

$$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛,$p\leqslant 1$且L为有限数或∞时,

$$\int_c^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

发散;方法4. 中的$\{b_n\}$此时可取为$\{n\}$(自然数列),且当$f(x)$在$[c,+\infty)$上为减函数时(不论$f(x)$是否变号),

$$\int_c^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是

$$\sum_{n=N}^{\infty}f(n)$$

收敛(N取大于c的任何整数均可). 其余改动不一一详述.

***B*函数**(beta function)　亦称第一型欧拉积分. 它是如下由含参量积分定义的C^∞类二元函数.

$$B:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbf{R}:$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

$$\left(=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\mathrm{d}\theta\right).$$

由于

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

故 B 函数的性质(如 $B(x,y)=B(y,x)$,$B(x,1-x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin(\pi x)$ 等)与计算均可用 Γ 函数得到. B 函数和 Γ 函数都可推广为复变函数(参见《数学辞海》第三卷同名条).

第一型欧拉积分(Euler integral of the first kind) 即"B 函数".

Γ 函数(gamma function) 亦称第二型欧拉积分. 指由

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

对 $x>0$ 定义,并由

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

对 $x<0,x\neq-1,-2,\cdots$ 延拓的函数 Γ. 因为 $\Gamma(n+1)=n!$ $(n\in\mathrm{N}_+)$,故 Γ 函数是阶乘函数对 $\mathrm{R}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$ 的延拓. 它是超越函数,属于 C^∞ 类,

$$(\ln|\Gamma(x)|)^{(n)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)!}{(x+k)^n}\ (n\geqslant 2).$$

$|\Gamma|$ 是凸函数,特别地,$x>0$ 时,Γ 是凸函数.

$$\lim_{x\to 0+}\Gamma(x)=\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x\neq -n}}|\Gamma(x)|=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+}x\Gamma(x)=1,\ \lim_{x\to+\infty}a^{-x}\Gamma(x)=+\infty\ (a>0).$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\ (x\in\mathrm{R}\backslash\mathrm{Z}).$$

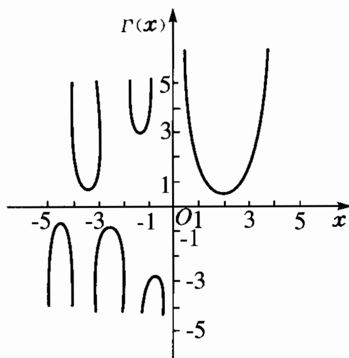
Γ 函数可以用无穷乘积定义,即对 $x\neq 0,-1,-2,\cdots$ 成立着高斯公式

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+1/k)^x}{1+x/k}$$

与外尔斯特拉斯公式

$$\Gamma(x)=\mathrm{e}^{-Cx}\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{x/k}}{1+x/k},$$

其中 C 是欧拉常数. 对 $x>0$,Γ 函数满足:



1. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

2. $\Gamma(1)=1$.

3. 它是对数凸函数,即 $\ln\Gamma$ 是凸函数. 反之,若函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足条件 1 至条件 3.,则 $f=\Gamma$. Γ 也是惟一满足条件 1 和条件 2. 及

$$\lim_{n\to\infty}n^x\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)}=1$$

的函数. Γ 函数及高斯公式是欧拉(Euler,L.)于 1729 年发现的(对 $x=n\in\mathrm{N}_+$). 他于 1781 年得到了他的积分定义. 拉格朗日(Lagrange,J.-L.)把这个函数称为 Γ 函数并用 Γ 表示. 用它可以表示许多积分、无穷乘积、级数. 它在其他学科(如解析数论,特殊函数论)中也有许多应用. Γ 函数早已被延拓为 $\mathrm{C}\backslash\{0,-1,-2,\cdots\}$ 上的复变函数,它是亚纯函数(参见《数学辞海》第三卷同名条).

第二型欧拉积分(Euler integral of the second kind) 即"Γ 函数".

欧拉积分(Euler integral) B 函数与 Γ 函数的统称(参见《数学辞海》第三卷同名条).

斯特林公式(Stirling formula) Γ 函数的渐近表示. 指

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}\mathrm{e}^{-x+\theta/(12x)}\ (0<\theta<1,x>0).$$

这表明 $x\to+\infty$ 时,$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}(x/\mathrm{e})^x$. 特别地,

$$n!=\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n\mathrm{e}^{\theta/(12n)},$$

$n\to\infty$ 时,$n!\sim\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n$. 对 θ 有种种估计,如 $1>\theta>12n/(12n+1/4)$(切萨罗(Cesàro,E.),1922),一般地,Γ 函数有下列渐近表示(也称为斯特林公式)

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}x^{x-(1/2)}\mathrm{e}^{-x}\exp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}x^{1-2n}}{2n(2n-1)}$$

$$=\sqrt{2\pi}x^{x-(1/2)}\mathrm{e}^{-x}\Big(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51\,840x^3}-\frac{571}{2\,488\,320x^4}+O(x^{-5})\Big),$$

其中 B_n 是伯努利数. 关于 $n!$ 的斯特林公式是由斯特林(Stirling,J.)于 1730 年前后(或说 1764 年)得到的. 它常被用于估计 n 很大时 $n!$ 的值,以及求涉及阶乘与 Γ 函数的极限. 它已被推广到复变函数.

狄利克雷积分(Dirichlet integral) 两种特殊的无穷积分:

1. 形如

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi/2 & (\beta<\alpha),\\ \pi/4 & (\beta=\alpha),\\ 0 & (\beta>\alpha)\end{cases}$$

的积分,其中 $\alpha,\beta>0$. 它在傅里叶分析中有用. 由此易得 α,β 之一为负数时的值;当 $\beta=0$ 时,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,\alpha\ (\alpha\in\mathrm{R}).$$

这样,符号函数可以用积分表示. 形如

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^k\mathrm{d}x\ (k\in\mathrm{N}_+)$$

的积分均可通过变量代换或分部积分等方法化为上述积分计算.

2. 傅里叶级数的部分和的一种表示,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(t-x)\mathrm{d}t$$

或 $\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\mathrm{d}t$,

其中 $\quad D_n(t)=\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\Big/\left(2\sin\frac{t}{2}\right)$

称为狄利克雷核,f 在$[-\pi,\pi]$上可积,以 2π 为周期.它等于

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$是 f 的傅里叶系数.在讨论傅里叶级数的收敛性时,这个积分是十分有用的.它是狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)于 1829 年引进的.与调和函数论中狄利克雷问题的解有关的以积分表示的泛函,有时也称为狄里克雷积分.

狄利克雷核(Dirichlet kernel) 见"狄利克雷积分".

傅汝兰尼积分(Frullani integral) 一种特殊的含参变量的广义积分.形如

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x(a,b>0)$$

的广义积分,其中 f 在$(0,+\infty)$上连续.可精确计算的情形有:

1.当 $f(0+)\in\mathrm{R}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)\in\mathrm{R}$ 时,积分值为$(f(0+)-f(+\infty))\ln(b/a)$.

2.当 $f(0+)\in\mathrm{R}$,且存在 $A\geqslant0$,使

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

收敛时,积分值为 $f(0+)\ln(b/a)$;

3.当 $f(+\infty)\in\mathrm{R}$,且存在 $A>0$,使

$$\int_0^A\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

收敛时,积分值为 $f(+\infty)\ln(b/a)$.

广义重积分(generalized multiple integral) 广义黎曼重积分的简称.又称反常重积分或非正常重积分.一类多元函数积分.指无界多元函数及无界集上多元函数的积分.设 $D\subseteq\mathrm{R}^n(n\geqslant2)$,$D_m\subseteq D(m\in\mathrm{N}_+)$满足:

1.每个 D_m 有界、闭、若尔当可测;

2.$D_m\subseteq D_{m+1}(m\in\mathrm{N}_+)$;

3.$D=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}D_m$,

则$\{D_m\}$称为 D 的允许集列或近似增加列.例如,若 D 是闭无界区域,其边界的任何有限部分的若尔当容度为 0,则 $D_m=\{\boldsymbol{x}\in D\mid|\boldsymbol{x}|\leqslant m\}$就形成允许集列;若 $D=K\backslash F$,其中 K 是紧致集,F 是闭集,$D_m=\{\boldsymbol{x}\in D\mid d(\boldsymbol{x},F)\geqslant1/m\}$,$d(\boldsymbol{x},F)$表示 $\boldsymbol{x}$ 到 F 的距离,则当所有 D_m 若尔当可测时$\{D_m\}$是允许集列.若在点 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n$ 的任意邻域内函数 f 无界,则 $\boldsymbol{x}$ 称为 f 的奇点.设 P 为 f 的所有奇点之集,且 P 是闭若尔当零集.设 $f:D\backslash P\to\mathrm{R}$ 几乎处处连续.若 f 非负,且存在 $D\backslash P$ 的允许集列$\{D_m\}$,使$\lim\limits_{m\to\infty}\int_{D_m}f$存在有限极限 I,则 f 称为在 D 上广义可积,I 称为 f 在 D 上的广义重积分,记为

$$I=\int_D f=\int_D f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

并称积分$\int_D f$收敛或存在.否则称$\int_D f$发散或不存在.当 f 不一定非负时,设 $f^+=\max\{f,0\}$,$f^-=\max\{-f,0\}$,若$\int_D f^+$与$\int_D f^-$收敛,则 f 称为在 D 上广义可积,积分

$$\int_D f=\int_D f^+-\int_D f^-$$

收敛.当 f 有界且 D 若尔当可测时,上述定义与重积分的定义一致.若$\int_D|f|$收敛,则称积分$\int_D f$绝对收敛.与广义的单积分不同,广义重积分$\int_D f$收敛当且仅当它绝对收敛.下面两条关于广义重积分收敛的结论是常用的:

1.若 D 无界,对任意实数 r,集合$\{\boldsymbol{x}\in D\mid|\boldsymbol{x}|<r\}$若尔当可测,$f$ 在 D 上连续,则当存在 $M>0$ 使对$|\boldsymbol{x}|$充分大的 $\boldsymbol{x}\in D$,有$|f(\boldsymbol{x})|\leqslant M/|\boldsymbol{x}|^p$,且 $p>n$ 时$\int_D f$收敛,有$|f(\boldsymbol{x})|\geqslant M/|\boldsymbol{x}|^p$,且 $p\leqslant n$ 时$\int_D f$发散.

2.若 D 若尔当可测,f 在 $D\backslash\{a\}$上连续,则当存在 $M>0$ 使对 a 的某邻域内的 $\boldsymbol{x}\in D$,有$|f(\boldsymbol{x})|\leqslant M/|\boldsymbol{x}-a|^p$,且 $p<n$ 时$\int_D f$收敛,有$|f(\boldsymbol{x})|\geqslant M/|\boldsymbol{x}-a|^p$,且 $p\geqslant n$ 时$\int_D f$发散.

另有不同的定义广义重积分的方法.例如,有些文献中首先称下列集列$\{D_m\}$为 D 的允许集列:每个 D_m 是开的若尔当可测集,$\overline{D_m}\subset D_{m+1}$,$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}D_m=D$,然后对在 $D\backslash P$ 上几乎处处连续的函数 f(P 是 f 的所有奇点之集),在关于 $D\backslash P$ 的任意允许集列$\{E_m\}$,$\lim\limits_{m\to\infty}\int_{E_m}f$存在,有限,且不依赖于$\{E_m\}$的选择时,称积分$\int_D f$收敛,否则称$\int_D f$发散.还有一种定义,首先设 $f:G\to\mathrm{R}$,G 是 R^n 的开集,$\{G_m\}$满足:

1.所有 G_m 是若尔当可测集.

2.$G_m\subseteq G_{m+1}$,$\overline{G_m}\subset G$.

3.$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}G_m=G$.

若 f 在每个 G_m 上黎曼可积,且对任意满足上述条件的$\{G_m\}$,

$$\lim_{m\to\infty}\int_{G_m} f$$

存在，有限，且与$\{G_m\}$的选择无关，则称积分$\int_G f$收敛，否则称$\int_G f$发散. 对上述两种定义，收敛性仍与绝对收敛性等价.

含参量积分的内容可以没有困难地推广到广义重积分.

反常重积分(improper double intergral)　即"广义重积分".

曲线坐标(curvilinear coordinates)　直角坐标的推广. 设 D 是 R^3 的开集，$\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,t_3)\in D$，$\boldsymbol{\Phi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3):D\to\mathrm{R}^3$ 由 $x=\varphi_1(\boldsymbol{t})$，$y=\varphi_2(\boldsymbol{t})$，$z=\varphi_3(\boldsymbol{t})$ 定义. 若 $\boldsymbol{\Phi}$ 是单射，连续可微，且对任意 $\boldsymbol{t}\in D$，$\boldsymbol{\Phi}$ 的雅可比行列式 $J\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t})\neq 0$，则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 D 上的曲线坐标系，(t_1,t_2,t_3) 是点 (x,y,z) 在坐标系 $\boldsymbol{\Phi}$ 中的曲线坐标. 直角坐标系、球坐标系、柱坐标系、双极坐标系都是 R^3 中的常用的曲线坐标系. 当某个 $t_i(i=1,2,3)$ 为常数时，$\boldsymbol{\Phi}$ 的象是曲面，称为坐标面. 例如，柱坐标系的坐标面是圆柱面 $x^2+y^2=\mathrm{const}$，半平面 $y/x=\mathrm{const}$，平面 $z=\mathrm{const}$. 在 R^2 中也可类似地引进曲线坐标系与坐标线的概念. 平面直角坐标系、极坐标系、椭圆坐标系、抛物线坐标系等都是常用的平面曲线坐标系. 若向量 $\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_i}(i=1,2,3)$ 互相正交，即内积

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_2}=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_3}=\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_3}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_1}=0,$$

坐标系 $\boldsymbol{\Phi}$ 称为正交曲线坐标系. 当且仅当 $\boldsymbol{\Phi}$ 的坐标面(线)正交时如此. 当 $\boldsymbol{\Phi}$ 为正交曲线坐标系时，

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_1},\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_2},\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_3}$$

形成 R^3 的基. 设

$$H_i=\left|\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_i}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial t_i}\right)^2},$$

$$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_{t_i}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t_i}\ (i=1,2,3),$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 形成 R^3 的标准正交基，称为坐标系 $\boldsymbol{\Phi}$ 的自然标架. 函数 H_i 称为拉梅系数或拉梅参数，是由拉梅(Lamé, G.)于 1859 年引进的. 自然标架与拉梅系数可随着点的不同而变化. 对柱坐标系，

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z,$$
$$H_1=H_3=1,H_2=r,\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta,$$
$$\boldsymbol{e}_\theta=-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta,\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{k},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是 x,y,z 轴方向的单位向量；对球坐标系，

$$x=r\cos\theta\sin\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\varphi,$$
$$H_1=1,H_2=r,H_3=r\sin\theta,$$
$$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{i}\cos\theta\sin\varphi+\boldsymbol{j}\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{k}\cos\varphi,$$
$$\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{i}\cos\theta\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\theta\cos\varphi-\boldsymbol{k}\sin\varphi,$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi=-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta.$$

任何三维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可按自然标架展开为

$$\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{e}_i.$$

若在直角坐标系下 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z)$，则

$$\alpha_i=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}_i=\frac{1}{H_i}\left(\alpha_x\frac{\partial x}{\partial t_i}+\alpha_y\frac{\partial y}{\partial t_i}+\alpha_z\frac{\partial z}{\partial t_i}\right)(i=1,2,3).$$

关于正交曲线坐标 $\boldsymbol{\Phi}$，弧长元素 $\mathrm{d}s$，曲面面积元素 $\mathrm{d}S$，体积元素 $\mathrm{d}V$ 分别为：

$$\mathrm{d}s=\sqrt{H_1^2\mathrm{d}t_1^2+H_2^2\mathrm{d}t_2^2+H_3^2\mathrm{d}t_3^2},$$
$$\mathrm{d}S=\sqrt{(H_1H_2\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2)^2+(H_2H_3\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3)^2+(H_3H_1\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_1)^2},$$
$$\mathrm{d}V=H_1H_2H_3\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3.$$

平面曲线坐标系(plane curvilinear coordinate system)　见"曲线坐标".

正交曲线坐标系(orthogonal curvilinear coordinate system)　见"曲线坐标".

自然标架(natural frame)　见"曲线坐标".

拉梅系数(Lamé coefficient)　见"曲线坐标".

拉梅参数(Lamé parameter)　见"曲线坐标".

R^n 中的路径(path in R^n)　平面曲线段的推广. 向量值连续函数 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathrm{R}^n$ 称为 R^n 中以 $\boldsymbol{f}(a)$ 为始点、$\boldsymbol{f}(b)$ 为终点的路径. 当 $\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{f}(b)$ 时，称 $\boldsymbol{f}$ 为闭路或圈. 若 $\boldsymbol{f}$ 为 C^1 类函数，则相应地称路径 $\boldsymbol{f}$ 为 C^1 类路径. C^1 类路径又称光滑路径. 若区间 $[a,b]$ 可分为有限个子区间，并且在每个子区间上 $\boldsymbol{f}$ 是光滑路径，则 $\boldsymbol{f}$ 称为 $[a,b]$ 上的分段光滑路径. 给定路径 $\boldsymbol{f}$，由函数 $t\to\boldsymbol{f}(a+b-t)(t\in[a,b])$ 定义的路径称为 $\boldsymbol{f}$ 的逆路径，有人把它记为 $\boldsymbol{f}^{-1}$. 它的始点是 $\boldsymbol{f}(b)$，终点是 $\boldsymbol{f}(a)$.

闭路(closed path)　见"R^n 中的路径".

C^1 类路径(path of class C^1)　见"R^n 中的路径".

光滑路径(smooth path)　见"R^n 中的路径".

分段光滑路径(piecewise smooth path)　见"R^n 中的路径".

逆路径(inverse path)　见"R^n 中的路径".

连续曲线(continuous curve)　闭区间的连续象. 若 $\boldsymbol{f}$ 是闭区间 $[a,b]$ 到 R^n 的连续函数，则把 $\boldsymbol{f}([a,b])$ 称为若尔当曲线. 这个定义关心的是曲线上点的几何位置，不关心自变量 t 在 $[a,b]$ 中变动时的次序，也不关心得到曲线的方式. 例如函数 $t\to(\cos t,\sin t)$ 当 $t\in[0,2\pi]$ 与 $t\in[0,4\pi]$ 时得到同一条若尔当曲线. 曲线的这个定义是由若尔当(Jordan, M. E. C.)于 1882 年(另一说 1887 年)对 $n=2$，$[a,b]=[0,1]$ 给出的，他同时限制 $\boldsymbol{f}(t)$ 是单射(这样得到的是现在所称的弧，这时才是若尔当曲线). 它可能是曲线的第一个摆脱运动、几何直观(即曲线

是按一定规则运动的点的轨迹)的分析定义,是为了回答什么是曲线这一问题而提出的.不久发现这个定义下的曲线过于广泛.佩亚诺(Peano,G.)于1890年举出了一条若尔当曲线,它填满了整个正方形.这样,曲线与平面图形就没有了区别,从而表明,为了说明什么是曲线,还需要对连续函数 $f(t)$ 增加其他限制.在现代数学中,曲线被定义为一维连续统或一维流形.

若尔当曲线(Jordan curve) 见"连续曲线".

参数曲线(parametric curve) 一种曲线.设 $\boldsymbol{f}$:$[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 连续.若自变量 t 从 a 依次变动到 b,且规定 $t_1<t_2$ 时,点 $\boldsymbol{f}(t_1)$ 在点 $\boldsymbol{f}(t_2)$ 之前,则 $[a,b]$ 的象 $\Gamma=\boldsymbol{f}([a,b])$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的参数曲线,简称曲线.$\boldsymbol{f}(t)$ 称为 Γ 的参数表示.当 $\boldsymbol{f}$ 为 C^n 类时,Γ 称为 C^n 类曲线,$\boldsymbol{f}(t)$ 称为 Γ 的 C^n 类表示.点 $\boldsymbol{f}(a)$ 称为 Γ 的始点,$\boldsymbol{f}(b)$ 称为 Γ 的终点.当 $\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{f}(b)$ 时,Γ 称为闭曲线.按照上述定义,t 的不同的值对应于曲线上不同的点,即使这两个点的几何位置重合.例如,设 $\boldsymbol{f}(t)=(\cos mt,\sin mt)$,$0\leqslant t\leqslant 2\pi$,$m$ 是非零整数,则当 $m>(<)0$ 时,$\boldsymbol{f}(t)$ 表示按逆(顺)时针方向绕单位圆 m 次的曲线,其长度为 $2m\pi$,尽管它们当 m 不同时的几何形状都只是一个单位圆.曲线的这种定义,来自曲线是服从一定规则的动点的轨迹这一直观含义.设 $\boldsymbol{x}$ 是曲线 Γ 上的点,满足 $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{x}$ 的 $[a,b]$ 中的点 t 的个数称为 $\boldsymbol{x}$ 的重数.当 Γ 上所有点的重数是1时,称 Γ 为简单曲线或若尔当曲线.这相当于说 $\boldsymbol{f}(t)$ 是单射.若 Γ 是闭曲线且只有一个点的重数是2,则称为简单闭曲线.对上面的例,$m=\pm 1$ 时得到简单闭曲线.若 φ:$[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 严格增,连续,则 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\circ\varphi$ 也是 Γ 的参数表示,称为 Γ 的等价参数表示.所有等价参数表示的集合是一个等价类,表示同一条曲线.一些文献把参数表示的每个等价类本身称为一条曲线,同时把参数所属的区间的象(不规定次序)称为曲线的迹.上例的迹都是单位圆.

C^n类曲线(curve of class C^n) 见"参数曲线".

简单曲线(simple curve) 见"参数曲线".

简单闭曲线(simple closed curve) 见"参数曲线".

曲线的迹(locus of curves) 见"参数曲线".

光滑曲线(smooth curve) 切线连续变动的曲线.若 $\boldsymbol{f}$:$[a,b]\to\mathbb{R}^m$ 是 C^1 类的,且对所有 $t\in[a,b]$,$\boldsymbol{f}'(t)\neq 0$,则 $\boldsymbol{f}$ 表示的曲线称为光滑曲线.这时它有连续的单位切向量 $\boldsymbol{f}'(t)/|\boldsymbol{f}'(t)|$ $(t\in[a,b])$,$|\cdot|$ 表示欧几里得范数.有些文献把 C^1 类曲线称为光滑曲线,这时它有连续切向量 $\boldsymbol{f}'(t)$,但在 $f'(t)=0$ 处无切向量.延伸至无限远的曲线,若在任意有界域中的部分光滑,则称为光滑的.

分段光滑曲线(piecewise smooth curve) 若干段光滑曲线连结的曲线.设 $\boldsymbol{f}$:$[a,b]\to\mathbb{R}^m$.若存在 $[a,b]$ 的分法,分点为 $\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$,$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$,使 $\boldsymbol{f}$ 限制在每个 $[t_{k-1},t_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上表示光滑曲线,则 $\boldsymbol{f}$ 表示的曲线称为分段光滑曲线.分段光滑曲线是把有限条光滑曲线依次首尾连结而成的曲线.类似地,可以理解分段 $C^{(q)}$ 类曲线.延伸至无限的曲线,若任何有界的部分是分段光滑的,则称为分段光滑的.

定向曲线(oriented curve) 亦称有向曲线.指规定了方向的曲线.对曲线 Γ:$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$,$t\in[a,b]$ 可以按参数增加(或减少)规定 Γ 的方向,即规定 $t_1<t_2$(或 $t_2<t_1$)时 Γ 上的点 $\boldsymbol{\varphi}(t_1)$ 在点 $\boldsymbol{\varphi}(t_2)$ 的前面.在前一情形,称点 $\boldsymbol{\varphi}(a)$ 为 Γ 的始点,$\boldsymbol{\varphi}(b)$ 为终点,由 $\boldsymbol{\varphi}(a)$ 到 $\boldsymbol{\varphi}(b)$ 的方向是正向;在后一情形则反之,闭曲线的始点与它的终点重合.曲线只有两个方向,若取定其中之一为正向,则另一就是负向.正(负)向曲线常以 $\Gamma^+(\Gamma^-)$ 表示.设 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 是曲线 Γ 的等价参数表示,即存在严格单调连续函数 f,使 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}\circ f$,则当 f 严格增时称 f 保持定向,这时 Γ 用 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 表示的始点与终点一致.当 f 严格减时称 f 反转定向.对平面简单闭曲线,通常按下列方法规定其正、负向:设曲线 Γ 在 xy 平面上,z 轴与 x,y 轴形成右手坐标系,设想人站在 xy 平面上,抬头的方向与 z 轴正向相同,若人沿 Γ 环行时 Γ 围成的区域总在左手边,则称环行方向是正向,否则是负向.简单地说,在右手坐标系中,反时针方向为正向.关于曲面或平面区域的边界曲线的定向参见"双侧曲面".

有向曲线(oriented curve) 即"定向曲线".

可求长曲线(rectifiable curve) 长度有限的曲线.设 Γ 是曲线,把 Γ 分成没有公共内点的有限段,由连结每一段的两个端点的线段组成的折线称为 Γ 的内接折线.若 Γ 的所有内接折线的长度的集合有界,则 Γ 称为可求长的,并且这个集合的上确界就是 Γ 的长度.严格地说,设 Γ 的参数表示为 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$:$[a,b]\to\mathbb{R}^n$,对 $[a,b]$ 的任意分法 P:$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$,若

$$L_P=\sum_{k=1}^{n}|\boldsymbol{\varphi}(t_i)-\boldsymbol{\varphi}(t_{i-1})|$$

(这是以 $\mathbb{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{\varphi}(t_1),\boldsymbol{\varphi}(t_2),\cdots,\boldsymbol{\varphi}(t_n)$ 为顶点的折线的长度),则数 $L(\Gamma)=\sup\{L_P|P$ 是 $[a,b]$ 的分法$\}$ 是 Γ 的长度或弧长.若 $L(\Gamma)<+\infty$,则称 Γ 可求长,否则称 Γ 不可求长.曲线 Γ 可求长的充分必要条件是 $\boldsymbol{\varphi}$ 的每个分量都是有界变差函数,这是由若尔当(Jordan,M.E.C.)于1909年证明的.特别,(有界)光滑曲线可求长,且

$$L(\Gamma)=\int_a^b|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b\Big(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i'(t)^2\Big)^{1/2}\mathrm{d}t.$$

分段光滑曲线也可求长,其长度为各段长度之和.

内接折线(inscribed broken line)　见“可求长曲线”.

不可求长曲线(unrectifiable curve)　见“可求长曲线”.

弧长函数(arc length function)　量度弧长的函数. 设 Γ 为定义在$[a,b]$上的可求长曲线,对 $t\in[a,b]$,Γ 的参数表示 $\boldsymbol{\varphi}$ 对$[a,t]$的限制所表示的曲线的长度记为 $L(t)$. 如此定义的函数 $L:[a,b]\to[0,l]$称为弧长函数,这里 l 是 Γ 的长度. L 是严格增函数,存在反函数 $L^{-1}:[0,l]\to[a,b]$. 复合函数 $\boldsymbol{\varphi}\circ L^{-1}:[0,l]\to\mathbb{R}^n$ 称为 Γ 的以弧长为参数的表示. 弧长参数以 s 表示,这样,Γ 有参数方程

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(L^{-1}(s)),s\in[0,l].$$

每一条可求长曲线都有以弧长为参数的表示,这种表示称为曲线的自然方程.

自然方程(natural equation)　见“弧长函数”.

光滑曲面(smooth surface)　有连续变动的切平面的曲面,或者说有可以处处连续移动的单位法向量的曲面. 若 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界的若尔当可测闭区域,向量值函数 $\boldsymbol{\varphi}:D\to\mathbb{R}^3$ 是 C^1类的(这意味着 $\boldsymbol{\varphi}$ 在包含 D 的某个开集上是 C^1类的),且对任意 $t\in D$,$D_1\boldsymbol{\varphi}(t)\times D_2\boldsymbol{\varphi}(t)\neq 0$(即雅可比矩阵 $J\boldsymbol{\varphi}(t)$的秩是 2),这里 D_1,D_2 表示偏导数,则点集 $S=\boldsymbol{\varphi}(D)$称为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面. 又若 $\boldsymbol{\varphi}$ 对 D 的内部的限制是单射,则 S 称为简单光滑曲面. 当 f 连续可微时,凡是可以用形如 $z=f(x,y)$表示的曲面 S,都是简单光滑曲面. 由于上述定义中涉及曲面的参数表示 $\boldsymbol{\varphi}$,因此可以发生这样的情况:一种表示满足定义,另一种表示不满足定义. 但只要有一种表示满足定义,就说曲面是光滑的. 在光滑曲面上,单位法向量函数 $(D_1\boldsymbol{\varphi}\times D_2\boldsymbol{\varphi})/|D_1\boldsymbol{\varphi}\times D_2\boldsymbol{\varphi}|$是连续的. 设 $\boldsymbol{\varphi}:D\to\mathbb{R}^3$ 与 $\boldsymbol{\psi}:E\to\mathbb{R}^3$ 是曲面 S 的两个参数表示,若存在 C^1类双射 $\boldsymbol{g}:E\to D$,使 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{g}$,则称 $\boldsymbol{\varphi}$ 与 $\boldsymbol{\psi}$ 是光滑等价的. 若 $\boldsymbol{g}$ 还满足 $J\boldsymbol{g}>0$,则称 $\boldsymbol{g}$ 保持定向,并称 $\boldsymbol{\varphi}$ 与 $\boldsymbol{\psi}$ 定向等价;若 $J\boldsymbol{g}<0$,则称 $\boldsymbol{g}$ 反转定向,这里 $J\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的雅可比行列式. 延伸至无限远的曲面,若任何有界的部分是光滑的,则曲面称为光滑的.

简单光滑曲面(simple smooth surface)　见“光滑曲面”.

分片光滑曲面(piecewise smooth surface)　由若干块光滑曲面拼接的曲面. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是一区域. 若 $D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$,而 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中没有公共内点的区域,并且存在连续的 $\boldsymbol{\varphi}:D\to\mathbb{R}^3$,使每个集 $S_i=\boldsymbol{\varphi}(D_i)$是光滑曲面,则集合 $\boldsymbol{\varphi}(D)$称为分片光滑曲面. 这时有 $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$. 延伸至无穷远的曲面,若任何有界部分是分片光滑的,则曲面称为分片光滑的.

曲面面积(area of a surface)　曲面表面的面积. 把光滑曲面 S 分成没有公共内点的 n 块 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,且每一块仍是光滑曲面,在每个 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$上取一点 P_i,过 P_i 作 S 的切平面 T_i,将 S_i 投影到 T_i 上,所有这些投影的面积之和的极限(当所有 S_i 的直径趋于零时)如果存在,就是曲面 S 的面积. 对有界简单光滑曲面而言,这样的极限总是存在的,而且与曲面的光滑等价的参数表示的选择无关. 若 $S=\boldsymbol{\varphi}(D)$,则 S 的面积,记为 $A(S)$或 A,由下列二重积分计算(如果这个积分存在):

$$A=\iint_D|D_1\boldsymbol{\varphi}\times D_2\boldsymbol{\varphi}|=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$|\cdot|$表示向量的模,$E=|D_1\boldsymbol{\varphi}|^2$,$F=D_1\boldsymbol{\varphi}\cdot D_2\boldsymbol{\varphi}$,$G=|D_2\boldsymbol{\varphi}|^2$. 特别地,若 S 由方程 $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$给出,则

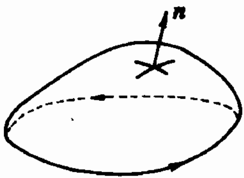
$$A=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

分片光滑曲面的面积定义为组成它的各光滑片的面积之和. 不同于曲线的长度,即使对简单光滑曲面,它的面积也不能用内接多面形面积的极限来定义. 施瓦兹(Schwarz,H. A.)于 1880 年举例说明过:存在圆柱面的内接多面形序列,其面积的极限为∞.

双侧曲面(two-sided surface)　指圆柱面、球面那样的能分辨出两个侧面的曲面. 设曲面 S 上各点处均有两个指向相反的法向量,并且随着点在 S 上连续变动,法向量也随之连续变动. 设 P 是 S 上任一点,取定 P 处的一个法向量 $\boldsymbol{n}_P$,并让 $\boldsymbol{n}_P$ 沿 S 上经过 P 的任何闭曲线(不超出 S 的边界)连续地移动,在移动中 $\boldsymbol{n}_P$ 始终保持所到达的点处的法方向. 若 $\boldsymbol{n}_P$ 回到 P 点时,均能保持原有指向,则 S 称为双侧曲面;否则称为单侧曲面. 即若存在 S 上的点 P 及经过该点的闭曲线 Γ,当指定 P 处的法向量 $\boldsymbol{n}_P$ 并让它沿 Γ 移动一周后 $\boldsymbol{n}_P$ 变为 $-\boldsymbol{n}_P$,则 S 称为单侧曲面. 简单光滑曲面都是双侧曲面. 但分片简单光滑曲面不一定是双侧的. 单侧的分片光滑曲面的一个著名的例子是默比乌斯带(参见本卷《空间解析几何》中的“默比乌斯带”). 对双侧曲面 S,只要取定其上一点的两个法向量中的一个,各点处的法向量的指向也随之取定. 例如,对由方程 $z=f(x,y)$确定的曲面 S 双侧,若指定它上面的法向量为与 z 轴成锐角的那一个,则也就取定了 S 的一侧,称为 S 的上侧,另一侧称为下侧. 类似地可定义左侧、右侧,前侧、后侧. 对封闭的双侧曲面,可定义内侧、外侧.

对边界由有限条简单闭曲线组成的双侧曲面,当取定了一侧后,如下规定边界的正向:若人站在取定侧面沿边界环行时曲面 S 总在人的左手边,则环行方向称为正向(如图). 这时也说这个曲面与它的

边界是相容地定向的. 对平面区域的边界,可类似地定向. 如上规定了正向的边界 ∂,有时记为 ∂^{+}. 对分片简单光滑曲面 $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$,若可确定各个 S_i 的一侧,使公共边界上的正向相反,则 S 称为双侧曲面,否则是单侧的.



单侧曲面(one-sided surface)　见"双侧曲面".

曲线积分(line integral)　函数沿曲线的积分. 它分成两类:一类与曲线的定向无关,称为第一型曲线积分;另一类只对定向曲线定义,称为第二型曲线积分. 由于第一型曲线积分相当于关于曲线的弧长参数的黎曼积分,故也称为关于弧长的曲线积分. 第二型曲线积分又称关于坐标的曲线积分,因为它可以表示为若干个关于直角坐标系中坐标的积分之和. 在西方许多文献中,曲线积分这个词只指关于坐标的曲线积分,这种积分实质上是黎曼-斯蒂尔杰斯积分. 沿光滑定向曲线的曲线积分是带边流形上的积分的特例,它是一次微分形式的积分(参见"第一型曲线积分"和"第二型曲线积分").

第一型曲线积分(line integral of the first kind)　亦称关于弧长的曲线积分. 以曲线的弧长参数为变元的积分. 这个名称更为贴切也用得更广. 设 Γ 为 R^3 中以 A,B 为端点的可求长曲线,P 为它的分法,分点依次为 $A=P_0,P_1,\cdots,P_n=B$,弧段 $P_{i-1}P_i$ 的弧长为 Δs_i,ξ_i 为弧段 $P_{i-1}P_i$ 上任意一点 $(i=1,2,\cdots,n)$,对于定义于曲线 Γ 上的函数 $f(\boldsymbol{x})$,作积分和

$$\sigma_P=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta s_i.$$

若对于 $|P|=\max\{\Delta s_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$,$\lim\limits_{|P|\to0}\sigma_P$ 存在且有限(与分法 P 及点 ξ_i 的取法无关),则将此值称为函数 $f(x)$ 沿 Γ 的关于弧长的曲线积分,记为

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s.$$

Γ 称为积分路径. 当 Γ 为闭曲线($A=B$)时,相应 $f(x)$ 沿 Γ 的积分常记为

$$\oint_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s.$$

当函数 $f(x)$ 沿 Γ 连续时,

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s$$

必存在.

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s$$

存在时,其值与 Γ 的定向及参数表示的选择无关. 但若已知 Γ 的参数表示为 $x=\varphi(t)$ $(x\in\Gamma,a\leqslant t\leqslant b)$ 或 $x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t),x_3=\varphi_3(t)$,则沿 Γ 的积分可通过它化为对 t 的定积分,并由此算出曲线积分:

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s=\int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))|\boldsymbol{\varphi}'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2+(\varphi_3'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

特别若上述参数表示中的参数 t 为弧长 s,且 Γ 的端点 A 和 B 对应于 $s=0$ 和 $s=l$ 时,

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s=\int_0^l f(\boldsymbol{\varphi}(s))\mathrm{d}s.$$

用关于弧长的曲线积分,可以计算线形物体的质量、重心、转动惯量及引力等物理量. 例如分布在曲线 Γ 上的线密度为 ρ 的质量是

$$\int_\Gamma \rho\mathrm{d}s,$$

这也正是这类曲线积分的物理背景. 在 R^n 内的可求长曲线上可同样定义这类曲线积分.

关于弧长的曲线积分(line integral with respect to arc length)　即"第一型曲线积分".

曲线积分路径(path of line integral)　见"第一型曲线积分".

第二型曲线积分(line integral of the second kind)　亦称关于坐标的曲线积分. 一种与曲线定向有关的曲线积分. 设 Γ 为 R^3 中以 A 为始点和 B 为终点的光滑的定向曲线,P 为它的分法,分点依次为 $A=P_0,P_1,\cdots,P_n=B$,弧段 $P_{i-1}P_i$ 在 x 轴上的投影为 Δx_i(可正可负),ξ_i 为弧段 $P_{i-1}P_i$ 上任意一点 $(i=1,2,\cdots,n)$,对于定义在曲线 Γ 上的函数 f,作和

$$\sigma_P=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

若当 $|P|=\max\{\Delta s_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}\to0$ 时(Δs_i 为弧段 $P_{i-1}P_i$ 的长度),σ_P 有与分法 P 及点 ξ_i 的取法无关的有限极限,则将此极限值称为函数 f 沿 Γ 的关于 x 坐标的曲线积分,记为

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}x.$$

类似地,可以定义函数沿曲线关于 y 和 z 坐标的积分,一般将关于三个坐标的积分合在一起写出,于是,关于坐标的曲线积分(或第二型曲线积分)的一般形式是

$$\int_\Gamma f_1(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_1+f_2(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2+f_3(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3,$$

或写成向量形式

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3),\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\mathrm{d}x_3)).$$

当 Γ 为闭曲线时,积分号 $\int_\Gamma$ 用 $\oint_\Gamma$ 代替. 第二型曲线积分的积分路径 Γ 一般总假定为(分段)光滑曲线,

因此，当向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 沿 Γ 连续时，积分 $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$ 存在，其值与坐标轴的选定有关，但与 Γ 的参数表示无关. 第二型曲线积分与积分路径的方向有关，同一函数沿同一弧段由 A 到 B 的积分，与由 B 到 A 的积分符号相反. 第二型曲线积分可以化为第一型的：

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$
$$= \int_\Gamma (f_1\cos\alpha + f_2\cos\beta + f_3\cos\gamma) ds$$

（其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 是曲线 Γ 与积分路径方向一致的单位切向量的方向余弦）. 若已知曲线 Γ 的参数表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，并且始点对应于 $t=a$，终点对应于 $t=b$（不一定 $b\geqslant a$），则

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot d\boldsymbol{\varphi}(t)$$
$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^3 f_i(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))\varphi_i'(t) \right) dt.$$

若向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 表示力的分布，则 $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$ 表示力 $\boldsymbol{f}$ 沿曲线 Γ 所作的功. 第二型曲线积分在向量场理论中还有许多应用. 对于一般的 R^n，可以类似地定义第二型曲线积分，并有与以上相类似的结论.

关于坐标的曲线积分（line integral with respect to coordinates）　即“第二型曲线积分”.

曲线积分与路径无关的问题（the problem of a line integral independent of the path）　关于曲线积分的一个问题. 向量值函数满足什么条件时，其第二型曲线积分值只与积分路径的起点和终点有关，而与具体路径无关的情形. 以 R^3 为例，设 $\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3))$ 是定义在 R^3 内的区域 D 上的向量值函数，对 D 中任意两点 M, N，若沿任意一条完全在 D 内且以 M 为起点和 N 为终点的分段光滑曲线 Γ，积分

$$\int_\Gamma (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3)$$

之值总相等（只与 M, N 有关），则积分 $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$ 称为在 D 内与路径无关，这时该积分可写成

$$\int_M^N \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}.$$

当向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 表示力的分布时，积分 $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$ 与路径无关在物理上表示力 $\boldsymbol{f}$ 作功与路径无关，这是保守力（如重力、静电力等）的特征. 若 D 是 R^3 内的区域，向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续，则积分 $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$ 与路径无关有如下一些充分必要条件：

1. 对于完全在 D 内的分段光滑闭曲线 Γ，有

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x} = 0.$$

2. $\boldsymbol{f}$ 有位（势）函数，即存在 D 上的可微函数 $u(x_1, x_2, x_3)$，使 $\boldsymbol{f}=\operatorname{grad} u$ 或

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f_1, \frac{\partial u}{\partial x_2}=f_2, \frac{\partial u}{\partial x_3}=f_3.$$

且当已知 $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$ 与路径无关时，

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in D, \boldsymbol{x}_0\ \text{为定点})$$

是 $\boldsymbol{f}$ 的一个位函数.

3. 再进一步还有，在 D 是单连通的且 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续可微的情况下，函数 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上任一点满足：

$$\frac{\partial f_i(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\quad (i,j=1,2,3).$$

即在 D 上处处 $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=0$（旋度为 0）. 曲线积分与路径无关的概念及上述充分必要条件很容易直接推广到一般的 R^n 中.

关于曲线积分的微积分基本定理（fundamental theorem of the calculus for line integral）　微积分基本定理在曲线积分情形的推广. 设 $\boldsymbol{f}$ 是 R^3 中的开区域 D 上的连续向量值函数：$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3))$，若在 D 上 $\boldsymbol{f}$ 有原函数（向量值函数的原函数即其位（势）函数），即有定义于 D 的数值函数 $u(x_1,x_2,x_3)$，使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in D)$，则 $\boldsymbol{f}$ 的积分 $\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$ 在 D 内与路径无关，对于任意 $M, N\in D$，有

$$\int_M^N \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x} = u(N) - u(M).$$

这就是关于曲线积分的微积分基本定理. 向量值函数有原函数的条件，即其（第二型曲线）积分与路径无关的条件参见“曲线积分与路径无关的问题”. 这些对于一般的 R^n 也都成立.

曲面积分（surface integral）　即函数沿曲面的积分. 曲面积分分成两类，分别称为第一、二型曲面积分. 第二型曲面积分是对双侧曲面定义的. 第一型曲面积分又称关于曲面面积的积分（参见“第一型曲面积分”与“第二型曲面积分”）. 在许多文献中，曲面积分一词仅指第一型曲面积分. 曲线积分和曲面积分都是流形上的积分的特例.

第一型曲面积分（surface integral of the first kind）　关于曲面面积的积分，简称曲面积分. 设 S 是 R^3 中的简单光滑曲面，$\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 是 S 的一个分法，在每个 S_i 上取一点 ξ_i，对于 S 上的函数 f，作积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)A(S_i),$$

其中 $A(S_i)$ 表示 S_i 的面积，当所有 S_i 的直径均趋于0时，若这个积分和存在与分法及 ξ_i 的取法无关的有限极限，则将此极限值称为函数 $f(x,y)$ 沿曲面 S 的第一型曲面积分，记为

$$\iint_S f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S.$$

当 S 为分片光滑曲面，$S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$ 时，定义

$$\iint_S f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S.$$

当函数 f 在 S 上连续时，积分 $\iint_S f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$ 必存在. S 为闭曲面时，积分号可改为 $\oiint_S$. 若简单光滑曲面 S 由向量值函数 $\boldsymbol{\varphi}(u,v)$ 定义（参见"光滑曲面"），并且 $S=\boldsymbol{\varphi}(D)$，其中 D 是 u,v 平面上的有界区域，则可将 $\iint_S f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S$ 用对于 u,v 的二重积分表示为：

$$\iint_S f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{\varphi}(u,v))\,|D_1\boldsymbol{\varphi}\times D_2\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $D_1\boldsymbol{\varphi}$ 和 $D_2\boldsymbol{\varphi}$ 分别表示向量值函数 $\boldsymbol{\varphi}$ 对 u 和对 v 的偏导数，"×"表示向量积，$|D_1\boldsymbol{\varphi}\times D_2\boldsymbol{\varphi}|$ 表示向量 $D_1\boldsymbol{\varphi}\times D_2\boldsymbol{\varphi}$ 的模. 若 $\boldsymbol{\varphi}(u,v)=(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))$，则上述关系可用数值函数形式写成：

$$\iint_S f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}S = \iint_D f(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v)) \cdot\sqrt{\left(\frac{\partial(\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_1)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

从而可用二重积分来计算. 但由定义可见，曲面积分的值实际上与曲面的参数表示无关. 第一型曲面积分有与第一型曲线积分类似的性质与应用.

第二型曲面积分(surface integral of the second kind)　关于在坐标面投影的曲面积分. 设 S 为双侧的简单光滑曲面，f 为定义于 S 上的函数，若将第一型曲面的积分和（参见"第一型曲面积分"）中的 $A(S_i)$（S_i 的面积），换成 S_i 在 xy 平面上投影的面积（可正可负，且当所选定曲面的一侧的单位法向量与 z 轴正向的夹角为锐角时，规定投影为正，否则为负），然后再以同样方式取极限，所得极限值（若存在）称为函数 f 沿曲面 S（所选定的一侧）关于 x,y 的积分，记为

$$\iint_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

类似地定义沿曲面关于 y,z 和关于 z,x 的积分，并有类似的记号. 一般将关于三个坐标面的曲面积分合写在一起成为

$$\iint_S (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y),$$

其中 P,Q,R 是定义在 S 上的 x,y,z 的函数. 若将它们作为向量函数的分量，写成 $\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$，又令 $\boldsymbol{n}$ 为 S 上所取定的一侧的单位法向量，则上述积分可写成

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

（这实际上是一个第一型曲面积分）. 这两个积分式就是第二型曲面积分的一般形式. 当 S 为闭曲面时，积分号 $\iint_S$ 可改为 $\oiint_S$. 当 S 为有限片光滑曲面的并集（各片间无公共内点）时，沿 S 的积分定义为沿各片积分之和. 被积函数在曲面 S 上连续时，相应的第二型曲面积分存在. 沿曲面的第二型曲面积分与所选定的曲面的侧有关，同一函数沿同一曲面两侧的第二型曲面积分之值大小相等符号相反. 第二型曲面积分可化为第一型的. 若在所选定的一侧，曲面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦是 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\iint_S (P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

沿 S 的第二型曲面积分的值与曲面 S 的参数表示的选择无关，但当参数表示选定后，第二型曲面积分可以化为关于（两个）参数的二重积分来计算. 例如对于

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

若当 $(u,v)\in D$ 时，$(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v),\varphi_3(u,v))=(x,y,z)\in S$，并且

$$D_1=\{(u,v)\in D\,|\cos\alpha>0\},$$
$$D_2=\{(u,v)\in D\,|\cos\alpha<0\},$$
$$D_3=\{(u,v)\in D\,|\cos\alpha=0\},$$
$$(D=D_1\cup D_2\cup D_3),$$

则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_1} P\left|\frac{\partial(\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v - \iint_{D_2} P\left|\frac{\partial(\varphi_3,\varphi_1)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

沿曲面关于 z,x 和关于 x,y 的积分，可以仿此处理. 当曲面 S 由 $z=f(x,y)$（$(x,y)\in D$）给出时，

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_D \left(-P(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\right.$$

$$-Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}+R(x,y,f(x,y)))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中“±”的取法为：沿 S 上侧积分时取“+”，沿下侧积分时取“−”. 一些物理量可以用第二型曲面积分表示或计算. 例如，密度为 1 的不可压缩流体以速度 $\boldsymbol{v}$ 作稳定流动时，单位时间通过曲面 S 的流量为

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \text{ 或 } \iint_S v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+v_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(v_x, v_y, v_z 是 $\boldsymbol{v}$ 沿 x,y,z 轴的分量).

格林公式(Green formula)　亦称格林定理. 联系平面区域上二重积分与沿该区域边界的曲线积分的公式. 指

$$\oint_{\partial D^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是平面有界区域，其边界 ∂D 由有限条互不相交的可求长闭曲线组成，P,Q 是 $\overline{D}$ 上的 C^1 类函数. 这个公式的物理意义参见“高斯-奥斯特罗格拉茨基公式”. 上式最初发表由格林(Green, G.)于 1828 年出版的论文中. 同时还发表了以下两个公式，现称为第一、第二格林公式：

$$\iiint_\Omega(\varphi\triangle\psi+\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

$$\iiint_\Omega(\varphi\triangle\psi-\psi\triangle\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\partial\Omega}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外单位法向量，

$$\frac{\partial}{\partial n}=\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

格林公式与高斯-奥斯特罗格拉茨基公式和斯托克斯公式一起，都是牛顿-莱布尼茨公式的推广. 在流形上的微积分中，它们可以统一为一个公式.

高斯-奥斯特罗格拉茨基公式(Gauss-Ostrogradsky formula)　简称高-奥公式，亦称散度定理、高斯公式、高斯定理. 联系空间区域上三重积分与沿该区域边界的曲面积分的公式. 指

$$\oiint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域，Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是由有限个互不相交的简单光滑双侧曲面或分片简单光滑双侧曲面组成的闭曲面，$\partial\Omega$ 取外单位法向量方向，P,Q,R 是 $\overline{\Omega}$ 上的 C^1 类函数. 格林公式是这个公式的特例. 这个公式的另一形式是

$$\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外单位法向量，

$$\boldsymbol{f}=(P,Q,R),\operatorname{div}\boldsymbol{f}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

称为 $\boldsymbol{f}$ 的散度. 用场论的术语，高斯-奥斯特罗格拉茨基公式表明：向量场的散度在某有界区域的积分，等于该向量场沿这个区域的边界的外法向量方向的通量. 在流体力学中，这个公式反映了下列明显的事实：不可压缩流体从区域中的源流入区域的流量等于流过该区域边界的流量. 这个公式由高斯(Gauss, C. F.)于 1813 年对 $\mathbb{R}^3$ 一个特殊情形得到，后来又由奥斯特罗格拉茨基(Остроградский, М. В.)于 1831 年及 1834 年得到并推广到 $\mathbb{R}^n$.

散度定理(divergence theorem)　即“高斯-奥斯特罗格拉茨基公式”.

斯托克斯公式(Stokes formula)　亦称斯托克斯定理. 联系曲面积分与沿该曲面边界的曲线积分的公式. 指

$$\oint_{\partial S}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是光滑或分片光滑的简单双侧曲面，∂S 由有限条分段光滑闭曲线组成，S 与 ∂S 相容地定向，P,Q,R 是 S 上的 C^1 类函数. 斯托克斯公式的另一形式是

$$\iint_S\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\oint_{\partial S}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$，$\boldsymbol{\tau}$ 是单位切向量，$\boldsymbol{n}$ 是单位法向量，这里向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 相容地定向.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

称为 $\boldsymbol{f}$ 的旋度. 此公式由斯托克斯(Stokes, G. G.)于 1854 年作为试题公之于世. 它是由汤姆森(Thomson, W. (L. K.))于 1850 年的信中告诉斯托克斯的.

场(field)　可测量的物理量在空间与时间中的连续分布. 它不依赖于坐标系的选择. 例如，物体的质量分布成为质量场，大气的压力分布成为压力场，温度分布成为温度场，流体的流速分布成为速度场. 在数学中，这些场可以表示为多元纯量值函数或向量值函数，因而相应地称这些函数为场，即把多元纯量值函数称为纯量场(或标量场，数量场)，多元向量值函数称为向量场. 向量分析研究纯量场与向量场. 当 f 是可微或 C^1 类函数时，称场 f 是可微场或 C^1 类场. 对场的研究离不开数学提供的三个“度”：梯度、散度与旋度. 根据这三个概念的物理意义，引进了各种场的名称：若散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}\equiv 0$，则称 $\boldsymbol{f}$ 为无源场或管状场；若旋度 $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}\equiv 0$，则称 $\boldsymbol{f}$ 为无旋场；若存在 u，使 $\boldsymbol{f}=\operatorname{grad}u$，则称 $\boldsymbol{f}$ 为势场(又称位场)，称 u 为 $\boldsymbol{f}$ 的纯量势函数(位函数)，简称势函数；若存在 $\boldsymbol{g}$，使 $\boldsymbol{f}=\operatorname{rot}\boldsymbol{g}$，则称 $\boldsymbol{f}$ 为旋度场，称 $\boldsymbol{g}$ 为 $\boldsymbol{f}$ 的向量势函

数.根据数学上的有关结论,这些场之间有下述关系:若 $\boldsymbol{f}$ 是 C^1 类场,且其定义域是单连通域,则 $\boldsymbol{f}$ 是无旋场,当且仅当它是势场,$\boldsymbol{f}$ 是无源场当且仅当它是旋度场,梯度场是无旋场,旋度场是无源场.对任何向量场 $\boldsymbol{f}$,存在纯量场 u 及向量场 $\boldsymbol{g}$,使 $\boldsymbol{f}=\mathrm{grad}\,u+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}$(亥姆霍兹分解定理).在数学分析中只是用多元微积分的方法初步讨论场的理论.场论的进一步研究是近代物理的重要组成部分.

旋度场(rotation field) 见"场".

向量场(vector field) 见"场".

纯量场(scalar field) 见"场".

无源场(field without source) 见"场".

无旋场(irrotational field) 见"场".

向量线(vector line) 向量场中具有特定意义的曲线.指其切线方向与场中向量一致的向量场中的曲线.设 $\boldsymbol{f}$ 是定义在区域 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 上的向量场,Γ 是 Ω 中的光滑曲线.若 Γ 上每一点处的切向量的方向与 $\boldsymbol{f}$ 在该点的方向一致,则 Γ 称为场 $\boldsymbol{f}$ 的向量线.例如势场 $\boldsymbol{f}$ 的向量线是它的势函数的梯度线,即这个势函数变化最快的线.若 $\boldsymbol{f}$ 是稳定流动(即与时间无关)的流体的速度场,则它的向量线是流体质点的移动轨迹,称为流线.若 $\boldsymbol{f}$ 是引力场,则相应的向量线称为力线.

流线(streamline) 见"向量线".

力线(line of forces) 见"向量线".

向量管(vector tube) 由向量线组成的曲面.设 $\boldsymbol{f}$ 是 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 上的向量场,Σ 是 Ω 内的光滑曲面.若在 Σ 的每一点处的法向量与 $\boldsymbol{f}$ 在该点的方向垂直,则称 Σ 所界的区域为场 $\boldsymbol{f}$ 的向量管.向量管由向量线组成.场的每一条向量线都整个地在向量管上.

势函数(potential function) 亦称位函数.场论中一种特殊函数.设 $\boldsymbol{f}$ 是向量场,若存在纯量函数 u,使 $\boldsymbol{f}=\mathrm{grad}\,u$,则称 u 为 $\boldsymbol{f}$ 的势函数.若存在向量函数 $\boldsymbol{g}$,使 $\boldsymbol{f}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}$,则称 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的向量势函数.有的文献把 u 称为向量场 $\boldsymbol{f}$ 的原函数,把 $-u$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的势函数,因为 $\boldsymbol{f}$ 为重力场时其势能恰为 $-u$(这也正是势函数这个名称的来源).连续向量场存在势函数的充分必要条件是 $\boldsymbol{f}$ 为保守场.C^1 类三维向量场的定义域单连通时,存在势函数的充分必要条件是其旋度为 0,存在向量势函数的充分必要条件是其散度为 0.

位函数(potential function) 即"势函数".

向量势函数(potential vector function) 见"势函数".

势场(potential field) 亦称位场或梯度场.一种特殊的向量场.即满足 $\boldsymbol{f}=\mathrm{grad}\,u$ 的向量场 $\boldsymbol{f}$,其中 u 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 的某个区域上的数值函数,称为 $\boldsymbol{f}$ 的原函数或纯量势函数.当 $\boldsymbol{f}$ 连续时,$\boldsymbol{f}$ 为势场当且仅当它是保守场;当 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 连续可微且其定义域为 $\mathbb{R}^n$ 的单连通域时,$\boldsymbol{f}$ 是势场当且仅当

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\ (1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n);$$

特别地,$n=3$ 时当且仅当 f 是无旋场.势场因有势函数而得名.

位场(potential field) 即"势场".

梯度场(gradient field) 即"势场".

保守场(conservative field) 曲线积分与路径无关的向量场.设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 的区域,$\boldsymbol{f}:G\to\mathbb{R}^n$ 连续.若对 G 内任意两点 A,B,曲线积分

$$\int_A^B \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

与从 A 到 B 的路径无关,则 $\boldsymbol{f}$ 称为 G 上的保守场.例如重力场.任何保守场都遵守机械能守恒原理.故保守场又称守恒场.

守恒场(conservative field) 即"保守场".

管状场(tubular field) 散度处处为零的场.由于在这样的场里,既无源又无汇,向量线互不相交,向量管就像一根根管子一样,故有此名.对这样的场内的任一闭曲面,进出该曲面的流量相等,或者说,由这个闭曲面围成的区域内原有的总量(如流体的总量)不变,因此它是无源场.

环量(circulation) 亦称环流量.场论中对沿闭曲线的第二型曲线积分的称呼.即积分

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

称为向量场 $\boldsymbol{f}$ 沿闭曲线 Γ 的环量.若 $\boldsymbol{f}$ 表示流体速度场,则环量不等于 0 时表示沿 Γ 存在着环流.若 $\boldsymbol{f}$ 表示以匀角速 ω 绕定轴转动的刚体的速度场,则沿与定轴垂直,半径为 r 的圆的曲线的环量是 $2\pi r^2\omega$.可见环量的大小可以反映转动的快慢.

环流量(circulation) 即"环量".

流量(flux) 亦称通量.场论中对第二型曲面积分的称呼.即积分

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

称为向量场 $\boldsymbol{f}$ 通过曲面 S 的流量.例如,若 $\boldsymbol{f}$ 表示电场强度或磁场强度,则

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

表示电通量或磁通量;若 $\boldsymbol{f}$ 表示密度为 1 的不可压缩流体在空间中作稳定流动时的速度场,则

$$\iint_S \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

表示单位时间内通过 S 的流量.若 S 为闭曲面,$\boldsymbol{n}$ 为外法向单位向量,则当积分值$>0(<0)$时表示流体

通过 S 流出的量大于(小于)流入的量,这时 S 内应该有源(渊),从这里产生(消失)流体.当积分值为 0 时,表示流入 S 与流出 S 的流量相等,这时 S 内既无源也无渊.从散度定理可知,当 S 为光滑或分片光滑闭曲面时,通过 S 的流量是 S 围成的区域的加性区域函数,它在 S 内一点处的密度就是向量场在该点的散度.

通量(flux) 即"流量".

梯度(gradient) 场论的基本概念之一.它是多元实函数的雅可比矩阵,即以该函数的各个偏导数为分量的向量.若 $f:D(\subseteq \mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}$,则 f 在 $\boldsymbol{a}\in D$ 的梯度,记为 $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})$ 或 $f'(\boldsymbol{a})$,是向量 $(D_1 f(\boldsymbol{a}), D_2 f(\boldsymbol{a}),\cdots,D_n f(\boldsymbol{a}))$,即

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right).$$

通常可写

$$\mathrm{grad}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\nabla,$$

它是向量场的基本微分算子之一(参见"算子▽").当 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微时,在 $\boldsymbol{a}$ 处的梯度与导数的关系是 $Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x})=\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{x}$,这里"·"表示内积.而 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的全微分 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})=\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.特别地,沿方向 $\boldsymbol{v}$ 的导数 $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})=\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{v}$.因此,当 $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})/|\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})|$(梯度方向)时,方向导数最大,最大值为 $|\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{a})|$.这说明在任何点处,梯度的模是函数的最大变化率,梯度方向是函数 f 的值增加最快的方向.梯度方向总与函数的等值线或等值面垂直.实际上梯度向量(它的方向和模)只与数量场 f 有关,而与坐标系的选择无关.

散度(divergence) 场论的基本概念之一.若向量值函数 $\boldsymbol{f}(x)=(P(x),Q(x),R(x))$ 连续可微,定义在 R^3 中的区域 G 上,即在 $G\subset\mathrm{R}^3$ 上分布着向量场 $\boldsymbol{f}$,则在 G 上定义

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

称为向量场 $\boldsymbol{f}$ 的散度(记为 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}$).散度是数值函数.若令 Ω 表示完全在 G 内的区域($\Omega\subset G$),其边界曲面记为 $\partial\Omega$,是分片光滑的闭曲面,则由高斯-奥斯特罗格拉茨基公式,散度还可有等价定义:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\lim_{\Omega\to x}\frac{1}{|\Omega|}\oiint_{\Omega}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

其中积分在 $\partial\Omega$ 的外侧进行,即 $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向单位向量;$|\Omega|$ 表示 Ω 的体积;$\lim\limits_{\Omega\to 0}$ 表示 Ω 向点 $\boldsymbol{x}$ 无限收缩时的极限,即使得总有 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 且 $\mathrm{diam}\Omega$(Ω 的直径)$\to 0$(从而 $|\Omega|\to 0$)时的极限.这个极限值与 Ω 的具体取法无关.由这个等价定义可见,向量场的散度实质上与坐标系的选择无关,但可按前一定义进行计算.若 $\boldsymbol{f}$ 是不可压缩流体的速度场时,则 $(\mathrm{div}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})>0$ 表示在 $\boldsymbol{x}$ 处有流体涌出,即点 $\boldsymbol{x}$ 为源;$(\mathrm{div}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})<0$ 表示在 $\boldsymbol{x}$ 处有流体渗入,即点 $\boldsymbol{x}$ 为渊(或汇),而 $|(\mathrm{div}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})|$ 表示单位时间里在 $\boldsymbol{x}$ 处的单位体积里涌出或渗入的流体的量,即源(或汇)的强度.这就是散度的物理意义,它也说明了散度一词的来源.可以完全类似地对 R^n 中的向量场定义散度.

源(source) 见"散度".

汇(sink) 见"散度".

旋度(rotation) 场论的基本概念之一.若 $G\subset\mathrm{R}^3$ 为开区域,$\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$ 为定义于 G 上取值为三维向量的向量值函数,是连续可微的,即在 G 上展布了 C^1 类向量场,则可在 G 上定义另一个与 $\boldsymbol{f}$ 有关的向量值函数(向量场)$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}$:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

称为 $\boldsymbol{f}$ 的旋度,也可记为 $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{f}$.若 $\boldsymbol{n}$ 为 R^3 内某一指定方向的单位向量,则向量场 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 的旋度(向量)在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影 $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})_n$,根据斯托克斯公式可表示为

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})_n=\lim_{S\to x}\frac{1}{|S|}\oint_{S}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

其中 S 是完全在 G 内的双侧曲面,总是通过点 $\boldsymbol{x}$ 的,以 $\boldsymbol{n}$ 为 S 在点 $\boldsymbol{x}$ 的法向量,并由此选定 S 的一侧;∂S 是曲面 S 的边界,是分段光滑的闭曲线,并与所选定的 S 的一侧相容地定向;$\lim\limits_{S\to x}$ 表示当 S 的直径趋于 0(因而面积 $|S|\to 0$)时的极限.由此可见,旋度向量在任何方向的投影都与坐标系无关,因而 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}$ 本身也只与函数 $\boldsymbol{f}$ 及点 $\boldsymbol{x}$ 有关,而与坐标系的选取无关,但用分量定义便于计算.当刚体以匀角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕定轴转动时,对刚体上的速度场 $\boldsymbol{v}$,$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$($\boldsymbol{\omega}$ 为角速度向量),这说明旋度反映了速度场的旋转特征.一般地,一个向量场的旋度刻画了这个向量场所表示的物理场的某种涡流性质,它的模表示了涡流的强度,而它的方向是涡流的转轴方向.

算子▽(operator ▽) 亦称哈密顿算子.一种向量算子.指向量分析中相当于微分算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 的一种算子.在 R^n 的直角坐标系中,

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=(D_1,D_2,\cdots,D_n).$$

▽读作 del 或奈布拉(nabla,一种琴的名字).用这个符号,梯度、散度、旋度可分别表示为 ∇f,$\nabla\cdot\boldsymbol{f}$ 与 $\nabla\times\boldsymbol{f}$,这里"·"表示内积,"×"表示向量积.又,拉普拉斯算子

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\cdots,\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right).$$

哈密顿算子(Hamiltonian operator) 即"算子▽".

无穷级数

无穷级数(infinite series) 指将无穷数列(或函数列)的各项依次用加号连结而成的表达式.若给定序列$\{a_n\}$,则$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$就是一个无穷级数,简称级数,记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

当$\{a_n\}$为数列时,它称为数项级数;$\{a_n\}$为函数列时,它称为函数项级数,其中的$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$分别称为该级数的第一项,第二项,…,第$n$项,…,统称为项.下标取自然数值的变量时的$a_n$称为通项.级数是无穷项相加,它已不再是算术运算.对于

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

它的前n项之和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$称为它的第n部分和$(n=1,2,\cdots)$,统称为部分和.若给定一个级数,则它的部分和序列就确定了;反之,若任给一个序列$\{S_n\}$,则以它为部分和序列的级数也是惟一确定的,即$S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})+\cdots$因此,研究级数与研究序列是一致的,有关它们的结论都可以通过适当形式互相转化.例如,级数的收敛性与其部分和序列的收敛性是相同的.另一方面,无穷级数与无穷积分也是相似而联系密切的,在某种意义上,前者是离散量之和,而后者是连续量之和,因此有关二者的研究结果也可以互相转化.对于一个无穷级数,首要的问题是它的收敛性,因此,收敛性的各种意义和判别法,以及在这些意义下收敛的级数的性质和应用,成为无穷级数理论的基本部分.但是,随着数学的发展,人们发现某些不收敛的级数(发散级数)也是有用的,于是又有了发散级数求和与渐近级数这样一些内容,它们大部分已不属于数学分析范围.无穷级数是广泛使用的数学工具.主要是用它来表示函数或数,另外也可用它来作近似计算.许多函数都可以用幂级数或三角级数表示.于是借助于级数,就可以由幂函数或三角函数之类的性态已知的或较好的函数出发,去研究更多新的函数.像牛顿(Newton,I.)在刚创立微积分时,就是用幂级数展开式的逐项微分或积分(当然那时是形式上的运算),来计算很多函数无法直接求出的微分或积分.现在幂级数更是解析函数理论的基础.于是由此产生两类问题.一方面是从级数的各项函数的性态去推测和函数是否存在(收敛性),以及存在时它的性态如何(连续、可微、可积等),这属于无穷级数的基本理论.再就是讨论一个函数展开为某类级数的条件及展开方法和结果等问题.

历史上古希腊时代已经出现了公比小于1的无穷几何级数,亚里士多德(Aristotle)已认识到这种级数有和.至迟到15世纪中叶,英、法的一些数学家已研究了某些特殊的数项级数,例如,奥尔斯姆(Oresme,N.)证明了调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

发散.至于级数与微积分的关系,前面已经提到,从牛顿开始,级数就是微积分证明和计算的工具.18世纪对级数的研究有很大发展,像对函数展开成级数的研究,出现了现在所谓的泰勒级数.还开始了对三角级数的研究,以及一些为了特殊的应用目的得到了关于级数的巧妙而有用的结果(例如欧拉-麦克劳林公式).这个时期的很多数学家如约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)、雅各布第一·伯努利(Bernoulli Jacob Ⅰ)、泰勒(Taylor,B.)、麦克劳林(Maclaurin,C.)、达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等,都对级数理论和应用作过很大贡献,特别是欧拉(Euler,L.),不但给出了大批公式,还研究了复数项级数,把级数用于数论等方面.但是他们一直对级数的收敛与发散的概念都是含糊不清的,甚至没有认真对待过这个问题.他们把幂级数当做多项式的代数的推广,形式地进行包括逐项微分和逐项积分的运算,出现过不少错误和矛盾.

级数理论的严密化开始于19世纪初.1811年,傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)给出了级数收敛性的正确定义,1812年,高斯(Gauss,C. F.)在历史上第一次完整而严格地处理了一个级数(超几何级数),1821年,柯西(Cauchy,A.-L.)在其《分析教程》中建立了收敛性的近代理论的基础,并成为复变函数论形成中的主要因素之一.1826年,阿贝尔(Abel,N. H.)给出了二项级数的第一个严格证明,同时还研究了幂级数的和函数的连续性.到19世纪中叶,外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))、狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)及黎曼(Riemann,(G. F.)B.)等人又明确了一致收敛的概念,研究了级数的逐项积分及级数的项的重排等问题.这样,无穷级数的收敛性理论趋于完整.现在无穷级数已经成为物理、化学、生物、工程等许多方面的常用数学工具之一.

级数(series) 见"无穷级数".

通项(general term) 见"无穷级数".

子级数(subseries) 由级数的某些项构成的级数.将一个级数的项去掉一部分,其余的项仍按原来的次序相加,这样得到的级数称为原级数的子级数.

级数的和(sum of series) 级数的部分和序列的(有限)极限.若级数为$\sum a_n$,而

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=S$$

(极限存在时),则S(有限数)称为该级数的和,记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

和的这个定义是柯西(Cauchy,A.-L.)于1821年建立的.在19世纪末以后又出现了关于级数的和的其他定义(参见“级数的求和”),因此有时又将上述意义下的和特称为柯西和(收敛意义下的和).柯西和是有限个数的和的概念的最直接推广,它已不属于代数的范畴.

级数的部分和(partial sum of series) 指级数的前有限项的和.若级数为 $\sum a_n$,则其第 n 部分和(一般记为 S_n)为其前 n 项之和,即

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n=1,2,\cdots).$$

所有这些和统称为部分和.级数收敛与其部分和序列收敛是一致的.

级数的余项(remainder of series) 从一个级数中去掉前有限项后的表达式.若级数为 $\sum a_n$,则它的第 n 余项(常记为 R_n)为原级数去掉前 n 项的式子,即

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad (n=1,2,\cdots),$$

它们统称为余项.级数的余项仍为级数.级数收敛的充分必要条件是:它的余项(序列)趋于0.

收敛级数(convergent series) 部分和序列的极限存在的级数,即有和的级数.若 $\sum a_n$ 的部分和序列

$$\{S_n\}\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

当 $n\to\infty$ 时有有限的极限,则该级数称为收敛级数.收敛级数分条件收敛级数和绝对收敛级数两大类.其性质与有限和(有限项相加)相比有本质的差别,例如交换律和结合律对它不一定成立.收敛级数概念是柯西(Cauchy,A.-L.)于1821年引进的.

绝对收敛级数(absolutely convergent series) 各项取绝对值以后收敛的级数.即若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

收敛,则称级数 $\sum a_n$ 绝对收敛.绝对收敛级数一定是收敛的,反之不一定.收敛非负项级数当然是绝对收敛的,因此,非负项级数的每个收敛判别法都是绝对收敛的判别法.绝对收敛级数的性质,与有限项相加的性质十分相近.例如,两个绝对收敛级数经加、减、乘运算后仍然绝对收敛,作这些运算所得级数的和与原级数的和作相应运算结果相同;绝对收敛级数的项经过任意改变它们的次序,或任意多项合并以后,所得的级数仍然绝对收敛,且其和不变.

无条件收敛级数(unconditionally convergent series) 任何重排均收敛的级数.即这样的级数:不管如何交换它的项的次序,所得到的级数仍然收敛.因此,又称可换收敛级数.对数项级数而言,无条件收敛与绝对收敛等价.

条件收敛级数(conditional convergent series) 收敛但不绝对收敛的级数.级数 $\sum a_n$ 条件收敛是指:它本身收敛但不绝对收敛,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty.$$

对于任何一个条件收敛级数,经过将它的项适当地重排,即交换项的次序(参见“级数的重排”),可以使所得的新级数收敛到指定的任何数,或发散于 $+\infty$(或 $-\infty$)(黎曼定理).

级数的重排(rearrangement of series) 交换一个级数的项的次序所得到的级数.对于级数 $\sum a_n$,若 φ 是 N_+ 到 N_+ 上的一一对应,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

就称为原级数的重排.例如,对于

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

级数
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\cdots$$

和
$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5}-\cdots$$

都是它的重排.绝对收敛级数的任何重排都收敛于原级数的和,而对条件收敛级数有黎曼重排定理:若 $\sum a_n$ 条件收敛,$-\infty \leqslant S' \leqslant +\infty$,则存在 $\sum a_n$ 的重排 $\sum b_n$,使得

$$\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S'.$$

级数的乘法(multiplication of series) 两个级数的乘积是指以两个级数的项两两相乘作为项的级数.给定级数

$$\sum a_n,\ \sum b_n,$$

可得到二重级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n.$$

把它的项按任何一种次序排列,所得到的单级数,记为 $\sum c_n$,称为 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 的积.这样,级数的积与二重级数到单级数的重排有关.当 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 都绝对收敛时,对任何重排,$\sum c_n$ 都绝对收敛,且 $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$.但当 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 条件收敛时不能保证 $\sum c_n$ 的收敛性;随着重排的不同,会得到不同的积.最常用的一种,是把下标之和为定值的项合并得到的单级数,即

① 注:无穷级数部分,为书写的简便和叙述的简明.在不至引起误解的前提下,可将 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 排成 $\sum a_n$,$\sum b_n$,$\sum a_n b_n$ 的形式.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1)$$
$$= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3) + \cdots,$$

称为$\sum a_n$与$\sum b_n$的柯西积. 对柯西积$\sum c_n$，有下列结论：

1.（阿贝尔定理，1826）若$\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$分别收敛于$a, b, c$，则$c=ab$.

2.（默滕斯定理，1875）若$\sum a_n$或$\sum b_n$绝对收敛，则$\sum c_n$收敛，且$\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$.

3.（哈代定理）若$\sum a_n$或$\sum b_n$收敛，且序列$\{na_n\}$与$\{nb_n\}$有下界，则$\sum c_n$收敛，且

$$\sum c_n = \sum a_n \sum b_n.$$

设

$$c_n = \sum_{kl=n} a_k b_l,$$

则称$\sum c_n$为$\sum a_n$与$\sum b_n$的狄利克雷积. 它是由狄利克雷级数相乘得到的：

$$\left[\sum \frac{a_k}{k^x}\right]\left[\sum \frac{b_l}{l^x}\right] = \sum \frac{c_n}{n^x}.$$

它在数论中有用. 类似于默滕斯定理的结果仍成立.

柯西积(Cauchy product)　见“级数的乘法”.

狄利克雷积(Dirichlet product)　见“级数的乘法”.

数项级数(series of number terms)　各项均为数的级数.

正项级数(series of positive terms)　各项都是正数(或非负数)的数项级数. 对于正项级数，由于它的部分和序列是递增的，因而它收敛的充分必要条件是其部分和有上界. 若$\sum a_n$是正项级数(即所有$a_n \geqslant 0$)，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \text{ 与它收敛同义，}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{ 与它发散同义}$$

(这时也说它的和是无穷大). 正项级数收敛性的判别法很多，主要有比较判别法，以及选用不同的已知收敛性的级数作比较级数，由它得到的一系列判别法，还有积分判别法和高斯凝聚判别法(参见“积分判别法”和“高斯凝聚判别法”).

套叠级数(telescopic series)　由一个数列的相邻项之差组成的级数. 形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$$

的级数. 当且仅当序列$\{a_n\}$收敛时它收敛. 当收敛时其和为

$$a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

任何级数$\sum a_n$均可写成套叠级数的形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n - S_{n-1}),$$

其中$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, S_0 = 0$.

交错级数(alternating series)　各项数值依次正负相间的数项级数. 即形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

(这里所有$a_n > 0$)的级数. 如果$\{a_n\}$单调且趋于0，则交错级数$\sum(-1)^n a_n$收敛(莱布尼茨判别法).

函数列(sequence of functions)　指各项为具有相同定义域的函数的序列. 若$\{f_n\}$为函数列，其中每个函数f_n的定义域为A，则A也称为$\{f_n\}$的定义域，若对某个$x_0 \in A$，数列$\{f_n(x_0)\}$收敛，则x_0称为$\{f_n\}$的收敛点，或称$\{f_n\}$在点x_0收敛，$\{f_n\}$的所有收敛点的集合称为它的收敛域. 若对每个$x \in D$，有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

则函数$f(x)$称为函数列$\{f_n\}$(或$\{f_n(x)\}$)在D上的极限函数，这时也说，函数列$\{f_n\}$在D上处处收敛于f，或在D上逐点收敛于f. 对一般的函数列来说，除研究它的逐点收敛(或称点态收敛)这种收敛方式外，还要研究一致收敛，这是为了研究极限函数是否继承相应函数列的各项(函数)所具有的分析性质(连续、可微、可积等)而引入的一种收敛方式.

函数项级数(series of functions)　各项为函数的级数. 对于函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\left(\text{或写成} \sum_{n=1}^{\infty} f_n\right),$$

它的部分和序列$\{S_n\}$是一个函数列($S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$)，这个函数列$\{S_n\}$的定义域、收敛点和收敛域分别称为相应函数项级数的定义域、收敛点和收敛域；$\{S_n\}$逐点收敛或一致收敛，也就称函数项级数$\sum f_n$逐点收敛或一致收敛.

收敛点(point of convergence)　见“函数列”和“函数项级数”.

收敛域(domain of convergence)　见“函数列”和“函数项级数”.

逐点收敛(pointwise convergence)　亦称处处收敛. 见“函数列”和“函数项级数”.

逐点极限(pointwise limit)　无穷级数的基本概念之一. 特指函数列的逐点极限函数(参见“函数列”和“函数项级数”).

函数的级数表示(representation of a function by series)　亦称函数的级数展开. 函数的一种表达形式. 即在某区域上收敛于给定函数的级数. 对于函数$f(x)$，若存在在某个区域D上以$f(x)$为和函数的函数项级数$\sum f_n$，即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,(x\in D),$$

则 $\sum f_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 D 上的级数表示(或级数展开式),这时也称函数 f 在 D 上可表示为(或可展开为)级数 $\sum f_n$. 对上述区域 D 内每一点 $\boldsymbol{a}$,也称函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 可展开(或可表示)为级数. 一般对函数 f 的级数展开式的各项函数还有一些特殊要求,例如,若要求展开式各项为幂函数,则相应展开式称为幂级数展开式(或表示式);若要求展开成为三角级数,则相应展开式称为三角表示式(或展开式). 研究函数用级数表示或展开为级数的目的和意义在于,借此从性态较好、形式简单的函数出发,去研究和把握一般复杂的函数的各种性态(参见"无穷级数").

函数的级数展开(expansion of a function in series)　即"函数的级数表示".

一致收敛(uniform convergence)　亦称均匀收敛. 无穷级数的基本概念之一. 它有两种最基本的情形:

1. 函数列的一致收敛. 若函数 f 和所有的 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 都在集合 $A(\subseteq \mathbb{R}^n)$ 上有定义,任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对于所有的 $\boldsymbol{x}\in A$,有 $|f_n(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|<\varepsilon$,则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 A 上(关于 x)一致收敛于函数 $f(\boldsymbol{x})$,并将 $f(\boldsymbol{x})$ 称为 $\{f_n(\boldsymbol{x})\}$ 的一致极限(函数). 这个定义也可改述为:若

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|f_n(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|=0,$$

则称 $f_n(\boldsymbol{x})$ 在 A 上一致收敛于 $f(\boldsymbol{x})$.

2. 多元函数关于它的一部分自变量的一致收敛. 以二元函数 $f(x,y)$ 在集合 $B(\subseteq \mathbb{R})$ 上当 $x\to x_0$ 时关于 y 一致收敛于 $\varphi(y)$ 的概念为例,首先要求 f 在 $A\times B$ 上定义(即当 $x\in A, y\in B$ 时,有相应的函数值 $f(x,y)$),φ 在 B 上定义,x_0 是 A 的聚点. 若对任给的 $\varepsilon>0$,存在与 y 无关的 $\delta>0$,使得只要 $|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon$ 对一切 $y\in B$ 成立,或者说,若有

$$\lim_{x\to x_0}\sup_{y\in B}|f(x,y)-\varphi(y)|=0,$$

则 $f(x,y)$ 称为(在 B 上,当 $x\to x_0$ 时)关于 y 一致收敛于 $\varphi(y)$.

由以上两种情形的定义出发,稍加变化即可得到其他各种情形下一致收敛的定义. 例如,函数项级数 $\sum f_n(\boldsymbol{x})$ 的一致收敛,指其部分和函数序列 $\{S_n(\boldsymbol{x})\}$ 一致收敛;二元函数 $f(x,y)$ 关于 x 当 $y\to+\infty$ 时一致收敛的定义为:对任意 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得只要 $y>M$,就对一切 $x\in E$ 有 $|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$;含参量广义积分

$$\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

一致收敛于 $F(x)$ 可叙述为:若令

$$G(x,y)=\int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t,$$

而 $G(x,y)$ 当 $y\to+\infty$ 时,关于 x 一致收敛于 $F(x)$,则称

$$\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

关于 x 一致收敛. 有关一致收敛的判别法及性质,以函数列情形为主简介如下,其他情形是类似的. 常用判别一致收敛的准则及判别法有:柯西准则,M 判别法,狄利克雷判别法,阿贝尔判别法与迪尼定理,分别见有关条目. 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$,则当每个 f_n 在 $x_0\in[a,b]$ 连续时,f 在 x_0 也连续;当每个 f_n 在 $[a,b]$ 上可积,f 在 $[a,b]$ 也可积,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若每个 f_n 在 $[a,b]$ 上可微,且 $\{f'_n(x)\}$(f_n 的导函数序列)关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且 $\{f_n\}$ 在某点收敛,则 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于某个可微函数 $f(x)$(在 $[a,b]$ 上),且

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=f'(x)\,(x\in[a,b]).$$

在函数列和函数项级数情形下,后两条相当于逐项积分和逐项微分,可参见有关条目. 一致收敛的概念是外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))于19世纪50年代末明确,由海涅(Heine,H. E.)于1870年建立的.

均匀收敛(uniform convergence)　即"一致收敛".

一致极限(uniform limit)　函数列(函数项级数、函数族、含参量广义积分等)一致收敛时的极限函数.

逐点绝对收敛(pointwise absolute convergence)　在集合中每一点绝对收敛. 设函数列 $\{f_n(\boldsymbol{x})\}$ 中每个 f_n 均定义在集 A 上,若对每个 $\boldsymbol{x}\in A$,序列 $\{f_n(\boldsymbol{x})\}_{n=1}^{\infty}$ 绝对收敛,即 $\{|f_n(\boldsymbol{x})|\}$ 收敛,则称 $\{f_n\}$ 在 A 上逐点绝对收敛或在 A 上绝对收敛.

类似地,可对函数项级数及含参数广义积分引进这个概念.

一致绝对收敛(uniform absolute convergence)　函数项级数各项绝对值所成级数一致收敛. 一致绝对收敛级数必一致收敛且逐点绝对收敛,反之不成立. M 判别法实际上是一致绝对收敛性的判别法.

完全类似地,可以定义一致绝对收敛的含参数广义积分.

广义一致收敛(generalized uniform convergence)　各点邻域中的一致收敛. 若对每个 $\boldsymbol{x}_0\in D$,函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$(或级数 $\sum f_n$)在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域内一

致收敛,则称$\{f_n\}$(或$\sum f_n$)在D上广义一致收敛.这等价于$\{f_n\}$(或$\sum f_n$)在D的每个有界闭子集上一致收敛.当D是有界闭集(例如闭区间)时,这等于说,在D上一致收敛.

一致收敛性的柯西准则(Cauchy criterion for uniform convergence) 判定一致收敛性的充分必要条件(参见"柯西准则"):

1. 函数列与函数项级数.设$f_n:E\to\mathrm{R}$.序列$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛的充分必要条件是:对任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,当$m,n>N$时,对所有$x\in E$,有$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$,即$m,n>N$时,

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,$$

这里$|\cdot|$是欧几里得范数.级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在E上一致收敛的充分必要条件是:对于任意的$\varepsilon>0$,存在正整数N,当$m\geqslant n>N$时,对所有$x\in E$,有$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_m(x)|<\varepsilon$ (R可换成完备度量空间).

2. 含参量广义积分.设$-\infty<a<b\leqslant+\infty$,$f:[a,b)\times E\to\mathrm{R}$,$b$的奇点的积分

$$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在E上一致收敛的充分必要条件是:对任意$\varepsilon>0$,存在$T\in[a,b)$,当$x',x''\in[T,b)$时,对所有$y\in E$,有

$$\left|\int_{x'}^{x''}f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

同样有b是奇点时的柯西准则,也可推广到含参数的无穷积分和广义重积分.

3. 函数族.设函数族$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$有$f_\lambda:E(\subseteq\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}$,$\lambda_0$是$\Lambda$的极限点.当$\lambda\to\lambda_0$时,族$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$在$E$上一致收敛的充分必要条件是:对任意$\varepsilon>0$,存在$\lambda_0$的邻域$U$,使当$\lambda',\lambda''\in U\setminus\{\lambda_0\}$时,对所有$\boldsymbol{x}\in E$,有

$$|f_{\lambda'}(\boldsymbol{x})-f_{\lambda''}(\boldsymbol{x})|<\varepsilon$$(R可换成完备度量空间,Λ可以是满足第一可数公理的拓扑空间).

又如,对二元实值函数$f:A\times B\to\mathrm{R}$,$(x,y)\in A\times B$,$y\to y_0$(B的聚点)时,f关于x一致收敛的充分必要条件是:存在y_0的邻域U,使$y',y''\in U\setminus\{y_0\}$时,对所有$x\in A$,有$|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon$.

逐项积分(term by term integration) 微积分术语.即函数列(级数)逐项求积分后与其极限(和)的积分相等.对函数列(级数)的每一项积分,使所得到的序列(级数)收敛于原序列(级数)的极限函数(和函数)的积分,即

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n,\int_a^b\left(\sum f_n\right)=\sum\int_a^b f_n.$$

$\{f_n\}$或$\sum f_n$要满足一定条件,才能逐项积分:

1. 若在$[a,b]$上所有f_n可积,$\{f_n\}$($\sum f_n$)一致收敛,则其极限函数(和函数)可积且可逐项积分.

2.(阿尔泽拉控制收敛定理) 若$f_n\to f$,f_n与f可积,且$\{f_n\}$一致有界,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n-f|=0,$$

特别地,可逐项积分.这是阿尔泽拉(Arzelà,C.)于1858年建立的.这里的积分可改为重积分,但不能改为广义积分.

逐项微分(term by term differentiation) 微积分术语.即函数列(级数)各项先求导数后求极限与极限(和)的导数相等.对函数列(级数)的每一项求导数,使所得到的序列(级数)收敛于原序列(级数)的极限(和)的导数,即

$$(\lim_{n\to\infty}f_n)'=\lim_{n\to\infty}f_n',\left(\sum f_n\right)'=\sum f_n'.$$

逐项微分有如下定理:若在区间$[a,b]$上$\{f_n'\}$($\sum f_n'$)一致收敛,且$\{f_n\}$($\sum f_n$)在$[a,b]$的某个点收敛,则$\{f_n\}$($\sum f_n$)在$[a,b]$上一致收敛且可逐项微分.当$[a,b]$换成开集或任意区间E时,第一个条件可换成在E的任何闭子区间上一致收敛.特别地,幂级数在其收敛区间上可逐项微分任意次,并且每次得到的级数的收敛半径均相等.

迪尼定理(Dini theorem) 一致收敛的一种判定定理.该定理断言:若$f(x)$及所有$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$均为定义在有界闭集$A\subseteq\mathrm{R}^n$上的实值连续函数,且对每个$x\in A$,数列$\{f_n(x)\}$单调收敛于$f(x)$,则在A上$\{f_n\}$一致收敛于f.对于级数,若在有界闭集$A\subseteq\mathrm{R}^n$上,级数$\sum f_n$的各项连续、非负,且其和函数f连续,则它在A上一致收敛于f.对含参量广义积分有类似的结论:若$f:A\times[c,+\infty)\to\mathrm{R}$连续、不变号,

$$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

收敛于连续函数I,则

$$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

一致收敛于I.

泰勒级数(Taylor series) 一种特殊的函数级数.指某个与函数有特定关系的幂级数.若函数f在$x=a$的任意阶导数都存在,则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(其中$f^{(0)}(a)$表示$f(a)$)称为函数f在点a的泰勒级数,它的各项系数$f^{(n)}(a)/n!$ $(n=0,1,2,\cdots)$称为f在点a的泰勒系数.若$x-a$的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

是某个函数 f 在 $x-a$ 处的泰勒级数(其系数为 $f(x)$ 的泰勒系数时),则可以

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

表示.任给函数 f,它在 a 处的泰勒级数当 $x=a$ 时明显收敛于 $f(a)$,但在 $x\neq a$ 时不一定收敛,即使收敛也不一定收敛于 $f(x)$(例如由 $g(x)=e^{-x^{-2}}$ ($x\neq 0$), $g(0)=0$ 定义的函数 g,它在 $x=0$ 的泰勒级数各项都是 0,除 $x=0$ 外都不收敛于 $g(x)$).任给幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

总可以找到函数 f,使得 f 在 $x=a$ 处的泰勒级数就是这个幂级数,但是这样的 f 不惟一(若 g 是前面提到的函数,则 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒级数相同).

对于多元函数,若它在某一点的任意阶偏导数都存在,则它在这一点也有泰勒级数.以二元函数为例,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的泰勒级数是

$$f(0,0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2$$
$$+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}xy+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^n}x^n$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^{n-1}\partial y}x^{n-1}y+\cdots+\frac{1}{(n-k)!\ k!}$$
$$\cdot\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}x^{n-k}y^k+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial y^n}y^n+\cdots,$$

多元函数与其泰勒级数之间的关系也可记为"~",因此,上面 $f(x,y)$ 及其在 $(0,0)$ 的泰勒级数可记为:

$$f(x,y) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p+q=n}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}f(0,0)}{\partial x^p\partial y^q}x^p y^q.$$

若采用算子写法,则 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n$)与它的泰勒级数也可记为:

$$f(\boldsymbol{x}) \sim \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)^m f(0),$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$,

$$\boldsymbol{x}\cdot\nabla=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

(向量 $\boldsymbol{x}$ 与 ∇ 的内积),$(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)^m$ 为 $\boldsymbol{x}\cdot\nabla$ 的 m 次幂.泰勒级数是泰勒(Taylor,B.)于1715年发表的,当时未考虑其收敛性.此前于1694年,约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)发表过类似的结果.

麦克劳林级数(Maclaurin series) 函数在 $x=0$ 处的泰勒级数.它是牛顿(Newton,I.)的学生麦克劳林(Maclaurin,C.)于1742年给出的,用来证明局部极值的充分条件.他自己说明这是泰勒级数的特例,但后人却加了麦克劳林级数这个名称.

伯恩斯坦定理(Bernstein theorem) 关于泰勒级数收敛的一个定理.指由伯恩斯坦(Бернштейн,C.H.)给出,保证一元函数 f 的泰勒级数收敛于 f 的充分条件.设 f 及其各阶导数在 $[a,a+r]$ 上非负,则此定理断言:对 $x\in[a,a+r)$,泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

收敛于 $f(x)$.

解析函数(analytic function) 可以展开为幂级数的函数.若对于(一元)函数 f 及点 a 的某个邻域 I,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (x\in I)$$

则 f 称为 I 上的解析函数.函数 f 在开区间 I 上为解析函数的充分必要条件是,它在 I 上无穷次可微,且对任意 $x_0\in I$,存在正数 M 及 x_0 的某个邻域,使得对于这个邻域内的所有点 x 及所有非负整数 n,有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M^{n+1}n!$.由于泰勒展开式的惟一性,解析函数也就是具有正的收敛半径的幂级数的和函数.复变量的解析函数在复变函数论中意义重大.

收敛速度(velocity of convergence) 对数列收敛快慢程度的一种刻画.对两个收敛数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $a_n\to a$, $b_n\to b$.若 $a_n-a=o(b_n-b)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a}{b_n-b}=0,$$

则称 $\{a_n\}$ 比 $\{b_n\}$ 收敛快,或 $\{b_n\}$ 比 $\{a_n\}$ 收敛慢.例如,下列无穷小量(后)一个比(前)一个收敛得快:

$$\frac{1}{\log_a n}(a>1),\ \frac{1}{n^p}(p>0),\ \frac{1}{a^n}(a>1),\ \frac{1}{n!},\ \frac{1}{n^n}.$$

对定向发散数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $a_n\to+\infty$, $b_n\to+\infty$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0,$$

即 $a_n=o(b_n)$,则称 $\{a_n\}$ 比 $\{b_n\}$ 发散慢,或 $\{b_n\}$ 比 $\{a_n\}$ 发散快.把上述概念应用于级数,则有:对收敛级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots}{b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots}=0,$$

则称级数 $\sum a_n$ 比 $\sum b_n$ 收敛快;对发散的非负项级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=0,$$

则称级数 $\sum a_n$ 比 $\sum b_n$ 发散慢.对每一个收敛(发散)的非负项级数,总存在收敛(发散)得更慢的级数.这是由下列阿贝尔(1828)-迪尼(1867)定理表明的:给定正项级数 $\sum a_n$,令其部分和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $R_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 当 $p<1$ 时收敛,$p\geqslant 1$ 时发散;

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛,$p\leqslant 1$ 时发散.

有一些方法把一个级数变换为和数相同而收敛得更快的级数(以便简捷地求出其和的近似值),如分部求和法.类似于序列与级数,也可以对广义积分引进收敛或发散快慢的概念,并且分部积分法往往可以得到收敛或发散更快的积分.对数值计算,收敛速度十分重要.例如

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$
$$\approx 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$$
$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{4}{5^{2n-1}} - \frac{1}{239^{2n-1}}\right),$$

若用式中第一个级数(莱布尼茨级数)计算 π,为了精确到 10^{-7},需要 500 万项,而用第二个级数计算,只需 8 项.

比较判别法(comparison test) 判别正项级数收敛性的基本方法.其一般形式是:若 $a_n \geqslant 0, b_n \geqslant 0$,且 n 充分大时,有 $a_n \leqslant Cb_n\ (C>0)$ 或 $(a_{n+1}/a_n) \leqslant (b_{n+1}/b_n)$,则 $\sum b_n$ 收敛时 $\sum a_n$ 收敛,$\sum a_n$ 发散时 $\sum b_n$ 发散.它的极限形式是:若 $\overline{\lim}(a_n/b_n) < \infty$,且 $\sum b_n$ 收敛,则 $\sum a_n$ 收敛;若 $\underline{\lim}(a_n/b_n) > 0$,且 $\sum b_n = \infty$,则 $\sum a_n = \infty$.用作比较的级数 $\sum b_n$ 称为比较级数.若 $a_n \geqslant 0, a_n = O(n^{-p})(n \to \infty)$,则当 $p>1$ 时 $\sum a_n$ 收敛.比较判别法可移植到广义积分.

比较级数(comparison series) 见"比较判别法".

检根法(root test) 亦称柯西判别法.正项级数收敛与发散的一种判别法.对于正项级数 $\sum a_n$,若存在 q,使 n 充分大时

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1,$$

或等价地,

$$\rho = \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < 1,$$

则此级数收敛;$\rho>1$ 或存在子列 $\{n_k\}$,使

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1,$$

则此级数发散.检根法由柯西(Cauchy, A.-L.)于 1821 年建立.

柯西判别法(Cauchy test) 即"检根法".

检比法(ratio test) 亦称达朗贝尔判别法.利用正项级数前后项比的一种收敛与发散判别法.对于正项级数 $\sum a_n$,若存在 q,使 n 充分大时 $(a_{n+1}/a_n) \leqslant q < 1$,则此级数收敛;若 $(a_{n+1}/a_n) \geqslant 1$,则此级数发散.等价地,若 $\overline{\lim}(a_{n+1}/a_n) < 1$,则此级数收敛;若 $\underline{\lim}(a_{n+1}/a_n) > 1$,则此级数发散.当 $\underline{\lim}(a_{n+1}/a_n) = 1$ 时这个判别法失效.检比法是达朗贝尔(d'Alembert, J. le R.)于 1768 年发现的.它实质上是以几何级数作比较级数,具体应用比较判别法的结果.

达朗贝尔判别法(d'Alembert test) 即"检比法".

积分判别法(integral test) 以广义积分为工具,判别各项递减的正项级数收敛性的一种判别法.若在 $[1, +\infty)$ 上,f 是减函数,且 $f(x) \geqslant 0$,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛,则级数 $\sum f(n)$ 收敛,且

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + f(1).$$

积分判别法的几何形式由麦克劳林(Maclaurin, C.)于 1742 年提出,后来又由柯西(Cauchy, A.-L.)于 1827 年重新发现.

凝聚判别法(condensation test) 亦称柯西凝聚判别法.判别各项递减的正项级数的收敛性的方法.它是柯西(Cauchy, A.-L.)于 1821 年发现的.若 $\{a_n\}$ 是递减的非负数列,$p \geqslant 2$ 且为整数,则 $\sum a_n$ 收敛当且仅当 $\sum p^n a_{p^n}$ 收敛.常用 $p=2$ 的情形.

柯西凝聚判别法(Cauchy condensation test) 即"凝聚判别法".

拉比判别法(Raabe test) 判断正项级数 $\sum a_n$ 收敛性的一种方法.设 $R_n = n(1 - a_{n+1}/a_n)$.若存在 R,使 n 充分大时 $R_n \geqslant R > 1$,则 $\sum a_n$ 收敛;若 n 充分大时 $R_n \leqslant 1$,则 $\sum a_n$ 发散.这个判别法的极限形式是:若 $\underline{\lim} R_n > 1$,则 $\sum a_n$ 收敛;若 $\overline{\lim} R_n < 1$,则 $\sum a_n$ 发散.这个判别法由拉比(Raabe, J. L.)于 1832 年建立.

高斯判别法(Gauss test) 正项级数收敛性的实用判别法之一.若

$$a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{r}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

$p>1$,则:

1. $r>1$ 时 $\sum a_n$ 收敛,$r \leqslant 1$ 时 $\sum a_n$ 发散.

2. $r>0$ 时 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛,$r \leqslant 0$ 时 $\sum(-1)^n a_n$ 发散(结合 1 还可断定,$\sum(-1)^n a_n$ 当 $r>1$ 时绝对收敛,$0<r\leqslant 1$ 时条件收敛).上述等式还可以写成

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{r}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

结论相同.

高斯判别法包含拉比判别法为特例,它由高斯(Gauss, C. F.)于 1812 年研究超几何级数时建立.1856 年,由外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. T. W.)推广到复级数(将判别法中的 r 改为 r 的实部).

贝特朗判别法(Bertrand test) 判断正项级数收敛与发散的一种方法.设 $a_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$,

$$B_n = \ln n[n(1 - a_{n+1}/a_n) - 1].$$

若 $\underline{\lim} B_n > 1$,则级数 $\sum a_n$ 收敛;若 $\overline{\lim} B_n < 1$,则 $\sum a_n$

发散. 这是由贝特朗(Bertrand,J. L. F.)于 1842 年建立的.

库默尔判别法(Kummer test)　亦称迪尼-库默尔判别法. 正项级数收敛性判别法之一. 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是正数列,

$$K_n=b_n-b_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(\text{或 } b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\right).$$

1. 若$\underline{\lim}K_n>0$,则$\sum a_n$ 收敛.

2. 若 n 充分大时 $K_n\leqslant 0$ 且$\sum(1/b_n)$发散,或$\overline{\lim}K_n<0$,则$\sum a_n$ 发散.

检比法、拉比判别法、贝特朗判别法都是它的特例. 上述第一个结论是库默尔(Kummer,E. E.)于 1835 年在附加了条件 $a_nb_n\to 0$ 后建立的;1867 年,迪尼(Dini,U.)去掉了这个限制,并证明了第二个结论.

对数判别法(logarithmic test)　正项级数收敛性的一种判别法. 是以$\sum n^{-p}$,$\sum(n\ln^p n)^{-1}$为比较级数得到的判别正项级数$\sum a_n$ 收敛性的方法.

第一对数判别法:若存在 p,使 n 充分大时

$$L_n=\left(\ln\frac{1}{a_n}\right)\Big/\ln n\geqslant p>1,$$

或等价地,$\underline{\lim}L_n>1$,则$\sum a_n$ 收敛;若 n 充分大时 $L_n\leqslant 1$,则$\sum a_n$ 发散.

第二对数判别法:设 $L_n=|\ln(na_n)|/\ln\ln n$,结论同上.

莱布尼茨判别法(Leibniz test)　交错级数收敛的充分条件. 若$\{a_n\}$递减,$a_n\to 0$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

收敛,且对所有 $n\geqslant 1$,$0<(-1)^nR_n=|R_n|<a_{n+1}$,其中

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k.$$

这时,若设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k,$$

则当 n 为偶数时,$S_n<S<S_{n+1}$,n 为奇数时,$S_n>S>S_{n+1}$,其中 S 为这个级数的和.

狄利克雷判别法(Dirichlet test)　关于数项级数、函数项级数、广义积分和含参量广义积分的收敛与一致收敛性的四个判别法. 即:

1. 若实数列$\{b_n\}$单调地趋于 0,数项级数 $\sum a_n$ 的部分和序列有界,则 $\sum a_nb_n$ 收敛.

2. 设$\{f_n\}$与$\{g_n\}$是定义在集合 A 上的(一元)函数列,若对每个 $x\in A$,数列$\{g_n(x)\}$单调,g_n 一致收敛于 0,级数 $\sum f_n$ 的部分和序列一致有界(即存在 $M>0$,对所有 $x\in A$ 及所有正数 n,有 $|\sum f_n(x)|\leqslant M$),则 $\sum f_ng_n$ 在 A 上一致收敛.

3. 设 $f,g:[a,b)\to\mathbf{R}(b\leqslant+\infty)$. 若 $x\to b-$时,$g(x)$单调地趋于 0,函数

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\ \ (t\in[a,b))$$

有界,则广义积分

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

4. 设 $f,g:A\times[c,+\infty)\to\mathbf{R}$,若

$$\int_c^M g(x,y)\mathrm{d}y$$

是 x 与 M 的有界函数($x\in A$,$M\in[c,+\infty)$),关于任意 $x\in A$,g 对于 y 单调,且 $y\to+\infty$时,$f(x,y)$关于 x 一致收敛于 0(即对任意 $\varepsilon>0$,存在 $M_0>c$,对所有 $y>M_0$ 及所有 $x\in A$,有$|f(x,y)|<\varepsilon$),则

$$\int_c^{+\infty}f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$$

一致收敛.

对其他类型的广义积分也有类似的狄利克雷判别法. 上述第一个狄利克雷判别法首见于狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)于 1862 年发表的文章中. 后来由哈代(Hardy,G. H.)推广到一致收敛性情形.

阿贝尔判别法(Abel test)　收敛与一致收敛性的判别法之一. 指下面四个结论:

1. 若数项级数 $\sum a_n$ 收敛,数列$\{b_n\}$ 单调、有界,则 $\sum a_nb_n$ 收敛.

2. 设$\{f_n\}$ 与$\{g_n\}$ 是定义在集合 A 上的(一元)函数列,若级数 $\sum f_n$ 在 A 上一致收敛,对任意 $x\in A$,$\{g_n(x)\}$ 单调,$\{g_n\}$ 在 A 上一致有界,则 $\sum f_ng_n$ 在 A 上一致收敛.

3. 设 $f,g:[a,b)\to\mathbf{R}(b\leqslant+\infty)$,若广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

收敛,g 单调有界,则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

4. 设 $f,g:A\times[c,+\infty)\to\mathbf{R}$,若

$$\int_c^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}y$$

在 A 上一致收敛,$f(x,y)$有界,对固定的 $x\in A$,f 对于 y 在$[c,+\infty)$上单调,且当 $x\in A$,$y\in[c,+\infty)$时,$|f(x,y)|\leqslant M$,则

$$\int_c^{+\infty}f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$$

在 A 上一致收敛. 类似地,可建立其他类型广义含参量积分的一致收敛的阿贝尔判别法.

戴德金判别法(Dedekind test)　级数收敛的判

别法之一. 若级数 $\sum a_n$ 的部分和序列有界，$b_n \to 0$，$\sum|b_n - b_{n+1}|$ 收敛，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛. 相应地，有下列一致收敛性的判别法：若函数级数 $\sum f_n$ 的部分和序列一致有界，$\{g_n\}$ 一致收敛于 0，$\sum|g_n - g_{n+1}|$ 一致收敛，则函数项级数 $\sum f_n g_n$ 一致收敛.

杜・布瓦-雷蒙判别法(Du Bois-Reymond test) 级数收敛的判别法之一. 若级数 $\sum a_n$ 收敛，且 $\sum(b_n - b_{n+1})$ 绝对收敛，则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛. 此判别法由杜・布瓦-雷蒙(Du Bois-Reymond, P. D. G.)建立. 阿贝尔判别法是其特例.

***M* 判别法**(M-test) 外尔斯特拉斯 M 判别法的简称，函数项级数与含参数广义积分一致收敛的充分条件. 设 $\{f_n\}$ 是定义在集合 A 上的实(一元或多元)函数列，若存在非负实数列 M_n，使对所有 $x \in A$，有 $|f_n(x)| \leqslant M_n$，且 $\sum M_n$ 收敛，则 $\sum f_n$ 在 A 上(绝对)一致收敛. 设 $f: A \times [c, +\infty) \to \mathbf{R}$，若存在函数 $M: A \to \mathbf{R}$，使得对于充分大的 y 及所有 $x \in A$，有 $|f(x,y)| \leqslant M(y)$，并且

$$\int_c^{+\infty} M(y)\mathrm{d}y$$

收敛，则

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 A 上一致收敛. 满足上述条件的级数 $\sum M_n$ 称为级数 $\sum f_n$ 的优级数或控制级数，M 判别法则因此得名.

外尔斯特拉斯 *M* 判别法(Weierstrass M-test) 即"M 判别法".

控制级数(control series) 见"M 判别法".

优级数(majorant series) 见"M 判别法".

阿贝尔变换(Abel transformation) 亦称分部求和公式或和差变换. 和式的一种恒等变换. 指形如 $\sum a_k b_k$ 的和的恒等变形

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_{k+1} - b_k),$$

其中 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. 它的另一种形式是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k(b_{k+1} - b_k).$$

用阿贝尔变换可以研究形如 $\sum a_n b_n$ 的级数的收敛性或估计其部分和. 当 $b_n \to 0 (n \to \infty)$ 且 $\{S_n\}$ 有界时，阿贝尔变换可推广到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) S_n.$$

因此，阿贝尔变换还常用于把级数转换为另一个和数相同，但收敛速度更快的级数. 阿贝尔变换是阿贝尔(Abel, N. H.)于 1826 年引进的.

分部求和公式(partial summation formula) 即阿贝尔变换. 由于

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_{k+1} - b_k)$$

$(S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ 是分部积分公式的离散类似，故有此名.

阿贝尔不等式(Abel inequality) 亦称阿贝尔引理. 用阿贝尔变换对有限和 $\sum a_k b_k$ 的一种估计. 若 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 单调，$|S_k| \leqslant M (k = 1, 2, \cdots, n)$，这里 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|);$$

当 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 递减且非负时，

$$\left|\sum a_k b_k\right| \leqslant M b_1.$$

阿贝尔引理(Abel lemma) 即"阿贝尔不等式".

二项级数(binomial series) 二项式函数 $(1+x)^\alpha$ (α为常数)的泰勒展开式. 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

它的收敛半径为 1. 所以，$|x| < 1$ 时它收敛到 $(1+x)^\alpha$. 在收敛区间的端点，它的收敛情况是：$\alpha \geqslant 0$ 时，它在 $x = \pm 1$ 都收敛；$-1 < \alpha < 0$ 时，它只在 $x = 1$ 收敛；$\alpha < -1$ 时，它在 $x = \pm 1$ 都发散. 特别当 α 为非负整数时，二项式级数只有有限个非零项，它实际上成为初等代数中的牛顿二项式公式. 二项式级数是牛顿(Newton, I.)于 1665 年研究微积分时发现的. 它的收敛性的研究分别由阿贝尔(Abel, N. H.)于 1826 年(α 为实数)和外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))于 1856 年(α 为复数)完成.

调和级数(harmonic series) 各项倒数为等差数列的级数. 通常指数项级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

其各项倒数所成数列(不改变次序)为等差数列. 从第 2 项起，它的每一项是前后相邻两项的调和平均，故名调和级数. 推而广之，具有这种性质的每一个级数，即形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a+nd}$$

的级数也称为调和级数，其中 a, d 是常数. 调和级数是发散的，但其部分和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

增长极慢. 欧拉(Euler, L.)计算过 $S_{1000} = 7.48$，$S_{10^6} = 14.39$. S_n 与 $\ln n$ 是等价无穷大，更准确地，有 $S_n = \ln n + C + \varepsilon_n$，其中 $C = 0.577\ 215\cdots$ 是欧拉常数，$\varepsilon_n \to 0 (n \to \infty)$. 这是欧拉于 1740 年发现的. 更一般地，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} an^{-p} \ (a \neq 0)$$

称为广义调和级数，亦简称调和级数. 它的通俗名称是 p 级数. 当 $p>1$ 时收敛，$p\leqslant 1$ 时发散.

广义调和级数(generalized harmonic series) 见“调和级数”.

正弦函数的展开式(expansion of sine function) 正弦函数的幂级数展开式，即

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7!}{7!} + \cdots \ (x \in \mathrm{R}).$$

余弦函数的幂级数展开式为

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \ (x\in \mathrm{R}).$$

这两个级数是牛顿(Newton, I.)首先由正弦级数得到的，并于 1669 年公布. 后来的研究表明，它们可以作为三角函数的非几何定义的基础(参见本卷《平面三角》中的“三角函数的非几何定义”).

余弦函数的展开式(expansion of cosine function) 见“正弦函数的展开式”.

对数级数(logarithmic series) 即对数函数的幂级数展开式：

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \ (-1 < x \leqslant 1).$$

这个级数由梅卡托(Mercator, N.)发表于 1668 年出版的《对数技术》中，故又称梅卡托级数.

梅卡托级数(Mercator series) 即“对数级数”.

格雷果里级数(Gregory series) 反正切函数的幂级数展开式. 由格雷果里(Gregory, J.)于 1671 年得到

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots \ (|x|\leqslant 1).$$

由于这个级数在计算 π 的历史中起过重大作用，故以格雷果里命名. 由此得到的

$$\frac{\pi}{4}\approx 4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

称为梅钦公式. 早在 1706 年，梅钦(Machin, J.)用它计算 π 的值精确到了 100 位小数.

梅钦公式(Machin formula) 见“格雷果里级数”.

超几何级数(hypergeometric series) 亦称高斯级数. 几何级数的一种推广. 指形如

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

的幂级数. 它的收敛半径是 1. 对 $x=1$，当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时收敛，$\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时发散. 对 $x=-1$，当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时绝对收敛，$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时条件收敛，$\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ 时发散. 特别地，$F(-\alpha,\alpha,\alpha,-x)$ 就是二项级数. 超几何级数是由高斯(Gauss, C. F.)于 1812 年研究的，它大约是历史上第一个被严格而又详细地研究了在各种情况下的收敛性的级数. 用它可以定义超几何函数，是常见的特殊函数之一.

高斯级数(Gauss series) 即“超几何级数”.

朗伯级数(Lambert series) 一种特殊形式的级数. 形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

的函数项级数，其中 a_n，x 为实数. 若 $\sum a_n$ 收敛，则当 $x\neq\pm 1$ 时，该级数收敛；若 $\sum a_n$ 发散，则该级数的收敛域与幂级数 $\sum a_n x^n$ 相同. 当 $|x|<1$ 时，朗伯级数的和函数 φ 可表示成幂级数

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

其中

$$c_n = \sum_{k|n} a_k,$$

即 c_n 是下标为 n 的因数的那些 k 对应的 a_k 之和. 朗伯级数是朗伯(Lambert, J. H.)首先研究的. 它在某些数论问题中有用并被推广为复级数.

欧拉级数(Euler series) 各项为质数倒数的级数. 即级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n},$$

式中 p_n 为第 n 个质数. 欧拉(Euler, L.)于 1748 年证明了这个级数是发散的，同时给了质数集是无穷集的一个证明. 对它的部分和成立着渐近等式

$$\sum_{p_n\leqslant x}\frac{1}{p_n} = \ln\ln x + c + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

其中 $c=0.261\,497\cdots$

伯努利数(Bernoulli numbers) 见本卷《初等数论》同名条.

欧拉数(Euler numbers) 一列特殊的非负整数. 下列幂级数展开式中的 ε_n 称为欧拉数：

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n x^n}{n!}\ \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon_n x^n}{n!}\ \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

当 n 为奇数时，欧拉数为 0，当 n 为零或偶数时，ε_n 都是正整数，且个位数交错出现 1 和 5. 一些文献以

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n x^n}{n!}$$

定义 ε_n. 于是当 $n=4k+2$ 时，这样的 ε_n 与上述 ε_n 相差一个符号. 还有人把下列展开式中的数 e_n 称为欧拉数：

$$\frac{2}{e^x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n x^n}{n!}.$$

e_n 与 ε_n 间有下列关系

$$\varepsilon_{2n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k 2^k e_k.$$

通常记 $E_n = \varepsilon_{2n}$，并称为欧拉数. E_n 满足递推式

$$E_0 = 1,\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n}^{2k} E_{n-k} = 0.$$

此外，有

$$E_n = \frac{(2n)!\ 2^{2n+2}}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}},$$

$$B_n = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_{2n-1}^{2k-1} E_{n-k},$$

其中 B_n 是伯努利数（参见本卷《初等数论》同名条）. 欧拉数是欧拉（Euler, L.）于 1755 年引进的. E_1 到 E_{10} 的值如下：

$E_1 = 1$,
$E_2 = 5$,
$E_3 = 61$,
$E_4 = 1\ 385$,
$E_5 = 50\,521$,
$E_6 = 2\,702\,765$,
$E_7 = 199\,360\,981$,
$E_8 = 19\,391\,512\,145$,
$E_9 = 2\,404\,879\,675\,441$,
$E_{10} = 370\,371\,188\,237\,525$.

欧拉-麦克劳林公式（Euler-Maclaurin formula） 有关定积分的一种数值计算公式. 指下述公式

$$\int_0^m f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{f(0)+f(m)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f(k)\right] - \sum_{r=1}^{m-1} \frac{B_{2r}}{(2r)!}\left[f^{(2r-1)}(m) - f^{(2r-1)}(0)\right] - \frac{f^{(2m)}(\theta m) m B_{2m}}{(2m)!},$$

其中 $B_{2r}(1 \leqslant r \leqslant m)$ 为伯努利数（参见本卷《初等数论》同名条），$0<\theta<1$. 它建立了函数的积分与其导数的联系.

正切系数（tangent coefficients） 与正切函数幂级数展开式中的系数有关的一列数. 正切级数（即正切函数的幂级数展开式）

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n x^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

的各项系数中的 T_n 称为第 n 个正切系数. T_n 都是正整数，并且可以用伯努利数 B_n（参见本卷《初等数论》同名条）表示为

$$T_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}|B_{2n}|.$$

前 10 个正切系数是：

$T_1 = 1$,
$T_2 = 2$,
$T_3 = 16$,
$T_4 = 272$,
$T_5 = 7\ 936$,
$T_6 = 353\,792$,
$T_7 = 22\,368\,256$,
$T_8 = 1\,903\,757\,312$,
$T_9 = 209\,865\,342\,976$,
$T_{10} = 29\,088\,885\,112\,832$.

幂级数（power series） 指各项是正整数次幂的幂函数的函数项级数. 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

的级数，其中 a 与 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是常数，a_n 称为它的第 n 个系数. 幂级数的收敛域是以 $a \pm \rho$ 为端点的区间，这里

$$\rho = 1\Big/\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$$

称为该级数的收敛半径. 开区间 $(a-\rho, a+\rho)$ 称为收敛区间. 收敛域与收敛区间不一定相同，端点 $a \pm \rho$ 是否属于收敛域要单独判定. 当

$$\lambda = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

时，$\rho = +\infty$，收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$；当 $\lambda = +\infty$ 时，$\rho = 0$，收敛区间退化为一点 $x = a$. 若 ρ 为正实数，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

在其收敛区间内绝对收敛，在该区间的任一有界闭子集上一致绝对收敛，在 $[a+\rho, a-\rho]$ 外发散. 幂级数可在其收敛区间内逐项微分与积分任意次，并且每次得到的级数的收敛半径均相等（但在区间端点处的情况可能各异）. 在收敛区间端点 $a+\rho$（或 $a-\rho$）处，若幂级数收敛，则在 $[a, a+\rho]$（或 $[a-\rho, a]$）上该幂级数一致收敛，它的和函数在 $a+\rho$（或 $a-\rho$）处连续. 由此可见，具有正的（包括 $+\infty$）收敛半径的幂级数的和函数，在其收敛区间上是任意次可微的（其实还是解析的），且该级数就是其和函数的泰勒展开式. 反之，对于在点 a 任意次可微的函数，若其泰勒公式的余项在 a 的某邻域内处处极限为 0，则

此函数必为某一幂级数(实际上即其泰勒级数)之和函数. 在复变函数论中,幂级数理论更加丰富,可反映出和函数一些更为深刻的本质属性.

收敛区间(convergence interval) 见"幂级数".

收敛半径(radius of convergence) 幂级数收敛区间长度的一半(参见"幂级数"). 指与幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

的收敛性有关的一个数 $\rho(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$:当 $|x-a|<\rho$ 时,该级数绝对收敛;当 $|x-a|>\rho$ 时,该级数发散. ρ 的存在性由下列阿贝尔定理(1826)保证:若幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

当 $x=x_0\neq a$ 时收敛,则对满足 $r<|x_0-a|$ 的任何 r,当 $|x-a|\leqslant r$ 时,该级数一致绝对收敛. 柯西(Cauchy, A.-L.)于 1821 年提出,并由阿达马(Hadamard, J. (-S.))于 1892 年证明. ρ 是收敛半径,当且仅当

$$\rho=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

此式称为柯西-阿达马公式,它同时解决了 ρ 的存在性与计算问题(当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ 等于 0 或 $+\infty$ 时,此式中的 ρ 应分别理解为 ∞ 或 0). 当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

有意义(有限或无限)时,它也等于收敛半径 ρ.

幂级数的运算(operation of power series) 关于幂级数的运算问题,可进行下面的讨论. 为简单起见,考虑形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的幂级数,简记为 $\sum a_n x^n$. 设两个幂级数分别为

$$S(x)=\sum a_n x^n, \qquad (1)$$

$$T(x)=\sum b_n x^n, \qquad (2)$$

它们的收敛半径分别是 ρ_1,ρ_2. 其运算法则如下:

1. 加法. 级数 $\sum(a_n+b_n)x^n$ 称为级数(1)与(2)的和. 它的收敛半径 $\rho\geqslant\min\{\rho_1,\rho_2\}$. 在级数(1),(2)的公共收敛域上,$\sum(a_n+b_n)x^n=\sum a_n x^n+\sum b_n x^n$. 对可数个幂级数 $\sum b_{nm}x^n(m=0,1,2,\cdots)$,若它们都在 x_0 处绝对收敛,则它们的和

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_{nm}x^n\Big)$$

也在 x_0 处绝对收敛,且等于

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_{nm}\Big)x_0^n.$$

2. 数乘. 对 $c\neq0$, $c\sum a_n x^n=\sum ca_n x^n$,收敛半径仍为 ρ_1,收敛域与 $\sum a_n x^n$ 相同.

3. 乘法. 称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n$$

为级数(1)与(2)的积. 在(1),(2)的公共收敛域上,$\sum c_n x^n=S(x)T(x)$. 它的收敛半径 $\rho\geqslant\min\{\rho_1,\rho_2\}$. 即使 $\rho_1=\rho_2$,ρ 也可以更大. 例如,若 $a_0=b_0=0, a_1=1, a_n=2(n>1), b_n=1/3(2(-1)^{n+1}-2^{-n})(n\geqslant1)$,则 $\rho_1=\rho_2=1$, $\sum c_n x^n=\sum 2^{-n}x^n$ 的收敛半径为 2. 幂级数的加(减)法与乘法满足交换、结合、分配律,所有有正收敛半径的幂级数的集合是环.

4. 除法. $\sum a_n x^n/\sum b_n x^n=\sum d_n x^n$,若 $b_0\neq0, \rho_1>0, \rho_2>0$,则其中 d_n 由无穷方程组

$$\sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k}=a_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

惟一地确定. 商级数也有正的收敛半径.

5. 反演. 见"幂级数的反演".

6. 微分. 对 $|x|<\rho_1, k=1,2,\cdots$,

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}(a_n x^n)^{(k)}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

右端的级数的收敛半径仍为 ρ_1. 当这个级数在 $x=\pm\rho_1$ 处收敛时,$S^{(k)}(\pm\rho_1)$ 也存在,且上述等式对 $x=\pm\rho_1$ 也成立.

7. 积分. 对 $|x|<\rho_1$,

$$\int_0^x S=\int_0^x\Big(\sum a_n t^n\Big)\mathrm{d}t=\sum\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

右端的级数的收敛半径仍为 ρ_1. 可以继续积分任意次,且每次得到的级数的收敛半径仍为 ρ_1.

柯西-阿达马公式(Cauchy-Hadamard formula) 见"收敛半径".

阿贝尔极限定理(Abel limit theorem) 关于幂级数的和函数性质的重要定理之一. 它断言:只要幂级数在其收敛区间的端点收敛,该级数的和函数就在该点(单侧)连续. 它说明,幂级数的和函数在该级数的收敛域上处处是连续的(参见"收敛半径").

幂级数的反演(inversion of a power series) 幂级数的一种运算. 即从一个函数的幂级数表示(展开式)出发,直接求其反函数的幂级数展开式的过程. 设

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \qquad (1)$$

$a_1\neq0$,则反函数

$$x = f^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (y-b)^n, \qquad (2)$$

其中

$$b = f(a) = a_0, b_0 = a,$$

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(\frac{t-a}{f(t)-b}\right)^n\right]_{t=a} \quad (n \geqslant 1).$$

级数(2)称为级数(1)的反演.一般地,对任一实解析函数 φ,有

$$\varphi(f^{-1}(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (y-b)^n, \qquad (3)$$

其中 b, b_0 同上,

$$c_n = \frac{1}{n!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left[\varphi'(t)\left(\frac{t-a}{f(t)-b}\right)^n\right]\right\}_{t=a} (n \geqslant 1).$$

以上结论对复幂级数也成立.反演问题首先由拉格朗日(Lagrange, J.-L.)于 1770 年解决 $b=0$ 的特殊情况时提出,故幂级数(2),(3)称为拉格朗日级数.幂级数(3)又称布尔曼-拉格朗日级数,它是布尔曼(Burmann, H.)于 1799 年得到的.幂级数的反演首先由牛顿(Newton, I.)于 1660 年形式地使用.他由对数级数反演得到指数函数的级数展开式,由反正弦的级数展开式反演得到正弦函数展开式.

拉格朗日级数(Lagrange series)　见“幂级数的反演”.

布尔曼-拉格朗日级数(Burmann-Lagrange series)　见“幂级数的反演”.

一致逼近(uniform approximation)　无穷级数的基本概念之一.即一类均匀的逼近.设 $\mathscr{F}$ 是集合 A 上某类函数的集合,$f: A \to \mathbf{R}$,若对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $g \in \mathscr{F}$,使

$$\sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 可由 $\mathscr{F}$ 中的函数一致逼近.

外尔斯特拉斯逼近定理(Weierstrass approximation theorem)　有关连续函数可用多项式逼近的定理.指下列两个结果:

1. 定义在闭区间上的连续实函数是某个实系数多项式序列的一致极限.即:若函数 $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ 连续,则存在多项式序列 $\{P_n\}$,使它在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.换句话说,对任意 $\varepsilon > 0$,存在多项式 P,使对所有 $x \in [a,b]$,有 $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$,亦即闭区间上的连续函数可由多项式一致逼近.

2. 以 2π 为周期的连续函数可由形如

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \ (a_k, b_k \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$$

的三角多项式一致逼近.

第一个定理是外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. T. W.)于 1885 年建立的.它是数学分析中著名定理之一.它已由斯通(Stone, M. H.)于 1935 年推广(参见《数学辞海》第三卷《函数逼近论》有关条目).

伯恩斯坦多项式(Bernstein polynomial)　逼近连续函数的一系列多项式.可在外尔斯特拉斯逼近定理的构造性证明中使用.设函数 $f: [0,1] \to \mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$),对于 $n \in \mathbf{N}_+$,

$$B_n(f,x) = B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} \ (x \in [0,1]).$$

$B_n(f,x)$ 称为 f 的 n 阶伯恩斯坦多项式.它的次数不超过 n.它是由伯恩斯坦(Бернштейн. С. Н.)于 1912 年给出的.下列伯恩斯坦定理成立:若 f 在 $[0,1]$ 上连续,则在 $[0,1]$ 上 $B_n(f)$ 一致收敛于 f.一般地,若导数 $f^{(k)}$ $(k \in \mathbf{N})$ 在 $[0,1]$ 上连续,则在 $[0,1]$ 上 $B_n(f)$ 的 k 阶导数一致收敛于 $f^{(k)}$.若 $x_0 \in (0,1)$ 是 f 的第一类间断点,则

$$B_n(f, x_0) \to \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} \ (n \to \infty).$$

伯恩斯坦多项式有多种推广.

平均收敛(convergence in mean)　亦称均方收敛.平均平方误差趋于 0 意义下的收敛.对于区间 $[a,b]$ 上的可积函数 f 和 g,数

$$\left(\int_a^b (f-g)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

称为 f 与 g 的平均平方距离,或以 g 近似代替 f 的均方误差,记为 $\| f-g \|_2$.对 $[a,b]$ 上的可积函数 $f_n (n=1,2,\cdots)$ 与 f,若 $\| f_n - f \|_2 \to 0$,即当 $n \to \infty$

$$\int_a^b (f-f_n)^2 \mathrm{d}x \to 0,$$

则称序列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上平均收敛于 f,记为

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{2}{=} f,$$

也有记为 $\mathrm{l.i.m.} f_n = f$ 的.在 $[-\pi, \pi]$ 上,对于任何(黎曼)可积函数,它的傅里叶级数的部分和序列平均收敛于它.一致收敛蕴含平均收敛,反之不然.平均收敛与逐点收敛是互不蕴含的.关于平均收敛的重要性,泛函分析与实变函数论中有详细研究.

均方收敛(convergence in mean)　即“平均收敛”.

平均平方距离(square distance in mean)　见“平均收敛”.

平均逼近(approximation in mean)　在平均收敛意义下的逼近.设 $\mathscr{F}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的某类函数的集合,$f: [a,b] \to \mathbf{R}$,若对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $g \in \mathscr{F}$,使

$$\| f-g \|_2 = \left[\int_a^b (f-g)^2\right]^{1/2} < \varepsilon,$$

则称 f 可由 $\mathscr{F}$ 中的函数平均逼近.例如,可积函数可由多项式平均逼近.这个概念可以以明显的方式

推广到多元函数.

二重序列(double sequence)　定义在N×N上的函数.常以$\{a_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$或简单地以$\{a_{mn}\}$表示.随着函数在数集、函数集或点集中取值的不同,可以有二重数列、二重函数列或二重点列等概念.下面考虑二重数列$\{a_{mn}\}$.若对任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,使当$m,n>N$时,$|a_{mn}-a|<\varepsilon$,其中a是常数,则称a是$\{a_{mn}\}$的二重极限,$\{a_{mn}\}$收敛,记为

$$a=\lim_{m,n\to\infty}a_{mn}.$$

类似地,可以得到

$$\lim_{m,n\to\infty}a_{mn}=\pm\infty(\infty)$$

的定义.通常的数列的一些性质可以对二重数列建立.二重数列有两个二次极限

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}a_{mn})\text{与}\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty}a_{mn}).$$

作为函数的二重极限与二次极限的特例,二重序列的这两个二次极限与二重极限

$$\lim_{m,n\to\infty}a_{mn}$$

之间有如下关系:若

$$\lim_{m,n\to\infty}a_{mn}=a(\text{可以是}\pm\infty),$$

又对固定的m,

$$\lim_{n\to\infty}a_{mn}$$

存在(有限),则

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}a_{mn})=a.$$

反之,若

$$\lim_{n\to\infty}a_{mn}=b_m$$

关于m一致成立(即对任意$\varepsilon>0$,存在正整数N,当$n>N$时,对所有正整数m,有$|a_{mn}-b_m|<\varepsilon$),且

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}a_{mn})\text{即}\lim_{m\to\infty}b_m$$

存在(有限),则二重极限

$$\lim_{m,n\to\infty}a_{mn}$$

也存在且等于

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}a_{mn}).$$

当对固定的m,a_{mn}对于n递增,且对固定的n,a_{mn}对于m递增时,二重极限与两个二次极限中若有一个存在,则另两个也存在,并且彼此相等.

二重数列(double range of number)　见“二重序列”.

二重函数列(double range of function)　见“二重序列”.

二重点列(double range of points)　见“二重序列”.

叠级数(iterated series)　亦称累级数.各项均为级数的级数.即表达式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\Big),\tag{1}$$

其中$\{a_{mn}\}$为二重序列.通常也把上述表达式记为

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn},$$

或简单地记为$\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}a_{mn}$.类似地,级数$\sum\limits_{n}\sum\limits_{m}a_{mn}$也是叠级数.对叠级数,可以用普通级数的有关概念来定义其收敛性及其他概念.例如,对于(1),若对每个m,级数$\sum a_{mn}$收敛于b_m,且级数$\sum b_m$收敛,则称$\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}a_{mn}$收敛,其和为$\sum b_m$的和.若$\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}|a_{mn}|$收敛,则称$\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}a_{mn}$绝对收敛.从一个叠级数收敛不能得到由同一个二重序列导出的另一叠级数收敛,即使都收敛也不一定彼此相等.例如,按如下定义a_{mn}:$n=m+1$时,$a_{mn}=1$,$m=n+1$时,$a_{mn}=-1$,对其他m与n,$a_{mn}=0$,则相应两个叠级数分别收敛于1与-1.当$a_{mn}\geqslant0(m,n\in\mathrm{N})$时,

$$\sum_{m}\sum_{n}a_{mn}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(k)}(\text{可以是}+\infty),$$

其中φ是N到N×N上的任意一一对应.又,若二重级数(1)收敛,对每个m,级数$\sum a_{mn}$也都收敛,则$\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}a_{mn}$收敛,且

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}=\sum_{m}\sum_{n}a_{mn}.$$

使对应同一二重序列的叠级数相等的其他条件见“二重级数”.

累级数(repeated series)　即“叠级数”.

二重级数(double series)　二重序列的形式和.设$\{a_{mn}\}$是二重序列,把它的项按任意次序排列并以加号连结得到的表达式称为二重级数,记为

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn},\tag{1}$$

这里m,n各自独立地取正整数1,2,3,…数

$$S_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

称为(1)的部分和.若二重极限

$$\lim_{m,n\to\infty}S_{mn}=S(\text{有限}),$$

则称该二重级数收敛,S为它的和,记为

$$S=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}.$$

当这样的S不存在时,称这个二重级数发散.若

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|a_{mn}|$$

收敛,则称(1)绝对收敛.类似于通常的级数(相对于二重级数,通常的级数称为单级数),可定义二重级数的条件收敛性.单级数的一些基本性质仍为二重级数所保持.例如,非负项二重级数收敛当且仅当其部分和有界,二重级数收敛的必要条件是$a_{mn}\to0$($m,n\to\infty$),绝对收敛的二重级数必收敛(参见“绝对收敛级数”)等.对二重函数项级数,也可如函数项

级数那样引进一致收敛概念，并得到相应的柯西准则、M 判别法等. 设 φ 是正整数集 N_+ 到 $N_+\times N_+$ 上的一一对应，则对二重级数(1)，可以得到级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{\varphi(k)}.$$

φ 称为二重序列 $\{a_{mn}\}$ 到序列 $\{a_{\varphi(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 的重排，或二重级数(1)到单级数 $\sum a_{\varphi(k)}$ 的重排. 若级数

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}|a_{mn}|,\ \sum_{m}\sum_{n}|a_{mn}|,\ \sum_{n}\sum_{m}|a_{mn}|,\ \sum_{k=1}^{\infty}|a_{\varphi(k)}|$$

之一收敛，则：

1. 另三个也收敛，且它们的和相等(设为 S).

2. $\sum\limits_{m}\sum\limits_{n}a_{mn}$ 与 $\sum\limits_{n}\sum\limits_{m}a_{mn}$ 均绝对收敛于 S($\sum\limits_{m}a_{mn}$ 与 $\sum\limits_{n}a_{mn}$ 也绝对收敛).

在一些文献中，上述结论被称为主要重排定理. 由此可知，绝对收敛的二重级数的两个叠级数也绝对收敛，有同一个和. 由于二重级数的项的排列次序不惟一以及多种研究目的，因此，还有多种定义二重级数的部分和的方式，相应地也就有了不同的定义二重级数的和与收敛性的方式.

主要重排定理(main rearrangement theorem) 见“二重级数”.

二重级数的希尔伯特定理(Hilbert theorem on double series) 有关二重级数收敛的一个定理. 该定理断言：若级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2 \text{ 与 } \sum_{n=0}^{\infty}b_n^2$$

收敛，则二重级数

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m\pm n}$$

收敛，这里，约定当 $m=n$ 时，相应的项为 0.

重序列(multiple sequence) 二重序列的推广. 即定义在 $N\times N\times\cdots\times N$ 上的 n 元函数序列. 当 $n\geqslant 2$ 时，称为(多)重序列. $n=1$ 时，即通常的序列也称为简单序列. 有关多重数列的概念、性质，与二重数列类似.

简单序列(simple sequence) 见“重序列”.

重级数(multiple series) 重序列的形式和. 由 m 重序列 $a_{n_1n_2\cdots n_m}$ 构成的形如

$$\sum_{n_1,\cdots,n_m=1}^{\infty}a_{n_1n_2\cdots n_m}$$

的表达式称为 m 重级数，这里 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 各自独立地取 1,2,3,…，参见“二重级数”，该条中的各种部分和容易推广到 $m\geqslant 3$ 时的 m 重级数.

二重幂级数(double power series) 形如

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}(x-a)^m(y-b)^n$$

的二重级数. 二元泰勒级数是二重幂级数的重要例子(参见“泰勒级数”). 虽然二重幂级数有不少结论是与通常的幂级数平行的，但无论它的形式还是证明都要复杂得多. 例如，二重幂级数的收敛域就已经不一定是 $|x-a|<\rho$, $|y-b|<r$ 这样的形式.

无穷乘积(infinite product) 把无穷序列的各项用乘号连结得到的表达式. 设 $\{u_n\}$ 为一序列，$u_1u_2\cdots u_n\cdots$ 或记为

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n, \tag{1}$$

称为无穷乘积. u_n 称为这个无穷乘积的第 n 个因子. 积 $P_n=u_1u_2\cdots u_n$ 称为该无穷乘积的第 n 个部分积. 如果所有 $u_n>0$，形式地取对数，将有

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n=\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\ln u_n\Big).$$

故对无穷乘积的研究与无穷级数密切相关. 下面关于无穷乘积收敛与发散的定义就是为了与无穷级数的相应概念协调而规定的. 对于无穷乘积(1)，若

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P$$

存在(有限)，则当 $P\neq 0$，或虽然 $P=0$，但至多只有有限个 u_n 为 0，并且去掉这些因子后得到的无穷乘积，其部分积序列有非零极限时，无穷乘积(1)称为收敛的；否则称为发散的. 例如，

$$\prod_{n=1}^{\infty}2^{-n}$$

发散于 0. 一些文献限定 $u_n\neq 0$，就不会出现上面后一种情况. 当(1)收敛于 P 时，记为

$$\prod_{n=1}^{\infty}u_n=P,$$

并称 P 为该乘积的值. 对无穷乘积，有下列柯西准则：无穷乘积(1)收敛，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使 $m>n>N$ 时，$|u_{n+1}\cdots u_m-1|<\varepsilon$. 若无穷乘积(1)收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=1.$$

通常把无穷乘积(1)改写成

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n), \tag{2}$$

而(2)的收敛性与 $\sum a_n$ 的收敛性密切相关. 例如，若

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$$

收敛，则称无穷乘积(2)绝对收敛. 这当且仅当 $\sum a_n$ 绝对收敛. 对各个因子为函数的无穷乘积，可以建立一致收敛概念及有关命题. 例如，为了交换极限号与无穷乘积记号，有下列结果：若对所有 n，

$$\lim_{m\to\infty}a_{nm}=A_n\text{(有限)},$$

且对任意 m，有 $|a_{nm}|\leqslant M_n<\infty$，$\sum M_n$ 收敛，则

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_{nm})=\prod_{n=1}^{\infty}(1+A_n).$$

第一个用到无穷乘积的人可能是韦达(Viéte,F.),他于1579年(另一说1593年)发现了下列结果

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

欧拉(Euler,L.)于1742(一说1748)年得到了第一批用无穷乘积表示的函数,如

$$\sin x=x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

类似这种表示在复变函数论中用得很多.

部分积(partial product) 见"无穷乘积".

余积(remainder product) 无穷乘积的一部分. 指无穷乘积去掉前有限个因子的结果. 对无穷乘积 $\prod u_n$,则

$$\prod_{n>m}u_n=\prod_{k=1}^{\infty}u_{m+k}$$

称为它的余积. 若所有 $u_n\neq 0$,则 $\prod u_n$ 收敛,当且仅当它的余积收敛. 若 $\prod u_n$ 收敛,则

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n>m}a_n=1.$$

三角级数(trigonometric series) 各项为余弦和正弦函数的级数. 形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的级数,其中 a_0 和 $a_n,b_n(n=1,2,\cdots)$ 是常系数时,称为三角级数. 一般只考虑它在任一 2π 长的区间(例如$[-\pi,\pi)$或$[0,2\pi)$)上的性态. 因为,欧拉公式给出 $e^{it}=\cos t+i\sin t$,所以,三角级数也可写成复数形式,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx},$$

其中 $a_n,b_n,c_n(b_0\equiv 0)$ 有关系 $c_n=\bar{c}_{-n}=(a_n-ib_n)/2$($\bar{c}_n$ 与 c_n 共轭,i 为虚数单位).

三角级数是研究周期函数和周期现象(光、电以及机械振动等)的有力工具. 18世纪的许多杰出数学家,如欧拉(Euler,L.)、达朗贝尔(d'Alembert,J. le R)、丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等人,由求解弦振动问题最早导致了用三角级数表示函数的研究,得到过一些函数的三角级数展开式,但是对许多基本问题(如怎样的函数能展开,展开式的系数如何确定)却未搞清,甚至涉及一些数学分析的基本概念(如函数、收敛等),直到19世纪初,由于傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)的工作才开始有重大的转折. 函数等分析学的基本概念也是这时开始澄清的. 此后研究的三角级数,主要是现在所谓的傅里叶级数,它的理论和应用广泛涉及纯数学的许多分支及自然科学和工程技术方面的许多部门. 系统研究它的数学分支是调和分析.

正交函数系(orthogonal system of functions) 一类特殊的函数系. 若 $\Phi=\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\}$ 是以区间$[a,b]$为公共定义域的函数列(函数系),每个 $\varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上可积,且满足

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=0\text{ 及}\int_a^b(\varphi_n(x))^2\mathrm{d}x\neq 0$$

$(n,m=1,2,\cdots,n\neq m)$,则 Φ 称为$[a,b]$上的正交函数系. 如果还有

$$\int_a^b(\varphi_n(x))^2\mathrm{d}x=1\ (n=1,2,\cdots),$$

则 Φ 称为规范正交函数系. 例如,

$$\left\{\frac{1}{2l},\frac{1}{l}\cos\frac{\pi}{l}x,\frac{1}{l}\sin\frac{\pi}{l}x,\frac{1}{l}\cos\frac{2\pi}{l}x,\right.$$
$$\left.\frac{1}{l}\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\frac{1}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x,\frac{1}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots\right\}$$

是$[-l,l]$上的规范正交函数系,当 $l=\pi$ 的特殊情形时,则称它为基本三角函数系. 以正交系为基础作出的函数项级数,即形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n(x)$$

(其中 C_n 为常数,$x\in[a,b]$,$\{\varphi_n(x)\}$为$[a,b]$上的正交函数系),称为正交级数. 例如,任何三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

都是$[-\pi,\pi]$上的正交级数. 正交函数系线性无关,因此,在一定条件下,常用作某些函数空间的基.

规范正交函数系(orthonormal system of functions) 见"正交函数系".

基本三角函数系(basic trigonometric function system) 见"正交函数系".

正交级数(orthogonal series) 见"正交函数系".

傅里叶级数(Fourier series) 一种重要的三角级数. 若函数 f 在区间$[-\pi,\pi]$上可积,由它得出的数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

称为 f 的傅里叶系数,而以它们为系数的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为 f 的傅里叶级数. f 与其傅里叶级数的关系用"～"表示:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

若令 $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,则傅里叶级数也可写成复的形式:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

其中 c_n 称为 f 的复的傅里叶系数. 傅里叶级数是特殊的三角级数,但不是任意三角级数都能成为某个可积函数的傅里叶级数. 例如,级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx + \sin nx)$$

就不是傅里叶级数. 傅里叶级数有许多优良的性质,诸如,只要是可积函数,就有对应的傅里叶级数;连续可微函数的傅里叶级数必定逐点收敛;二阶连续可微函数的傅里叶级数必定是其傅里叶展开式(即收敛到由它求得该级数的那个函数);每个傅里叶级数都可以逐项积分;傅里叶级数在一点的收敛性,只与函数的局部性态有关;可积函数的傅里叶级数甚至可能处处发散,却一定平均收敛;在所有同阶三角多项式中,傅里叶级数的部分和代替相应函数的均方误差最小. 另一方面,傅里叶级数本身在应用中有明显的实际意义(比如代表振动按不同频率的分解),又有许多理论问题值得研究. 这些都是使它理论丰富而应用广泛的重要原因. 在数学的历史上,傅里叶级数理论的发展,对一些新的数学分支的建立和数学分析基本概念的澄清,曾起过重大的推动作用. 如现在通用的狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)的函数定义,黎曼积分的定义以及外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))的处处连续而不可微函数的例子都是在有关傅里叶级数的研究中作出的;勒贝格积分理论和康托尔的集合论的创立更是与傅里叶级数理论的发展分不开的. 因此,在傅里叶级数理论基础上发展起来的傅里叶分析(调和分析)成为分析数学的核心.

傅里叶系数(Fourier coefficients)　见"傅里叶级数".

傅里叶展开式(Fourier expansion)　函数用三角级数表示的形式. 即一个函数的傅里叶级数在它收敛于此函数本身时的一种称呼. 若函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

处处收敛于 $f(x)$,则此级数称为 $f(x)$ 的傅里叶展开式. 这时有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

根据狄利克雷判别法等,连续且分段可微函数、连续的分段单调函数、可微且导数可积的函数等都有傅里叶展开式. 它比有泰勒展开式的条件弱得多. 这是傅里叶级数理论有重要意义和广泛应用的原因.

广义傅里叶级数(generalized Fourier series)　特殊的正交级数. 若 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是区间 $[a,b]$ 上的正交函数系,则对于在 $[a,b]$ 上可积的函数 f,设

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b (\varphi_n(x))^2 \mathrm{d}x},$$

正交级数 $\sum c_n \varphi_n(x)$ 称为 f 关于正交系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的广义傅里叶级数,在不致混淆时,简称傅里叶级数. 由上述公式确定的 c_n 称为(广义)傅里叶系数. 例如,若函数 f 以 $2l$ 为周期,在 $[-l,l]$ 上可积,则对

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

就是 $f(x)$ 关于正交系

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cdots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \cdots\right\}$$

的广义傅里叶级数. 若令 $F(x) = f(lx/\pi)$,则当 f 在 $[-l,l]$ 上可积时,F 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,且 f 的上述广义傅里叶级数,就是 F 的通常傅里叶级数. 广义傅里叶级数的许多性质和收敛判别法,与通常傅里叶级数的有关结论都是互相对应的.

黎曼局部化原理(Riemann localization principle)　反映傅里叶级数的一个重要性质定理. 该原理表述为:若 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期,在 $[-l,l]$ 上可积,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

是 $f(x)$ 的傅里叶级数的部分和 $(n=1,2,\cdots)$,则对

$$x \in \mathbf{R}, \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

当且仅当存在 $\sigma \in (0,l)$,使

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sigma} \frac{\sin nt}{t}(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x))\mathrm{d}t = 0.$$

这是黎曼(Riemann, (G. F.)B.)于 1853 年证明的. 它说明函数 f 的傅里叶级数在某点的敛散性只与 f 在该点附近的性质有关.

贝塞尔不等式(Bessel inequality)　关于傅里叶系数平方和的估计. 对 $[-l,l]$ 上的基本三角函数系

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cdots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \cdots$$

及 f 的傅里叶系数 a_n, b_n,贝塞尔不等式为

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

这个不等式是贝塞尔(Bessel, F. W.)于 1828 年在证明帕塞瓦尔等式时得到的.

帕塞瓦尔恒等式(Parseval identity)　表示可

积函数与其傅里叶系数之间关系的恒等式. 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, $a_n, b_n(n=0,1,\cdots,b_0=0)$ 为 f 的傅里叶系数(关于基本三角函数系的), 则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\mathrm{d}x$$

称为帕塞瓦尔(恒)等式. 它由帕塞瓦尔(Parseval, C. M. -A.)于 1805 年提出但未证明. 对于黎曼可积函数情形是李亚普诺夫(Ляпунов, A. M.)于 1896 年证明的. 1906 年, 勒贝格(Lebesgue, H. L.)对于勒贝格平方可积函数给出证明. 若 $g(x)$ 是另一在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数, $a_n', b_n'(n=0,1,2,\cdots)$ 是它的傅里叶系数, 则用上述恒等式可以证明, 它在形式上可推广成(实质上与前式等价)

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a_0a_0'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na_n'+b_nb_n').$$

它还可以推广到正交函数系的情形, 但应补充要求该正交系完备.

傅里叶级数的逐项积分(term by term integration for Fourier series)　傅里叶级数的一种运算. 可积周期函数的傅里叶级数, 不管是否收敛, 总可逐项积分, 且所得到的级数一致收敛. 即若

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则对 $x\in\mathbf{R}$,

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t,$$

且右边的级数在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

特别地, 对任意 $a,b\in\mathbf{R}$, 有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0}{2}(b-a)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}(\sin nb-\sin na)-\frac{b_n}{n}(\cos nb-\cos na)\right].$$

傅里叶级数的逐项微分(term by term differentiation for Fourier series)　傅里叶级数的一种运算. 若 f 是以 2π 为周期的连续函数且除有限个点外可微, 又导函数 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则 f' 的傅里叶级数可由 f 的傅里叶级数逐项微分得到, 即若

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则 $$f'\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

若 f' 分段可微, 则逐项微分后的级数收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)=\frac{1}{2}(f'(x+)+f'(x-)).$$

黎曼-勒贝格引理(Riemann-Lebesgue lemma)　亦称黎曼引理. 关于傅里叶系数的一个定理. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

它的复数形式是

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x=0.$$

这个引理说明, 可积函数的傅里叶系数极限为 0, 它给出一个三角级数成为傅里叶级数的必要条件. 这个引理先由黎曼(Riemann, (G. F.)B.)对黎曼积分证明, 后来由勒贝格(Lebesgue, H. L.)于 1903 年对勒贝格积分证明.

傅里叶级数的收敛性判别法(convergence tests for Fourier series)　保证傅里叶级数收敛的充分条件. 下面仅列出几个经典的或实用的判别法:

1. 若尔当判别法. 若 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界变差函数, 则它的傅里叶级数逐点收敛于 $[f(x+0)+f(x-0)]/2$, 特别在 f 的连续点 x 处收敛于 $f(x)$. 若 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续, 则它的傅里叶级数在 $(-\pi,\pi)$ 的任何闭子区间上一致收敛于 f. 这个判别法由若尔当(Jordan, M. E. C.)于 1881 年建立. 它的特例是狄利克雷判别法: 若 f 在 $[a,b]$ 上至多有有限个极大或极小值, 且至多有有限个间断点(有时合称为狄利克雷条件), 则结论同上. 狄利克雷判别法是历史上关于傅里叶级数收敛性的第一个判别法, 由狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)于 1829 年证明.

2. 迪尼判别法. 若 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 又 $x_0\in[-\pi,\pi]$, $\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S$, S 为某一实数, 且存在 $\sigma\in(0,\pi)$, 使

$$\int_0^{\sigma}\frac{|\varphi(t)|}{t}\mathrm{d}t$$

收敛, 则 f 的傅里叶级数在 x_0 处收敛于 S. 这一结论是由迪尼(Dini, U.)于 1880 年证明的.

傅里叶级数的若尔当判别法(Jordan tests for Fourier series)　见"傅里叶级数的收敛性判别法".

傅里叶级数的狄利克雷判别法(Dirichlet tests for Fourier series)　见"傅里叶级数的收敛性判别法".

傅里叶级数的迪尼判别法(Dini tests for Fourier series)　见"傅里叶级数的收敛性判别法".

发散级数(divergent series)　指不收敛的级数. 一个数项级数如果不收敛, 就称为发散, 此级数称为发散级数. 一个函数项级数如果在(各项的定义域内)某点不收敛, 就称在此点发散, 此点称为该级数的发散点. 总之, 发散是收敛的否定. 按照通常级数收敛与发散的定义, 发散级数是没有意义的. 然而为了实际的需要, 可以确立一些法则, 对某些发散级数求它们的"和", 或者说某个发散级数在特定的极

限过程中，逐渐逼近某个数（参见“级数的求和”与“渐近级数”）.

发散点(divergent point)　见“发散级数”.

级数的求和(summation of series)　赋予某些发散级数以“和”的法则. 按照柯西的定义，收敛级数以其部分和的极限为和，这种和是有限（项的）和的直接推广，可称为柯西和. 按照这种定义，发散级数是没有和的，从而只是没有实际意义的数学记号而已. 然而数学的发展表明，完全排斥发散级数是不恰当的. 例如，函数 $1/(1+x^2)$ 在 $x=\pm1$ 时是有意义的，而在其泰勒展开式

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

中令 $x=\pm1$ 却得到发散级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n,$$

这说明它应该是有“和”的. 再如连续函数的傅里叶级数可能是发散的，但其前 n 个部分和的算术平均当 $n\to\infty$ 时却总有确定极限，这说明这些级数是可以有“和”的. 在这些情况下，人们需要也可以对某些发散级数的“和”作出合理的解释. 于是出现这样一些法则，用它可以确定任意级数有和或者没有和，并在前一种情况下，给出求和的方法，这种法则就称为级数的求和. 这种法则是很多的，如果将某个这种法则称为 M 求和法，而 $\sum a_n$ 按 M 求和法是有和的，并可求出和为 S，则 $\sum a_n$ 称为 M 可和的，并记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S(M).$$

级数求和主要是针对发散级数提出来的. 每一种求和法都能使某些发散级数有和，同时又希望按照它，所有的收敛级数都是可和的，并且所求出的和与其柯西和相等，这样的级数求和方法就称为正则的. 级数的正则求和法是收敛性（柯西和）概念的直接推广，在调和分析、逼近论等数学学科中有很多应用. 每一种有意义的级数求和法表面上都有很重的主观定义色彩，但在数学内部多半都可找到它的深刻背景. 像阿贝尔求和法，源于关于泰勒级数的阿贝尔极限定理；而算术平均求和法，就与傅里叶级数部分和的性态有关.

正则求和法(regular summation)　见“级数的求和”.

阿贝尔求和(Abel summation)　级数求和法之一. 对级数 $\sum a_n$，若

$$\lim_{x\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=S,$$

则级数 $\sum a_n$ 称为阿贝尔可和，且 S 为它的阿贝尔和，记为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S(A).$$

阿贝尔求和法是正则的. 例如，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

的阿贝尔和为 1/2，但它发散. 上述求和法并非阿贝尔(Abel, N. H.)提出，但由于它与幂级数的阿贝尔连续性定理密切相关，故称为阿贝尔求和法.

算术平均求和(arithmetic mean summation)　级数求和法之一. 对级数 $\sum a_n$，设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$\sigma_n=(S_1+S_2+\cdots+S_n)/n$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=S,$$

则称 $\sum a_n$ 算术平均可和，S 称为算术平均和，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S(C,1).$$

算术平均求和法是正则的. 例如，发散级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

有算术平均和 1/2. 算术平均可和级数是阿贝尔可和的，并且有相同的和，反之不一定. 算术平均求和法是切萨罗(Cesàro, E.)于 1890 年引进的一系列求和法中最简单的一种.

欧拉变换(Euler transformation)　利用级数项的差分重组级数的方法. 把级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \tag{1}$$

变换为级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{-(n+1)}\Delta^n a_0 \tag{2}$$

的过程和方法称为欧拉变换，其中

$$\Delta^n a_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_k.$$

当级数(1)收敛时，级数(2)也收敛，且有相同的和. 若所有 $a_n>0$，且

$$\Delta^k a_n=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_n^j a_{n+j}$$

关于 k 单调，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant q>\frac{1}{2}(q\text{ 是某个常数}),$$

则级数(1)比级数(2)收敛得快. 当级数(1)发散时，级数(2)仍可能收敛，在级数(2)收敛于 S 时，级数(1)称为欧拉可和，且 S 称为它的欧拉和. 例如，级数 $1-1+1-1+\cdots$ 的欧拉和是 1/2.

欧拉和(Euler sum)　见“欧拉变换”.

线性求和(linear summation)　具有线性性的级数求和法. 若对任意常数 α,β 及任意级数 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)(M)$$
$$= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n(M) + \beta\sum_{n=0}^{\infty}b_n(M),$$

则求和法 M 称为线性的. 绝大多数求和法是线性的. 阿贝尔求和法与算术平均求和法都是线性的.

矩阵求和(matrix summation) 借助于矩阵求发散级数之和的方法. 设 T 表示无穷矩阵$(a_{nk})(n,k=1,2,\cdots)$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$是级数 $\sum a_n$ 的部分和序列, 令

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}S_k(n = 1,2,\cdots).$$

若对每个 n,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}S_k$$

都收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = S,$$

则级数 $\sum a_n$ 或序列$\{S_n\}$称为 T 可和于 S. 例如, 若 $n=k$ 时, 取 $a_{nn}=1/n$, $k\neq n$ 时, 取 $a_{nk}=0$, 便得到算术平均求和法.

特普利茨定理(Toeplitz theorem) 关于矩阵求和法的一个定理. 设无穷矩阵 $T=(a_{nk})(n,k=0,1,2,\cdots)$满足下列条件(特普利茨条件):

1. 对 $k=0,1,2,\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{nk}=0$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nk}=1$;

3. 存在正的常数 M, 使得当 $n=0,1,2,\cdots$, 都有

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}| \leqslant M.$$

则 T 称为特普利茨矩阵, 亦称正则求和法矩阵. 特普利茨定理断言: 由矩阵 T 确定的求和法为正则求和法的充分必要条件是 T 为特普利茨矩阵. 即: 若序列$\{S_n\}$与无穷矩阵 $T=(a_{nk})$使

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}S_k(n = 0,1,2,\cdots)$$

收敛, 则 $S_n\to S$ 蕴含 $\sigma_n\to S$ 的充分必要条件是 T 为特普利茨矩阵. 当 T 为三角矩阵($k>n$ 时 $a_{nk}=0$)时, 上述定理成为: 若对正整数 n 与 $k=1,2,\cdots,n$, 有

$$a_{nk}\geqslant 0, \sum_{k=1}^{n}a_{nk} = 1,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}a_{nk} = 0,$$

则当$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{nk}b_k = b.$$

特普利茨定理是特普利茨(Toeplitz, O.)于 1911 年对三角矩阵证明的.

特普利茨矩阵(Toeplitz matrix) 见"特普利茨定理".

渐近级数(asymptotic series) 其部分和在某种意义下逐渐逼近给定函数的(发散)级数. 设 f 是实函数, 若对每个非负整数 n, 有

$$\lim_{x\to+\infty} x^n\left[f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)\right] = 0,$$

其中 a_n 为常数, 则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}$$

称为 $f(x)$关于序列$\{x^{-n}\}$的渐近级数, 并称函数 f 有关于$\{x^{-n}\}$的渐近展开式, 记为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}.$$

例如, 对于误差函数有

$$\mathrm{er}\,f(x) \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2x^2)^n}.$$

通常渐近级数不一定收敛, 但从其定义可以知道, 渐近级数的部分和给出 $f(x)$的近似值, 并且 x 的值越大近似得越好. 这就是渐近这个名称的来源. 对渐近级数, 可以如对收敛级数一样地加、减、乘、除及逐项积分. 例如, 若

$$f(x)\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}, \quad g(x)\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{x^n},$$

则对任意常数 α,β, 有

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha a_n + \beta b_n}{x^n},$$

又分别当 f 和 f' 连续时, 有

$$\int_x^{\infty}\left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t}\right)dt \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{nx^n},$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n}.$$

渐近级数的上述定义是庞加莱(Poincaré, J.-H.)于 1886 年引入的. 它解决了自从柯西(Cauchy, A.-L.)引进收敛与发散级数概念以后, 几十年中一直困扰着包括柯西在内的数学家们的下列问题: 为什么一些发散级数没有和, 却能给出函数的很好近似. 它在数学、力学、数值计算等方面都有许多应用.

渐近展开式(asymptotic expansion) 见"渐近级数".

撰 稿 王文俊 方锦暄 尹佳锡 任承敬 任朝雁
庄亚栋 杨子孝 杨林生 李泽民 张春华
林和曾 赵静辉 侯纪欣 姚文信 徐吉华
剡俊华 常心怡
审 阅 余家荣 林 伟 常心怡 路见可

集　合　论

集合论(set theory)　基础性的数学分支.研究一般集合的大小、结构及集合之间的关系、运算,讨论集合的计数、排序的方法以及建立各种无穷集的理论.虽然与集合理论有关的很多概念是早已有的,但是集合论的正式创立却是起因于对无穷集讨论的数学内部需要.

集合的思想可以追溯到古希腊的原子论学派.他们把直线看成一些原子的排列.在中世纪,就有人注意到这样的事实:如果从两个同心圆的中心出发作射线,那么这些射线就在两个圆周上的点之间建立了一一对应,然而两圆周的长度是不相等的.16世纪,伽利略(Galilei,G.)也发现正整数可以同正整数的平方构成一一对应.当时无穷集合的这一性质被看成与"整体大于部分"这一公理相悖,而称为伽利略悖论.19世纪初,在傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)、黎曼(Riemann,(G.F.)B.)、狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)的工作中,已经出现了由具有某些共同性质的点或函数构成的集合.但是他们都没有进一步发展自己的思想.

19世纪初期,数学界对数学分析基础的批判运动促进了集合论的诞生.1851年,波尔查诺(Bolzano,B.)发表著作《无穷悖论》,肯定了实无穷的存在,建立了集合等价的概念,还注意到了无穷集合的某些真部分有可能等价于整体的情况.但是为集合论奠定科学基础并做出决定性贡献的是康托尔(Cantor,G.F.P.).促使他建立集合论的直接原因是函数的三角级数表示的惟一性问题.1870年,他应朋友海涅(Heine,H.E.)邀请开始研究这个问题.他在1871年至1872年的论文中逐步把三角级数展开的惟一性条件推广到允许例外值成为无穷集的情况.他把函数间断点问题的研究过渡到对点集本身的研究,明确地提出了点集、点集的导集、导集的导集等由实数构成的愈来愈复杂的集合.1873年12月7日,康托尔在给戴德金(Dedekind,J.W.R.)的信中说,他已成功地证明了实数集是不可数的.随后,他的论文《论所有实代数数 Z 的一个性质》于1874年发表在克雷尔(Crelle,A.L.)的杂志上.在这篇论文中包括了康托尔独创的著名的对角线方法.康托尔在1874年提出集合的定义:"一个集合就是我们的直观或我们的思想上那些确定的、能区分的对象(它们称为集合的元素)汇集在一起,作为一个整体来考虑的结果."这里用汇集来定义集合实际上是同义语反复.后来,人们认识到集合是一个原始的概念,不能用其他概念来定义,而只能加以描述或说明.但是这毕竟标志着集合首次成了明确独立的数学研究对象,集合论这个新的数学学科从此诞生.

有了集合概念之后,可以进一步定义集合的子集、幂集、交集、并集、笛卡儿积、关系、映射等一系列概念,并由此发展了集合的各种理论.康托尔的另一项重要工作在于,他成功地使用一一对应的方法来比较无穷集合的大小.揭示了无穷集合与有穷集合本质的区别:部分可以等价于全体.他断言无穷集合也是客观上的实体.从1878年开始,他把势(基数)定义为等势集合的共同属性,并用 $\aleph_0$ 表示自然数集的势,用c表示实数集的势,并提出了著名的连续统假设.1883年,他证明了康托尔定理:任何一个集合的势都小于它的幂集的势.这揭示了"无穷"有无穷多个不同的层次.从1883年起,康托尔研究有序集,利用良序概念建立序数理论,把数学归纳法推广为更一般的超限归纳法.1895年和1897年,在康托尔发表的题为《关于超穷集合论的基础》的论文中,给出了超限基数和超限序数的定义,引进了符号,并把它们按序型的大小排列成序列,定义了基数和序数的加法、乘法及乘方运算,讨论了各自的算术理论,即集合论的基数理论和序数理论.至此,他完成了集合论的基本内容.

康托尔在这些工作中处理了数学上最棘手的对象——无穷集合.他突破经验与直观的局限,用彻底的理性来论证,得出的结论使被传统观念束缚的人吃惊,难以接受.因此,在当时就遭到了包括高斯(Gauss,C.F.)、庞加莱(Poincaré,J.-H.)以及他的老师克罗内克(Kronecker,L.)等的反对.当时许多人认为"无穷"是一个超乎人的能力所能认识的世界.不要说去数它,就是它是否存在也难以肯定.而康托尔竟然"漫无边际地"去数它,去比较它们的大小……然而正当集合论在逆风中艰难地奋进时,在集合论内部接二连三地发现矛盾:1897年的布拉利·福尔蒂悖论,1899年的康托尔悖论以及1902年的罗素悖论.经过人们的研究,发现产生悖论的原因首先在于集合的概念过于一般,把无论"多么大的总体"都当做集合必将导致种种矛盾.其次,使用一些含糊的自然语言从而导致概念不确切也是引起矛盾的原因之一.因此,必须用公理化方法对集合的概念予以合理的限制,并且要有一套简明、确切的形式语言来表达这些公理.这样,悖论给集合论,特别是给那些欲将整个数学建立在集合论基础上的数学家带

来了困难，这些困难促进了数学家用公理化方法和数理逻辑工具去重建集合论. 策梅洛(Zermelo,E. F. F.)于1908年给出了第一个公理系统，经米里马诺夫(Mirimanov,D.)、弗伦克尔(Fraenkel,A. A.)补充，最后经冯·诺伊曼(von Neumann,J.)将这些公理形式化，得到现今通用的策梅洛-弗兰克尔公理系统，简称ZF系统. 从它可以导出康托尔集合论里几乎所有结果，且可排除已知的悖论. 在数学论证中，往往还要添加选择公理. 这样的系统简称ZFC. 另外还有两个集合论公理系统：1925年至1940年形成的冯·诺伊曼-贝尔奈斯-哥德尔系统与1955提出的凯莱-莫尔斯系统. 目前普遍采用的是ZFC系统. 这样，集合论的发展经历了两个较明显的阶段. 人们一般将主要在集合论公理出现以前，由康托尔等数学家建立的集合论的基本理论称为古典集合论，或康托尔集合论；而对于现代从集合论公理出发，主要研究集合论的基础问题的有关内容，一般则称为公理集合论. 又由于一本名为《朴素集合论》(哈尔莫斯(Halmos,P. R.)著)的介绍集合论的名著的影响，也有人用此书名称呼前者. 在本辞书的第一卷里，主要涉及前一部分内容，关于后者可参见本辞书第四卷《公理集合论》部分.

20世纪以来，集合论是数学中最活跃、最生机勃勃的领域. 它以古典集合论中遗留的两个主要问题连续统假设(CH)和选择公理(AC)作为自己的主要研究对象，并且获得了突破性的进展. 1940年，哥德尔(Gödel,K.)证明了选择公理(AC)和连续统假设(CH)相对于ZF系统的相容性. 1963年，科恩(Cohen,P. J.)用他发明的力迫法证明了选择公理和连续统假设相对于ZF系统的独立性. 上述CH的不可判定性意味着：可以同时并存两种集合论(CH的和CH不成立的)，恰如欧氏几何与非欧几何那样. 这是由于形式系统方法有局限性所导致的.

集合论之所以在数学中占有独特的地位，是由于其他数学分支对于它的相容性，它的基本概念已渗透到数学的所有领域. 按现代数学观点，数学各分支的研究对象，或者本身是具有某些特定结构的集合，如群、环、拓扑空间；或者是可以通过集合来定义的东西，如自然数、实数、函数. 在罗素(Russell,B. A. W.)和怀特海(Whitehead,A. N.)合著的《数学原理》一书中，作者从逻辑演算出发，再加上集合论的选择公理和无穷公理，便把当时的数学严格地推导了出来. 因此，从这个意义上说，可以把整个数学看做是集合论加逻辑. 若不计逻辑，则数学(不计范畴论)就归结于集合论，数学的一致性就归结于集合论的一致性. 现代数学的所有分支几乎都按集合论的观点加以描述和改造，使整个数学的面貌产生了巨大的变化. 历史已经证明了希尔伯特(Hilbert, D.)的评价："集合论是数学思想最惊人的产物"，"任何人都无法把我们从康托尔所创造的乐园中赶出来". 而罗素的话最能反映后人对这位开拓者的赞赏："康托尔的工作可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作."

古典集合论(classical set theory)　见"集合论".

康托尔集合论(Cantor set theory)　见"集合论".

朴素集合论(naive set theory)　见"集合论".

集合及其运算

集合(set)　简称集. 数学中最基本的概念之一，也是集合论的主要研究对象. 集合是一个不加定义的原始概念. 康托尔(Cantor,G. F. P.)认为，"所谓集合，是一些对象的汇集. 这些对象是人们的直观或思考中所涉及的，在一定范围内是明确而可鉴别的". 通俗地说，集合是将一些对象放在一起作为一个整体来考虑，组成集合的对象称为这个集合的元素或简称元. 若a是集合A的元素，则称a属于A，记为$a\in A$. 若a不是A的元素，记为$a\notin A$(也可用$a\bar{\in}A$表示). 当某一集合A的元素为$a,b,c,\cdots$时，可写作$\{a,b,c,\cdots\}$，称集合A由元素(对象)$a,b,c,\cdots$聚合而成. 由所有具有某一性质$\varphi(x)$的对象x聚合而成的集合，通常记为

$$\{x\mid\varphi(x)\}(\text{或}\{x:\varphi(x)\}).$$

这种确定集合的方法称为概括性原则，或概括公理模式. 按康托尔的观点，组成集合的元素可以是任何直观的事物，也可以是任何抽象的对象. 当然集合也可以作为其他集合的元素. 集合与它的元素之间的关系应有如下的特点：

1. 一个集合由一定范围内的元素组成，完全被这些元素所确定(即集合的外延性). 而一个元素是否属于某一集合是确定的，即$a\in A$与$a\notin A$有且仅有一个成立.

2. 一个集合中的不同元素是可区别的，是彼此独立的单体.

3. 集合是由它的元素组成的整体，有别于它的任何元素. 即使集合A只有一个元素a，也应认为

$$A=\{a\}\neq a.$$

4. 不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$.

由于康托尔的集合概念过于广泛，特别是性质$\varphi(x)$的含混与不确切，在集合的深入研究中发现了一些悖论，便导致了公理集合论的产生. 在公理集合论中，对集合的概念作了一些限制，用较强的分离公理替换了概括公理. 这样，一些可用概括公理确定的"集合"在新的公理系统中便不再是集合，改称为真

类. 而把集合与真类统称为类.

集(set)　见"集合".

集合的元素(element of set)　见"集合".

概括性原则(comprehension principle)　见"集合".

概括公理模式(mode of comprehension axiom)　见"集合".

类(class)　集合论的基本概念之一. 指具有某一性质 $P(x)$(或条件)的对象 x 的全体. 通常可表示为 $\{x|P(x)\}$, 即可用概括原则确定的集体. 从数学角度出发, 类可分为两种: 一种是集合; 另一种不是集合, 称为固有类或真类. 集合的全体、序数的全体等都是固有类.

固有类(proper class)　见"类".

真类(proper class)　即"固有类".

属于(belonging)　集合论的基本概念之一. 反映集合与其元素之间的关系, 以"$\in$"记之. a 是集合 A 的元素记为 $a\in A$, a 不是 A 的元素记为 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$). 记号"$\in$"由佩亚诺(Peano, G.)引入, 它是希腊文 εστι(是)的第一个字母的变形.

集合的相等(equality of sets)　集合间的等同关系. 两集合相等, 当且仅当它们含有相同的元素. 集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A=B$. A, B 两集合不相等, 记为 $A\neq B$. 关于集合的等同关系的普遍原则通常称为集合的外延性原则或外延公理. 它可以用符号表示为

$$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B).$$

集合的相等关系具有自反性、对称性与传递性.

下列一组命题是等价的:

1. 两集合 A 与 B 相等.
2. $A\subseteq B$, 且 $B\subseteq A$.
3. $A-B=\varnothing$, 且 $B-A=\varnothing$.
4. $A\cap B=A\cup B=A$.
5. 对任意的集合 C,
   $A\cap C=B\cap C$, 且 $A\cup C=B\cup C$.
6. $\complement_B A=\complement_A B$.
7. A 与 B 的对称差
   $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$.
8. 对任意的集合 C, $A\cap C=B\cap C$, 且
   $A\cap\complement C=B\cap\complement C$.
9. 对任意的集合 C, $A\cup C=B\cup C$, 且
   $A\cup\complement C=B\cup\complement C$.

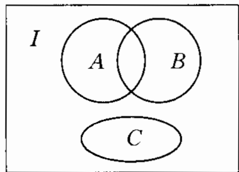
外延公理是策梅洛(Zermelo, E. F. F.)于 1908 年提出的.

集合的表示法(representation method of a set)　集合的表达形式. 即给出一个集合和组成这个集合的元素的表示方法. 表示集合的方法有三种:

1. 列举法. 又称外延法. 把集合的元素一一列举出来, 写在大括号"{　}"内, 并用逗号","把它们彼此分开. 例如, 小于 10 的素数集合 A 可表示为 $A=\{2,3,5,7\}$. 又如 3 的自然数幂所组成的集合 B 可表示为 $B=\{3,9,27,\cdots,3^n,\cdots\}$. 在用列举法表示一个无限集或元素很多的集的时候常用省略号. 这时, 要注意表示的明确性, 要能从已经列举的元素中知道被省略的元素是什么. 在用列举法表示集合时, 元素的次序无关紧要, 但不允许重复.

2. 描述法. 又称特征性质法或内涵法. 利用概括原则指出确定集合元素的特征性质 $P(x)$, 从而给出集合的方法称为描述法. 具有性质 $P(x)$ 的所有元素 x 组成的集合 A 记为 $A=\{x|P(x)\}$ 或 $\{x:P(x)\}$. 其中 $P(x)$ 表示集合中元素的特征性质. 所谓集合元素的特征性质是指: 集合的每个元素的共有的性质, 并且不属于这个集合的元素都不具有这个性质.

3. 图示法. 如维恩图法. 用圆、椭圆、矩形或其他封闭曲线围成的区域表示集合. 如图所示, 矩形表示全集 I, 曲线包围的区域表示集合 A, B, C 等. 这种方法严格地说应称示意法, 有一定的局限性. 但它的直观性能帮助人们思考.



特殊集合的习惯表示法. 如常以字母 **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集等. 在数学的各个分支中, 也有用约定的特殊符号(或特殊图形)来表示特定集合的.

维恩图(Venn graph)　亦称文氏图、欧拉图. 集合的一种直观表示法. 用一个圆或封闭曲线围成的平面区域表示一个集合, 并且在需要时把集合元素写在区域内, 或用区域内的点表示集合元素. 这样的图形称为集合的维恩图. 常用矩形表示全集 I. 用矩形内画的圆或封闭曲线表示全集的子集 A 或 B. 子集 B 的补集 $\complement B$ 可用同时在矩形内部封闭曲线

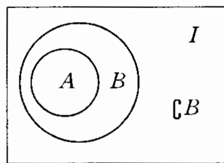


图1

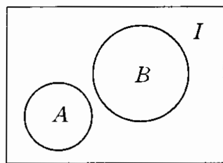


图2

外部表示(图 1). 利用维恩图可以直观地表示两集合之间的关系: $A=B$ 可在同一封闭曲线内记上 A 与 B(图 1 并不表示 A 与 B 相等的关系). 图 2 表示 A 与 B 相离, 图 3 表示 A 与 B 相交. 图 1 也可表示 $A\subsetneq B$, 即 A 是 B 的真子集. 在讨论几个集合之间的关系时, 需要把它们画在同一张维恩图上. 这时再用图 1 到图 3 的表示方法将有某些不便, 可将所有表示集合的圆画得两两相交, 并且使所有的圆有公共部分. 图 4 中画出了有三个集合的情况. 为使其仍能

表示集合间的关系，因此规定：

1. 在一个区域内画上水平影线表示该区域是空的.

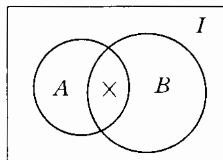


图3

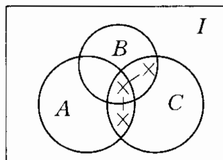


图4

2. 在一个区域内画上叉（×）表示该区域不空，但需没有横线"—"与其他区域的叉相连. 图 3 中的叉表示 $A\cap B\neq\varnothing$.

3. 几个区域中至少有一个不空时，把这几个区域都画上叉，并用短线"-"相连，形成连锁叉. 如图 4 表示 $(A\cup B)\cap C\neq\varnothing$.

4. 若水平影线盖上一条连锁叉所在的某几个区域，而不是每个区域，则认为影线压倒叉，有影线的区域仍是空的. 如图 5 表示 $C\subseteq B$，$(B\cup C)\cap A\neq\varnothing$，$(B\cap C)-A=\varnothing$ 等.

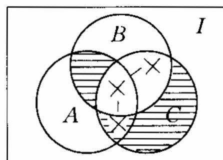


图5

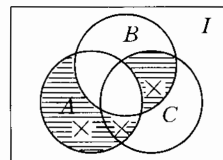


图6

5. 若水平影线盖住一条连锁叉所在的每个区域，或盖上一条单一叉的区域，则认为图形表示的条件是不相容的. 如图 6 表示条件

$$A\subseteq B,(A-B)\cup(B\cap C-A)\neq\varnothing$$

及 $B\cap C-A=\varnothing$ 是互相矛盾的.

利用圆表示集合的做法始自 18 世纪的欧拉（Euler，L.）. 这里的表示方法是对欧拉方法的改进，它是 19 世纪维恩（Venn，J.）给出的. 而用叉与连锁叉表示"不空"的办法是麦克诺顿（McNaughton，R.）给出的.

文氏图（Venn graph）　即"维恩图".

欧拉图（Euler graph）　即"维恩图".

维恩图解（Venn diagram）　亦称欧拉图解. 集合问题的一种解法. 利用维恩图直观地解答集合问题称为维恩图解. 维恩图解的问题有下列类型：

1. 验证集合公式. 例如，验证

$$A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$$

时，作维恩图 1，可见等式两端所表示的集合都是图中垂直影线部分，故等式成立.

2. 验证集合包含关系式. 例如，验证

$$A-C\subseteq(A-B)\cup(B-C)$$

时，作维恩图 2，可见 $A-C$ 是图中画有垂直影线的部分，而 $(A-B)\cup(B-C)$ 是图中画有水平影线的

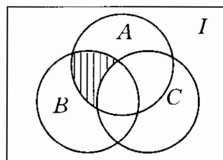


图1

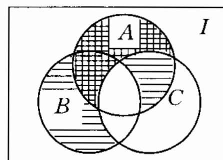


图2

部分，它包含了前一种影线画出的部分，故所验证的包含关系式成立.

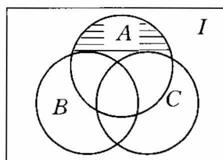


图3

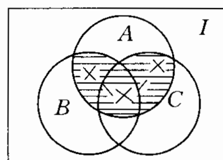


图4

3. 检查集合命题的真假. 例如，有集合命题

$$A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A-B\subseteq C.$$

则可发现，$A\subseteq B\cup C$ 与 $A-B\subseteq C$ 可用同一个维恩图 3 表示，故命题成立.

4. 探讨关于集合的条件的相容性. 例如，有一组条件

$$A\cap C\neq\varnothing,A\cap B\neq\varnothing,A\subseteq \complement(B\cup C).$$

人们要考查它们是否相容. 作出这组条件的维恩图 4，可见这组条件是矛盾的.

5. 分析有限集的基数. 例如，解题："70 个学生参加体育测验，获优秀成绩情况如下：短跑 31 人，跳高跳远 29 人，投掷 36 人，短跑与投掷 12 人，三项均优秀 5 人，跳高跳远单项优秀 7 人，投掷单项优秀 15 人. 求获短跑单项优秀人数、获两项优秀人数与未获优秀人数". 作出维恩图 5，通过分析填入数字，可知获短跑单项优秀 11 人，获两项优秀者 24 人，未获优秀的 8 人. 图中 $A=\{$获短跑优秀者$\}$，$B=\{$获跳高跳远优秀者$\}$，$C=\{$获投掷优秀者$\}$.

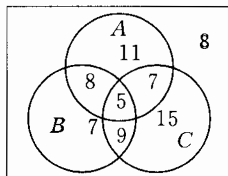


图5

欧拉图解（Euler diagram）　即"维恩图解".

子集（subset）　集合论的基本概念之一. 指两个具有包含关系的集合中的被包含者. 对于集合 A 与 B，若 A 中的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集. 记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 读作"A 含于 B"或"B 包含 A". A 是 B 的子集可用符号表述为

$$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$$

或

$$A\subseteq B\overset{\text{def}}{=\!=}\forall x(x\in A\rightarrow x\in B).$$

若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，即 A 中的元素都在 B 中，而 B 中存在不属于 A 的元素，则称 A 为 B 的真子集，同时称 B 为 A 的真扩集. 记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$. 读作"A 真含于 B"或"B 真包含 A". A 是 B 的真子集可

用符号表述为

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

或

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \exists y(y \in B \to \neg y \in A).$$

A 不是 B 的子集记为 $A \nsubseteq B$. 用符号$\subseteq$或$\subsetneq$表示的集合之间的关系统称为集合的包含关系.

集合的包含关系有下列性质:

1. 对于任意集 $A, A \subseteq A$.
2. 对于集 A 与 B,有 $A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A$.
3. $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A \cap B = A$.
4. $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A \cup B = B$.
5. $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A - B = \varnothing$.
6. $A \subseteq B$ 的充分必要条件是 $A \cap \complement B = \varnothing$.
7. 如 $A \subsetneq B, B \subseteq C$,则 $A \subsetneq C$.
8. 若 $A \subseteq B$, C 为任意集,则
   $A \cup C \subseteq B \cup C, A \cap C \subseteq B \cap C$.
9. 对任何集 $A, \varnothing \subseteq A \subseteq I$.
10. 若 $A \subseteq B, B \subseteq A$,则 $A = B$.

真子集(proper subset)　见"子集".

真扩集(proper amplify set)　见"子集".

集合的包含关系(inclusion relation of sets)　见"子集".

空集(empty set)　集合论的一个重要概念.没有元素的集合称为空集.记为$\varnothing$($\varnothing$为丹麦文字母),用符号可表述为

$$A = \varnothing \Leftrightarrow \forall x(x \notin A)$$

或

$$A = \varnothing \Leftrightarrow A = \{x \mid x \neq x\}.$$

空集有下列性质:

1. 对于任何集 $A, \varnothing \subseteq A$.
2. 若 $A \subseteq \varnothing$,则 $A = \varnothing$.
3. 对全集 I,有 $\complement \varnothing = I$ 和 $\complement I = \varnothing$.
4. 对任何集 A,
   $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A - \varnothing = A$.

全集(universal set)　亦称通用集、宇宙集、万有集、个体域或论域.集合论的基本概念之一.它包含所讨论的问题中涉及的所有集合.在研究某一特定理论时,人们关心的往往不是一切可能的集合,而仅仅是某个确定的集合的所有子集合.当事先给定一个集合 I,并且约定只限于讨论 I 的元素或子集时,人们就把 I 称为该理论的论域或全集.全集常用字母 I, Ω, U 等表示.取 A 作全集可用符号表述为 $A = I \Leftrightarrow \forall x(x \in A)$.

全集具有下列性质:

1. $\complement I = \varnothing$,　$\complement \varnothing = I$.
2. $I - A = \complement A, A - I = \varnothing$.
3. 对任何集 $A, A \cap \complement A = \varnothing; A \cup \complement A = I$.
4. 若 $A \cap B = \varnothing, A \cup B = I$,则 $A = \complement B$.
5. 对任何集 $A, A \cap I = A, A \cup I = I$.

通用集(universal set)　即"全集".

宇宙集(universal set)　即"全集".

万有集(universal set)　即"全集".

单元集(singleton)　亦称单元素.一种特殊的集合.即只含有一个元素的集合.元素 a 组成的单元集记为$\{a\}$.单元集可看成是无序对集合的特例,即 $A = \{a\} \Leftrightarrow A = \{a, a\} \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x = a)$.

单元素(singleton)　即"单元集".

无序对(unordered pair)　一种特殊的集合.即仅含两个元素的集合.对于任意的两个对象(集合)u与v,集合$\{u,v\} = \{v,u\}$称为对象 u 与 v 的无序对.由于 u, v 是任意的两个对象,u 与 v 既可以相同也可以不同.当 $u = v$ 时,$\{u,v\}$可以记为$\{u\}$或$\{v\}$,集合$\{u\}$或$\{v\}$称为单元集,即仅含有一个元素的集合.单元集是无序对集合的一种特殊情况(参见"单元集").

有序对(ordered pair)　亦称序偶.一种特殊的集合.即以一种确定的次序给出的两个客体的集合称为序偶.按先 x 后 y 的顺序给出客体 x 与 y 得到的序偶记为$\langle x,y \rangle$或(x,y).两序偶$\langle x,y \rangle$与$\langle u,v \rangle$相等,当且仅当 $x = u, y = v$.在集合论中,常采用库拉托夫斯基(Kuratowski, K.)的做法,把序偶$\langle x,y \rangle$定义为特殊的集合$\{\{x\},\{x,y\}\}$.这个定义保持和突出了序偶的本质特征:$\langle x,y \rangle = \langle u,v \rangle$当且仅当$x = u, y = v$.序偶中的两个元素的次序不能调换.即当 $x \neq y$ 时,$\langle x,y \rangle \neq \langle y,x \rangle$.

序偶(ordered pair)　即"有序对".

***n* 元有序组**(ordered n-tuples)　亦称 n 目有序组.有序对的推广.按一定顺序给出的 $n(n \geqslant 1)$个客体称为一个 n 元有序组.依次给出 n 个客体 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 得到的 n 元有序组记为$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$(或$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$).其中 x_i 常称为有序组的第 i 分量.元数不同的两个有序组不等.两个 n 元有序组$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$与$\langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$相等,当且仅当对每一个$i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,有 $x_i = y_i$. n 元有序组可以用序偶来定义:对于 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$,

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle, x_{n+1} \rangle.$$

***n* 目有序组**(ordered n-tuples)　即"n 元有序组".

集族(family of sets)　一种特殊的集合.以集合为元素的集合称为集族.例如,集 A 的幂集$\mathscr{P}(A)$是一个集族.$\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$,$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(A)))$都是集族.集族常用花体字母 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 等表示.取 A 为标号集,A 到集族 $\mathscr{A}$ 的一一对应(双射)为 $f: a \to A_a$,则集族 $\mathscr{A}$ 可记为$\{A_a \mid a \in A\}$或$\{A_a\}_{a \in A}$.当 A 为线性序集$\{\cdots, a, \cdots, b, \cdots, c, \cdots\}$时,集族$\{\cdots, A_a, \cdots, A_b,$

$\cdots, A_c, \cdots\}$称为集列.

集列(sequence of sets)　见"集族".

幂集(power set)　一种集族. 设 S 是任意给定的集合,则由其所有子集构成的集合称为 S 的幂集合,简称幂集. 记为$\mathscr{P}(S)$或 $\beta(S)$. $\mathscr{P}(S)=\{A \mid A \subseteq S\}$. 例如,设 $S=\{a,b,c\}$,则

$$\mathscr{P}(S)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

幂集具有重要的性质: $|\mathscr{P}(S)|>|S|$. 这就是著名的康托尔定理. 它还可以写成 $|\mathscr{P}(S)|=2^{|S|}>|S|$. 其中 $|S|$ 和 $|\mathscr{P}(S)|$ 分别是 S 和 $\mathscr{P}(S)$ 的势.

正则集(regular set)　集合论的一个重要概念. 它是为避免出现悖论的奇特集合而引进的. 集合 x 是正则的,如果存在 x 的元素 y,使得 x 和 y 没有公共元素. 用符号表示为

$$x \text{ 是正则集} \Leftrightarrow (\exists\, y \in x)(y \cap x=\varnothing).$$

在 ZF 公理系统中的集合要求满足正则公理,故其中的集合都是正则集. 非正则集称为奇异集合. 在选择公理下,可以证明: 一个集合为奇异的,当且仅当在该集合中存在有 $\in$ 降链. 满足下列性质的集合 x 是奇异集合而不是正则集:

1. $x \in x$.
2. $x \in y \wedge y \in x$.
3. $x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x$.
4. $x \in x_0 \wedge x_0 \in x_1 \wedge x_1 \in x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in x$.
5. $\cdots \wedge x_{n+1} \in x_n \wedge x_n \in x_{n-1} \wedge \cdots \wedge x_0 \in x$.

奇异集合(singular set)　见"正则集".

集套(nested sets)　亦称套链集族. 一种特殊的集族. 若集族 $\mathscr{A}$ 中任何两集 A 与 B 有 $A \subseteq B$(或有 $B \subseteq A$),则集族 $\mathscr{A}$ 称为集套. 即集套是在集合的包含关系"$\subseteq$"下的一个全序的集族. 递增集列 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$,递减集列 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$是特殊的集套. 集套的任何子族都是集套,它是原集套的子套. 两个集套的交是集套. 一个集套中各集合的补集所成集族也是集套. 两个集套的差族也是集套. 两集套的并不一定是集套. 当集族 $\mathscr{B}$ 的子族 $\mathscr{A}$ 是集套时,$\mathscr{A}$ 也称为 $\mathscr{B}$ 的子套,而 $\mathscr{B}$ 本身可以不是套. 若 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{B}$ 的子套,且对 $\mathscr{B}$ 中任何套 $\mathscr{A}$ 均有 $\mathscr{A} \not\supset \mathscr{A}_0$,则称 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{B}$ 中的一个极大套. 如 $\mathscr{B}$ 不是套,则 $\mathscr{B}$ 中的极大套可能不惟一. 对于 $\mathscr{B}$ 中任何集 B,均存在极大套 $\mathscr{A}_0$,使 $B \in \mathscr{A}_0$.

套链集族(nested sets)　即"集套".

子套(subfamily of nested sets)　见"集套".

极大套(maximal nested subsets)　见"集套".

集合的运算(operations of sets)　集合论的基本概念之一. 指集合的交、并、差、补等运算的统称. 是由已知集合构造新集合的一种规则. 设 $\mathscr{A}$ 为一个集族,映射 $f:\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 为集族的一元运算,映射 $f:\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 为集族的二元运算. 对于全集 I 的幂集合 $\mathscr{P}(I)$常讨论的运算有:

1. 补运算. 是映射 $f: A \to \complement A$. 把幂集 $\mathscr{P}(I)$中的每个集合 A 映射为它的补集 $\complement A=\{x \mid x \in I \wedge x \notin A\}$,称其为$\mathscr{P}(I)$的一元运算. 集合 A 的补集也记为 $\overline{A}$ 或$\sim A$.

2. 交运算. 又称集合乘法. 是映射
$$f:\langle A,B\rangle \to A \cap B.$$

3. 并运算. 又称集合加法. 是映射
$$f:\langle A,B\rangle \to A \cup B.$$

4. 减运算. 是映射 $f:\langle A,B\rangle \to A-B$.

5. 对称差. 是映射 $f:\langle A,B\rangle \to A \triangle B$.

6. 叉运算. 是映射 $f:\langle A,B\rangle \to A \otimes B$.

补、交、并三种运算是基本运算,其余运算都可以用它们来定义:

$$C=A-B \Leftrightarrow \forall\, x(x \in C \leftrightarrow x \in A \cap \complement B);$$

$$C=A \triangle B \Leftrightarrow \forall\, x(x \in C \leftrightarrow x \in (A \cap \complement B \cup (\complement A \cap B)));$$

$$C=A \otimes B \Leftrightarrow \forall\, x(x \in C \leftrightarrow x \in (A \cup \complement B) \cap (\complement A \cup B)).$$

即 $A-B=A \cap \complement B$;

$A \triangle B=(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B)$;

$A \otimes B=(A \cup \complement B) \cap (\complement A \cup B)$.

集合的并运算(caculation of union of sets)　见"集合的运算".

集合的交运算(caculation of intersection of sets)　见"集合的运算".

并集(union of sets)　亦称和集. 集合论的基本概念之一. 指两个(或多个)集合经并运算所得到的集合. 对于任意两个集合 A 和 B,由属于 A 或属于 B 的元素所构成的集合 C,称为 A 与 B 的并集. 记为 $A \cup B$(或 $A+B$). 这个集合还可以用符号表述为

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

或

$$C=A \cup B \Leftrightarrow \forall\, x(x \in C \leftrightarrow x \in A \vee x \in B).$$

通常,从两个集合的并运算不难推广到任何有限个或任意无限个集合的并运算. 设 $\mathscr{A}$ 为一集合族,把集合$\{x \mid \exists\, a(a \in \mathscr{A} \wedge x \in a)\}$称为 $\mathscr{A}$ 所含的元素集合的并集,记为 $\mathfrak{S}(\mathscr{A})$或$\bigcup \mathscr{A}$.

集合加法具有下列性质:

1. 交换律: $A \cup B=B \cup A$.
2. 结合律: $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$.
3. 幂等律: $A \cup A=A$.
4. $\varnothing$为并运算的单位元: $\varnothing \cup A=A \cup \varnothing=A$.
5. 并对交的分配律:

$$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$(B \cap C) \cup A=(B \cup A) \cap (C \cup A).$$

6. 如果 $A \subseteq C, B \subseteq C$,那么 $A \cup B \subseteq C$.

7. $A\cup B=\varnothing$ 的充分必要条件是 $A=B=\varnothing$.

8. 吸收律：$(A\cap B)\cup A=A$，$(A\cup B)\cap A=A$.

9. 更一般形式的结合律：

$$\bigcup_{\langle a,b\rangle\in M} X_{ab}=\bigcup_{a\in A}\left(\bigcup_{b\in B_a} X_{ab}\right).$$

这里 A 是集族 $\{B_a\}_{a\in A}$ 的标号集，B_a 是集族 $\{X_{ab}\}_{b\in B_a}$ 的标号集.

10. 更一般形式的并对交的分配律：

$$\left(\bigcap_{a\in A} X_a\right)\cup\left(\bigcap_{b\in B} Y_b\right)=\bigcap_{\langle a,b\rangle\in A\times B}(X_a\cup Y_b).$$

和集(sum set)　即“并集”.

集合的加法(addition of sets)　见“并集”.

交集(intersection of sets)　亦称积集. 集合论的基本概念之一. 指两个(或多个)集合经交运算所得到的集合. 对于任意两个集合 A 与 B，由既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合 C，称为 A 与 B 的交集(或积集). 记为 $A\cap B$. 还可以用符号表述为

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$$

或

$$C=A\cap B\Leftrightarrow\forall x(x\in C\leftrightarrow x\in A\wedge x\in B).$$

通常，称从两个集合 A 与 B 求出其交集的运算为集合的乘法或集合的交运算. 从两个集合的交运算不难推广到任何有限个或任意无限个集合的交运算. 设 $\mathscr{A}$ 为一非空集合族，把集合 $\{x\mid\forall a\in\mathscr{A}(x\in a)\}$ 称为 $\mathscr{A}$ 所含的元素集合的交集. 记为 $\bigcap\mathscr{A}$.

集合的交运算具有下列性质：

1. 交换律：$A\cap B=B\cap A$.

2. 结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

3. 幂等律：$A\cap A=A$.

4. 交对并的分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$
$$(B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A).$$

5. 全集 I 为交运算的单位元：

$$A\cap I=I\cap A=A.$$

6. 如果 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，那么 $A\subseteq B\cap C$.

7. $A\cap B=I$(全集)的充分必要条件是

$$A=B=I.$$

8. 更一般形式的交的结合律：

$$\bigcap_{\langle a,b\rangle\in M} X_{ab}=\bigcap_{a\in A}\left(\bigcap_{b\in B_a} X_{ab}\right).$$

这里 A 是集族 $\{B_a\}_{a\in A}$ 的标号集，B_a 是集族 $\{X_{ab}\}_{b\in B_a}$ 的标号集，

$$\bigcap_{M}=\sum_{a\in A}\{a\}\times B_a.$$

9. 更一般形式的交对并的分配律：

$$\left(\bigcup_{a\in A} X_a\right)\cap\left(\bigcup_{b\in B} Y_b\right)=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in A\times B}(X_a\cap Y_b).$$

积集(product set)　即“交集”.

集合的乘法(multiplication of sets)　见“交集”.

不相交的集合(disjoint sets)　两个特殊相关的集合. 指两个集合没有公共元素. 对于两个集合 A 与 B，如果 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交. 这一概念可以推广到多个集合的情况. 设 $\mathscr{S}$ 是一集合族，如果 $A\cap B=\varnothing$ 对任何 $A,B\in\mathscr{S}$ 成立，则称 $\mathscr{S}$ 是互不相交的集合族(两两不相交的集族).

互不相交的集合族(family of mutually disjoint sets)　见“不相交的集合”.

集合的广义并(generalized union of sets)　并概念的推广. 设 A 是标号集，$\mathscr{F}$ 为集族，f 是 A 到 $\mathscr{F}$ 的一一对应，且 $f:a\to X_a$，$a\in A$. 由集族 $\mathscr{F}$ 中的集合的元素组成的集合 C 称为族中集合的广义并集(简称并集)，记为

$$\bigcup_{a\in A} X_a\text{(可简记为}\bigcup\mathscr{F}\text{)}.$$

用符号表述为

$$\bigcup\mathscr{F}=\{y\mid\exists X(X\in\mathscr{F}\wedge y\in X)\}$$

或

$$C=\bigcup_{a\in A} X_a\Leftrightarrow\forall x(x\in C\leftrightarrow\exists a(a\in A\wedge x\in X_a)).$$

当 $A=\varnothing$ 时，规定

$$\bigcup_{a\in A} X_a=\varnothing.$$

集合的广义并具有下列性质：

1. $\left(\bigcup_{a\in A} X_a\right)\cap B=\bigcup_{a\in A}(X_a\cap B)$.

2. 若用 I 记全集合，$\complement A$ 表示 A 的补集合，则

$$I=\bigcup_{a\in A} X_a+\bigcap_{a\in A}\complement X_a.$$

当用 A^C 表示 A 的补集时，这公式可写为

$$\left(\bigcup_{a\in A} X_a\right)^C=\bigcap_{a\in A} X_a^C$$

与

$$\left(\bigcap_{a\in A} X_a\right)^C=\bigcup_{a\in A} X_a^C.$$

上述两式亦称为德·摩根律.

德·摩根律(De Morgan laws)　见“集合的广义并”.

集合的广义交(generalized intersection of sets)　交概念的推广. 设 A 是标号集，$\mathscr{F}$ 为集族，f 是 A 到 $\mathscr{F}$ 的一一对应，且 $f:a\to X_a$，$a\in A$. 由属于族 $\mathscr{F}$ 中的每个集合的元素组成的集合 C 称为族中集合的广义交. 记为

$$\bigcap_{a\in A} X_a\text{(简记为}\bigcap\mathscr{F}\text{)}.$$

用符号表述为

$$\bigcap\mathscr{F}=\{y\mid\forall X(X\in\mathscr{F}\to y\in X)\}$$

或

$$C=\bigcap_{a\in A} X_a\Leftrightarrow\forall x(x\in C\leftrightarrow\forall a(a\in A\wedge x\in X_a)).$$

当 $A=\varnothing$ 时，规定

$$\bigcap_{a\in A} X_a=I.$$

集合的广义交具有性质

$$\left(\bigcap_{a\in A} X_a\right)\cup B=\bigcap_{a\in A}(X_a\cup B)\cdots.$$

集合的直和(direct sum of sets)　并的一种特殊情况，即在满足条件 $A\cap B=\varnothing$ 下的集合 A,B 之

并.若集合 A 与集合 B 不相交,且有 $A\cup B=C$,则称 C 为其子集 A 和 B 的直和.记为

$$C=A\dot{+}B.$$

可用符号表述为

$$A\dot{+}B=\{x\mid(x\in A\vee x\in B)\wedge A\cap B=\varnothing\}$$

或

$$C=A\dot{+}B\Leftrightarrow\forall x(x\in C \leftrightarrow((x\in A\vee x\in B)\wedge A\cap B=\varnothing)).$$

集合的直和的概念可以推广到一般的情况:设 A 为标号集,$\{X_a\}$为集族,f 是 A 到$\{X_a\}$的一一对应,且 $f:a\to X_a,a\in A$.如果 $a,b\in A,a\neq b$ 时总有

$$X_a\cap X_b=\varnothing,$$

则称广义并集

$$\bigcup_{a\in A}X_a$$

为集族$\{X\}$的广义直和.记为

$$\dot{\sum_{a\in A}}X_a.$$

集合的直和具有下列性质:

1. 交换律:$A\dot{+}B=B\dot{+}A$.
2. 结合律:$(A\dot{+}B)\dot{+}C=A\dot{+}(B\dot{+}C)$.
3. $(A\dot{+}B)\cap C=(A\cap C)\dot{+}(B\cap C)$.
4. 若 $A\cap C=B\cap C=\varnothing$,则
   $$(A\cap B)\dot{+}C=(A\dot{+}C)\cap(B\dot{+}C).$$
5. $(\dot{\sum_{a\in A}}X_a)\cap C=\dot{\sum_{a\in A}}(X_a\cap C)$.
6. $A\cup B=(A\cap\complement B)\dot{+}(\complement A\cap B)\dot{+}(A\cap B)$.
7. $A\cup B\cup C=(A-B\cup C)\dot{+}(B-A\cup C)\dot{+}(C-A\cup B)\dot{+}(A\cap B-C)\dot{+}(A\cap C-B)\dot{+}(B\cap C-A)\dot{+}A\cap B\cap C$.

广义直和(generalized direct sum)　见“集合的直和”.

集合的直和分解(direct sum decomposition of a set)　对集合的一种刻画.将一个集合写成若干两两不相交的子集的并集的形式,则称其为该集合的直和分解.其每个子集称为该集合的直和因子.例如

$$A=\bigcup_{m\in M}A_m(m\neq n\text{ 时},A_m\cap A_n=\varnothing)$$

是 A 的直和分解.可记为

$$\dot{\sum_{m\in M}}A_m.$$

由 A 的直和分解所得的 $S=\{A_m\mid m\in M\}$,若对任一 $m\in M$ 都有 $A_m\neq\varnothing$时,则 S 被称为 A 的一个划分.

集合的直和因子(direct sum factor of a set)　见“集合的直和分解”.

差集(difference set)　集合论的基本概念之一.两个集合经过差运算所得的集合.对于任意集合 A 与 B,由属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合 C 称为 A 与 B 的差集.记为 $A-B$(或 $A\backslash B$).可用符号表述为

$$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

或

$$C=A-B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\wedge x\notin B).$$

从两个已知集合 A 与 B 求其差集 $A-B$ 的运算,称为集合的减法.

集合的减法具有下列性质:

1. 对于任何集 A,B,有 $A-A=\varnothing,A-\varnothing=A,A-I=\varnothing,\varnothing-A=\varnothing$.
2. $A-B\subseteq A\subseteq(A-B)\cup B$.
3. $(A-B)\cup B=A$ 的充分必要条件是 $B\subseteq A$.
4. $A-B=\varnothing$的充分必要条件是 $A\subseteq B$.
5. 交对差可分配:$A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$.
6. $A-B=A\cap\complement B$.
7. 对任意集 C 及任意集族$\{A_m\}_{m\in M}$,有
   $$C-\bigcup_{m\in M}A_m=\bigcap_{m\in M}(C-A_m),$$
   $$C-\bigcap_{m\in M}A_m=\bigcup_{m\in M}(C-A_m).$$

集合的减法(subtraction of sets)　见“差集”.

相对余集(relative complementary set)　亦称相对补集.集合论的基本概念之一.若 $B\subseteq A$,则差集 $A-B$ 称为 B 相对于 A 的补集或余集.记为 $\complement_A B$.即 $\complement_A B=A-B$.

相对余集具有下列性质:

1. $\complement_A(\complement_A B)=B$.
2. $\complement_A(B\cap C)=\complement_A B\cup\complement_A C$.
3. $\complement_A(B\cup C)=\complement_A B\cap\complement_A C$.
4. 若 $A\supseteq B\supseteq C$,则 $A=\complement_A B\cup\complement_B C\cup C$.

相对补集(relative complementary set)　即“相对余集”.

补集(complementary set)　亦称绝对余集.集合论的基本概念之一.全集 I 与集 A 的差集 $I-A$ 称为 A 的补集.常记为 $\complement A$(或$\sim A,\overline{A}$.可用符号表述为:$\complement A=\{x\mid x\in I\wedge x\notin A\}$或$B=\complement A\Leftrightarrow\forall x(x\in B\leftrightarrow x\in I\wedge x\notin A)$.$A$ 的补集也就是 A 相对于全集 I 的余集.从一个集 A 求出它的补集的运算,称为集合的补运算.它是一元运算.

集合的补运算具有下列性质:

1. 对合律:$\complement\complement A=A$.
2. $A\cup\complement A=I,A\cap\complement A=\varnothing$.
3. $\complement\varnothing=I,\complement I=\varnothing$.
4. $A=B$ 的充分必要条件是 $\complement A=\complement B$.
5. $A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $A\cap\complement B=\varnothing$.
6. $B=\complement A$ 的充分必要条件是 $A\cap B=\varnothing$,且
   $$A\cup B=I.$$

7. 德·摩根律：$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B$，
$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$.

8. 重叠律：$A\cup(\complement A\cap B)=A\cup B$，
$A\cap(\complement A\cup B)=A\cap B$.

绝对余集(absolute complementary set)　即"补集".

集合的补运算(caculation of complementary of sets)　见"补集".

集合的对称差(symmetrical difference of sets)　亦称集合的不可兼并. 集合论的基本概念之一. 集合

$$(A-B)\cup(B-A)\text{或}(A\cup B)-(A\cap B)$$

称为集合 A 与集合 B 的对称差. 记为 $A\triangle B$. 可用符号表述为

$$A\triangle B=\{x\mid x\in A\cup B\wedge x\notin A\cap B\}$$

或

$$C=A\triangle B$$
$$\Leftrightarrow\forall\, x(x\in C\leftrightarrow(x\in A\vee x\in B\wedge x\notin A\cap B)).$$

集合的对称差有下列性质：

1. $A\triangle B=(A\cap\complement B)\cup(\complement A\cap B)$
$=(A\cup B)\cap(\complement A\cup\complement B)$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$.
2. $A\triangle B=B\triangle A$.
3. $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.
4. $A\triangle\varnothing=A$.
5. $A\triangle A=\varnothing$.
6. $A\triangle B=\complement A\triangle\complement B$.
7. $C\cap(A\triangle B)=(C\cap A)\triangle(C\cap B)$.
8. $A\triangle B=A\cup B$ 的充分必要条件是
$A\cap B=\varnothing$.
9. $A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B)$.
10. $A=B$ 的充分必要条件是 $A\triangle B=\varnothing$.
11. $A=B$ 的充分必要条件是对任一集合 K 有
$A\triangle K=B\triangle K$.

集合的不可兼并(exclusive union of sets)　即"集合的对称差".

集合的叉集(cross of sets)　集合论的基本概念之一. 集合 A 与 B 的对称差 $A\triangle B$ 的补集称为 A 与 B 的叉集. 记为 $A\otimes B$. 可用符号表述为

$$A\otimes B=\{x\mid x\notin A\triangle B\wedge x\in I\},$$

或

$$C=A\otimes B\Leftrightarrow\forall\, x(x\in C\leftrightarrow x\notin A\triangle B).$$

集合的叉集具有下列性质：

1. $A\otimes B=(\complement A\cup B)\cap(A\cup\complement B)$
$=\complement A\triangle B=A\triangle\complement B$
$=(\complement A\cap\complement B)\cup(A\cap B)$.
2. $A\otimes B=\complement A\otimes\complement B$.
3. $A\otimes B=B\otimes A$.
4. $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$.
5. $A\otimes A=I$.
6. $A\triangle B=\complement A\otimes B=A\otimes\complement B$.
7. $A\otimes\varnothing=\complement A$.
8. $A\otimes I=A$.
9. $A=B$ 的充分必要条件是 $A\otimes B=I$.

集合的笛卡儿乘积(Cartesian product of sets)　亦称集合的直积. 集合论的基本概念之一. 指一种特殊的集合. 由集合 A 的元素 a 与集合 B 的元素 b 作成的所有序偶 $\langle a,b\rangle$ 组成的集合 C 称为 A 与 B 的笛卡儿乘积或 A 与 B 直积，记为 $A\times B$. 可用符号表述为

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

或

$$C=A\times B\Leftrightarrow\forall\, x(x\in C$$
$$\leftrightarrow\exists\, a\exists\, b(a\in A\wedge b\in B\wedge x=\langle a,b\rangle)).$$

当 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 时，规定 $A\times B=\varnothing$. 如果标号集 A 是线性序集，集族 $\{X_a\}_{a\in A}$ 与 A 间有一一对应 $f:a\to X_a, a\in A$，可定义族中各集合的笛卡儿积集

$$\prod_{a\in A}X_a=\cdots X_a\times\cdots\times X_b\times\cdots\times X_c\times\cdots$$

为序组 $\langle\cdots,x_a,\cdots,x_b,\cdots,x_c,\cdots\rangle$ 的集合，这里指标 a,b,c 等按 A 中顺序排列，且对每个 $a\in A$ 有 $x_a\in X_a$. 若 $A=Z_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 是自然数截段，则 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\mid x_i\in X_i, i\in Z_n\}$. 若 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$，则它可简记为 X^n. 这里仍然规定，在某一个 $X_a=\varnothing$ 时，笛卡儿积 $\cdots\times X_a\times\cdots\times X_b\times\cdots\times X_c\times\cdots=\varnothing$. 集合的笛卡儿积不满足交换律与结合律. 即一般地有 $A\times B\neq B\times A$，$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\neq A\times B\times C$. 但有 $A\times B\sim B\times A$，$(A\times B)\times C\sim A\times(B\times C)\sim A\times B\times C$. 这里"$\sim$"是集合的对等关系. 由于笛卡儿积

$$\prod_{a\in A}X_a$$

中的一个元素 $\langle\cdots,x_a,\cdots,x_b,\cdots,x_c,\cdots\rangle$ 能惟一确定集合 A 到集合

$$\bigcup_{a\in A}X_a$$

的满足条件 $f(a)=x_a\in X_a$ 的一个映射，因此在对等的意义下

$$\prod_{a\in A}X_a$$

可认为是所有上述映射的集合. 两集合 A,B 的笛卡儿积、交与并有下列关系：

1. $(A\cap B)\times(A\cap B)=(A\times A)\cap(B\times B)$.
2. $(A\cup B)\times(A\cup B)\supseteq(A\times A)\cup(B\times B)$.

一般地，有

$$\prod_{a\in A}X_a=\{f:f\text{ 是函数}\wedge f\text{ 的定义域为 }A\wedge(\forall\, a\in A)(f(a)\in X_a)\}.$$

集合的直积(direct product of sets)　即"集合

的笛卡儿乘积".

集合的幂(power of set)　集合论的基本概念之一.每个 X_a 都是同一个集合 X 的笛卡儿乘积

$$\prod_{a\in A}X_a,$$

简记为 X^A.当 X 或 A 为空集时,$X^A=\varnothing$.当 X 与 A 都不是空集时,因为 $(\cdots,x_a,\cdots,x_b,\cdots,x_c,\cdots)\in X^A$ 与由 $f(a)=x_a(\forall a\in A)$ 确定的映射 $f:A\to X$ 之间的对应是一一的,所以 X^A 与从 A 到 X 的所有映射的集合等势.特别,当 X 是二元素集时,X^A 与 A 的幂集等势.当 $A=Z(n)=\{1,2,\cdots,n\}$ 时,乘幂 X^A 记为 X^n.

对角集(diagonal set)　一种特殊的集合.笛卡儿积 $M\times M$ 的子集 $\{\langle m,m\rangle|m\in M\}$ 称为 M 的对角集.记为 Δ 或 Δ_M 或 E_M.

集合代数(set algebra)　亦称幂集代数.一种特殊的集合族的代数.如果集族 $\mathscr{A}$ 的元素对于指定的某些集合运算封闭,这些运算满足若干公理,就称集族 $\mathscr{A}$ 关于这些运算在指定公理体系下成为一个集合代数.例如,集合环、集合域等都是集合代数.这里 $\mathscr{A}$ 称为这个集合代数的基础集(族),这些运算称为集合代数的运算.

常见的集合代数如下:

1.对于集合的并运算封闭的集族 $\mathscr{A}$ 作成的并代数:$\langle\mathscr{A},\cup\rangle$.

2.对于集合的交运算封闭的集族 $\mathscr{A}$ 作成的交代数:$\langle\mathscr{A},\cap\rangle$.

3.集合环:$\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle$.

4.集合域:$\langle\mathscr{A},\cap,\cup,^-\rangle$.

5.以全集 I 的幂集 $\mathscr{P}(I)$ 为基础集的集合代数:$\langle\mathscr{P}(I),\cap,\cup,\complement\rangle$."$\complement$"表示集合的补运算.这种集合代数是一种布尔代数(参见本卷《布尔代数》中的"幂集代数").

集合代数与其他代数不同之点是:

1.它以集族为基础集合.

2.它的运算是集合运算.

3.它的公理体系就是在集合运算的基本性质上添上或不添上若干附加要求.

幂集代数(power set algebra)　即"集合代数".

集合代数的基础集(族)(basic sets of set algebra)　见"集合代数".

集合环(ring of sets)　简称集环.一种常见的集合代数.若 $\mathscr{A}$ 为一非空集族,且对于任意 $A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{A}$,均有 $A\cap B\in\mathscr{A},A\cup B\in\mathscr{A}$,则称 $\mathscr{A}$ 在集合的交、并运算下成一集合环,记为 $\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle$.其中 $\mathscr{A}$ 称为集合环的基础集族,$\cap$ 与 $\cup$ 是集合环的运算.$\mathscr{U}=\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle$ 是集合环的条件可以用符号表述为 $\forall A\forall B(A\in\mathscr{A}\wedge B\in\mathscr{A}\to A\cap B\in\mathscr{A}\wedge A\cup B\in\mathscr{A})$.

集合环有下列性质:

1.设 $\mathscr{U}=\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle,A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$,则

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{A},\ \bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{A}.$$

2.设 $\mathscr{U}_i=\langle\mathscr{A}_i,\cap,\cup\rangle(i=1,2)$ 是集合环,则 $\mathscr{U}_1\cap\mathscr{U}_2=\langle\mathscr{A}_1\cap\mathscr{A}_2,\cap,\cup\rangle$ 也是集合环.例如,$\mathscr{U}_i=\langle\mathscr{A}_i,\cap,\cup\rangle(i=1,2)$ 是集合环,当 $\mathscr{A}_1\subseteq\mathscr{A}_2$ 时,称 $\mathscr{U}_1$ 是 $\mathscr{U}_2$ 的子集环,$\mathscr{U}_2$ 是 $\mathscr{U}_1$ 的母集环.

3.对任何集族 $\mathscr{M}$,存在一个包含它的最小集合环 $\mathscr{U}=\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle$,使 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{A}$.这只要取 $\mathscr{M}$ 中有限个元素的有限交的有限并来构成 $\mathscr{A}$ 就行了.

集环(ring of sets)　即"集合环".

集合环的基础集族(basic sets of ring of sets)　见"集合环".

集合域(field of sets)　一种常见的集合代数.若 $\mathscr{U}=\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle$ 是集合环,且当 $A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{A},B\supseteq A$ 时,$B-A\in\mathscr{A}$,则称该集合环为集合域.记为 $\langle\mathscr{A},\cap,\cup,^-\rangle$.这里差"$^-$"并不是域上的二元运算.因为当 $A\in\mathscr{A},B\in\mathscr{A},A\nsubseteq B$ 时,不要求

$$B-A\in\mathscr{A}.$$

集合的域有下列性质:

1.集合域一定是集合环.

2.对于任一非空集族 $\mathscr{M}$,存在一个包含它的最小域.只要求出包含 $\mathscr{M}$ 的最小集合环 $\mathscr{U}=\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle$,考虑 $\mathscr{A}$ 中的每一递降集列 $M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots$ 构造有限差链

$$M=(M_1-M_2)+(M_3-M_4)+(M_5-M_6)+\cdots+(M_{2n-1}-M_{2n}).$$

所有这些差链 M 的集合设为 $\mathscr{M}_0$.则 $\langle\mathscr{M}_0,\cap,\cup,^-\rangle$ 是包含 $\mathscr{M}$ 的最小域.

3.在集合环 $\mathscr{U}=\langle\mathscr{A},\cap,\cup\rangle$ 中,若凡少于 $\aleph_n$ 个 $\mathscr{A}$ 中的元素的交都在 $\mathscr{A}$ 中,则所有 $\mathscr{A}$ 中元素作成的长度小于 ω_n 的差链构成一个域.进一步,若 $\mathscr{A}$ 中任意多个元素的交都在 $\mathscr{A}$ 中,则由 $\mathscr{A}$ 中元素作成的一切差链构成一个域.

4.若 $\langle\mathscr{A},\cap,\cup,^-\rangle$ 是集合域,则 $\varnothing\in\mathscr{A}$.

集合代数的对偶原理(duality principle of set algebra)　集合论的一个重要原理.它是表述集合代数 $\langle\mathscr{P}(I),\cap,\cup,\complement\rangle$ 中定理成对出现的一个原理.在集合代数 $\langle\mathscr{P}(I),\cap,\cup,\complement\rangle$ 中,对一个定理(一个陈述)而言,把出现的符号 $\cup$ 与 $\cap$,$\varnothing$ 与 I,$\subseteq$ 与 $\supseteq$ 处处互换,其余不变,所得到的命题称为原命题的对偶命题,它仍然是该代数中的一个定理.对偶原理来源于布尔代数的对偶原理(参见本卷《布尔代数》中的"布尔代数的对偶原理").

集列的上极限(superior limit of a set sequence)

集合论的基本概念之一. 它是一种特殊的集合. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\}$ 为一集合序列，由属于集列中无限多个集合的元素 a 构成的集合 B，称为该集列的上极限. 记为 $\overline{\lim}\,A_n$，即 $B=\overline{\lim}\,A_n=\{a\mid\forall\, m\in\mathrm{N}\exists\, n\in\mathrm{N}(n>m\wedge a\in A_n)\}$.

集列的上极限有下列性质：

1. 常集列 $A,A,\cdots,A,\cdots$ 的上极限为 A.

2. 单调降集列 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$ 的上极限为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

3. 单调升集列 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$ 的上极限为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

4. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的上极限 $\overline{\lim}\,A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$.

5. 在集列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中加进或删掉或变更有限项时，上极限不变.

6. 若 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_n},\cdots$ 是某集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的一个子集列，则 $\overline{\lim}\,A_{i_n}\subseteq\overline{\lim}\,A_n$. 即子列的上极限含于母列的上极限.

7. 集列的上极限是它的补集列的下极限的补集. 即

$$\overline{\lim}\,A_n=\complement(\underline{\lim}\,\complement A_n).$$

(集列 $\{\complement A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的每一项是集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的具有相同序码的项的补集，称这两个集列互补).

8. 任何一个集列的上极限包含它的下极限，即 $\overline{\lim}\,A_n\supseteq\underline{\lim}\,A_n$(参见“集列的下极限”).

集列的下极限(inferior limit of a set sequence) 集合论的基本概念之一. 它是一种特殊的集合. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\}$ 为一集合序列，由属于集列中几乎一切集合(即集列中某一项以后所有的集)的元素 a 构成的集合 B，称为该集列的下极限. 记为 $\underline{\lim}\,A_n$，即 $B=\underline{\lim}\,A_n=\{a\mid\exists\, m\in\mathrm{N}\forall\, n\in\mathrm{N}(n>m\rightarrow a\in A_n)\}$.

集列的下极限有下列性质：

1. 常集列 $A,A,\cdots,A,\cdots$ 的下极限为 A.

2. 单调降集列 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$ 的下极限为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

3. 在集列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中加进或删掉或变更有限项，下极限不变.

4. 若 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_n},\cdots$ 是集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的子列，则 $\underline{\lim}\,A_n\subseteq\underline{\lim}\,A_{i_n}$. 即子列的下极限包含母列的下极限.

5. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的下极限 $\underline{\lim}\,A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k)$.

6. 集列的下极限是它的补集列的上极限的补集，即

$$\underline{\lim}\,A_n=\complement(\overline{\lim}\,\complement A_n).$$

集列 $\{\complement A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的每一项是集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的具有相同序码的项的补集，称这两个集列互补.

7. 任何一个集列的下极限含于它的上极限，即

$$\underline{\lim}\,A_n\subseteq\overline{\lim}\,A_n.$$

集列的极限(limit of a set sequence) 集合论的基本概念之一. 它是一种特殊的集合. 若集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的上极限与下极限相等为 A，则称 A 是它的极限，记为 $\lim A_n$. 即 $A=\lim A_n$. 有极限的集列称为收敛集列.

集列的极限有下列性质：

1. 常集列 $A,A,\cdots,A,\cdots$ 收敛，它的极限为 A.

2. 单调降集列 $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$ 收敛，它的极限为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

3. 单调升集列 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$ 收敛，它的极限为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

4. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 有极限的充分必要条件是

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k).$$

5. 在收敛集列中添加或删掉或变更有限项时，极限不变.

收敛集列(convergent set sequence) 一类重要的集列. 有极限的集列称为收敛集列. 常集列、单调升集列、单调降集列都是收敛集列. 下面是一组等价命题：

1. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 收敛于 A.

2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k)=A$.

3. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 的任何子列收敛于 A.

集族的界(bounds of a set family) 集合论的基本概念之一. 集族的上界、下界的统称. 对于集族 $\mathscr{A}$，若存在一个集合 B，对任何 $A\in\mathscr{A}$ 有 $A\subseteq B$，则称 B 是 $\mathscr{A}$ 的一个上界. 又若对于 $\mathscr{A}$ 的任何上界 C 均有 $B\subseteq C$，则称 B 是 $\mathscr{A}$ 的最小上界(或上确界). 记为 $B=\sup\mathscr{A}$. 对于集族 $\mathscr{A}$，若存在一个集合 B，对任何 $A\in\mathscr{A}$ 均有 $B\subseteq A$，则称 B 是 $\mathscr{A}$ 的一个下界. 又若对于 $\mathscr{A}$ 的任何下界 C 均有 $C\subseteq B$，则称 B 是 $\mathscr{A}$ 的最大下界(或下确界). 记为 $B=\inf\mathscr{A}$. 对集族 $\mathscr{P}(I)$，$\varnothing$ 是一个下界，全集 I 是一个上界. 集族 $\{A_a\}_{a\in M}$ 的最小上界是

$$\bigcup_{a\in M}A_a,$$

最大下界是

$$\bigcap_{a\in M}A_a.$$

集族的上界(upper bound of a set family) 见“集族的界”.

集族的下界(lower bound of a set family) 见“集族的界”.

集族的上确界(supremum of a set family) 见

"集族的界".

集族的下确界(infimum of a set family)　见"集族的界".

集合格(lattice of sets)　亦称集合布尔格,又称集合布尔代数.一种特殊的格.指以集合为元素的格.全集 I 的幂集 $\mathscr{P}(I)$ 对交、并运算是封闭的,对包含于关系"$\subseteq$"是偏序的,成为有序集合代数 $\mathscr{L}=\langle\mathscr{P}(I),\cap,\cup,\subseteq\rangle$ 的一个格,称为集合格.其他以 I 的子集为元素的格,都是它的子格.由于 $\mathscr{L}$ 中交对并的分配律与并对交的分配律都成立,所以,$\mathscr{L}$ 还是分配集合格.加之 $\mathscr{P}(I)$ 中每个集都有补集,则 $\mathscr{L}$ 又是集合补格.

集合布尔格(Boolean lattice of sets)　即"集合格".

集合布尔代数(Boolean algebra of sets)　即"集合布尔格".

滤子(filter)　一种特殊的集合族.设 S 是非空集合,S 上的滤子是由 S 的子集所组成的集族 $\mathscr{F}$.它满足下列条件:

1. $S\in\mathscr{F}$,且 $\varnothing\notin\mathscr{F}$.
2. 若 $X\in\mathscr{F}$ 和 $Y\in\mathscr{F}$,则 $X\cap Y\in\mathscr{F}$.
3. 若 $X\in\mathscr{F}$,且 $X\subseteq Y\subseteq S$,则 $Y\in\mathscr{F}$.

令 A 是 S 的非空子集,$\mathscr{F}=\{X\subseteq S\mid X\supseteq A\}$,则 $\mathscr{F}$ 是 S 上的一个滤子,并称它为 S 上的由 A 生成的主滤子.滤子概念与大基数理论有关,并且在许多数学分支中扮演着重要的角色.滤子是嘉当(Cartan,H.)于 1937 年提出的.

主滤子(principal filter)　见"滤子".

理想(ideal)　一种特殊的集族.它与滤子相对偶.令 S 是一非空集,S 上的理想 $\mathscr{I}$ 是由 S 的子集所组成的集族.它满足下列条件:

1. $\varnothing\in\mathscr{I}$,且 $S\notin\mathscr{I}$.
2. 若 $X\in\mathscr{I}$,且 $Y\in\mathscr{I}$,则 $X\cup Y\in\mathscr{I}$.
3. 若 $Y\in\mathscr{I}$,且 $X\subseteq Y$,则 $X\in\mathscr{I}$.

S 上的理想 $\mathscr{P}$ 被称为素理想,如果对每个 $X\subseteq S$,有 $X\in\mathscr{P}$ 或 $S-X\in\mathscr{P}$.

理想概念是斯通(Stone,M. H.)于 1934 年提出的.

素理想(prime ideal)　见"理想".

关　　系

关系(relation)　常指二元关系.数学的基本概念之一.任一序偶的集合 R 称为一个二元关系.R 中任一序偶 $\langle x,y\rangle$ 可记为 $\langle x,y\rangle\in R$ 或 xRy,称对象 x 与 y 为有关系 R.不在 R 中的任一序偶 $\langle x,y\rangle$ 可记为 $\langle x,y\rangle\notin R$ 或 $x\overline{R}y$(参见"反关系").例如,在实数中关系"$<$"可记为

$$<=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\text{ 是实数,且 }x<y\}.$$

任何二元谓词 $P(x,y)$ 可以确定一个二元关系.即所有使 $P(x,y)$ 为真的序偶所组成的集合:$\{\langle x,y\rangle\mid P(x,y)\text{成立}\}$.等价地,令 X 和 Y 是任意两个集合,直积 $X\times Y$ 的任何子集 R 称为 X 到 Y 的一个关系.令 R 为二元关系,由 $\langle x,y\rangle\in R$ 确定的所有 x 组成的集合 $\operatorname{dom}R$(或 $\mathrm{D}(R)$)称为 R 的定义域(或前域).即 $\operatorname{dom}R=\{x\mid(\exists\ y)(\langle x,y\rangle\in R)\}$.使 $\langle x,y\rangle\in R$ 的所有 y 组成的集合 $\operatorname{ran}R$(或 $\mathrm{C}(R)$)称为 R 的值域(或后域),即 $\operatorname{ran}R=\{y\mid(\exists\ x)(\langle x,y\rangle\in R)\}$.$R$ 的定义域和值域之并称为 R 的变域.记为 $\mathrm{FLD}(R)$(或 $\mathrm{F}(R)$)即 $\mathrm{FLD}(R)=\operatorname{dom}R\cup\operatorname{ran}R$.设 $R\subseteq X\times Y$,则 $\operatorname{dom}R\subseteq X$,且 $\operatorname{ran}R\subseteq Y$.今后把 $X\times Y$ 的两个平凡子集 $X\times Y$ 和 $\varnothing$ 分别称为 X 到 Y 的全关系和空关系.当 $X=Y$ 时,关系 R 是 $X\times X$ 的子集.这时 R 称为 X 上的二元关系.可将二元关系的定义推广到 n 元关系:设 $R\subseteq X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$,则 R 称为 n 元关系(参见本卷《形式逻辑》中的"关系").

二元关系(binary relation)　见"关系".

关系的定义域(domain of a relation)　见"关系".

关系的前域(domain of a relation)　见"关系".

关系的值域(range of a relation)　见"关系".

关系的后域(converse domain of a relation)　见"关系".

关系的变域(field of a relation)　见"关系".

***n* 元关系**(n-ary relation)　二元关系的推广.$\langle x_1,x_2,x_3\rangle=\langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle$ 称为有序三元组.$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$ 称为有序 n 元组.任一有序 n 元组的集合 R 称为 n 元关系.若 $\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\in R$,则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为有关系 R.等价地,设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个集合,直积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的任何子集 R 称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 上的关系.特别当 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$ 时,则 R 称为 X 上的 n 元关系.n 元谓词 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 确定一个 n 元关系 R.即 $R=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\mid R(x_1,x_2,\cdots,x_n)\text{成立}\}$.例如,取 $R(x,y,z)$ 为"x 是 y 和 z 的最大公因子"就决定了一个三元关系 R.有序三元组 $\langle 3,6,63\rangle\in R$,而 $\langle 3,8,63\rangle\notin R$.

有序三元组(ordered triad)　见"n 元关系".

有序 *n* 元组(ordered n-ary group)　见"n 元关系".

关系的运算(computation of the relations)　特殊集合间的映射.集合 X 与 Y 间的所有关系组成的集合是 $X\times Y$ 的幂集合 $\mathscr{P}=P(X\times Y)$.一般称映射 $f:\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ 为关系的一元运算,映射 $f:\mathscr{P}\times\mathscr{P}\to\mathscr{P}$ 为关系的二元运算.常见的关系运算有:

1. 反演. $f: R \to \overline{R}$. 即让关系 R 的反关系 $\overline{R}$ 与 R 对应. 这是一个一元运算.

2. 并运算. 又名关系的加法. $f: \langle R,G \rangle \to R \cup G$. 对 $x \in X, y \in Y, x(R \cup G)y$,当且仅当 xRy 或 xGy.

3. 交运算. $f: \langle R,G \rangle \to R \cap G$. 对 $x \in X, y \in Y$, $x(R \cap G)y$,当且仅当 xRy 且 xGy.

4. 减法. $f: \langle R,G \rangle \to R - G$. 对 $x \in X, y \in Y, x(R - G)y$,当且仅当 xRy,且 $x\overline{G}y$.

这些关系的运算实际上是 $\mathscr{P}$ 中的集合的运算,具有集合运算的各种规律.

5. 关系的复合. 如果 R 是 X 与 Y 间的关系,G 是 Y 与 Z 间的关系,定义 X 与 Z 间的关系 $R \circ G$. 对 $x \in X, z \in Z, x(R \circ G)z$,当且仅当存在 $y \in Y$,使 xRy,且 yGz. 这时称关系 $R \circ G$ 是 R 与 G 的复合(或合成,或积). 关系的复合具有下列性质:

1) 结合律:$(R \circ G) \circ Q = R \circ (G \circ Q)$,
$Q \subseteq Z \times T$.

2) $(R \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ R^{-1}$.

3) 如还有 $P \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$,则

$$R \circ (G \cup S) = R \circ G \cup R \circ S,$$
$$(P \cup R) \circ G = P \circ G \cup R \circ G,$$
$$R \circ (G \cap S) = R \circ G \cap R \circ S,$$
$$(P \cap R) \circ G = P \circ G \cap R \circ G.$$

关系的一元运算(univariate computation of a relation)　见“关系的运算”.

关系的二元运算(binary computation of relations)　见“关系的运算”.

复合关系(composite relation)　亦称合成关系,又称关系的相对积. 关系的一种运算. 设 R 为 X 到 Y 的关系,S 为 Y 到 Z 的关系,则 $R \circ S$ 称为 R 和 S 的复合关系. 定义如下:

$$R \circ S = \{\langle x,z \rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists\ y)(y \in Y \wedge \langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,z \rangle \in S\}.$$

例如,若 R_1 是弟兄关系,R_2 是父子关系. 则 $R_1 \circ R_2$ 是叔侄关系. $R_1 \circ R_1$ 还是弟兄关系,而 $R_2 \circ R_2$ 则是祖孙关系. 由定义可见,x 和 z 有 $R \circ S$ 关系,当且仅当有一个 $y \in Y$,将 x 和 z 联系起来. 这里 y 起 x 和 z 之间的桥梁和连结的作用(参见“关系的运算”).

合成关系(composite relation)　即“复合关系”.

关系的相对积(relative product of relations)　即“复合关系”.

关系的相容(consistence of a relation)　集合论的一个重要概念. 两个关系有可能同时成立,或表示关系的两个集合的交不空. 若对关系 $R \subseteq X \times Y$ 与 $G \subseteq X \times Y$,存在 $\langle x,y \rangle \in R \cap G$,则称 R 与 G 是相容的. 反之,若不存在 $\langle x,y \rangle \in R \cap G$,即对任何 $x \in X, y \in Y$, xRy 与 xGy 不能同真,则称关系 R 与 G 不相容. 例如,直线的平行关系与垂直关系是不相容的,而直线的相交关系与垂直关系是相容的. 从集合运算的角度看,关系 R 和 G 相容,即 $R \cap G \neq \varnothing$.

不相容关系(incompatible relation)　见“关系的相容”.

关系的图象(graph of a relation)　对关系的刻画. 指一种特殊集合. 设 R 为以集合 X 与集合 Y 为变域的关系,则由直积 $X \times Y$ 中满足关系 xRy 的元素 $\langle x,y \rangle$ 的全体组成的集合 $G_R = \{\langle x,y \rangle \mid xRy\}$ 称为关系 R 的图象. 对于直积 $X \times Y$ 的任意子集 G,以 G 为图象的关系 R 可由 $xRy \Leftrightarrow \langle x,y \rangle \in G$ 惟一确定. 关系的图象常可以直观地表示出来. 例如,实数集上的二元关系 $R(x,y)$=“x 是 y 的 2 倍”可以用 xy 平面上的一条直线表示;关系 $G(x,y)$=“x 比 y^2 的 2 倍大”可以用 xy 平面上的一个区域来表示. 两个有限集之间的关系可用“箭头图”表示. 例如,X={虎,鸡,羊},Y={肉,草,石},关系 $R(x,y)$=“x 以 y 为食物”={〈虎,肉〉,〈鸡,肉〉,〈鸡,草〉,〈羊,草〉}可用图 1 表示. 图中箭头总是从关系的前域引向后域,并且当 xRy 时才用箭头连结 x 与 y. 作有限集 A 上的二元关系 $R \subseteq A \times A$ 的箭头图时,可以只画出集合 A,并且当 a_1Ra_2 时从 a_1 引出一箭头指向 a_2,又若 a_1Ra_1,则有一个从 a_1 出发指向 a_1 的弯曲箭头. 例如,集合 $A=\{2,3,6,7\}$上的整除关系 R=“x 整除 y”$=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 7,7\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle\}$可用图 2 表示. 集合 A 上的二元关系 R 的某些性质可以从它的箭头图上直观地看出:

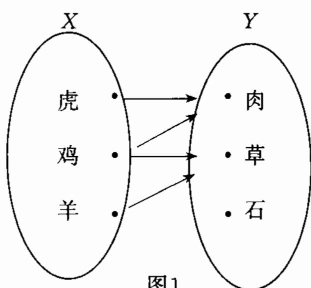


图1

1. R 是自反的,当且仅当 A 的每个元素都有一个从它出发而又指向它本身的箭头.

2. R 是对称的,当且仅当联系 A 的两个不同元素的箭头都是双向的(双向箭头是把两个箭头画在一起的结果).

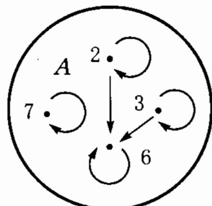


图 2

3. R 是传递的,当且仅当有从 a 指向 b 的箭头,且有从 b 指向 c 的箭头时,就有从 a 指向 c 的箭头.

4. R 是逆对称的,当且仅当图中没有双向箭头. 在这种情况,可以有也可以没有从一个元素出发指向自身的箭头.

5. R 是连通的,当且仅当 A 的任何两个不同元素间都至少有一个箭头联系.

6. R 是强连通的，当且仅当 A 的任何两个不同元素都至少有一个箭头联系，且每个元素都有一箭头从它出发而指向自身.

关系的截痕(cross section of a relation) 对关系的刻画. 指一种特殊集合. 对于二元关系 $R\subseteq A\times B$，当 $a\in A$ 时，集合

$$\{\langle a,b\rangle \mid (b\in B\wedge aRb)\}$$

称为关系 R 在 a 处的截痕. 有时也把集合$\{b\mid (b\in B\wedge aRb)\}$称为 R 在 a 处的截痕. 同样，当 $b\in B$ 时，集合$\{\langle a,b\rangle \mid (a\in A\wedge aRb)\}$与$\{a\mid (a\in A\wedge aRb)\}$称为关系 R 在 b 处的截痕. 对于 $n(n\geqslant 2)$元关系 $R(a_1, a_2,\cdots,a_n)\subseteq A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，当 $a\in A_j$ 时，集合$\{\langle a_1,\cdots,a_{j-1},a,a_{j+1},\cdots,a_n\rangle \mid a_i\in A_i\wedge i\neq j\wedge R(a_1,\cdots,a_{j-1},a,a_{j+1},\cdots,a_n)\}$称为关系 R 在 $a_j=a$ 时的截痕.

反关系(anti-relation) 亦称否定关系、补关系. 与一已知关系相关的一种关系. 指它成立时，原关系必不成立的那种关系，或表示一个关系的集合的余集所表示的那种关系. 对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，关系 $\overline{R}=X\times Y-R$ 称为 R 的反关系. 这两个关系有下列联系(式中 D 和 C 分别表示关系的定义域和值域)：

1. $\mathrm{D}(\overline{R})\cup\mathrm{D}(R)=X$，$\mathrm{D}(\overline{R})\cap\mathrm{D}(R)$不一定是$\varnothing$.

2. $\mathrm{C}(\overline{R})\cup\mathrm{C}(R)=Y$，$\mathrm{C}(\overline{R})\cap\mathrm{C}(R)$不一定是$\varnothing$.

3. 当 $x\in X,y\in Y$ 时，xRy，当且仅当$\neg(x\overline{R}y)$；$x\overline{R}y$，当且仅当$\neg(xRy)$.

例如，集合包含关系“$\subseteq$”的反关系是不含于关系“$\not\subseteq$”.

否定关系(negative relation) 即“反关系”.

补关系(complement relation) 即“反关系”.

逆关系(inverse relation) 一种特殊的关系. 对于两个事物之间的某个关系，颠倒事物的位置以后其间存在的关系. 利用关系 $R\subseteq X\times Y$，定义其逆关系 $R^{-1}\subseteq Y\times X$，使得 $yR^{-1}x$，当且仅当 xRy. R 与 R^{-1}有如下联系(式中 D,C 和 F 分别表示关系的定义域、值域和变域)：

1. $\mathrm{D}(R^{-1})=\mathrm{C}(R)$.
2. $\mathrm{C}(R^{-1})=\mathrm{D}(R)$.
3. $\mathrm{F}(R^{-1})=\mathrm{F}(R)$.
4. $x\in X,y\in Y$ 时，xRy 当且仅当 $yR^{-1}x$.
5. $(R^{-1})^{-1}=R$.

如有另外的关系 $G\subseteq X\times Y$，则

6. $(R\cup G)^{-1}=R^{-1}\cup G^{-1}$.
7. $(R\cap G)^{-1}=R^{-1}\cap G^{-1}$.
8. $(R-G)^{-1}=R^{-1}-G^{-1}$.
9. $(\overline{R})^{-1}=\overline{(R^{-1})}$.
10. 若 $R\subseteq G$，则 $R^{-1}\subseteq G^{-1}$.
11. 全关系的逆是全关系，空关系的逆是空关系.

恒等关系(identity relation) 亦称同一关系. 一种等价关系. 反映任何事物与其自身相同的关系. 集合 A 上二元关系 R，对任何 $a,b\in A$，有 aRa，且在 $a\neq b$ 时 $a\overline{R}b(\neg(aRb))$. 记为 I_A. 用符号表示：R 是 A 上的恒等关系 $\Leftrightarrow\forall a\forall b(a\in A\wedge b\in A\wedge a\neq b\rightarrow aRa\ \wedge\neg(aRb))$. 即 $I_A=\{\langle a,a\rangle \mid a\in A\}$. A 上的恒等关系常记为 E，E 也是 $A\times A$ 的对角集$\{\langle a,a\rangle \mid a\in A\}$. 恒等关系反映一个事物与自身相同，而不同于其他任何事物. 例如，数的相等关系、矩阵的相等关系、数域上多项式的相等关系都是恒等关系，而图形的等积关系、三角形的相似关系不是恒等关系. 如 E 是 A 上的恒等关系，则 $E^{-1}=E$；$E\circ E=E\cup E=E\cap E=E$；$E-E$ 是空关系；E 的矩阵的主对角线上全是 1，其余元素全是 0；对 A 上的任何关系 R，

$$R\circ E=E\circ R=R.$$

同一关系(identity relation) 即“恒等关系”.

自反关系(reflexive relation) 一种特殊的关系. 指任何事物与其自身之间都具有的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R，对于任何 $a\in A$，均有 aRa. 用符号表示：R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow\forall a(a\in A\rightarrow aRa)$. 当 R 是 A 上的自反关系时，称 R 在 A 上是自反的，或 A 上的关系 R 有自反性. 例如，整数集上，关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x$ 不大于 $y\}$是自反的，而 $G=\{\langle x,y\rangle \mid x$ 小于 $y\}$不是自反的. 当 A 上的二元关系 R 是自反关系时，对角集 $E_A=\{\langle a,a\rangle \mid\forall a(a\in A)\}\subseteq R$. R 的矩阵 M_R 的主对角线上元素全为 1.

反自反关系(anti-reflexive relation) 一种特殊的关系. 指任何事物与其自身之间都不具有的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R，对任何 $a\in A$，均有 $a\overline{R}a(\neg(aRa))$. 用符号表示：$R$ 是 A 上的反自反关系 $\Leftrightarrow\forall a(a\in A\rightarrow\neg(aRa))$. 当 A 上的 R 为反自反关系时，称 R 在 A 上是反自反的，或说 A 上的关系 R 有反自反性. 例如，整数集上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x$ 大于 $y\}$是反自反的，又如人群中关系 $G=\{\langle x,y\rangle \mid x$ 是 y 的父亲$\}$是反自反的. 一个关系不能既是自反的又是反自反的. 但存在既不是自反的又不是反自反的关系. 如 $A=\{a,b\}$上的二元关系 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$. 当 A 上的关系 R 是反自反的时，A 的矩阵的主对角线上的元素全为 0.

对称关系(symmetric relation) 一种特殊的关系. 指与自身的逆关系完全相同的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R，对任何 $a,b\in A$，当 aRb 时有 bRa. 用符号表示：R 是 A 上的对称关系 $\Leftrightarrow\forall a\forall b(a\in A\wedge b\in A\wedge aRb\rightarrow bRa)$. 当 A 上的 R 是对称关系时，

称 R 在 A 上是对称的，或称 A 上的关系 R 有对称性. 例如，数集中的关系 $I=\{\langle x,y\rangle|x$ 与 y 相等$\}$，$N=\{\langle x,y\rangle|x$ 与 y 不等$\}$都是对称关系；而 $L=\{\langle x,y\rangle|x$ 小于 $y\}$不是对称关系. 当 A 上的关系 R 是对称的时，它的补关系 $\bar{R}$ 与逆关系 R^{-1}都是对称的，且 $R=R^{-1}$.

反对称关系(antisymmetric relation)　亦称逆对称关系、斜对称关系、弱反对称关系. 一种特殊的关系. 指那种关系：若任二事物同时具有它和它的逆关系，则这二事物相同. 集合 A 上的二元关系 R，对任何 $a,b\in A$，当 aRb,bRa 时，有 $a=b$. 用符号表示：R 是 A 上的反对称关系 $\Leftrightarrow \forall a\forall b(a\in A\wedge b\in A\wedge aRb\wedge bRa\to a=b)$. R 是 A 上的反对称关系时，称 R 在 A 上是反对称的，或称 A 上的关系 R 有反对称性. 例如，在数集上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle|x\leqslant y\}$以及集族上的关系 $G=\{\langle X,Y\rangle|X\subseteq Y\}$都是反对称的. 当 A 上的二元关系 R 有反对称性时，它与它的逆关系的交 $R\cap R^{-1}$是恒等关系 $E=\{\langle a,a\rangle|\forall a(a\in A)\}$的一个子关系，即 $R\cap R^{-1}\subseteq E$；反之，当 $R\cap R^{-1}\subseteq E$ 时，R 必是一个反对称关系.

逆对称关系(inverse symmetric relation)　即“反对称关系”.

斜对称关系(skew symmetric relation)　即“反对称关系”.

弱反对称关系(weak asymmetric relation)　即“反对称关系”.

不对称关系(asymmetric relation)　亦称强反对称关系. 一种特殊的关系. 指自身成立时，其逆关系必不成立的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R，对任何 $a,b\in A$，当 aRb 时，有 $b\bar{R}a(\neg(bRa))$. 用符号表示：R 是 A 上的不对称关系 $\Leftrightarrow \forall a\forall b(a\in A\wedge b\in A\wedge aRb\to\neg(bRa))$. 当 A 上的 R 为不对称关系时，称 R 在 A 上不对称，或说 A 上的关系 R 有不对称性. 例如，人群中关系 $R=\{\langle x,y\rangle|x$ 是 y 的母亲$\}$是不对称的. 不是对称关系的关系，可能既不是反对称的，也不是不对称的. 例如，$A=\{1,2,3\}$上的关系 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$就是这样. 若 R 是 A 上的反对称关系，E 是 A 上的恒等关系，则 $R-E$ 就是 A 上的不对称关系. A 上的不对称关系 R 的矩阵 $M_R=[r_{ij}]_{m\times n}$中，所有 $r_{ii}=0$，且对任何 $0\leqslant i\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n,i\neq j$ 时，$r_{ij}\cdot r_{ji}=0$.

强反对称关系(strongly antisymmetric relation)　即“不对称关系”.

传递关系(transitive relation)　一种特殊的关系. 指由甲、乙和乙、丙都有，可推知甲、丙也有的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R，对任何 $a,b,c\in A$，当 aRb,bRc 时，有 aRc. 用符号表示：R 是 A 上的传递关系 $\Leftrightarrow \forall a\forall b\forall c(a\in A\wedge b\in A\wedge c\in A\wedge aRb\wedge bRc\to aRc)$. 当 A 上的 R 是传递关系时，称 R 在 A 上是传递的，或说 A 上的关系 R 有传递性. 例如，实数集中的小于关系与不小于关系都是传递的；而人群中的同学关系是不传递的. 若 R 在 A 上是传递的，则 $R\circ R\subseteq R$；反之，如 $R\circ R\subseteq R$，则 R 在 A 上是传递的. 一个反自反的传递关系是不对称的. 一个反自反的对称非空关系不是传递关系.

反传递关系(anti-transitive relation)　一种特殊的关系. 指由甲、乙和乙、丙都有，可推知甲、丙一定没有的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R，对任何 $a,b,c\in A$，当 aRb,bRc 时，有 $a\bar{R}c(\neg(aRc))$. 用符号表示：R 是 A 上的反传递关系$\Leftrightarrow\forall a\forall b\forall c(a\in A\wedge b\in A\wedge c\in A\wedge aRb\wedge bRc\to\neg(aRc))$. 当 A 上的 R 是反传递关系时，称 R 在 A 上是反传递的，或 A 上的关系 R 有反传递性. 例如，在人群中关系 $R=\{\langle x,y\rangle|x$ 是 y 的父亲$\}$是反传递的. 一个关系不是传递关系时，也可能不是反传递的. 如关系 $G=\{\langle x,y\rangle|x$ 是 y 的同学$\}$，既不是传递的，也不是反传递的.

关系的自反闭包(reflexive closure of a relation)　集合论的基本概念之一. 指一种关系. 对集合 A 上的二元关系 R，若存在另一关系 R'，满足：

1. R'是自反的；
2. $R'\supseteq R$；
3. 对于任何自反关系 R''，$R''\supseteq R$ 蕴含 $R''\supseteq R'$，

则 R' 称为 R 的自反闭包. 记为 $r(R)$.

R 的自反闭包 $r(R)$具有下列性质：

1. 当且仅当 R 是自反关系时，$R=r(R)$.
2. 对任何 R，
   $r(R)=R\cup E(E=\{\langle a,a\rangle|a\in A\})$.
3. $r(R)$是包含 R 的最小的自反关系.

关系的对称闭包(symmetric closure of a relation)　集合论的基本概念之一. 指一种关系. 设 R 是集合 A 上的二元关系，若存在另一关系 R'，满足：

1. R'是对称的；
2. $R'\supseteq R$；
3. 对任何对称关系 R''，$R''\supseteq R$ 蕴含 $R''\supseteq R'$，

则 R' 称为 R 的对称闭包. 记为 $S(R)$.

R 的对称闭包具有下列性质：

1. 当 R 是对称关系时，$R=S(R)$.
2. 对任何 R，$S(R)=R\cup R^{-1}$，且 $S(R)$惟一.
3. 对任何 R，$rS(R)=r(S(R))=R\cup E\cup R^{-1}$，

这里 $rS(R)$称为 R 的自反对称闭包.

4. $S(R_1\cup R_2)=S(R_1)\cup S(R_2)$
   $=R_1\cup R_2\cup R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$.
5. $S(R)=S(R^{-1})$.

6. $S(R)\cap S(G)=S(R\cap G)\cup S(R\cap G^{-1})$.

关系的传递闭包(transitive closure of a relation)　集合论的基本概念之一. 指一种关系. 对集合 A 上的二元关系 R,如果存在另一关系 R',满足:

1. R' 传递;
2. $R'\supseteq R$;
3. 对任何传递关系 R'',$R''\supseteq R$ 蕴含 $R''\supseteq R'$,

则 R' 称为 R 的传递闭包. 记为 $t(R)$.

R 的传递闭包 $t(R)$ 具有下列性质:

1. 当 R 是传递关系时,$R=t(R)$.
2. 对任何 R,$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\cup\cdots$,这里 $R^2=R\circ R, R^n=R^{n-1}\circ R, n=2,3,4,\cdots$.
3. 对任何 R,$rt(R)=r(t(R))=E\cup(\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i)$,这里 $rt(R)$ 称为 R 的自反传递闭包.
4. $t(R)$ 是包含 R 的最小的传递关系.

关系的自反传递闭包(reflexive transitive closure of the relation)　见"关系的传递闭包".

空关系(empty relation)　一种特殊关系. 指关系集 $A\times B$ 中的子集 $\varnothing$. 非空集合中的空关系是反自反的、对称的、反对称的和传递的,但不是自反的;空集合中的空关系则是自反的、反自反的、对称的、反对称的和传递的. 非空集合的空关系的矩阵各元素都是 0(参见"关系").

全域关系(universal relation)　亦称全关系. 一种特殊关系. 指 A 与 B 上的全关系 $R=A\times B$. 基数大于 1 的集合上的全域关系是自反的、对称的和传递的,但不是反自反的和反对称的. 全域关系的矩阵中所有元素都是 1(参见"关系").

全关系(total relation)　即"全域关系".

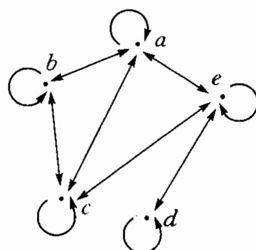
连通关系(connected relation)　亦称弱连通关系、严格可比关系. 一种特殊的关系. 指任意两个不同的事物之间,与其反关系总有一个成立的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R,对任何 $a,b\in A, a\neq b$ 有 aRb 或 bRa. 用符号表示:R 是 A 上的连通关系 $\Leftrightarrow\forall a\forall b(a\in A\wedge b\in A\wedge a\neq b\rightarrow aRb\vee bRa)$. 当 R 是 A 上的连通关系时,称 R 在 A 上是连通的,或称 A 上的关系 R 有连通性. 例如,实数集上的小于关系"$<$"是连通的,"$\leqslant$"也是连通的. A 上关系 R 是连通的,当且仅当它把 A 中任何两个不相同的元素都联系起来. 如 R 的矩阵为 $M_R=(r_{ij})_{\lambda}$,则对任何 $i,j\in\lambda, i\neq j$ 时 r_{ij} 与 r_{ji} 中至少有一个是 1;如 R 是连通的,则 R^{-1} 是连通的,且 $R\cup R^{-1}$ 的矩阵主对角线以外的元素全为 1;若 R,G 是连通的,则 $R\cup G$ 也是连通的.

弱连通关系(weakly connected relation)　即"连通关系".

严格可比关系(strict comparable relation)　即"连通关系".

强连通关系(strong connected relation)　一种特殊的关系. 指任意两个事物之间与其反关系总有一个成立的那种关系. 集合 A 上的二元关系 R,对任何 $a,b\in A$,有 aRb 或 bRa. 用符号表示:R 是 A 上的强连通关系 $\Leftrightarrow(\forall a\in A)(\forall b\in A)(aRb\vee bRa)$. 当 A 上关系 R 是强连通关系时,称 R 在 A 上强连通,或称 A 上关系 R 有强连通性. 例如实数集上关系"$\leqslant$"是强连通的,而"$<$"不是强连通的. A 上的强连通关系一定是连通关系;若 R 强连通,则 R^{-1} 也强连通,且 $R\cup R^{-1}=A\times A$.

相容关系(compatible relation)　一种重要的二元关系. 指集合 A 上具有自反性与对称性的二元关系. 若 R 是 A 上的相容关系,$S\subseteq A$,S 内任何两元素有关系 R,而 $A-S$ 内任何元素至少与 S 内某一个元素没有关系 R,则称 S 是 A 关于 R 的一个极大相容类. S 的子集都称为相容类. 用符号表示:S 是 A 关于 R 的极大相容类 $\Leftrightarrow\forall a\forall b(a\in S\wedge b\in S\rightarrow aRb)\wedge\forall c\exists b(c\in A-S\wedge b\in S\rightarrow c\bar{R}b)$. A 的任何一个元素组成的单元集都是一个相容类. 任何两个元素 a,b 只要 aRb,就组成相容类 $\{a,b\}$. 一般地,任何 α 个元素,只要在关系图中每两个元素都有双向箭头相连,就组成一个相容类. 极大相容类是 A 的具有这个性质的最大子集. A 的极大相容类可以不只一个,如上图. 图所示的 5 元素集 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 有极大相容类 $\{a,b,c,d\}$ 和 $\{a,d,e\}$(参见本卷《形式逻辑》同名条).



极大相容类(maximal compatible class)　见"相容关系".

相容类(compatible class)　见"相容关系".

等价关系(equivalent relation)　一种重要的二元关系. 指集合 A 上自反的、对称的与传递的二元关系. 例如,数的相等关系、三角形的相似关系与全等关系、集合的对等关系等都是相应集合(族)上的等价关系. 集合 A 上等价关系 R 所应满足的三个条件是独立的. 例如 $A=\{1,2,3\}$ 时,关系 $R_1=\{\langle1,1\rangle,\langle2,2\rangle,\langle3,3\rangle,\langle2,3\rangle,\langle3,2\rangle,\langle1,3\rangle,\langle3,1\rangle\}$ 有自反性、对称性,而无传递性. 关系 $R_2=\{\langle1,1\rangle,\langle2,2\rangle,\langle3,3,\rangle,\langle1,2\rangle\}$ 有自反性、传递性,而无对称性. 关系 $R_3=\{\langle2,3\rangle,\langle3,2\rangle,\langle2,2\rangle,\langle3,3\rangle\}$ 有对称性、传递性,而无自反性. 把集合 A 表为若干两两不相交的非空子集合的并,则这些子集合组成的集族 $\{A_m\}_{m\in M}$ 称为 A 的一个划分. 定义 A 上一个二元关系 R:当且仅当 a,b 属于同一个 A_m 时,aRb. R 就是

A 上的一个等价关系. 这时

$$R = \bigcup_{m \in M} A_m \times A_m.$$

反之,利用 A 上的等价关系可给出 A 的一个划分,只要在 aRb 时,把 a 与 b 归入同一个子集. A 上不同的等价关系给出 A 的不同划分. 于是 A 上的等价关系的集合与 A 的划分的集合是对等的. 如果 R,G 都是 A 上的非空等价关系,则 $R^{-1}, R \cap G$ 是等价关系;$\overline{R}, R-G$ 不一定是等价关系.

等价类(equivalent class)　由等价关系诱导出的特殊子集. 设 R 是集合 A 上的等价关系,则 A 中的某个元素 x 关于 R 的等价类是由 A 中的那些使 xRy 成立的所有元素 y 组成的子集. 记为 $[x]_R$. 即 $[x]_R=\{y \mid y \in A \wedge xRy\}$. 利用集合 A 上的等价关系 R,可将 A 分解为等价类. 所有这些等价类组成的集族 $\{[x]_R\}$ 是 A 关于 R 的划分. 集合 A 关于等价关系 R 的等价类有下列性质:

1. 对每个 $a \in A$,有惟一的等价类 $[a]_R$,使
$$a \in [a]_R.$$

2. $[a]_R=[b]_R$ 当且仅当 aRb,即两个等价元素属于同一等价类,同一等价类中元素彼此等价.

3. 若 $a\overline{R}b$,则 $[a]_R \cap [b]_R=\varnothing$,即不同等价类不相交.

4. A 的所有不同等价类作成的集系设为 $\{[A_m]_R\}_{m \in M}$,则 A 有直和分解
$$A = \dot{\sum_{m \in M}} [A_m]_R;$$
若 A 上有两个等价关系 R,G,则 $R \cap G$ 是一等价关系.

5. $[a]_{R \cap G}=[a]_R \cap [a]_G$.

6. $[a]_{R^{-1}}=[a]_R$.

7. $R \subseteq G$ 时,对任何 $a \in A$,有 $[a]_R \subseteq [a]_G$.

商集(quotient set)　集合论的基本概念之一. 指由集合和该集合上的等价关系导出的集合. 设 R 是集合 S 上的等价关系,则由所有 R 确定的等价类 $[x]_R$ 组成的集合称为 S 关于 R 的商集. 记为 S/R. 即 $S/R=\{[x]_R \mid x \in S\}$. 非空集合 S 关于它上面的任何等价关系 R 的商集具有下列特点:

1. $S/R \neq \varnothing$.
2. 若 $A \in S/R$,则 $A \neq \varnothing$.
3. 若 $A,B \in S/R, A \neq B$,则 $A \cap B=\varnothing$.
4. 设 $S/R=\{A_m\}_{m \in M}$,则 $S = \dot{\sum_{m \in M}} A_m$.

利用选择公理,在 S/R 的每个元素 A_m 中取出一个元素 $a_m \in A_m$,称为等价类 A_m 的代表,而 $\{a_m\}_{m \in M}$ 称为商集的代表集. 集 S 对它上面的不同的等价关系 R 和 G 有不同的商集,且满足:

1. $S/R=S/R^{-1}$.
2. $S/E=\{\{a\}\}_{a \in S}$,这里 E 是恒等关系.
3. $S/(S \times S)=\{S\}$,这里 $S \times S$ 是全域关系.
4. 若 $S/R=\{A_m\}_{m \in M}, S/G=\{B_n\}_{n \in N}$,则
$$\frac{S}{R \cap G} = \{A_m \cap B_n\}_{(m,n) \in M \times N},$$
且
$$S = \sum_{(m,n) \in M \times N} (A_m \cap B_n).$$
其中某些项可能是空集.

等价类的代表(representatives of equivalent class)　见"商集".

商集的代表集(set of representatives of quotient set)　见"商集".

集合的划分(partition of a set)　一种特殊运算. 即将一个集合表示为若干个非空互不相交的子集之并. 集合 A 与集族 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m \in M}$ 若具有性质:

1. $\forall m(m \in M \rightarrow A_m \subseteq A \wedge A_m \neq \varnothing)$;
2. $\forall m \forall n\ (m \in M \wedge n \in M \wedge m \neq n \rightarrow A_m \cap A_n=\varnothing)$;
3. $\bigcup_{m \in M} A_m=A$,

则称集族 $\mathscr{A}$ 是集合 A 的一个划分. 集 A 的划分 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m \in M}$ 可以确定 A 上的一个等价关系 R. 只要定义:a,b 属于同一个 A_m 时,aRb;a,b 属于不同的 A_m 时,$a\overline{R}b$. 反之,如果 R 是 A 上的等价关系,对 $a \in A$,作集合 $[a]_R$,使得 $b \in [a]_R \Leftrightarrow (b \in A \wedge aRb)$,则由所有不同的 $[a]_R$ 组成的集合是 A 的一个划分,即为 A 关于 A 上的等价关系 R 的商集 A/R. 划分是一个有用的概念. 例如,可将人类按性别划分成男人和女人,也可以按年龄来划分、按职业来划分等.

有限集的划分数(partition numbers of finite sets)　对有限集的划分的一种刻画. 即元素为有限个的集合所可能有的划分的总数. 把 n 元集合的元素分成若干两两不相交的非空子集,称为对这 n 元集的划分. n 元集的两个划分相同,当且仅当它们有相同的组数并且一个划分的组也是另一个划分的组. n 元集的所有不同划分的个数称为 n 元集的划分数. 记为 D_n. 若 n 元集的划分含有 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 组,则称其为这 n 元集的 k 组划分. n 元集的所有不同 k 组划分的个数记为 D_n^k, $D_n=D_n^1+D_n^2+\cdots+D_n^n$.

关于划分有下列计算公式:

1. $D_n^1=D_n^n=1$.
2. $D_n^{n-1}=C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)\ (n>1)$.
3. $$D_n^{n-2} = \sum_{i=1}^{n-2}(i\sum_{t=1}^{i}t) = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-5)\ (n>2).$$
4. $D_n^2=2^{n-1}-1\ (n>1)$.
5. $D_n^k=D_{n-1}^{k-1}+kD_{n-1}^k\ (1<k<n)$.
6. $$D_n^k = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i C_k^i (k-i)^n \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

$7.\ D_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_k^i (k-i)^n.$

n 个元素的划分数与 n 个元素的组合数、排列数有下面的关系：

1. $P_k^1 D_n^1 + P_k^2 D_n^2 + \cdots + P_k^k D_n^k = k^n$
$(k=1,2,\cdots,n).$

2. $C_k^1 D_n^1 + C_k^2 (2!\ D_n^2) + \cdots + C_k^k (k!\ D_n^k) = k^n$
$(k=1,2,\cdots,n).$

W 三角数(W-block data of triangulation)　一种重要的形数. 由 n 元集的 k 组划分数排列成的一个三角形数表称为 W 三角数表. 该数表如下：

```
            1
          1   1
        1   3   1
      1   7   6   1
    1  15  25  10   1
  1  31  90  65  15   1
  ……………………………………
```

此数表可不断延续下去. 数表的第 n 行是 n 个元素的集合的 k 组划分数 $D_n^1, D_n^2, \cdots, D_n^n$. 例如，第 5 行第 3 个数字 25 为 D_5^3，表示把 5 个不同元素分成三组有 25 种划分法. 该数表有下列特点：

1. 三角数表"两腰"上的数全为 1.

2. 不在两腰上的每个数 x 可由它的"两肩"上的两数按下述法则计算得到：$x=x$ 左肩上的数 $+x$ 在行中的序数 $\times x$ 右肩上的数. 例如，第 6 行第 3 个数 90 为 $15+3\times 25$.

3. 第 n 行中数字的和是 n 个元素的划分数 D_n. 例如，由第 4 行可得 $D_4=1+7+6+1=15$.

三角形数表由霍克(Hok, W.)首先发现，故以霍克的名字的第一个字母 W 命名.

集合的覆盖(covering of a set)　集合论的基本概念之一. 指一族集合，它们的并包含某一集合. 集合 A 与集族 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m\in M}$ 若满足条件：

1. $\forall\, m(m\in M)\rightarrow A_m\neq\varnothing$；

2. $\bigcup\limits_{m\in M} A_m \supseteq A$；

则集族 $\mathscr{A}$ 称为集合 A 的覆盖. 或者说，若把集合 A 分成若干个称为分块的非空子集，使得 A 中每个元素至少属于一个分块，那么这些分块的全体构成的集合为 A 的覆盖. 显然 A 的划分也是 A 的覆盖，但逆命题不成立. 覆盖概念与相容关系有密切联系：

1. 给定集合 A 的覆盖 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m\in M}$，由它确定的关系

$$R = \bigcup_{m\in M} A_m \times A_m$$

是相容关系.

2. 给定 A 上的相容关系 R，可以作成不同的相容类的集合，它们组成 A 的覆盖.

等价关系的强弱(strong and weak between equivalent relations)　对等价关系的一种刻画. 指两个等价关系作为关系命题的包含性质. 集合 A 上两个等价关系 R 与 G，在 $R\subseteq G$ 时，称 R 比 G 强，G 比 R 弱. 这时，对 $a,b\in A$，若 aRb，则 aGb，且具有下列性质：

1. 对任何 $a\in A$，$[a]_R\subseteq[a]_G$.

2. R 关于集 $[a]_G$ 的限制 $R|_{[a]_G}$(简记为 R_{aG})是 $[a]_G$ 上的一个等价关系，且

$$[a]_{G/R_{aG}} = \{[a]_R \mid a\in[a]_G\},$$

$$[a]_G = \sum_{a\in[a]_G} [a]_R.$$

3. 设 $A/R=\{A_m\}_{m\in M}$，$A/G=\{B_p\}_{p\in P}$，因 $R=R\cap G$，故

$$\{A_m\}_{m\in M} = A/R = A/R\cap G = \{A_m\cap B_p\}_{\langle m,p\rangle\in M\times P}.$$

$$\left(B_p = \sum_{m\in M}(A_m\cap B_p),\ p\in P\right)$$

其中可能有 $\varnothing$ 项. 当 A 上的等价关系 R 强于 G 时，它加细了 G 对 A 的划分.

最强的等价关系是恒等关系 E；最弱的等价关系是全域关系 $A\times A$.

对应(correspondence)　集合论的基本概念之一. 如果集合 G 是集合 X 与 Y 的直积的子集 $G\subseteq X\times Y$，则三元组 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 称为集合 X 到集合 Y 的对应. X 称为对应 Γ 的始集(或前域)，Y 称为 Γ 的终集(或后域)，G 是 Γ 的图象. 以 X,Y 为变域的关系 R 可以作为 X 到 Y 的对应的图象，这个对应是 $\Gamma=\langle X,Y,R\rangle$；反之，由对应 Γ 的图象 R 可以确定始集 X 与终集 Y 上的一个关系. 对于对应 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$，集合 $\{x\mid x\in X\wedge\exists\ y(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in G\}$ 称为 Γ 的定义域. 记为 $\mathrm{D}(\Gamma)$ 或 $\mathrm{dom}(\Gamma)$；集合 $\{y\mid y\in Y\wedge\exists\ x(x\in X\wedge\langle x,y\rangle\in G)\}$ 称为 Γ 的值域. 记为 $\mathrm{R}(\Gamma)$. 对于 $x\in X$ 而言，集合 $\{y\mid y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in G\}$ 记为 $G(x)$ 或 $\Gamma(x)$，是 x 对应的元素的集合，则称 x 依 Γ 对应于 $G(x)$. 对于 $y\in Y$，集合 $\{x\mid x\in X\wedge\langle x,y\rangle\in G\}$ 记为 $G^{-1}(y)$ 或 $\Gamma^{-1}(y)$，是与 y 对应的元素的集合. 则称 $G^{-1}(y)$ 依 Γ 与 y 对应. 从上述定义可以看出，对应与关系没有本质上的差别. 故对应这一概念在现代集合论中已很少使用. 有的文献上把它看成是多值函数的同义词.

始集(initial set)　见"对应".

终集(final set)　见"对应".

对应的定义域(domain of definition of correspondence)　见"对应".

对应的值域(range of correspondence)　见"对应".

逆对应(inverse correspondence)　集合论的基本概念之一. 若 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 是 X 到 Y 的对应，G^{-1}

是二元关系 G 的逆关系，则 Y 到 X 的对应 $\langle Y,X,G^{-1}\rangle$ 称为 Γ 的逆对应，记为 Γ^{-1}.

对应 Γ 与它的逆对应 Γ^{-1} 有下列联系：

1. $D(\Gamma)=R(\Gamma^{-1})$，$R(\Gamma)=D(\Gamma^{-1})$.

2. $(\Gamma^{-1})^{-1}=\Gamma$.

3. 对 $x\in X$，x 依 Γ 与 $G(x)$ 对应，且 x 依 Γ^{-1} 对应于 $G(x)$.

4. 对 $y\in Y$，y 依 Γ 对应于 $G^{-1}(y)$，且 y 依 Γ^{-1} 与 $G^{-1}(y)$ 对应.

补对应(complemented correspondence)　集合论的基本概念之一. 是与反关系意义相同的概念. 如果 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 是 X 到 Y 的对应，G 是对应的图象，关系 $\overline{G}=X\times Y-G$ 是 G 的反关系，则对应 $\langle X,Y,\overline{G}\rangle$ 称为 Γ 的补对应，记为 $\overline{\Gamma}$.

Γ 与 $\overline{\Gamma}$ 有下列联系：

1. $D(\overline{\Gamma})\cup D(\Gamma)=X$.

2. $R(\overline{\Gamma})\cup R(\Gamma)=Y$.

3. 对 $x\in X,y\in Y$，x 依 Γ 与 y 对应，当且仅当 x 依 $\overline{\Gamma}$ 不与 y 对应.

对应的运算(operation of correspondences)　关系运算的推广. 即由若干个对应形成新的对应的一些规则. 前域为 X，后域为 Y 的对应 $\Gamma=\langle X,Y,R\rangle$ 是由其中的关系 R 所决定的. 因此，可用关系的运算来定义对应的运算.

对应的运算法则如下：

1. 对应的反演：$f:\Gamma\to\overline{\Gamma}$. 即让对应 $\Gamma=\langle X,Y,R\rangle$ 的反对应 $\overline{\Gamma}=\langle X,Y,\overline{R}\rangle$ 与它对应. 这是定义在 $\{\Gamma\}$ 上的一个一元运算.

设 $\Gamma_1=\langle X,Y,G_1\rangle$，$\Gamma_2=\langle X,Y,G_2\rangle$，则可定义.

2. 并运算或称对应的加法：

$$\Gamma_1\cup\Gamma_2=\langle X,Y,G_1\cup G_2\rangle.$$

3. 交运算或称对应的乘法：

$$\Gamma_1\cap\Gamma_2=\langle X,Y,G_1\cap G_2\rangle.$$

4. 对应的减法：$\Gamma_1-\Gamma_2=\langle X,Y,G_1-G_2\rangle$.

5. 对应的复合(或合成或积)：Γ_1 与 Γ_2 的复合对应为 $\Gamma_1\circ\Gamma_2=\langle X,Z,G_1\circ G_2\rangle$. 对应的复合有下列性质：

1) 结合律：$(\Gamma_1\circ\Gamma_2)\circ\Gamma_3=\Gamma_1\circ(\Gamma_2\circ\Gamma_3)$.

2) $(\Gamma_1\circ\Gamma_2)^{-1}=\Gamma_2^{-1}\circ\Gamma_1^{-1}$.

对应的反演(inversion of correspondence)　见“对应的运算”.

对应的加法(addition of correspondences)　见“对应的运算”.

对应的乘法(multiplication of correspondences)　见“对应的运算”.

对应的减法(subtraction of correspondences)　见“对应的运算”.

对应的复合(composion of correspondences)　见“对应的运算”.

多一对应(many-one correspondence)　亦称单值对应. 一种重要的对应. 即一元函数. 对于对应 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 的定义域 $D(\Gamma)$ 中的任何 x，$G(x)$ 都是单元集，即 x 依 Γ 对应的元素只有一个，则称对应 $\langle X,Y,G\rangle$ 为 Γ 的多一对应. 当 $D(\Gamma)=X$ 时，多一对应 Γ 就是 X 到 Y 的一个映射. 因此映射是定义域为全集的多一对应.

单值对应(one-valued correspondence)　即“多一对应”.

一多对应(one-many correspondence)　亦称多值对应. 一种重要的对应. 指逆对应是多一的对应. 对于对应 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 的值域 $R(\Gamma)$ 中的任何元素 y，集 $G^{-1}(y)$ 为单元集，即依 Γ 对应于 y 的元素只有一个，则称对应 $\langle X,Y,G\rangle$ 为 Γ 的一多对应.

多值对应(multiple-valued correspondence)　即“一多对应”.

多多对应(many-many correspondence)　一般的对应. 有时也特指不是空对应、一多对应与多一对应的对应. 在多多对应 $\langle X,Y,G\rangle$ 中，至少存在一个 $x\in X$，$G(x)$ 的基数 $\geqslant 2$，也至少存在一个 y，$G^{-1}(y)$ 的基数 $\geqslant 2$.

一一对应(one-one correspondence)　一种重要的对应. 指它和它的逆对应都是多一的对应. 对应 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 是多一对应，而它的逆对应 $\Gamma^{-1}=\langle Y,X,G^{-1}\rangle$ 也是多一对应，则称对应 $\langle X,Y,G\rangle$ 为一一对应. 一一对应 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 具有下列性质：

1. 如 $x\in X$，当 $x\in D(\Gamma)$ 时，$G(x)$ 为单元集；当 $x\notin D(\Gamma)$ 时，$G(x)=\varnothing$.

2. 如 $y\in Y$，当 $y\in R(\Gamma)$ 时，$G^{-1}(y)$ 为单元集；当 $y\notin R(\Gamma)$ 时，$G^{-1}(y)=\varnothing$.

3. 对 $x_1,x_2\in D(\Gamma)$，$G(x_1)=G(x_2)$ 的充分必要条件是 $x_1=x_2$.

4. 对 $y_1,y_2\in R(\Gamma)$，$G^{-1}(y_1)=G^{-1}(y_2)$ 的充分必要条件是 $y_1=y_2$.

5. 若 $\Gamma_1=\langle X,Y,G_1\rangle$，$\Gamma_2=\langle X,Y,G_2\rangle$ 都是一一对应，则 $\Gamma_1\cap\Gamma_2$，$\Gamma_1-\Gamma_2$，$\Gamma_1\circ\Gamma_2$，Γ_1^{-1}，Γ_2^{-1} 也是一一对应，而 $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 不一定是一一对应，但 $(G_1\cup G_2)(x)$ 与 $(G_1\cup G_2)^{-1}(y)$ 至多是二元集合.

6. 若 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$ 是一一对应，则对 $x\in D(\Gamma)$，$y\in R(\Gamma)$ 有：$(\Gamma\circ\Gamma^{-1})(x)=\{x\}$，$(\Gamma^{-1}\circ\Gamma)(y)=\{y\}$，即 $(G\circ G^{-1})(x)=\{x\}$，$(G^{-1}\circ G)(y)=\{y\}$.

设 $\Gamma=\langle X,Y,G\rangle$，当 $D(\Gamma)=X$，$R(\Gamma)\subseteq Y$ 时，Γ 是一一对应与 Γ 是单射(一一映射)的概念等价. 当 $D(\Gamma)=X$，$R(\Gamma)=Y$ 时，Γ 是一一对应与 Γ 是双射的概念等价. 习惯上说的一一对应指满单射(双射)，与这里关于一一对应的一般性定义稍有差别.

对应的限制(restriction of correspondence)

一种特殊的对应. 指缩小一个对应的始集和终集后所得到的对应. 设 $\Gamma=\langle X,Y,R\rangle$ 是对应, $A\subseteq X,B\subseteq Y$, 关系 R 关于 A 与 B 的限制为 $R|_{AB}$, 对应 $\langle A,B,R|_{AB}\rangle$ 称为 Γ 关于 A 与 B 的限制, 记为 $\Gamma|_{AB}$. 而 Γ 称为 $\Gamma|_{AB}$ 的延拓对应或扩张. 对应关于指定的 A 与 B 的限制是惟一存在的, 但对应的延拓可能是多种多样的.

延拓对应(extension correspondence) 见"对应的限制".

对应的图象(graph of correspondence) 关于对应的一种刻画. 指确定对应的关系的图象.

对应的截痕(cross section of correspondence) 关于对应的一种刻画. 对应 $\Gamma=\langle A,B,R\rangle$ 的截痕就是确定它的二元关系 R 的截痕.

关系的包含(inclusion of relation) 对关系的一种刻画. 即关系作为集合时的包含. 设 R,G 是两个关系, 且若 $R\subseteq X\times Y,G\subseteq X\times Y,R\subseteq G$, 则称关系 G 包含关系 R. 记为 $R\subseteq G$ 或 $G\supseteq R$. 当 $R\subseteq G$ 时, 称 R 是 G 的子关系, G 是 R 的母关系. 当 R 是 G 的子关系时, 对任何 $x\in X,y\in Y$, 如 xRy, 则 xGy. 故又称关系 G 是关系 R 的推广. 例如, 平面直线的垂直关系是相交关系的子关系. 由于关系是有序对的集合, 故关系的包含实际上是特殊集合之间的包含.

子关系(subrelation) 见"关系的包含".

母关系(generating relation) 见"关系的包含".

关系的推广(generalization of a relation) 见"关系的包含".

关系的限制(restriction of a relation) 一种特殊的关系. 它是与对应的限制相对应的一个概念. 设 R 是集 X 到集 Y 的关系, 即 $R\subseteq X\times Y,A\subseteq X,B\subseteq Y$, 令 $G=R\cap(A\times B)\subseteq A\times B\subseteq X\times Y$, 则 G 是 A 到 B 上的关系. 称为关系 R 关于 A 与 B 的限制(或缩小), 记为 $R|_{AB}$. 而 R 称为 $R|_{AB}$ 的延拓(或扩张). 当 $\langle x,y\rangle\in A\times B,xRy$ 时, $xR|_{AB}y=xRy$; 当 $\langle x,y\rangle\notin A\times B$ 或 $x\overline{R}|_{AB}y$ 时, $xR|_{AB}y$ 不成立. 当 $X=Y,A=B$ 时, X 上的二元关系 R 关于 A 的限制记为 $R|_A$. R 关于 A 与 B 的限制 $R|_{AB}$ 是惟一存在的; 但 $R|_{AB}$ 的延拓 R 可能是各种各样的. 例如, 自然数集的小于关系是有理数集的小于关系的限制, 而有理数集的小于关系、实数集的小于关系都是自然数集的小于关系的延拓.

关系的延拓(extension of a relation) 见"关系的限制".

关系的扩张(extension of a relation) 见"关系的限制".

关系的矩阵(matrix of a relation) 对关系的一种刻画. 即对于两个集合之间的某个关系, 能清楚地表明此二集合的任意元素是否有此关系的数字矩阵. 将集合 A 与 B 良序化: $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$, $B=\{b_1,b_2,\cdots\}$. 设 A 对应的序数为 λ, B 对应的序数为 μ. 如关系 $R\subseteq A\times B$, 可用 0 与 1 两个数码作成一个有限或无限的矩形表 $M_R=(r_{ij})_{\lambda\mu}$, 使得在 a_iRb_j 时, 第 i 行第 j 列处的元素 $r_{ij}=1$, 在 $a_i\overline{R}b_j$ 时, 第 i 行第 j 列处的元素 $r_{ij}=0$. 若 A 为 n 元有限集($\lambda=n$), B 为 m 元有限集($\mu=m$), 此数表是普通的 $n\times m$ 的 0,1 矩阵, 称为关系 R 的矩阵. 当 A 或 B 是无限集时, 数表 $(r_{ij})_{\lambda\mu}$ 为一方或两方无限延伸的"开口"数表, 称为关系 R 的开口矩阵. 普通矩阵与开口矩阵统称为关系 R 的矩阵. 给出一个关系就可以写出它的矩阵; 反之, 给出一个 0,1 矩阵就可以确定一个关系.

关系与它的矩阵有下列联系:

1. A,B 上的关系相同, 当且仅当它们有相同的矩阵, 即对应位置上元素相等的矩阵.

2. 若关系 $R\subseteq A\times B$, R 的矩阵为 $M_R=\{r_{ij}\}_{\lambda\mu}$, 则 $a_i\in \mathrm{D}(R)$ 的充分必要条件是 M_R 的第 i 行至少有一个 1; $b_j\in \mathrm{R}(R)$ 的充分必要条件是 M_R 的第 j 列至少有一个 1.

3. 若关系 $R,G\subseteq A\times B$, R,G 的矩阵分别为 $M_R=(r_{ij})_{\lambda\mu}$, $M_G=(g_{ij})_{\lambda\mu}$, 则:

1) $R\cup G$ 的矩阵为 $M_{R\cup G}=(m_{ij})_{\lambda\mu}$, 其中

$$m_{ij}=\max(r_{ij},g_{ij}).$$

2) $R\cap G$ 的矩阵为 $M_{R\cap G}=(k_{ij})_{\lambda\mu}$, 其中

$$k_{ij}=r_{ij}g_{ij}.$$

3) 补关系 $\overline{R}$ 的矩阵为 $M_{\overline{R}}=(\overline{r}_{ij})_{\lambda\mu}$, 这里当 $r_{ij}=1$ 时, $\overline{r_{ij}}=0$, 当 $r_{ij}=0$ 时, $\overline{r_{ij}}=1$.

4) $R-G$ 的矩阵为 $M_{R-G}=M_{R\cap\overline{G}}=(r_{ij}\cdot\overline{g_{ij}})_{\lambda\mu}$.

4. 设另有良序集 $C=\{c_1,c_2,\cdots\}$, 序数为 η, 关系 $R\subseteq A\times B$ 的矩阵为 $M_R=(r_{ij})_{\lambda\mu}$, 关系 $G\subseteq B\times C$ 的矩阵为 $M_G=(g_{ij})_{\mu\eta}$, 则关系 $R\circ G$ 的矩阵为 $M_{R\circ G}=(\pi_{ij})_{\lambda\eta}$, 其中

$$\pi_{ij}=\max_{k\in\mu}\{r_{ik}\cdot g_{kj}\}=\max\{r_{i1}g_{1j},r_{i2}g_{2j},\cdots\}.$$

5. 设 A 为良序集 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$, 序数为 λ, 对 A 上的二元关系, 上列结论仍然成立.

若进一步设 $R\subseteq A\times A$ 的矩阵为 $M_R=(r_{ij})_{\lambda\lambda}$, 则关系与它的矩阵还有下列联系:

1. 关系 R 是自反的, 当且仅当对所有的 $i\in\lambda$, 有 $r_{ii}=1$.

2. 关系 R 是反自反的, 当且仅当对所有的 $i\in\lambda$, 有 $r_{ii}=0$.

3. 关系 R 是对称的, 当且仅当 $r_{ij}=r_{ji}$ 对一切 $i,j\in\lambda$ 成立, 这时 M_R 是对称矩阵.

4. 关系 R 是不对称的, 当且仅当 $r_{ij}r_{ji}=0$ 对一切 $i,j\in\lambda$ 成立.

5. 关系 R 是反对称的, 当且仅当 $r_{ij}=r_{ji}=1$ 时,

有 $i=j$.

6. 关系 R 是传递的，当且仅当 $r_{ij}=r_{jk}=1$ 时，有 $r_{ik}=1$.

7. 关系 R 是反传递的，当且仅当 $r_{ij}=r_{jk}=1$ 时，有 $r_{ik}=0$.

8. 关系 R 是连通的，当且仅当 $i\neq j$ 时，$\max\{r_{ij},r_{ji}\}=1$，即在对称的位置上至少有一个 1.

9. 关系 R 是强连通的，当且仅当对任何 $i,j\in\lambda$，有 $\max\{r_{ij},r_{ji}\}=1$，即在对称的两个位置上至少有一个 1，并且主对角线上全是 1. 强连通是连通的一种特殊情况.

开口矩阵(open entrance matrix)　见“关系的矩阵”.

映　　射

映射(mapping)　亦称函数. 数学的基本概念之一. 也是一种特殊的关系. 设 G 是从 X 到 Y 的关系，G 的定义域 $D(G)$ 为 X，且对任何 $x\in X$ 都有惟一的 $y\in Y$ 满足 $G(x,y)$，则称 G 为从 X 到 Y 的映射. 即关系 G 为映射时，应满足下列两个条件：

1. $(\forall\ x\in X)(\exists\ y\in Y)(xGy)$.

2. $(\forall\ x\in X)(\forall\ y\in Y)(\forall\ z\in Y)((xGy\wedge xGz)\rightarrow y=z)$. 这个被 $x\in X$ 所惟一确定的 $y\in Y$，通常表示为 $y=f(x)(x\in X)$. $f(x)$ 满足：

1) $f(x)\in Y$.

2) $G(x,f(x))$ 成立 $(x\in X)$.

3) $\exists\ z\in Y, G(x,z)\rightarrow z=f(x)$.

关系 G 常使用另一些记号：$f:X\rightarrow Y$ 或 $X\xrightarrow{f}Y$. f 与 G 的关系是 $y=f(x)(x\in X)$，当且仅当 $G(x,y)$ 成立. 可取变域 X 中的不同元素为值的变元称为自变元或自变量. 同样可取变域 Y 中的不同元素为值的变元称为因变元或因变量. 始集 X 称为映射 f 的定义域. 记为 $D(f)$ 或 $\mathrm{dom}(f)$. 终集 Y 称为映射的陪域，记为 $C(f)$ 或 $\mathrm{codom}(f)$. Y 中与 X 中的元素有关系 G 的元素的组合 $\{y\mid\exists\ x(x\in X\wedge y=f(x)\in Y)\}$ 称为映射的值域，记为 $R(f)$ 或 $\mathrm{ran}(f)$. 当 $y=f(x)$ 时，y 称为 x 的象，而 x 称为 y 的原象. y 的所有原象所成之集用 $f^{-1}(y)$ 表示. 对于 $A\subseteq X$，所有 A 中元素的象的集合 $\{y\mid\exists\ x(x\in A\wedge y=f(x)\in Y)\}$ 或 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为 A 的象. 记为 $f(A)$. 对于 $B\subseteq Y$，所有 B 中元素的原象的集合 $\{x\mid x\in X\wedge\exists\ y(y\in B\wedge y=f(x))\}$ 称为 B 的原象. 记为 $f^{-1}(B)$. 显然

$$f(A)=\bigcup_{x\in A}f(x),$$

$$f^{-1}(B)=\bigcup_{y\in B}f^{-1}(y).$$

函数(function)　即“映射”.

自变元(independent variable)　见“映射”.

因变元(dependent variable)　见“映射”.

元素的象(image of an element)　见“映射”.

元素的原象(inverse image of an element)　见“映射”.

集合的象(image of a set)　见“映射”.

集合的原象(inverse image of a set)　见“映射”.

映射的 λ 表示(λ representation of a mapping)　映射的一种表示方法. 设 $f:A\rightarrow B$ 是映射，当 $a\in A$ 时，$a\rightarrow f(a)$. 将该映射表达为 $(\lambda x)(f(x))$ 的形式，称为映射 f 的 λ 表示法. (λx) 称为抽象算子，具有与量词 $\forall\ x$，$\exists\ x$ 类似的逻辑作用，它提供了一种把变项约束起来的方法. 在 $(\lambda x)(f(x))$ 中，变项 x 的两次出现都是约束的，$f(x)$ 是含 x 的一个式子. 将映射说成 f 是不清楚的，而说成“映射 $f(x)$”是一种逻辑悖理. 因为 $f(x)$ 表示函数值，而不是映射 f 本身. 把 λ 表示法说成映射“$(\lambda x)(f(x))$”既清楚表达了映射，又避免了逻辑悖理. 在映射 $(\lambda x)(f(x))$ 中，将变项 x 的变域 A 中的某个 a 代入 x 时，所得到的结果就是映射在 $x=a$ 时的值 $f(a)$. 例如 $(\lambda x)(x^2+2)(2)=2^2+2=6$，$(\lambda x)(x^2+y)(2)=4+y$. $(\lambda x)(x^2+y)(\sqrt{2},1)=f(\sqrt{2},1)=3$. 注意 $(\lambda x)(\lambda y)(f(x,y))\neq(\lambda xy)(f(x,y))$，后者是两个变元的映射，而前者是从 x 的变域到 (λy)，$(f(x,y))$ 的变域的映射

$$\varphi: x\rightarrow\{(\lambda y)(f(x,y))\},$$

$$x_0\rightarrow(\lambda y)(f(x_0,y)).$$

映射的定义域(domain of a mapping)　见“映射”. 与映射有关的一个概念. 在映射 $f:A\rightarrow B$ 中，当 $A=\varnothing$ 时，f 是空映射，代表一个零元运算. 若 $A\neq\varnothing$，则 $B\neq\varnothing$. 当给定 $X\times Y$ 中的一个子集 G，且对于任何 $(x,y),(x,z)\in G$，总有 $y=z$ 成立时，G 就决定一个映射 $y=f(x)$，此时 f 的定义域 $D(f)$ 由下式定义：

$$D(f)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid\exists\ y\in Y,(x,y)\in G\}.$$

映射的陪域(codomain of a mapping)　见“映射”. 与映射有关的一个概念. 在映射 $f:A\rightarrow B$ 中，当 $A=\varnothing$ 时，B 可以是 $\varnothing$. 当 $A\neq\varnothing$ 时，$B\neq\varnothing$. $R(f)=f(A)\subseteq\mathrm{codom}(f)$.

映射的值域(range of a mapping)　见“映射”. 与映射有关的一个概念. 映射的值域有下列性质：

1. $R(f)=f(A)\subseteq B$.

2. 若 $A\neq\varnothing$，则 $R(f)\neq\varnothing$，且 $|A|\geqslant|R(f)|$. 这里 $|A|$ 表示 A 的基数.

单射(injection)　亦称一一映射. 一种重要的映射. 与一一对应，单叶函数同义的概念. 映射 $f:A\rightarrow B$ 对任何 $a,b\in A$，$a\neq b$ 均有 $f(a)\neq f(b)$，即对于 f 的值域中的任一元素 b，$|f^{-1}(b)|\leqslant 1$. 单射不必是

满射.

单射有下列性质:

1. $f:A\to B$ 是单射的充分必要条件是对任何 $b\in B$, $f^{-1}(b)$ 是空集或单元集.

2. 若 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 均是单射,则 $g\circ f:A\to C$ 是单射.

3. 若 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 是映射, $g\circ f:A\to C$ 是单射,则 $f:A\to B$ 是单射,且 $g|_{f(A)}:f(A)\to C$ 是单射.

4. 单射有左逆映射. 对单射 $f:A\to B$ 可以定义映射 $f_L^{-1}:B\to A$ 使 $f_L^{-1}\circ f$ 是集合 A 的恒等映射. 这只要对 $B-f(A)$ 中的每一个元素指定 A 中一个元素与之对应,对 $f(A)$ 中任一元素 b,指定 $f^{-1}(b)$ 与之对应. 当单射不是满射时,这样的左逆映射不只一个.

5. 若 $f:A\to B$ 是单射,则:

1) 对 $A_1\subseteq A$, $f^{-1}(f(A_1))=A_1$.

2) 对 $B_1\subseteq B$, $f(f^{-1}(B_1))=B_1\cap f(A)\subseteq B_1$,特别当 $B_1\subseteq f(A)$ 时, $f(f^{-1}(B_1))=B_1$.

3) 对 $A_1\subseteq A$, $A_2\subseteq A$,有

$$f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2),$$
$$f(A_1-A_2)=f(A_1)-f(A_2).$$

6. 对任何映射 $f:A\to B$,可定义单射 $g:A\to A\times B$,使 $g(a)=\langle a,f(a)\rangle$.

7. $f:A\to B$ 是单射的充分必要条件是对任意两个映射 $\varphi:C\to A$, $\psi:C\to A$,在 $\varphi\neq\psi$ 时, $f\circ\varphi\neq f\circ\psi$.

一一映射(one-one mapping)　即"单射".

满射(surjection)　亦称到上映射. 一种重要的映射. 指陪域与预定集合相等的映射. 当 $f(A)=B$ 时的映射 $f:A\to B$.

满射有下列性质:

1. $f:A\to B$ 是满射的充分必要条件是对任何

$$b\in B, f^{-1}(b)\neq\varnothing.$$

2. 若 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 均为满射,则 $g\circ f:A\to C$ 也是满射.

3. 对映射 $f:A\to B$, $g:B\to C$,若 $g\circ f:A\to C$ 是满射,则 $g:B\to C$ 是满射,并且 $f(A)\subseteq g^{-1}(C)$.

4. 满射有右逆映射. 对满射 $f:A\to B$ 可以定义映射 $f_r^{-1}:B\to A$,使 $f\circ f_r^{-1}$ 是集合 B 上的恒等映射. 这只要对任何 $b\in B$,在 B 的全原象中指定一个元素 a 为 $f_r^{-1}(b)$. 当满射 f 不是单射时,这样的右逆映射不只一个.

5. 在映射 $f:A\to B$ 下, $f:A\to f(A)$ 是满射.

6. 若 $f:A\to B$ 是满射,则对任何 $B_1\subseteq B$,有 $f[f^{-1}(B_1)]=B_1$. 若 f 不是满射,则存在 $B_1\subseteq B$,使

$$f[f^{-1}(B_1)]\subsetneq B_1.$$

7. $f:A\to B$ 是满射的充分必要条件:对任意两个映射 $\varphi:B\to C$, $\psi:B\to C$,当 $\varphi\neq\psi$ 时, $\varphi\circ f\neq\psi\circ f$.

到上映射(onto mapping)　即"满射".

双射(bijection)　亦称满单射、一一对应、到上的一一映射等. 一种重要的映射. 指同时是满射和单射的映射.

双射 $f:A\to B$ 有下列性质:

1. 若 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 均是双射,则 $g\circ f:A\to C$ 是双射.

2. 若 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 均是映射, $g\circ f:A\to C$ 是双射,则 $f:A\to B$ 是单射, $g:B\to C$ 是满射.

3. 双射 $f:A\to B$ 有惟一右逆映射 f_r^{-1} 与惟一左逆映射 f_L^{-1},并且 $f_r^{-1}=f_L^{-1}$,对任何 $a\in A$, $b\in B$, $f_L^{-1}\circ f(a)=a$, $f\circ f_r^{-1}(b)=b$. 即 $f_L^{-1}\circ f=I_A$, $f\circ f_r^{-1}=I_B$,这里 I_A 与 I_B 分别是集 A 与集 B 的恒等映射. 双射的左逆映射与右逆映射相同,并简称它的逆映射 f^{-1}.

4. 映射 $f:A\to B$ 是双射的充分必要条件是它存在逆映射.

满单射(bijection)　即"双射".

集合的映射象(mapping image of a set)　集合论的一个概念. 指一个特定的集合. 将映射限制在某一子集上时,该映射的陪域. 给定映射 $f:A\to B$. 设 $A_1\subseteq A$,集合 $\{b\mid b\in B\wedge\exists\, a(a\in A_1\to b=f(a))\}$ 称为集合 A_1 在映射 f 下的全象集. 简称 A_1 的象,记为 $f(A_1)$. 当 A_1 为单元集 $\{a\}$ 时,直记 $f(A_1)$ 为 $f(a)$.

集合的映射象有下列性质:

1. $A_1\subseteq A$,则 $A_1\neq\varnothing$ 的充分必要条件是

$$f(A_1)\neq\varnothing.$$

2. 若 $A_1\subseteq A_2\subseteq A$,则 $f(A_1)\subseteq f(A_2)$.

3. 若 $A_1\subseteq A$, $A_2\subseteq A$,则

$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2).$$

一般地,若 $\{A_i\}_{i\in M}\subseteq P(A)$,则

$$f(\bigcup_{i\in M}A_i)=\bigcup_{i\in M}f(A_i).$$

4. 若 $A_1\subseteq A$, $A_2\subseteq A$,则

$$f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2).$$

一般地,若 $\{A_i\}_{i\in M}\subseteq P(A)$,则

$$f(\bigcap_{i\in M}A_i)\subseteq\bigcap_{i\in M}f(A_i).$$

5. 若 $A_1\subseteq A$, $A_2\subseteq A$,则

$$f(A_1-A_2)\supseteq f(A_1)-f(A_2).$$

特别地, $f(\mathrm{D}(f)-A_1)\supseteq\mathrm{R}(f)-f(A_1)$.

集合的全象集(universal image set of a set)　见"集合的映射象".

集合的映射逆象(mapping inverse image of a set)　集合论的一个概念. 指一个特定的集合. 对于 $A\to B$ 的映射, B 的子集元素的原象集合. 给定映射 $f:A\to B$. 设 $B_1\subseteq B$,集合 $\{a\mid a\in A\wedge\exists\, b(b\in B_1\to b=f(a)\}$ 称为集合 B_1 在映射 f 下的全逆象,或全原

象，简称逆象. 记为 $f^{-1}(B_1)$. 当 B_1 为单元集 $\{b\}$ 时，直记 $f^{-1}(B_1)$ 为 $f^{-1}(b)$. 逆象 $f^{-1}(B_1)$ 可以是空集.

集合的映射逆象有下列性质：

1. 若 $A_1\subseteq A$，则 $f^{-1}(f(A_1))\supseteq A_1$.

2. 若 $B_1\subseteq B$，则 $f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1$.

3. 若 $B_1\subseteq B_2\subseteq B$，则 $f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$.

4. 若 $B_1\subseteq B,B_2\subseteq B$，则

$$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2).$$

一般地，若 $\{B_i\}_{i\in M}\subseteq P(B)$，则

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in M}B_i)=\bigcup_{i\in M}f^{-1}(B_i).$$

5. 若 $B_1\subseteq B,B_2\subseteq B$，则

$$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2).$$

一般地，若 $\{B_i\}_{i\in M}\subseteq P(B)$，则

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in M}B_i)=\bigcap_{i\in M}f^{-1}(B_i).$$

6. 若 $B_1\subseteq B,B_2\subseteq B$，则

$$f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}(B_1)-f^{-1}(B_2).$$

特别地，

$$f^{-1}(\mathrm{codom}(f)-B_2)=\mathrm{D}(f)-f^{-1}(B_2).$$

集合的全逆象(universal inverse image of a set)　见“集合的映射象”.

逆映射(inverse mapping)　亦称反函数. 一种重要的映射. 是与逆关系意义相同的概念. 对于双射 $f:A\to B$，使 $f(a)$ 对应于 a 的映射 $g:B\to A$，称为 f 的逆映射. 记为 f^{-1}.

双射的逆映射惟一存在，且有下列性质：

1. 若 $f:A\to B$ 是双射，$f^{-1}:B\to A$ 为它的逆映射，则 $f^{-1}\circ f=I_A,f\circ f^{-1}=I_B$.

2. 若对于映射 $f:A\to B$，存在映射 $g:B\to A$，使 $f\circ g=I_B,g\circ f=I_A$，则 $g=f^{-1}$.

3. 若 f 是双射，则 $(f^{-1})^{-1}=f$.

4. 若 $f:A\to B,g:B\to C$ 都是双射，则 $g\circ f$ 是双射，且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

反函数(inverse function)　即“逆映射”.

常值映射(constant mapping)　亦称常函数. 一种特殊的映射. 指陪域为单元集的映射. 映射 $f:A\to B$ 若对于任何 $a\in A$，均有 $f(a)=b$，b 是 B 中的一个固定元素，则称 f 为 A 到 B 的一个常值映射.

常函数(constant function)　即“常值映射”.

恒等映射(identity mapping)　亦称恒等函数. 一种重要的映射. 对任何元素，象与原象相同的映射. 对于映射 f，若它的定义域 A 和值域 B 相等，并对所有的 $a\in A$ 均有 $f(a)=a$ 时，则称 f 为恒等映射. 常记为 I_A 或 $\mathrm{id}A,e_A$ 等.

恒等映射有下列性质：

1. 对映射 $f:A\to B,I_B\circ f=f\circ I_A=f$.

2. 对映射 $f:A\to B$，若存在映射 $g:A\to B$，使得

$$g\circ f=I_A,f\circ g=I_B,$$

则 f 是一一对应，且 $g=f^{-1}$.

3. 对任何集 A，都存在惟一的恒等映射 I_A.

4. 恒等映射 I_A 是双射，且 $I_A^{-1}=I_A$.

恒等函数(identity function)　即“恒等映射”.

嵌入映射(embedding mapping)　简称嵌入. 亦称包含映射. 一种特殊的映射. 当集 $A\subseteq B$ 时，对任何 $a\in A$，有 $f(a)=a$ 的映射 $f:A\to B$. 记为 $\mathrm{em}AB$. 当 $A=B$ 时，$\mathrm{em}AB$ 就是恒等映射 $\mathrm{id}A$.

嵌入(embedding)　嵌入映射的简称.

包含映射(inclusion mapping)　即“嵌入映射”.

映射的限制(restriction of a mapping)　亦称映射的收缩、部分映射. 一种特殊的映射. 是与对应的限制、关系的限制同义的概念. 给定集合 $A_1\subseteq A$ 和映射 $f:A_1\to B,g:A\to B$，若对任何 $a\in A_1$ 均有 $f(a)=g(a)$，则 f 称为 g 关于集合 A_1 的限制映射. 记为 $g|_{A_1}$，即 $f=g|_{A_1}$. g 称为 f 的延拓映射或映射的扩张. 任何映射向其定义域的非空子集的限制映射是惟一存在的. 而一个映射向其定义域的母集的延拓映射则可用多种方式给出多种结果. 给定 $f:A\to B,A_1\subseteq A$，当 $a\in A_1$ 时，$f|_{A_1}(a)=f(a)$；当 $a\in A-A_1$ 时，$f|_{A_1}(a)$ 无意义. 映射的限制是关系的限制的特殊情况.

映射的收缩(contraction of a mapping)　即“映射的限制.”

延拓映射(extension mapping)　见“映射的限制”.

映射的扩张(extension of a mapping)　见“映射的限制”.

自然映射(natural mapping)　亦称正规映射、典型映射. 一种重要的映射. 设 R 是集合 A 上的等价关系. 若映射 $g:A\to A/R$ 对当 $a\in A$ 有 $g(a)=[a]_R$，则 g 称为 A 关于等价关系 R 的自然映射. 记为 n_R. 自然映射 n_R 把 A 的元素 a 映射成它的等价类 $[a]_R$，即 $n_R(a)=[a]_R$. 自然映射是满射. 反之，设 $f:A\to B$ 是满射，则

$$A=\sum_{b\in B}f^{-1}(b)$$

是 A 的直和分解. 而 $\{f^{-1}(b)\}_{b\in B}$ 是 A 的划分，若由此划分定义的等价关系为 R，则当 $f(a)=b$ 时，$[a]_R=f^{-1}(b)$. 于是 f 可分解为一个自然映射与一个双射的积：$f=g\circ n_R$，这里 $g:f^{-1}(b)\to b$.

正规映射(normal mapping)　即“自然映射”.

典型映射(canonical mapping)　即“自然映射”.

直积映射(direct product mapping)　一种特殊的映射. 即由若干个映射导出的，定义在它们的定义域的直积上的映射. 设 $f_i:A_i\to B_i(i=1,2)$ 是映射.

定义映射 $g:A_1\times A_2\to B_1\times B_2$，使 $\langle a_1,a_2\rangle\in A_1\times A_2$ 时，$g(\langle a_1,a_2\rangle)=\langle f_1(a_1),f_2(a_2)\rangle$，$g$ 称为映射 f_1 与 f_2 的直积映射. 记为 $g=f_1\times f_2$. 一般地，设 $\{f_m:A_m\to B_m\}_{m\in M}$ 为映射族，可定义映射

$$g:\prod_{m\in M}A_m\to\prod_{m\in M}B_m,$$

当

$$\langle\cdots,a_m,\cdots,a_n,\cdots,a_p,\cdots\rangle\in\prod_{m\in M}A_m$$

时，

$$g(\langle\cdots,a_m,\cdots,a_n,\cdots,a_p,\cdots\rangle)=\langle\cdots,f_m(a_m),\cdots,f_n(a_n),\cdots,f_p(a_p),\cdots\rangle.$$

g 称为 $\{f_m\}_{m\in M}$ 的直积映射. 记为

$$g=\prod_{m\in M}f_m.$$

复合映射(composite mapping)　亦称映射的合成、映射的积或复合函数. 一种重要的映射. 对于映射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$，由 $\varphi(a)=g(f(a))$ 所确定的映射 $\varphi:A\to C$ 称为 f 与 g 的复合映射，或 f 与 g 的映射积. 记为 $\varphi=g\circ f$(读作"g 跟随 f").

映射的复合有下列性质：

1. 映射 $f:A\to B,g:C\to D$ 可复合为映射 $g\circ f:A\to D$ 的充分必要条件是 $f(A)\subseteq C$. 这里减弱了定义中 $B=C$ 这个条件.

2. 映射积满足结合律. 设映射

$$f_1:A\to B,f_2:B\to C,f_3:C\to D,$$

则 $(f_3\circ f_2)\circ f_1=f_3\circ(f_2\circ f_1)$. 这里 f_1,f_2,f_3 分别满足可复合的条件.

3. 设 $f:A\to B,g:B\to C,A_1\subseteq A,C_1\subseteq C$，有

$$g\circ f(A_1)=g(f(A_1)),$$
$$(g\circ f)^{-1}(C_1)=f^{-1}(g^{-1}(C_1)).$$

映射的合成(composition of mappings)　即"复合映射".

映射的积(product of mappings)　即"复合映射".

复合函数(composite function)　即"复合映射".

投影映射(projection mapping)　一种特殊映射. 指由直积集到它的因子集上的映射. 定义域为 $A\times B$，陪域为 A 的映射 $\varphi:A\times B\to A$，若对任何 $\langle a,b\rangle$ 有 $\varphi(\langle a,b\rangle)=a$，则称 φ 为 $A\times B$ 的第一投影映射. 记为 Pr_1，即 $\varphi=\mathrm{Pr}_1$. 同样可定义 $A\times B$ 的第二投影映射 $\mathrm{Pr}_2=A\times B\to B$，$\mathrm{Pr}_2(\langle a,b\rangle)=b$. 第一、第二投影映射统称为投影映射. 对于笛卡儿积

$$\prod_{m\in M}A_m,$$

亦可定义投影映射

$$\mathrm{Pr}_m:\prod_{m\in M}A_m\to A_m.$$

当

$$\langle\cdots,a_n,\cdots,a_m,\cdots,a_p,\cdots\rangle\in\prod_{m\in M}A_m$$

时，

$$\mathrm{Pr}_m(\langle\cdots,a_n,\cdots,a_m,\cdots,a_p,\cdots\rangle)=a_m.$$

利用映射族 $\{f_m:A\to B_m\}_{m\in M}$，定义映射

$$f:A\to\prod_{m\in M}B_m,$$

使得当 $a\in A$ 时，若 $f_m(a)=b_m$，则

$$f(a)=\langle\cdots,b_n,\cdots,b_m,\cdots,b_p,\cdots\rangle.$$

于是有：$f_m=\mathrm{Pr}_m\circ f\ (m\in M)$.

第一投影映射(first projection mapping)　见"投影映射".

第二投影映射(second projection mapping)　见"投影映射".

映射与关系相容(consistency between a mapping and a relation)　与映射及关系有关的一种概念. 即任二自变元有某一关系，则相应因变元也有该关系. 设 R 是集 A 上的二元关系，f 是 A 到 A 的映射，若对于一切 $a,b\in A$，当 aRb 时，有 $f(a)Rf(b)$，则称 A 上的关系 R 与映射 f 相容，或称 f 是依 R 相容的. 如果 R 是 A 上的等价关系，映射 $f:A\to A$ 与 R 相容的充分必要条件是存在惟一的映射 $\hat{f}:A/R\to A/R$，且 $\hat{f}([a]_R)=[f(a)]_R$.

相容映射(consistent mapping)　一种特殊映射. 指在定义域的公共部分上定义相同的两个映射. 对于有相同陪域的映射 $f_1:A_1\to B,f_2:A_2\to B$，若

$$f_1|_{A_1\cap A_2}=f_2|_{A_1\cap A_2},$$

即 $a\in A_1\cap A_2$ 时，$f_1(a)=f_2(a)$，则称 f_1 与 f_2 是相容的两个映射. 对于映射族 $\{f_m:A_m\to B\}_{m\in M}$，若其中的任何两个映射都相容，则称为相容映射族. 设 $\{f_m:A_m\to B\}_{m\in M}$ 是相容族，可以定义映射

$$\varphi:\bigcup_{m\in M}A_m\to B,$$

使得对任何 $a\in A_m$ 时，$\varphi(a)=f_m(a)$，φ 称为映射族 $\{f_m\}_{m\in M}$ 的组合映射，记为

$$\bigcup_{m\in M}f_m.$$

相容映射族有惟一的组合映射，它是族中各映射向

$$\bigcup_{m\in M}A_m$$

上的延拓.

相容映射族(family of consistent mappings)　见"相容映射".

映射族的组合映射(combinatorial mapping of family of mappings)　见"相容映射".

运算(operation)　映射在某些场合下的另一种称呼. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B$ 为集合，映射 $f:A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\to B$ 称为定义在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 上取值于 B 的 n 元运算. 简称 n 元运算. 当 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=b$

时，称 b 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 按运算 f 计算的结果. 在这里映射符号 f 就是运算符号. 当 $n=0$，约定

$$\prod_{i=1}^{0}\{A_i\}=\{\varnothing\}=\text{单元集},$$

f 是 0 元运算 $f:\{\varnothing\}\to B$，它表示在集合 B 内取一个元素；当 $n=1$ 时，$f:A_1\to B$ 称为一元运算；当 $n=2$ 时，$f:A_1\times A_2\to B$ 称为二元运算. 按习惯，二元运算在各种特殊情况下采用特别的运算符号，如 $+$，$-$，$\times$，$\div$，$*$，$\circ$，$\triangle$ 等，并且把运算符号放在被运算的两元素之间. 当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=B=A$ 时，则把 f 称为集合 A 上的 n 元运算. A 上的二元运算亦称为集合 A 的合成.

集合的一元运算(unary operation of a set)　见“运算”.

集合的二元运算(binary operation of sets)　见“运算”.

集合的 n 元运算(n-ary operation of sets)　见“运算”.

集合的合成(composition of sets)　见“运算”.

由集合 A 到集合 B 的运算(operation from set A to set B)　一种特殊映射. 指由 $A\times B$ 到 B 的映射. 若把运算看成三元关系，且图象 r 满足条件：

1. 若 $(a,b)\in A\times B$，则有 $c\in B$，使 $(a,b,c)\in r$；
2. 若 $(a,b,c)\in r$，$(a,b,c')\in r$，则 $c=c'$；

则满足上述条件的 $r\in P(A\times B\times B)$ 称为确定了 A 对于 B 的运算结构. A 的元素称为 B 上的算子，也称 A 为 B 的算子区，称 B 为 A 的集合. 另外，如以 B 为主，A 对 B 的运算也称为外部合成. 相应地，通常的合成称为内部合成. 当对算子区 A 确定合成 $*$ 时，通常要求下列条件. 令

$$*:A\times A\to A,\ \cdot:A\times B\to B,$$

则对任何 $a,b\in A$，$c\in B$，有

$$(a*b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

再者，若对 b 确定合成 $\triangle:B\times B\to B$，则对任何 $a\in A$，$b,c\in B$，要求

$$(a*b)\triangle(a*c)=a*(b\triangle c).$$

映射 $A\times B\to B$ 称为 A 对 B 的左运算，而映射 $B\times A\to B$ 称为 A 对 B 的右运算.

集合的运算结构(operation structure of a set)　见“由集合 A 到集合 B 的运算”.

集合的算子区(operator domain of a set)　见“由集合 A 到集合 B 的运算”.

集合的外部合成(external composition of a set)　见“由集合 A 到集合 B 的运算”.

集合的内部合成(internal composition of a set)　见“由集合 A 到集合 B 的运算”.

集合的左运算(left operation of a set)　见“由集合 A 到集合 B 的运算”.

集合的右运算(right operation of a set)　见“由集合 A 到集合 B 的运算”.

反运算(anti-operation)　一种特殊的运算. 对于任意二元素，颠倒其位置，再按原来的二元运算确定结果的新运算. 对于二元运算 $*:A\times B\to C$，若 $a*b=c$，则使 $b\,\overline{*}\,a=c$ 的二元运算 $\overline{*}:B\times A\to C$ 称为 $*$ 的反运算. 显然，$\overline{\overline{*}}=*$.

逆运算(inverse operation)　一种特殊的运算. 即对于一个二元运算，固定其中一个元素，该运算作为另一元素到运算结果的映射时的逆映射. 如果运算 $*:A\times B\to C$ 是满射，且对任何 $a\in A$，$c\in C$ 有惟一的 $b\in B$，使 $a*b=c$，则 $a*_L^{-1}c=b$ 的运算 $*_L^{-1}:A\times C\to B$ 称为 $*$ 的左逆运算. 又若对任何 $b\in B$，$c\in C$，有惟一的 $a\in A$，使 $a*b=c$，则使 $c*_r^{-1}b=a$ 的运算 $*_r^{-1}:C\times B\to A$ 称为 $*$ 的右逆运算. 运算 $*$ 的左逆运算用于解形如 $a*x=b$ 的方程，其解为 $x=a*_L^{-1}b$；右逆运算用于解形如 $y*b=c$ 的方程，其解为 $y=c*_r^{-1}b$.

数学结构(mathematical structure)　亦称关系结构，简称结构. 现代数学的一个基本概念. 各种数学对象的统称. 它是对于各种数学对象，例如，有序集、线性空间、群、环、拓扑空间、流形等，用集合和关系的语言给出的统一形式. 结构由若干集合，定义在集合上或集合间的一些关系，以及一组作为条件的公理组成. 随着数学的发展，不断出现许多新的数学分支，这些分支有其各自的研究对象，独特的方法，独自的语言. 另一方面，数学不同领域的方法和思想的互相渗透，建立了现代数学的共同逻辑基础(数理逻辑)、共同的基本概念(集合)和共同的方法(公理化方法). 法国布尔巴基学派采用全局观点，着重分析各个数学分支之间的结构差异和内在联系，他们认为数学的基本结构有三种，称为母结构：

1. 代数结构. 由集合及其上的运算组成，如群、环、域、线性空间等.
2. 序结构. 由集合及其上的序关系组成，如偏序集、全序集、良序集.
3. 拓扑结构. 由集合及其上的拓扑组成，如拓扑空间、度量空间、紧致集、列紧空间等.

通过以上三种母结构的变化、复合、交叉形成各种数学分支.

关系结构(relation structures)　即“数学结构”.

母结构(generating structures)　见“数学结构”.

结构的同态(homomorphism of structures)　结构之间的相似关系. 对于 A 与 B 为基本集合的两个结构 $\mathscr{U}_1=\langle A,R_1,R_2,\cdots,R_n\rangle$ 与 $\mathscr{U}_2=\langle B,R_1^*,R_2^*,\cdots,R_n^*\rangle$，其中 R_i 与 R_i^* 是相互对应的 k_i 元关

系. 若存在映射 $f:A\to B$,对任何 $a_1,a_2,\cdots,a_{k_i}\in A$,关系 $R_i(a_1,a_2,\cdots,a_{k_i})$ 成立,当且仅当 $R_i^*(f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_{k_i}))$ 成立($i=1,2,\cdots,n$),则称 f 是 $\mathscr{U}_1$ 到 $\mathscr{U}_2$ 的同态映射. 当 f 是满射时,称为同态满射,且称 $\mathscr{U}_1$ 与 $\mathscr{U}_2$ 同态. 两个同态的结构之间有共性,例如,当 $\langle A,R\rangle$ 与 $\langle B,R^*\rangle$ 同态时,如 R 与 R^* 分别是 A 与 B 上的二元关系,同态满射是 f,则:

1. R 在 A 上自反时,R^* 在 B 上是自反的.
2. R 在 A 上连通时,R^* 在 B 上是连通的.
3. R 在 A 上强连通时,R^* 在 B 上是强连通的.

同态映射(homomorphic mapping) 见“结构的同态”.

同态满射(homomorphic surjection) 见“结构的同态”.

结构的同构(isomorphism of structures) 结构之间的等价关系. 对于以 A 与 B 为基本集合的两个关系结构

$$\mathscr{U}_1=\langle A,R_1,R_2,\cdots,R_n\rangle$$

与

$$\mathscr{U}_2=\langle B,R_1^*,R_2^*,\cdots,R_n^*\rangle,$$

其中 R_i 与 R_i^* 是相互对应的 k_i 元关系. 若存在一一对应 $f:A\to B$,对任何 $a_1,a_2,\cdots,a_{k_i}\in A$,关系 $R_i(a_1,a_2,\cdots,a_{k_i})$ 成立,当且仅当 $R_i^*(f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_{k_i}))$ 成立($i=1,2,\cdots,n$),则称 f 是 $\mathscr{U}_1$ 与 $\mathscr{U}_2$ 间的同构映射,且称关系结构 $\mathscr{U}_1$ 与 $\mathscr{U}_2$ 同构.

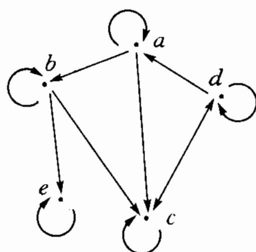
同构映射(isomorphism mapping) 见“结构的同构”.

有序集和序结构

拟序关系(quasi-ordering relation) 亦称伪序关系或前序关系. 一种重要的二元关系. 指集合 A 上的自反的与传递的二元关系 R,A 称为拟序集. 即关系 $R(\subseteq A\times A)$ 是拟序关系 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R\wedge R\circ R\subseteq R$.

拟序关系有下列特点:

1. 对角集 $E_A\subseteq R$,且当 $\langle a,b\rangle\in R$,$\langle b,c\rangle\in R$ 时,$\langle a,c\rangle\in R$.
2. R 的矩阵 $(r_{ij})_\lambda$ 主对角线上的元素全是 1,且当 $r_{ij}=r_{jk}=1$ 时,$r_{ik}=1$.
3. R 的箭头图上,每个元素有一个从自己出发又指向自身的箭头,且在有 a 到 b 的箭头,b 到 c 的箭头时,就有 a 到 c 的箭头. 如右面的关系箭头图表示的是集 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 上的一个拟序.



拟序关系的逆关系一定是拟序的,反对称的拟序关系是偏序关系. 但拟序关系可以不是偏序关系. 例如,图中表示的拟序就不是偏序,因为 cRd 且 dRc,但 $c\neq d$.

伪序关系(pseudo-ordering relation) 即“拟序关系”.

前序关系(preorder relation) 即“拟序关系”.

拟序集(quasi-ordering set) 见“拟序关系”.

偏序关系(partially ordered relation) 亦称序关系、弱偏序关系、半序关系. 一种重要的二元关系. 指集合 A 有自反性、反对称性和传递性的二元关系 R,A 称为偏序集. 偏序关系常用记号 $\leqslant$ 表示(仍读作小于或等于). $a\leqslant b$ 意即 aRb. 偏序关系可用符号表示为:R 是 A 的偏序关系 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R\wedge R\circ R\subseteq R\wedge R\cap R^{-1}\subseteq I_A$.

偏序关系 $\leqslant(\subseteq A\times A)$ 有下列特点:

1. 对角集 $E_A\subseteq\leqslant$,$\leqslant\cap\leqslant^{-1}=E_A$.
2. $\leqslant$ 的矩阵 $(r_{ij})_\lambda$ 的主对角线上的元素全是 1;当 $i\neq j$ 时,$r_{ij}\cdot r_{ji}=0$,当 $r_{ij}=r_{jk}=1$ 时,$r_{ik}=1$.
3. $\leqslant$ 的箭头图上每一点有一箭头从自己出发而指向自己. 如有箭头从 a 指向 b,从 b 指向 c,就有箭头从 a 指向 c. 任何两点间无双箭头.

偏序关系的逆关系 $\geqslant$ 一定是偏序关系,偏序关系一定是拟序关系. 1880 年,皮尔斯(Peirce, C. S.)首先系统地讨论了偏序关系. 而关于偏序的术语是由豪斯多夫(Hausdorff, F.)于 1914 年引进的.

序关系(ordering relation) 即“偏序关系”.

弱偏序关系(weakly partially ordered relation) 即“偏序关系”.

半序关系(partially ordered relation) 即“偏序关系”.

严格偏序关系(strictly partially ordered relation) 一种重要的偏序关系. 指集合 A 上的反自反的、传递的和非对称的二元关系 R,A 称为严格偏序集. 严格偏序关系常记以特殊的记号 $<$. $a<b$ 意即 aRb. 例如,整数集上的小于关系、大于关系;集合的真含于关系都是严格偏序的.

严格偏序关系 $<(\subseteq A\times A)$ 有下列特点:

1. $E_A\cap<=\varnothing$,$(<\circ<)\subseteq<$,且 $\langle a,b\rangle\in<$ 时,$\langle b,a\rangle\notin<$.
2. $<$ 的矩阵 $M_R=(r_{ij})_\lambda$ 的主对角线上全是零. 对任何 i,j,$r_{ij}\cdot r_{ji}=0$,且 $r_{ij}=r_{jk}=1$ 时,$r_{ik}=1$.
3. $<$ 的箭头图上每一个点都没有从自己出发指向自身的箭头,不同两点间没有双向箭头,且若有从 a 向 b、从 b 向 c 的箭头就有从 a 向 c 的箭头.

严格偏序集(strictly partially ordered set) 见“严格偏序关系”.

全序关系(totally ordered relation) 亦称有序关系、线性序关系. 一种重要的二元关系. 指集合 A

上的连通的偏序关系 R. 即 A 上的全序关系 R 具有自反性、反对称性、传递性和连通性. 定义了全序关系的集称为全序集或线性序集. 例如, 整数集上的"不大于关系"就是全序的.

A 的全序关系 R 具有下列特点:

1. $E_A \subseteq R, R \circ R \subseteq R, R \cap R^{-1} \subseteq E_A$,
$R \cup R^{-1} = A \times A$.

2. R 的矩阵 $M_R = (r_{ij})_\lambda$ 中, 对任何 $i, r_{ii}=1$; 又 $i,j,i \neq j$ 时, $r_{ij}+r_{ji}=1$, 且 $r_{ij}=r_{jk}=1$ 时, $r_{ik}=1$.

3. R 的箭头图中, 每一点有一个从自身出发指向自己的箭头; 每两点有箭头连结, 无双向箭头; 每三点间的三个箭头首尾相接.

4. A 中元素可排成一行, 当 aRb 时, a 排在 b 的左边. 例如 aRb, bRc 成立时, 可排成$\cdots a \cdots b \cdots c \cdots$省略号中有或没有 A 中其他元素.

有序关系(ordered relation)　即"全序关系".

线性序关系(linearly ordered relation)　即"全序关系".

全序集(totally ordered set)　见"全序关系"和"有序集".

线性序集(linear ordered set)　见"全序关系".

严格全序关系(strictly totally ordered relation)　亦称严格线性序关系、严格有序关系. 一种重要的全序关系. 指集合 A 上的不对称的、传递的、弱连通的二元关系 R. A 称为严格全序集. 例如, 整数集上的小于关系 $<$ 就是一个严格全序的.

A 上的严格全序关系 R 有下列特点:

1. $R \circ R \subseteq R, R \cap R^{-1} = \varnothing$,
$R \cup R^{-1} = A \times A - E$.

2. R 的矩阵 $M_R = (r_{ij})_\lambda$ 中, 对任何 $i,j,i \neq j$ 时, $r_{ij}+r_{ji}=1, r_{ii}=0$. 当 $r_{ij}=r_{jk}=1$ 时, $r_{ik}=1$.

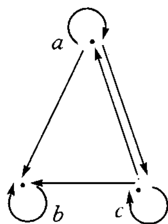
3. A 中元素可以排成一行. 当 aRb 时, a 排在较左边. 例如 aRb, bRc 成立时, 可排成$\cdots a \cdots b \cdots c \cdots$, 省略号中有或没有 A 中其他元素.

严格线性序关系(strictly linearly ordered relation)　即"严格全序关系".

严格有序关系(strictly ordered relation)　即"严格全序关系".

严格全序集(strictly totally ordered set)　见"严格全序关系".

弱序关系(weak-ordering relation)　亦称弱优选关系. 一种重要的二元关系. 指集合 A 中的自反的、传递的、连通的二元关系 R. 弱序关系 R 对任何 $a,b \in A$, 有 aRb 或 bRa. A 称为弱序集. 全序是一种弱序. 弱序若还是反对称的, 则就是全序. 如右面的箭头图表示集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的关系 R 是弱序, 既非全序又非偏序. 因为有 aRc, cRa, 但 $a \neq c$. 弱序集虽然是强连通的, 但一般不能排成一行.



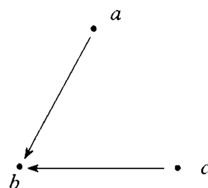
弱优选关系(relation of weak preference)　即"弱序关系".

弱序集(weak-ordering set)　见"弱序关系".

强优选关系(relation of strong preference)　一种重要的二元关系. 弱序关系的逆补关系. 如果 A 上二元关系 Q 是 A 上的弱优选关系, 则 Q 的逆关系的补关系 $\overline{Q^{-1}}=G$ 称为强优选关系. 对 $a,b \in A$, aGb 的充分必要条件是 $\neg(bQa)$. G 的直观意义是"并非 b 在 a 之先", 即"a 在 b 之先". 故 G 有强优选关系之名. A 上强优选关系 G 有下列性质($\overline{G}$ 为强优选关系 G 的补关系):

1. G 是不对称的, 即对任何 $a,b \in A$, 若 aGb, 则 $b\overline{G}a$.

2. G 是传递的, 即对任何 $a,b,c \in A$, 若 aGb, bGc, 则 aGc.



G 不一定是连通的, 例如, 当 $A=\{a,b,c\}$, 若弱优选关系 Q 的箭头图如"弱序关系"中的图, 则强优选关系 $G=\overline{Q^{-1}}$ 以右图为箭头图. aGc 与 cGa 均不成立.

优选关系(relation of preference)　弱优选关系与强优选关系的统称. 集合 A 上的弱优选关系 R 是 A 上的弱序, 它有自反性与传递性. 而强优选关系 G 是 R 的逆关系的补关系 $\overline{R^{-1}}$, 具有不对称性与传递性. A 上的无差别关系 I 与强优选关系 G 可用下列三个公理定义:

1. 对 $a \in A, aIa$.

2. 对 $a,b,c,d \in A$, 若 $aGb \wedge bIc \wedge cGd$, 则 aGd.

3. 对任何 $a,b \in A$, 恰好下列关系之一成立:

$$aGb, \quad bGa, \quad aIb.$$

而弱优选关系 R 定义为 $\overline{G^{-1}}$.

无差别关系(indifference relation)　一种二元关系. 指集合 A 上的弱优选关系 Q 与它的逆关系 Q^{-1} 的交. A 上的无差别关系记为 I. 对任何 $a,b \in A$, aIb 成立, 当且仅当 aQb 且 bQa. aIb 的直观意义是"a 在 b 之先, 且 b 在 a 之先". 故 I 有无差别关系之名. 无差别关系具有下列性质($\overline{G}$ 是强优选关系 G 的补关系):

1. 自反性: 对任何 $a \in A, aIa$.

2. 对称性: 对任何 $a,b \in A$, 若 aIb, 则 bIa.

3. 传递性: 对任何 $a,b,c \in A$, 若 aIb, bIc, 则 aIc.

4. 对任何 $a,b \in A$, 若 aIb, 则 $a\overline{G}b$ 且 $b\overline{G}a$.

5. 对任何 $a,b,c\in A$，若 aIb，且 bGc，则 aGc.

6. 对任何 $a,b,c\in A$，若 aIb，且 cGa，则 cGb.

7. 对任何 $a,b,c,d\in A$，若 aGb 且 bIc 且 cGd，则 aGd.

序关系的比较(comparison of ordering relations)　序关系的一种分类. 即将集 A 上的各种序的不同内涵进行比较，现列表对比于下：

性质 \ R	传递性	自反性	反对称性	不对称性	连通性	强连通性	反自反性
传递关系	√						
拟序关系	√	√					
偏序关系	√	√	√				
严格偏序关系	√			√			√
全序关系	√	√	√		√		
严格全序关系	√			√	√		√
弱序关系	√	√			√	√	

各类不同的有序集的比较可概括如下：

$\{$全序集$\}\subsetneqq\{$偏序集$\}\subsetneqq\{$拟序集$\}\subsetneqq\{$传递集$\}$；

$\{$全序集$\}\subsetneqq\{$弱序集$\}\subsetneqq\{$拟序集$\}\subsetneqq\{$传递集$\}$；

$\{$严格全序集$\}\subsetneqq\{$严格偏序集$\}\subsetneqq\{$传递集$\}$.

有序集(ordered set)　一种特殊的集合. 指规定了序关系的集合，或说具有序关系的集合. 有序集按其所具有的不同序关系而又有不同的名称，例如拟序集、偏序集、全序集等. 通常将未指明序关系的有序集理解为偏序集. 由一个有序集 A 和其序关系 R 组成的序结构记为 $\langle A,R\rangle$. 这个 $\langle A,R\rangle$ 也常用来表示有序集.

序结构(ordering structure)　一种特殊的结构. 即由集合及在其上规定的序关系组成的数学结构(参见"数学结构"和"有序集").

序关系的对偶原理(duality principle of ordering relations)　序结构中两个命题的一种对偶关系. 若 R 为集合 A 上的序关系，则 R 的逆关系 R^{-1} 也是 A 上的序关系. R 与 R^{-1} 称为互相对偶的序关系，而 $\langle A,R\rangle$ 与 $\langle A,R^{-1}\rangle$ 称为互相对偶的序结构. 关于序的概念、条件、命题等，若将序换为它的对偶，则所得到的概念、条件、命题等称为原来的对偶. 若用 P^* 表示命题 P 的对偶命题，P 在 $\langle A,R\rangle$ 中真，当且仅当 P^* 在 $\langle A,R^{-1}\rangle$ 中真. 因此，若一个命题是关于某类序结构的定理(即对这类序结构均成立的命题)，则它的对偶命题也是该类序结构中的定理. 这一事实称为关于序的对偶原理.

互相对偶的序关系(ordering relation of mutual duality)　见"序关系的对偶原理".

互相对偶的序结构(ordering structure of mutual duality)　见"序关系的对偶原理".

有序集中的可比较元素(comparable elements of an ordered set)　有序集中保持特定关系的两个元素. 指集合中的两个元素，当它们或它们的位置颠倒后有某一序关系. 在序结构 $\langle A,R\rangle$ 中，当 $a,b\in A$ 时，如果 aRb 或 bRa 成立，则称 a 与 b 是集 A 中的可比较元素. 如果 aRb 与 bRa 均不成立，则称 a 与 b 是不可比较元素. 当 R 是自反关系时，A 中每个元素与自身可比较；当 R 是反自反关系时，A 中每个元素与自身不可比较；强连通的线性序集中，任何两个元素都可比较；弱连通的线性序集中，任何两个不同元素都可比较. 在偏序结构 $\langle A,R\rangle$ 中，偏序关系 R 是严格偏序关系 $<$ 与恒同关系 $=$ 的并，可记为 $\leqslant$，并用 $a<b$ 或 $a=b$ 代替 aRb. $a<b$ 亦可写成 $b>a$，即用 $<$ 的逆关系 $>$ 取代它. 于是对于两个可比较元素，$a<b$，$a=b$，$a>b$ 三式有一个且仅有一个成立. 这称为可比较元素间的三歧性或三分性. 如果偏序不是全序，那么 A 中一定存在不可比较元素. 即至少存在 c 与 d，$c<d$，$c=d$，$c>d$ 均不成立. 拟序结构 $\langle A,R\rangle$ 中的可比较元素间不一定具有三歧性，因即使 $a,b\in A$，$a\neq b$，也可能 aRb 与 bRa 同时成立. 这时 $bR^{-1}a$ 与 $aR^{-1}b$ 也同时成立. 严格偏序结构 $\langle A,R\rangle$ 中，R 是反自反的，即对 $a\in A$，有 $a\overline{R}a$($\neg(aRa)$)，a 与 a 不可比较. 两个可比较元素一定是不同元素. 如 a 与 b 可比较，aRb 也可记为 $bR^{-1}a$. 取

$$G=R\cup E_A,$$

E_A 是 A 上恒等关系，则

$$\langle A,G\rangle=\langle A,R\cup E_A\rangle$$

是一个偏序结构，可比较元素的三歧性便成立了.

有序集中的三歧性(trichotomy of an ordered set)　见"有序集中的可比较元素".

偏序结构(partially ordered structure)　一种特殊的结构. 是集合与其上的一个偏序的全称. 指二元关系 R 是集 A 上的一个偏序关系的序结构 $\langle A,R\rangle$. 有时也把偏序结构 $\langle A,R\rangle$ 称为偏序集. 偏序结构是各种序结构最基本和最重要的一种，在它的基础上可以定义出全序、良序、格、布尔代数等重要的数学概念.

偏序集(partially ordered set)　见"偏序关系"和"偏序结构".

偏序集的哈塞图(Hasse diagram of a partially ordered set)　刻画偏序关系的一种示意图. 即有限集 A 的偏序结构 $\langle A,R\rangle$ 的直观图示. 图中用小圆圈表示集合 A 的元素. 在 $a,b\in A$，aRb 时，从 a 有一条连续上升的不必笔直的线段或折线到达 b. 下面各图都可以看成集合的哈塞图. 设 R 是集合 A 的偏序

关系，则在偏序结构$\langle A,R\rangle$的哈塞图中：

1. aRb，当且仅当从a到b有一条或几条严格上升的线段或折线连结. a与b间无线连结，或虽有折

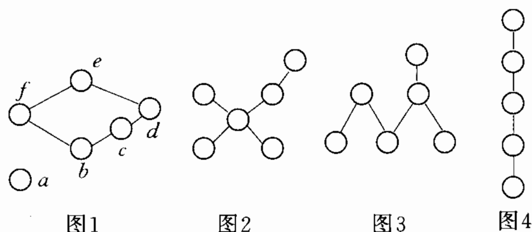


图1　图2　图3　图4

线连结但在上下起伏的时候，$a\overline{R}b$且$b\overline{R}a$. 如图1中$a\overline{R}b$，$b\overline{R}a$，$f\overline{R}c$，$c\overline{R}f$等($\overline{R}$为R的补关系).

2. 无水平的线段.

3. 当R是全序时，哈塞图可画成一个上升的链

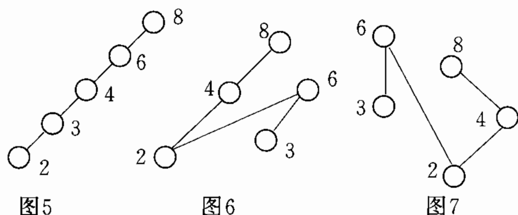


图5　图6　图7

状图，如图4.

4. 同一个集合，当偏序关系不同时，有不同的哈塞图. 例如，当$A=\{2,3,4,6,8\}$时，关系$R=$"x不大于y"，$G=$"x整除y"时，R与G的哈塞图分别为图5与图6.

5. 集合A的两个哈塞图相同，当且仅当通过变形可以把一个变成另一个，但是必须不改变图的连结并保持线段的上升方向. 例如，图6、图7是同一哈塞图.

6. 把一个关系的哈塞图上下反转，得到它的逆关系的哈塞图. 但左右翻转还是原关系的哈塞图.

哈塞(Hasse，H.)是第一个使用这种通俗的图来表示偏序.

极小元(minimal element)　偏序集中的一种特殊元素. 指偏序集中没有与它可比较的更小的元素. 设$\langle A,R\rangle$是偏序集，$B\subseteq A$，$b\in B$，若不存在$x\in B$，使得xRb且$x\neq b$，则b称为$\langle B,R\rangle$的极小元. 对给定的$\langle B,R\rangle$可以有一个或多个极小元，也可以没有极小元. 若a与b是$\langle B,R\rangle$的两个不同的极小元，则$\neg(aRb)$且$\neg(bRa)$. 当B为有限集时，$\langle B,R\rangle$一定有极小元.

极大元(maximal element)　偏序集中的一种特殊元素. 指偏序集中没有比它更大的可比较的元素. 设$\langle A,R\rangle$是偏序集，$B\subseteq A$，$b\in B$，若不存在$x\in B$，使得bRx且$x\neq b$，则称b为$\langle B,R\rangle$的极大元. 对给定的$\langle B,R\rangle$可以有一个或多个极大元，也可以没有极大元. 若a与b是$\langle B,R\rangle$的两个不同的极大元，则$\neg(aRb)$且$\neg(bRa)$. 当B为有限集时，$\langle B,R\rangle$一定有极大元.

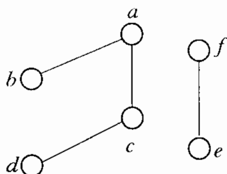
最小元(least element)　一种特殊元素. 指偏序集的子集中小于或等于一切元素的元素. 令$\langle A,R\rangle$是偏序集，$B\subseteq A$，$b\in B$，如果对每一个$x\in B$都有bRx，则称b是$\langle B,R\rangle$的最小元. 对给定的$\langle B,R\rangle$不一定有最小元，若有最小元，则是惟一的. $\langle A,R\rangle$的最小元称为零元素，记为0. $\langle B,R\rangle$的最小元是$\langle B,R^{-1}\rangle$的最大元；反之亦真. 最小元是惟一的极小元.

最大元(greatest element)　一种特殊元素. 指偏序集的子集中不小于一切元素的元素. 令$\langle A,R\rangle$是偏序集，$B\subseteq A$，$b\in B$，若对每一个$x\in B$都有xRb，则称b是$\langle B,R\rangle$的最大元. 对给定的$\langle B,R\rangle$不一定有最大元，若有最大元，则是惟一的. $\langle A,R\rangle$的最大元称为单位元，记为1. $\langle B,R\rangle$的最大元是$\langle B,R^{-1}\rangle$的最小元；反之亦真. 最大元是惟一的极大元.

良序集(well-ordered set)　一种重要的序集. 指每个非空子集都有最小元的线性序集. 令$<$是集合A的线性序(或偏序)，若A的每个非空子集都有$<$最小元，则称结构$(A,<)$是良序集. 良序集的序关系称为良序. 设$<$是普通的小于关系，则$(\mathsf{N},<)$是良序集；$(\mathsf{Z},<)$不是良序集.

良序(well-ordered)　见"良序集".

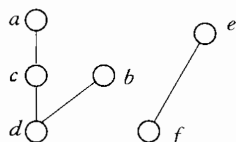
上界(upper bound)　与偏序集有关的一个特殊元素. 指偏序集中大于或等于它的子集中一切元素的元素. 设$\langle A,R\rangle$是偏序集，$B\subseteq A$，$a\in A$. 若对所有$x\in B$都有xRa，则a称为B在偏序集$\langle A,R\rangle$中的上界，简称B的上界，记为$\mathrm{ub}_R(B)$. 若a是B的上界，对于B的任何上界c，都有aRc，则a称为B的上确界(或最小上界)，记为$\sup_R(B)$. 对一个$B\subseteq A$，它的上界可能不存在，或可能不止一个. 例如，令$A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle a,b\rangle \mid a$整除$b\}$. 当取$B_1=\{2,3\}$时，$B_1$没有上界. 当$B_2=\{1\}$时，有上界1，2，3，且1是$B_2$的上确界. 对$B\subseteq A$，若上确界存在，则是惟一的. 一个子集$B$有上界时它未必有上确界，有上确界也不一定在子集$B$之中. 例如，右面哈塞图表示的以$A=\{a,b,c,d,e\}$为基本集的一个偏序集. 子集$B=\{b,c,d\}$，以$a$为上界，$a\notin\{b,c,d\}$. 子集$\{e,f\}$的上界与上确界都是$f$. 子集$\{c,d,e\}$无上界，也无上确界.



上确界(supremum)　见"上界".

下界(lower bound)　与偏序集有关的一个特殊元素. 指偏序集中小于或等于它的子集中一切元素的元素. 令$\langle A,R\rangle$是偏序集，$B\subseteq A$，$a\in A$. 若对所有$x\in B$都有aRx，则a称为B在偏序集$\langle A,R\rangle$中

的下界，简称 B 的下界，记为$\mathrm{Lb}_R(B)$. 又若 a 是 B 的下界，对于 B 的任何下界 c，都有 cRa，则 a 称为 B 的下确界(或最大下界)，记为 $\inf_R(B)$. 对一个 $B\subseteq A$，它的下界可能不存在，或可能不止一个. 例如，令 $A=\{2,3,6\}$，$R=\{\langle a,b\rangle \mid a$ 整除 $b\}$，当取 $B_1=\{2,3\}$ 时，B_1 没有下界，当取 $B_2=\{6\}$时，B_2 以 2，3，6 为下界. 且 6 是 B_2 的下确界. 对 $B\subseteq A$，若有下确界，则是惟一的. 一个子集 B，未必有下确界，有下确界也未必在子集中，例如，右面哈塞图表示 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ 为基本集的一个偏序结构，子集$\{a,b,c\}$的下确界为 d，$d\notin\{a,b,c\}$；子集$\{e,f\}$的下界与下确界均为 f，$f\in\{e,f\}$. 子集$\{a,b,e\}$无下界.

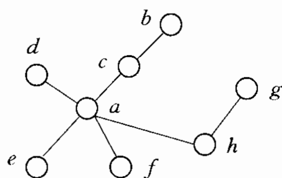


下确界(infimum)　见"下界".

前元(predecessor)　与偏序集有关的一种特殊元素. 即对于偏序集中的一个元素，一切小于或等于它的其他元素. 设$\langle A,R\rangle$为偏序结构，若 $a,b\in A$，$a\neq b$，aRb，则称 a 是 b 的前元，b 是 a 的继元(或后元). A 中的元素不一定有前元或继元. 如果有，也可能是一个或多个. 例如，取关系 $R=\{\langle a,b\rangle \mid a$ 小于或等于 $b\}$，当 $A=\{1,2,3\}$时，结构$\langle A,R\rangle$中 1 无前元，2 与 3 都是它的继元；3 无继元，但 1 与 2 都是它的前元；2 有惟一的前元 1 与惟一的继元 3.

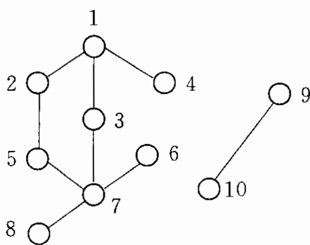
继元(successor)　见"前元".

直接前元(immediate predecessor)　一种特殊相关的元素. 它是偏序集中某元素的前元，并且该元素的一切其他前元也是它的前元. 设$\langle A,R\rangle$为偏序集. 若 $a,b\in A$，$a\neq b$，aRb，并且对于任何 $c\in A$，当 aRc 且 cRb 时，有 $a=c$ 或 $c=b$，则 a 称为 b 的直接前元，b 称为 a 的直接继元. 如果 a 的直接继元存在且惟一，可记为 a^+ 或 $S(a)$. A 中元素不一定有直接前元(继元)，也可能有一个或多个. 在右面哈塞图表示的偏序集中，a 有三个直接前元，它们互不能比较；a 又有两个直接继元. b 有五个前元，一个直接前元，而无继元. e,f,h 都无前元，而 e,f 都以 a 为直接继元. h 以 g 为直接继元. A 中元素也可能有前元(继元)而无直接前元(直接继元). 例如，当 A 为实数集，R 为小于关系时，A 中任何一个元素都无直接前元与直接继元.



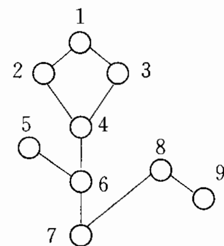
直接继元(immediate successor)　见"直接前元".

***R* 前节**(R-presegment)　哈塞图中的一种由某元素确定的节段. 设$\langle A,R\rangle$为偏序集，若 $a\in A$，a 与 a 的所有前元的集合 B 称为由 a 决定的 R 前节，记为 $PS(a)$，即 $PS(a)=\{b \mid b\in A\wedge bRa\}$. 而 a 在$\langle A,R^{-1}\rangle$中确定的 R 前节称为 a 在$\langle A,R\rangle$中确定的 R 后节. 在$\langle A,R\rangle$的哈塞图中，从 a 出发，向下伸的各连续折线上的各节点元素构成 a 确定的 R 前节. 例如，右面哈塞图中 1 确定的 R 前节为$\{1,2,3,4,5,7,8\}$，4 确定的 R 前节为$\{4\}$，6 确定的 R 前节为$\{6,7,8\}$，9 确定的 R 前节为$\{9,10\}$.



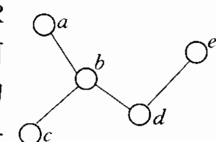
***R* 后节**(R-sucsegment)　见"R 前节".

***R* 前段**(R-presection)　哈塞图中的一种由某元素确定的节段. 设$\langle A,R\rangle$是偏序集，若 $B\subseteq A$，且对任何 $a\in A$，存在 $b\in B$，使 aRb，就有 $a\in B$，则称 B 是一个 R 前段. B 是 R 前段时，B 中每个元素的前元都在 B 中. 例如，在右面哈塞图所示的偏序集中，$\{6,7\}$，$\{6,7,8,9\}$，$\{3,4,6,7\}$等都是 R 前段，而$\{6,7,8\}$，$\{1,3,4,6,7\}$不是 R 前段. $\langle A,R^{-1}\rangle$的 R 前段称为$\langle A,R\rangle$的 R 后段.



***R* 后段**(R-sucsection)　见"R 前段".

***R* 链**(R-chain)　偏序集中的全序子集. 设$\langle A,R\rangle$是偏序集，集合 A 关于 R 的任何全序子集 B 都称为 A 的一个 R 链. 对 R 链 B，如果任意添入 $A-B$ 中的某个元素都不再是 R 链，B 就称为极大 R 链. 若 B 是 R 链，则 B 是 A 的全序子集. 当 A 是全序集时，A 就是惟一的极大 R 链. 在偏序集的哈塞图中，任何一条连续上升的折线所串连的各点或其部分都构成 R 链. 单独一个元素也是 R 链. 例如，右面哈塞图中有下列 R 链：



$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\}$，

$\{b,a\},\{c,b\},\{d,b\},\{c,a\}$，

$\{d,a\},\{d,e\},\{c,b,a\},\{d,b,a\}$.

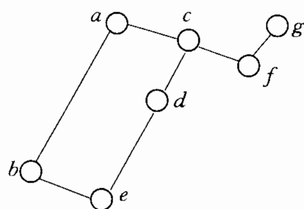
其中后三个还都是极大 R 链. 有限偏序集 A 的 R 链中元素的个数称为 R 链的长度. 若$\langle A,R\rangle$中的最长链的长度为 n，那么 A 中元素能划分成 n 条不相交的反链. 前例中链最长为 3，A 中恰有 3 条不相交的反链$\{a,e\}$，$\{c,d\}$，$\{b\}$.

极大 *R* 链(maximal R-chain)　见"R 链".

***R* 链的长度**(length of R-chain)　见"R 链".

***R* 反链**(R-anti chain)　一种特殊的链. 设$\langle A,R\rangle$是偏序集，若 $B\subseteq A$，且当 $a,b\in B$，$a\neq b$ 时有 $a\overline{R}b$ 且 $b\overline{R}a$，则称 B 为 R 反链. 对 R 反链 B，若任意添入

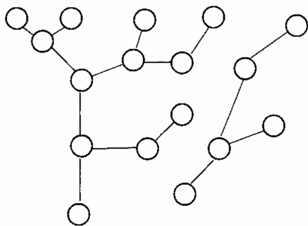
A 中一元素都不再是 R 反链，则称 B 为一个极大 R 反链. A 的单元素子集既是 R 链又是 R 反链. 若 A 是全序集，则 A 的 R 反链只能是 A 的单元素子集. 在偏序集 $\langle A,R\rangle$ 中，若 A 为有限集，则它的反链都是有限集. 元素个数最多的反链称为最大反链. 若 $\langle A,R\rangle$ 的最大反链中有 n 个元素，则 A 中的元素可以划分为 n 条不相交的链. 上面哈塞图表示的结构中，最大反链为 $\{g,c,b\}$，有 3 个元素. A 能划分为 3 条不相交的链 $\{f,g\}$，$\{d,c\}$，$\{e,b,a\}$. 当然也可有另外的划分法.

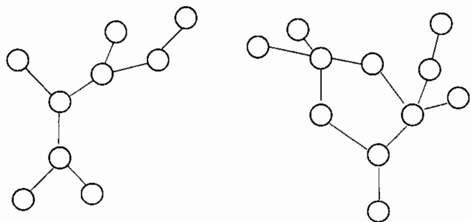


极大 *R* 反链(maximal R-anti chain)　见"R 反链".

最大反链(maximal anti-chain)　见"R 反链".

伪树(pseudo-tree)　由链组成的一种集合. 在偏序集 $\langle A,R\rangle$ 中，若对任何 $a\in A$，所有满足 bRa 的 A 中元素 b 的集合 B 都是 R 链，则称 $\langle A,R\rangle$ 为一棵伪树，而集合 B 称为树枝. 全序集是一棵伪树，并且它的枝叠合在一起. 偏序结构 $\langle A,R\rangle$ 成为伪树时，其哈塞图在直观上像一棵或多棵分离开的树，只有向上的分叉，而无向下的分叉，并且无闭合的枝. 如图 1 表示的结构是伪树，而图 2、图 3 表示的结构不是伪树. 当 $\langle A,R^{-1}\rangle$ 是伪树时，$\langle A,R\rangle$ 称为倒伪树.


图1


图2　　图3

树枝(branch)　见"伪树".

倒伪树(inverse pseudo-tree)　见"伪树".

极小条件(minimal condition)　与有序集相关的一个概念. 当有序集 X 的任意非空子集都具有极小元时，称 X 满足极小条件.

极大条件(maximal condition)　与有序集相关的一个概念. 当有序集 X 的任意非空子集都具有极大元时，称 X 满足极大条件. 极小条件与极大条件是对偶概念.

偏序结构的表示(representation of a partially ordered structure)　偏序结构与某一集族之间的同构映射. 任何一个偏序结构 $\mathscr{U}=\langle A,R\rangle$，都存在一个集族 $\mathscr{A}\subseteq P(A)$，使得 $\mathscr{U}$ 与 $\langle\mathscr{A},\subseteq\rangle$ 同构. 这个同构映射 f 称为 $\mathscr{U}$ 的一个表示. 事实上，取 $\mathscr{A}$ 为 A 中每个元素的前节 $PS(a)$ 的集合，令

$$f:A\to\mathscr{A},a\to PS(a).$$

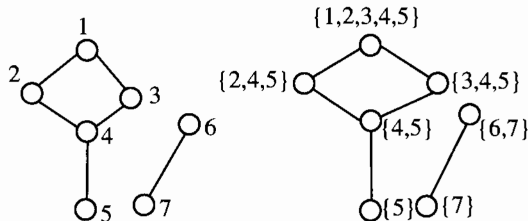


图 1　结构 $\langle A,R\rangle$　　图 2　结构 $\langle\mathscr{A},\subseteq\rangle$

f 就是一个同构(它是双射并且 aRb 时). 例如，哈塞图 1 表示的偏序结构的同构象是哈塞图 2 表示的偏序结构.

有向集(directed set)　一种有序集. 指任意有限子集都是上方有界的有序集.

共尾的(cofinal)　一种有序集. 指有序集与它的一个子集有共同的最大元. 设 B 为有序集 A 的子集，若对 A 的所有元素 a，存在一个元素 $b\in B$，使得 $b\geqslant a$[用符号表示$(\forall\ a\in A(A\supsetneqq B\vee(\exists\ b\in B(b\geqslant a))))$]，则称 B 在 A 中是共尾的. 这时 B 也是有序集. B 在 A 中共尾与 $A-B$ 在 A 中不同尾是等价的.

同尾的(residual)　一种有序集. 指有序集与其某特殊子集间的关系. 设 B 为有序集 A 的子集，若对于 A 的某个元素 a，有 $\{b\mid b\geqslant a\}\subsetneqq B$，则称 B 在 A 中是同尾的. 这时 B 在 A 中也是共尾的. B 在 A 中共尾与 $A-B$ 在 A 中不同尾是等价的.

无界偏序集(unbounded partially ordered set)　一种特殊的偏序集. 指没有最大元和最小元的偏序集. 整数集在通常的大小关系下是无界的.

完备全序集(complete totally ordered set)　一种特殊的全序集. 指没有间隙的全序集. 设 $(P,<)$ 是稠密全序集. 若每个非空有上界的子集 $S\subseteq P$，都有上确界，即 $\sup S\in P$，则 $(P,<)$ 称为完备的. 这时可认为 $(P,<)$ 没有任何间隙. 对每个稠密的无端点的全序集 $(P,<)$，存在完备的全序集 $(C,\prec)$，满足：

1. $P\subseteq C$.
2. 若 $p,q\in P$，则 $p<q$，当且仅当 $p\prec q$.
3. P 在 C 中稠密.
4. C 没有端点.

完备全序集 $(C,\prec)$ 在同构的意义上是惟一的. 因此，把 $(C,\prec)$ 称为 $(P,<)$ 的完备化.

全序集的完备化(completion of totally ordered set)　见"完备全序集".

可分全序集(separable totally ordered set)　一种重要的全序集.指有一个可数稠密子集的全序集.因为有理数集是实数集的可数稠密子集,所以实数集是可分的.

可数链条件(countable chain condition)　与全序集相关的一个概念.若稠密全序集 P 中每一个不相交的开区间的集合最多可数,则称 P 满足可数链条件,简记为 $C.C.C.$ 每个可分全序集满足可数链条件(参见本卷《布尔代数》同名条).

苏斯林问题(Suslin problem)　有关在一定条件下一个集合与实数连续统是否同构的著名问题.若集合 P 是稠密的、无界的、完备的全序集,且有可数子集在 P 中处处稠密,那么 P 必与实数集同构,也是一个连续统.如果在关于 P 的这些条件中将条件"有可数子集在 P 中处处稠密"换为"含于 P 中的不交开区间至多可数",其余不变,问 P 还与实数集同构吗?这就是苏斯林问题.换上的条件定名为可数链条件.苏斯林问题可直接表述为:如果 P 是完备的、稠密的全序集,并满足可数链条件,P 与实数集同构吗?虽然实数集本身是完备的、稠密的、满足可数链条件的全序集,但苏斯林问题在 ZFC 系统中是不可判定的.

苏斯林问题是苏斯林(Суслин,М.Я.)于 1920 年提出的.假定对这个问题的回答是肯定的命题称为苏斯林假设.

苏斯林假设(Suslin hypothesis)　见"苏斯林问题".

稳定集(stationary sets)　一种特殊的集合.如果集合 $S\subseteq K$ 对 K 的任何闭无界子集 C 都有 $S\cap C\neq\varnothing$,则称 S 在 K 中稳定.每个闭无界集是稳定的,并且若 S 是稳定的,$S\subseteq T\subseteq K$,则 T 也是稳定的.存在不含闭无界子集的稳定集.

集合的间隙(gap of a set)　类似于有理数的分划的概念在一般全序集上的推广.设 $(P,<)$ 是全序集,若集合对 (A,B) 满足:

1. A 和 B 是 P 的非空不相交的子集,且
$$A\cup B=P;$$
2. 若 $a\in A$,且 $b\in B$,则 $a<b$;
3. A 没有最大元,且 B 没有最小元,

则称 (A,B) 为 P 的间隙.若 $<$ 为数的大小关系,则 $P=\mathrm{R}$ 时无间隙,$P=\mathrm{Q}$ 时有间隙.

有界集(bounded set)　一种特殊的集合.设 S 是全序集 P 的非空子集.它的上界和下界称为 S 的界.若它具有上界和下界,则称 S 为有界的.若 S 仅有上界(下界),则 S 称为上有界(下有界)的.

稠密(dense)　有关偏序集的重要概念.它是偏序集的一种性质.设 $(A,\leqslant)$ 是偏序集,且对任意 $a,b\in A$,$a<b$,都存在 $c\in A$,使得 $a<c<b$,则称偏序集 $(A,\leqslant)$ 为自身稠密的.若 $D\subseteq A$,且对任何 $a,b\in A$,$a\leqslant b$,存在 $c\in D$,使得 $a\leqslant c\leqslant b$,则称 D 在 A 中稠密.例如,设 R 是实数集,$\leqslant$ 是通常的"小于等于"关系,则 $(\mathrm{R},\leqslant)$ 是稠密的.如果 Z 是整数集,则 $(\mathrm{Z},\leqslant)$ 不是稠密的.若 Q 是有理数集,则 Q 在 R 中稠密.康托尔(Cantor,G.F.P.)证明了:任何两个稠密、无界的可数全序集都是同构的.

自身稠密偏序集(own dense partially ordered set)　见"稠密".

集合的分割(cut of a set)　关于有序集的一个重要概念.即将有序集分解成两个特殊子集之并.如果集合的序偶 (A,B) 满足条件:

1. A 和 B 是 P 的非空不相交子集,且
$$A\cup B=P;$$
2. 若 $a\in A$,且 $b\in B$,则 $a<b$,

称这样的 (A,B) 为 P 的一个分割.A 没有最大元的分割称为戴德金分割.

序　　数

序数(ordinal number)　集合论的基本概念之一,是日常使用的第一、第二……表示次序的数的推广.序数概念是建立在良序集概念之上的.序数原来被康托尔(Cantor,G.F.P.)定义为良序集的序型,而良序集 A 的序型 $\overline{A}$,作为从 A 的结构属性抽象出来的结果,是所有与集 A 同构的一切良序集的共同特征,即 $\overline{A}=\{B\mid B\simeq A\}$.这一定义从形式上看简单明了,但可惜这样的 $\overline{A}$ 不是 ZFC 系统中的集合.事实上 $\{B\mid B\simeq A\}$ 是一个真类.

1923 年和 1928 年,冯·诺伊曼(von Neumann,J.)为了克服上述定义的缺陷,把序数定义为满足下述条件的良序集 α:对于一切 $\xi\in\alpha$,$S(\xi)=\xi$.这里 $S(\xi)=\{\beta\in\alpha\mid\beta<\xi\}$ 称为良序集 α 中由 ξ 生成的初始段.例如,在集合 $9=\{0,1,\cdots,8\}$ 中任取一元素 x,则 $S(x)=\{0,1,\cdots,x-1\}$,所以 9 是一序数.集 A 称为归纳集,如果:

1. $\varnothing\in A$.
2. 只要 $a\in A$,就有 $a'=a\cup\{a\}\in A$.

A 的一切归纳子集之交 N 是自然数集.它是最小的归纳集.N 是良序的,且对任何 $n\in\mathrm{N}$ 都有
$$S(n)=\{0,1,\cdots,(n-1)\}=n,$$
所以 N 是序数,记为 ω.自然数集 N 的每个元素 n 都是序数,称为有限序数.其他序数称为超穷序数.ω 是最小的超穷序数.

1937 年,鲁宾孙(Robinson,R.M.)给出序数的另一等价定义:良序集 $\langle\alpha,\in\rangle$ 是一个序数,若 $\langle\alpha,\in\rangle$ 是传递集,即只要 $x\in\alpha$ 且 $y\in x$ 就有 $y\in\alpha$.

序数也可用递归的方法来定义:

1. 0 是序数.

2. 若 α 是序数,则 $\alpha'=\alpha\cup\{\alpha\}$ 是序数.

3. 若 S 是序数的集合,则 $\bigcup S$ 是序数.

4. 任一序数都由上述 1—3 得到.

后三种定义没有康托尔原定义的缺点. 序数有三种,第一种是 0;第二种是后继序数 $\alpha'=\alpha\cup\{\alpha\}$;其他序数属第三种,称为极限序数. 对任何良序集 A,有且仅有一个序数 α 使 A 与 α 同构,此时 α 称为 A 的序数,用 $\overline{A}=\alpha$ 表示.

任何两个具有相同序数的良序集必定序同构,因此,序数是同构的良序集的共同特征. 这正是康托尔序数概念的实质. 对任何序数 α 和 β,定义 $\alpha<\beta$,当且仅当 $\alpha\in\beta$.

序数有下列性质:设 α,β 和 γ 是序数.

1. 若 $\alpha<\beta,\beta<\gamma$,则 $\alpha<\gamma$.

2. $\alpha<\beta$ 和 $\beta<\alpha$ 不能同时成立.

3. $\alpha<\beta$ 或 $\alpha=\beta$ 或 $\beta<\alpha$ 之一成立.

4. 每个非空的序数集合有一个关于 $<$ 的最小元,因此每个序数集都可用关系 $<$ 将它良序化.

5. 每个序数集合 X,都存在序数 α,使得 $\alpha\notin X$.

有限序数(finite ordinal number) 见“序数”.

超穷序数(transfinite ordinal number) 见“序数”.

传递集(transitive set) 一种特殊的集合. 若由 $y\in x$ 和 $x\in A$ 可得 $y\in A$,则称 A 为传递集. 下列命题是等价的:

1. A 是传递的.

2. 若 $x\in A$,则 $x\subseteq A$.

3. $\bigcup A\subseteq A$.

4. $A\subsetneq P(A)$,其中 $P(A)$ 是 A 的幂集.

传递集的最简单的例子就是自然数. 每个自然数都是传递集. 因为

$$n=\{0,1,\cdots,n-1\},$$

当 $m\in n$ 时,

$$m=\{0,1,\cdots,m-1\}\subseteq\{0,1,\cdots,n-1\}.$$

集合的后继(successor of a set) 集合的一种一元运算. 集 A 的后继是集合 $S(A)=A\cup\{A\}$. 这里 S 亦称为后继运算,或后继函数. 也可用 A' 或 A^+ 来表示 A 的后继.

后继运算(successor operation) 见“集合的后继”.

后继函数(successor function) 见“集合的后继”.

后继序数(successor ordinal number) 一类特殊的序数. 如果序数 α 是某个序数的后继,则称 α 为后继序数,即存在序数 β,使得 $\alpha=S(\beta)=\beta\cup\{\beta\}$. 非 0 且非后继的序数称为极限序数. 非 0 的自然数都是后继序数. 例如:

$$1=0\cup\{0\}=S(0);$$
$$2=1\cup\{1\}=S(1);$$
$$\cdots$$

同样,$\omega+1,\omega+2,\cdots$ 也是后继序数. 但 0, ω,ω^2 等则不是后继序数.

极限序数(limit ordinal number) 一类特殊的序数. 指不为 0 且不是后继序数的序数. 一切序数被分成三类:

1. 只含 0 这个序数.

2. 后继序数.

3. 极限序数.

$\omega=\{0,1,2,\cdots\}$ 是最小的极限序数. 序数可按顺序列出如下:

$$0,1,2,\cdots,$$
$$\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,$$
$$\omega\cdot2,\omega\cdot2+1,\cdots,\omega\cdot3,\cdots,\omega\cdot4,\cdots,$$
$$\omega\cdot\omega=\omega^2,\omega^2+1,\cdots,\omega^2+\omega,\cdots,$$
$$\omega^2\cdot2,\cdots,\omega^3,\cdots,\omega^4,\cdots,\omega^\omega,$$
$$\omega^\omega+1,\cdots,\omega^\omega\cdot2,\cdots,$$
$$\omega^\omega\cdot\omega=\omega^{\omega+1},\cdots,\omega^{\omega^2},\cdots,\omega^{\omega^3},\cdots,\omega^{\omega^\omega},\cdots,\omega^{\omega^{\omega^\omega}},\cdots,$$

其中 $\omega,\omega\cdot2,\omega\cdot3,\omega^2,\omega^3,\omega^\omega$ 等都是极限序数(参见“序数”和“后继序数”).

良序集的序型(order type of a well-ordered set) 一类特殊的序数. 即与良序集同构的序数. 给定良序集 $\langle A,<\rangle$,存在惟一的序数 α,使得 $\langle\alpha,\in_\alpha\rangle$ 与 $\langle A,<\rangle$ 同构,这里 $\in_\alpha=\{\langle x,y\rangle\mid\langle x,y\rangle\in\alpha\times\alpha\wedge x\in y\}$ 是集 α 上的从属关系. 该序数 α 就被称为良序集 $\langle A,<\rangle$ 的序型. 记为 $\alpha=\mathrm{otp}\langle A,<\rangle$. 序数理论中有一个基本定理:对任意二良序集 $\langle A,<\rangle$ 与 $\langle B,\prec\rangle$,下列三种情况恰好成立其一:

1. $\langle A,<\rangle$ 与 $\langle B,\prec\rangle$ 同构.

2. $\langle A,<\rangle$ 与 $\langle B,\prec\rangle$ 的一个初始段同构.

3. $\langle B,\prec\rangle$ 与 $\langle A,<\rangle$ 的一个初始段同构.

基本定理为比较良序集提供了一种方法. 在情况 1 中,称 $\langle A,<\rangle$ 和 $\langle B,\prec\rangle$ 有相同的序型. 在情况 2 中,称 $\langle A,<\rangle$ 有比 $\langle B,\prec\rangle$ 小的序型. 在情况 3 中,称 $\langle A,<\rangle$ 有比 $\langle B,\prec\rangle$ 大的序型.

初始段(initial segment) 亦称初始节. 有关全序集的重要概念. 即全序集的前节. 设 $\langle L,<\rangle$ 是全序集. L 的具有下列性质的真子集 S 称为 L 的初始段:对于每个 $a\in S$,所有 $x<a$ 都是 S 的元素.

初始节(initial segment) 即“初始段”.

超限归纳法(transfinite induction) 亦称超穷归纳法. 数学归纳法的推广. 它是用超限归纳原理证明命题的方法. 超限归纳原理有下列等价的形式:

1. 令 $P(x)$ 是一种性质,若 $P(\beta)$ 对所有 $\beta<\alpha$ 成立蕴含 $P(\alpha)$ 成立,则 $P(\alpha)$ 对一切序数 α 都成立. 即

$\forall\alpha((\forall\beta<\alpha)\ P(\beta))\to P(\alpha)\to\forall\alpha P(\alpha)$.

2. 令 $P(x)$ 是一种性质，若：

1) $P(0)$ 成立；

2) 对一切序数 α，$P(\alpha)$ 成立蕴含 $P(\alpha+1)$ 成立；

3) 对任何极限序数 $\alpha\neq0$，若 $P(\beta)$ 对所有 $\beta<\alpha$ 成立时，有 $P(\alpha)$ 成立，则 $P(\alpha)$ 对一切序数 α 成立. 即

$$P(0)\wedge\forall\alpha(P(\alpha)\to P(\alpha^{+}))\wedge\forall\alpha(\lim\alpha\wedge\forall\beta<\alpha(P(\beta)\to P(\alpha))\to\forall\alpha P(\alpha).$$

3. 设 E 为良序集 $\langle X,<\rangle$ 的归纳子集，则 $E=X$ ($E\subsetneq X$ 称为归纳子集，若对任何 $\alpha\in X$，只要初始段 $X_{\alpha}=\{\beta\in X\mid\beta<\alpha\}\subsetneq E$ 就有 $\alpha\in E$). 当 X 为自然数集 N 时，超限归纳法就成为数学归纳法. 表述为：若 $E\subseteq\mathsf{N}$，满足：

1) $1\in E$；

2) 对任何 $n\in\mathsf{N}$，若由一切小于 n 的自然数 $k\in E$，可推出 $n\in E$，则 $E=\mathsf{N}$.

超穷归纳法(transfinite induction)　即"超限归纳法".

超限递归定理(transfinite recursive theorem)　递归定理的推广. 该定理断言：对任意函数 $F:V\to V$，存在惟一的函数 $G:\mathrm{ord}\to V$，使得对任意 $\alpha\in\mathrm{ord}$ 有 $G(\alpha)=F(G|_{\alpha})$，这里 V 表示一切集合构成的类，$G|_{\alpha}$ 表示函数 G 在 α 上的限制. 当在上述定理限于考虑函数 $G:\omega\to V$ 这一特殊情形时，定理就变成平常的递归定理. 超限递归定理是冯·诺伊曼(von Neumann, J.)于 1923 年提出的. 该定理的意义是，由已给的函数 F，以集合 $\{G(\beta)\mid\beta<\alpha\}$ 为 F 的自变量，所确定的函数值作为被定义函数 G 在 α 上的值，所定义出的函数 G 是惟一确定的. 这种定义函数的方法不同于一般的定义方法. 因为在定义 $G(\alpha)$ 时要用到已给的 F，而且要用到各个 $G(\beta)$，$\beta<\alpha$.

序数加法(addition of ordinals)　序数的一种运算. 对任意序数 α,β,γ，有：

1. $\alpha+0=\alpha$.

2. $\alpha+\beta^{+}=(\alpha+\beta)^{+}$.

3. $\alpha+\gamma=\sup\{\alpha+\beta\mid\beta<\gamma\}$，当 γ 是极限序数时.

序数加法不满足交换律，如 $1+\omega=\omega\neq\omega^{+}=\omega+1$. 序数加法有下列性质：对任意序数 α,β,γ 有：

1. $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

2. $\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta=\gamma$.

3. $\alpha+\beta<\alpha+\gamma\Leftrightarrow\beta<\gamma$.

4. $\alpha<\beta\Rightarrow\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$.

5. $\alpha+\gamma<\beta+\gamma\Rightarrow\alpha<\beta$.

序数乘法(multiplication of ordinals)　序数的一种运算. 对任意序数 α,β,γ，有：

1. $\alpha\cdot0=0$.

2. $\alpha\cdot\beta^{+}=(\alpha\cdot\beta)+\alpha$.

3. $\alpha\cdot\gamma=\sup\{\alpha\cdot\beta\mid\beta<\gamma\}$，当 γ 为极限序数时.

序数乘法有下列性质：对任意序数 α,β,γ，有：

1. $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$.

2. $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

3. $\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma\Leftrightarrow(\beta<\gamma\wedge\alpha\neq0)$.

4. $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma\Leftarrow(\beta=\gamma\wedge\alpha\neq0)$.

5. $\alpha<\beta\Rightarrow\alpha\cdot\gamma\leqslant\beta\cdot\gamma$.

6. $\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma\Rightarrow\alpha<\beta$.

序数乘法不满足交换律，例如，$3\cdot\omega=\omega<\omega\cdot3$.

序数方幂(exponentiation of ordinals)　序数的一种运算. 对任意序数 α,β,γ，令：

1. $\alpha^{0}=1$.

2. $\alpha^{\beta+1}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha$.

3. $\alpha^{\gamma}=\sup\{\alpha^{\beta}\mid\beta<\gamma\}$，当 γ 是极限序数时.

例如：

1. $\beta^{1}=\beta$，$\beta^{2}=\beta\cdot\beta$，$\beta^{3}=\beta\cdot\beta\cdot\beta$ 等.

2. $\beta^{\omega}=\sup\{\beta^{n}\mid n<\omega\}$.

特别地，$1^{\omega}=1$，$2^{\omega}=\omega$，$3^{\omega}=\omega$，…，$n^{\omega}=\omega$(对任何 $n\in\omega$)，$\omega^{\omega}=\sup\{\omega^{n}\mid n<\omega\}>\omega$.

应该指出的是，序数算术实质上不同于基数算术. 例如，$2^{\omega}=\omega$，并且 ω^{ω} 都是可数序数，而 $2^{\aleph_0}=\aleph_0^{\aleph_0}$ 是不可数的.

序数的方幂有下列性质：对任意序数 α,β,γ，有：

1. $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$.

2. $(\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$. 但 $(\alpha\beta)^{\gamma}=\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\gamma}$ 一般不成立.

对数定理(logarithm theorem)　普通带余除法的一种推广. 若序数 α,β 满足 $\alpha\neq0$ 和 $\beta>1$，则存在惟一一组序数 γ,δ 与 ρ，使得：$\alpha=(\beta^{\gamma}\cdot\delta)+\rho$，$0<\delta<\beta$，且 $\rho<\beta^{\gamma}$.

除法定理(division theorem)　普通带余除法的一种推广. 对任意序数 α 和 $\delta\neq0$，存在惟一一对序数 β 与 γ，使得 $\alpha=(\delta\cdot\beta)+\gamma$，且 $\gamma<\delta$. β 称为 α 被 δ 除后的商，γ 称为余数.

减法定理(subtraction theorem)　普通减法的推广. 对任意序数 α,β，若 $\alpha\leqslant\beta$，则存在惟一的序数 δ，使得 $\alpha+\delta=\beta$. 这个 δ 称为 β 与 α 的差.

序数的无界子集(unbounded subset of ordinals)　序数的一种特殊子集. 设 α 是序数，子集 $A\subseteq\alpha$，若对于任何序数 $\beta\in A$，都存在序数 $\gamma\in A$，使 $\beta<\gamma$，并且 $\bigcup A=\alpha$，则称 A 在 α 内是无界的，或称 A 是 α 的无界子集. 例如，偶自然数集是 ω 内的无界子集. 若 A 是序数 α 内的无界子集，则 $\sup A=\alpha$.

共尾子集(cofinal subset)　序数的一种重要子集. 若 A 是序数 α 的子集，且 $\sup A=\alpha$，则 A 称为在 α 中共尾的子集. 若函数 $f:\beta\to\alpha$ 在 α 中共尾，则值

域 ran(f)是在 α 中共尾的子集. 若 α 的任何共尾子集 A 的标号集为 β,且 $A=\{\alpha_\lambda\}|_{\lambda\leqslant\beta}$,则由 $f(\lambda)=\alpha_\lambda$ 定义的函数 $f:\beta\to\alpha$ 是在 α 中共尾的函数.

共尾的序数序列(cofinal ordinal sequences) 一类特殊的序数数列. 设 α,β 都是极限序数,$\alpha>0$,若序数的递增 β 序列 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda<\beta}=\{\alpha_\lambda|\forall\ \lambda(\lambda\in \mathrm{ord}\wedge\lambda<\beta\}$满足

$$\lim_{\lambda\to\beta}\alpha_\lambda=\alpha,$$

则它们称为在 α 内共尾. 或称为共尾于 α. 例如,所有严格递增的自然数无穷序列(ω 序列)都共尾于 ω. 特别,$\{n^2\}_{n\in\mathrm{N}}$,$\{n^3\}_{n\in\mathrm{N}}$,$\{2n^2+3n-1\}_{n\in\mathrm{N}}$等都共尾于 ω. 对于任意大于 0 的极限序数 α,α 内共尾的 β 序列是存在的,如,$\{\lambda|\lambda<\alpha\}$便是. 另一方面,并非对任何序数 β 都一定存在序数的指标族$\{\alpha_\lambda|\lambda<\beta\}$能以 α 为极限. 一个在 α 内共尾的 β 序列$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda<\beta}$是以 β 为定义域,α 为陪域,且

$$\bigcup\mathrm{ran}(f)=\bigcup_{\lambda<\beta}\alpha_\lambda=\alpha$$

的共尾函数.

共尾函数(cofinal function) 一类特殊的序数的函数. 设 f 是序数 β 到 α 的函数,若 f 的值域在 α 内无界,即$\bigcup\mathrm{ran}(f)=\alpha$,则称 f 在 α 内共尾. 若对在 α 内共尾的递增序数序列$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda<\beta}$,令 $f(\lambda)=\alpha_\lambda$,则 f 是 α 内的共尾函数.

共尾度(cofinality) 亦称共尾性. 对极限序数的一种刻画. 设 α 是极限序数,使 α 是长度为 θ 的递增序数序列的极限的最小的序数 θ 称为 α 的共尾度,记为 $\mathrm{cf}(\alpha)$. 即 $\mathrm{cf}\alpha=\min\{\theta|$存在递增 θ 序列$\langle\alpha_\xi:\xi<\theta\rangle$,且$\lim\limits_{\xi\to\theta}\alpha_\xi=\alpha\}$. 非极限序数的共尾度定义为

$$\mathrm{cf}(0)=0,\mathrm{cf}\alpha^+=1.$$

例如,$\mathrm{cf}(\omega+\omega)=\omega$,$\mathrm{cf}(\omega^\omega)=\omega$,$\mathrm{cf}(\omega)=\omega$.

序数的共尾度有下列性质:

1. 对任何极限序数 α,共尾度 $\mathrm{cf}(\alpha)$是极限序数,并且 $\mathrm{cf}(\alpha)\leqslant\alpha$,等号成立时 α 是基数.

2. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))=\mathrm{cf}(\alpha)$,且 $\mathrm{cf}(\alpha)$是基数.

3. 对极限基数$\aleph_\alpha$,有 $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)=\mathrm{cf}(\alpha)$.

4. 若 α 是极限序数,$\alpha>0$,则:

1) 当 $A\subseteq\alpha$, $\sup A=\alpha$ 时,A 的序型

$$\mathrm{otp}(A)\geqslant\mathrm{cf}(\alpha).$$

2) 若 $\beta_0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_\lambda\leqslant\cdots(\lambda<\gamma)$是 α 内的不降 γ 序列,并且$\lim\limits_{\lambda\to\gamma}\beta_\lambda=\alpha$,则$\mathrm{cf}(\gamma)=\mathrm{cf}(\alpha)$.

5. 对任何无穷基数 α,有 $\alpha<\alpha^{\mathrm{cf}(\alpha)}$.

共尾性(cofinality) 即"共尾度".

字典顺序(lexicographic ordering) 有序符号串的一种排序方法. 若 A 和 B 是全序集,则对 $A\times B$ 定义(垂直)字典顺序为:$(a_1,b_1)<(a_2,b_2)\Leftrightarrow$或者 $a_1<a_2$, 或者 $a_1=a_2$ 并且 $b_1<b_2$. 容易看出关系"<"是 $A\times B$ 上的全序关系. 类似地,(水平)字典顺序可定义为:$(a_1,a_2)<(b_1,b_2)\Leftrightarrow$或者 $b_1<b_2$,或者 $b_1=b_2$ 并且 $a_1<a_2$. 上述定义,不难推广到任意 n 个全序集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 上. 例如,对自然数 N,N×N 的字典顺序是(0,0),(0,1),(0,2),…,(1,0),(1,1),(1,2),…,由于这样的排列与英语字典中先按第一个字母排序,再按第二个字母排序一样,故称为字典顺序.

典型良序(canonical well-ordering) 一种特殊的良序关系. 若 α,β 是序数,定义$(\alpha,\beta)<(\gamma,\delta)\Leftrightarrow$或者 $\max(\alpha,\beta)<\max(\gamma,\delta)$, 或者 $\max(\alpha,\beta)=\max(\gamma,\delta)$且$(\alpha<\gamma)$,或者 $\max(\alpha,\beta)=\max(\gamma,\delta)$且$(\alpha=\gamma;\beta<\delta)$. 关系"<"是 ord×ord 上的良序关系,该关系被称为典型良序关系. 简称典型良序.

典型良序关系(canonical well-ordered relation) 见"典型良序".

α 序列(α-sequence) 一类特殊的序列. 指以序数 α 为定义域的函数. 即 α 序列是 $\mathrm{dom}(x)=\alpha$ 的函数 x. 习惯上将 α 序列 x 记为$\langle x_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$,其中 $x_\xi=x(\xi)$ 称为 x 的第 ξ 项,α 称为这个序列的长度. 当 α 为有限序数时,α 序列称为有限序列;当 α 为无限序数时,α 序列称为超限序列.

序列的长度(length of a sequence) 见"α 序列".

有限序列(finite sequence) 见"α 序列".

超限序列(transfinite sequence) 见"α 序列".

初始序数(initial ordinals number) 一类重要的序数. 若序数 α 不与任何序数 $\beta<\alpha$ 等势,则 α 称为初始序数. 初始序数被定义为基数. $0,1,2,\cdots,n,\cdots,\omega$ 等都是初始序数. 而 $\omega+1,\omega+n,\omega\cdot 2$ 等则不是初始序数.

第一类序数(ordinal number of the first class) 一类序数. 指有限序数. 即满足 $\alpha<\omega_0$ 的序数 α.

第二类序数(ordinal number of the second class) 一类序数. 指满足$\aleph_0\leqslant\alpha<\aleph_1$ 的序数 α.

序数列的极限(limit of a sequence of ordinals) 一种特殊的序数. 指由序数的超限序列所确定的序数. 设 α 是极限序数,$\langle\beta_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$是序数的 α 序列,若存在序数 β,使对每个序数 $\eta<\beta$ 存在序数 $\xi_0<\alpha$,当序数 ζ 满足 $\xi_0<\zeta<\alpha$ 时有 $\eta<\beta_\zeta\leqslant\beta$,则称 β 是$\langle\beta_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$的极限. 记为

$$\beta=\lim_{\xi<\alpha}\beta_\xi.$$

若$\langle\beta_\xi\rangle_{\xi<\alpha}$是递增的 α 序列,则它的极限一定存在,且有

$$\lim_{\xi<\alpha}\beta_\xi=\bigcup_{\xi<\alpha}\beta_\xi.$$

正规函数(normal function) 一类重要的序数函数. 设 $A\subseteq\mathrm{ord}$,若函数 $f:A\to A$ 是严格递增的且对 A 内的每个极限序数 α,都有

$$f(\alpha)=\lim_{\xi<\alpha} f(\xi),$$

则 f 称为正规函数. 1907 年,维布伦(Veblen,O)发现下列不动点定理:对每个正规函数 f:ord→ord 及每个序数 α,f 有不动点 $r\geqslant\alpha$. 即正规的序数函数有任意大的不动点.

不动点(fixed point)　映射(函数)定义域内的特殊的点. 给定集合 A 和映射 $f:A\to A$,对 $\alpha\in A$,若 $f(\alpha)=\alpha$,则称 α 为 f 的一个不动点.

基　　数

等势集(equipotent sets)　亦称对等集、等基数集. 具有一种特殊关系的集合. 若存在集合 A 到集合 B 上的一一对应(双射),则 A 与 B 称为等势(或对等),记为 $A\sim B$ 或 $|A|=|B|$. 等势是所有集合作成的类上的一个等价关系. 商类 $V/\sim$ 是所有基数作成的类. 一一对应或对等是康托尔(Cantor,G. F. P.)用来比较集合大小的基本方法. 使用该方法才能比较无穷集合的大小. 是康托尔对集合论的最重要贡献之一. 空集 $\varnothing$ 只与自身对等:$\varnothing\sim\varnothing$. 两个有限集对等,当且仅当它们的元素个数相同. 与自然数集对等的集合称为无限可数集. 整数集、有理数集、代数数集、$\{(a,b)\mid a,b$ 是整数$\}$,$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是整数$\}$等都是无限可数集. 任何无限集合都包括一个与自然数集对等的真子集.

对等集(equipotent sets)　即"等势集".

等基数集(equipotent sets)　即"等势集".

基数(cardinal number)　亦称势. 集合论的基本概念之一. 是集合中所含元素个数的一种表征,是日常用以表示事物多少的数(即自然数)的概念的推广和发展.

基数概念是由康托尔(Cantor,G. F. P.)首先提出的. 他认为集合 A 的基数是一切与 A 有等势关系的集都具有的共同特征,是对 A 的元素进行属性及次序双重抽象之后的结果,所以用 $\overline{\overline{A}}$ 表示(现在较多用 $|A|$ 表示). 弗雷格(Frege,(F. L.)G.)与罗素(Russell,B. A. W.)分别在 1884 年与 1902 年把 $\overline{\overline{A}}$ 定义为所有与 A 等势的集合所成之集,即 $\overline{\overline{A}}=\{B\mid B\sim A\}$. 这个定义虽然形式上简单明了,而且满足康托尔的原意. 但是一般地说不能再认为 $\{B\mid B\sim A\}$ 是集合(而是一个真类). 因为由 $\{B\mid B\sim A\}$ 是一个集合可以推出悖论. 1928 年,冯·诺伊曼(von Neumann,J.)建议用一个特殊的与 A 等势的集,即所有与 A 等势的序数中最小的一个作为 A 的基数. 严格定义如下:若 α 是一序数,对于任何序数 β,若 $\alpha\sim\beta$,则 $\alpha\leqslant\beta$. 这样的序数 α 称为初始序数或基数. 根据选择公理,可以证明对于任何集合 A,使 $A\sim\alpha$ 的基数 α 是惟一存在的. 这个 α 称为集合 A 的基数. 记为 $\overline{\overline{A}}$ 或 $|A|$. 冯·诺伊曼的定义与弗雷格和罗素定义的区别在于它不是取整个等价类 $\{B\mid B\sim A\}$ 作为 A 的基数,而是取 $\{B\mid B\sim A\}$ 中的一个特殊元素,即 $\{B\mid B\sim A\}$ 中的一个(它是具有良好性质的集合)作为 A 的基数. 这样就避免了原有定义中引入真类这一逻辑困难. 根据等价类中的元素与等价类之间的确定关系,又保留了康托尔的原意. 因此,在现代公理集合论中普遍采用这一定义. 两个集合 A 与 B 具有相同基数,当且仅当 $A\sim B$. 所有基数组成的类记为 card. 每个自然数都是初始序数. 所以自然数都是基数. 以自然数为基数的集合称为有限集,否则称为无限集. 无穷集合的基数用希伯来字母 $\aleph$ 表示,读作阿列夫(Aleph). 把基数类 card 中的所有基数从小到大排成良序为 $0,1,2,\cdots,\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\cdots,\aleph_\alpha,\aleph_{\alpha+1},\cdots$ 这里 $\aleph_0$ 是自然数集合的基数. 当 α 是极限序数时,$\aleph_\alpha=\omega_\alpha=\sup\ \{\omega_\beta\mid\beta<\alpha\}$;当 α 不是极限序数时,$\aleph_\alpha$ 是一个后继基数. 在广义连续统假设下,$\aleph_\alpha=2^{\aleph_{\alpha-1}}$.

基数有下列性质:

1. 对任何基数 α,存在基数 β,使得 $\alpha<\beta$.
2. 若 $X\subsetneqq$card,则 $\sup(X)$ 是一基数.
3. 对任何两个基数 α 与 β,关系 $\alpha<\beta$,$\alpha=\beta$,$\alpha>\beta$ 有且仅有一个成立,称为基数的三歧性.
4. 如果 $|A|\leqslant|B|$,$|B|\leqslant|A|$,则 $|A|=|B|$.
5. 对任何集合 A,都有 $|\mathscr{P}(A)|=2^{|A|}$,其中 $\mathscr{P}(A)$ 是 A 的幂集.

势(potency)　即"基数".

基数的三歧性(trichotomy for cardinals)　见"基数".

集合的势(potency of a set)　对集合的一种刻画. 即集合的基数.

有限集合(finite set)　亦称有穷集合. 一类特殊的集合. 若集合 S 与某个自然数 $n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 等势,则称 S 是有穷集合,这时定义 $\overline{\overline{S}}=|S|=n$. 并称 S 有 n 个元素. 一个集合若不是有穷的,则称为无穷集合. 有穷集合的本质特征是:不与其任何真子集等势.

有穷集合(finite set)　即"有限集合".

有限基数(finite cardinal number)　一类常见的基数. 指有限集的基数. 由于有限集 S 的基数 $\overline{\overline{S}}=|S|=n$,故自然数 $0,1,2,\cdots,n,\cdots$ 都是有限基数.

无限集合(infinite set)　亦称无穷集合. 一类特殊的集合. 它有下面几种定义:

1. 不是有限集的集合.
2. 可与其真子集对等的集合.
3. 既不是空集,又不与 $M_n=\{1,2,\cdots,n\}$,$n\in\mathbf{N}$

对等的集合.

势最小的无限集为可数集，即与自然数集N对等的无限集. 可以证明：

1. 无限集必含有可数子集.

2. 无限集减去一有限子集仍为无限集.

3. 任一无限集与一可数集之并与该无限集间存在双射(参见“有限集合”).

无穷集合(infinite set)　即“无限集合”.

***D* 有限集**(*D*-finite set)　一种有限集. 若不存在集合 A 到自己的真子集上的双射，则 A 称为 D 有限集. 任何有限集都是 D 有限集. 利用选择公理(AC)，可推出任何 D 有限集都是有限集. 但不用选择公理时，不能证明 D 有限集是有限集. 对于 D 有限集，下列性质成立：

1. 若 A,B 为 D 有限集，则 $A\cup B$ 与 $A\times B$ 都是 D 有限集.

2. D 有限集的元素组成的有限一一序列的集合是 D 有限的(一一序列指一个元素在序列中只能出现一次的序列).

3. D 有限集的不相交 D 有限族的并集是 D 有限的.

另外，如果不用选择公理不能证明下列集合是 D 有限的：D 有限集的投影；D 有限集的幂集；D 有限集的有限子集的族；D 有限集的 D 有限族的并集等. D 有限的概念是戴德金(Dedekind, J. W. R.)首先引入的.

***D* 无限集**(*D*-infinite set)　一种无限集. 若存在集合 A 到自己的真子集的双射，则称 A 为 D 无限集. 任何一个集合不是 D 有限集就是 D 无限集. 例如自然数集是 D 无限集. $|A|\geqslant\aleph_0$ 的集合 A 是 D 无限的. 一个集合是 D 无限的，当且仅当它有一个可数无穷子集. 若 A 是 D 无限集，则 $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$ 是 D 无限的. 没有选择公理时，无限与 D 无限两个概念不等价. 即存在无限集，但它不是 D 无限集.

超限基数(transfinite cardinal number)　亦称无限基数. 一类常见的基数. 指与有限基数相对的一类基数. 可数基数、不可数基数统称超限基数. 超限基数又称为阿列夫($\aleph$). 将所有超限基数从小到大排列出来，得到正则超限基数序列：$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\cdots,\aleph_\omega,\aleph_{\omega+1},\cdots,\aleph_\alpha,\aleph_{\alpha+1},\cdots$，是一个无限上升的良序链. 这里 $\aleph_0=\omega$ 是可数基数，也是最小的超限基数. 当 $\alpha>0$ 时，$\aleph_\alpha$ 都是不可数基数.

超限基数有下列性质：

1. 对任何基数 a，都存在比它更大的基数 b，即
$$b>a.$$

2. 若 $X\in\mathrm{card}$，则 $\sup(X)$ 是一个基数.

3. 超限基数等幂定理：对任何序数 α，
$$\aleph_\alpha^2=\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha;\aleph_\alpha^3=\aleph_\alpha.$$

4. 对任何序数 α 与 β，
$$\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta=\max(\aleph_\alpha,\aleph_\beta).$$

5. 对任何序数 α 与 β，当 $\alpha<\beta$ 时，$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}$.

6. 对任何序数 α，$\aleph_{\alpha+1}\leqslant 2^{\aleph_\alpha}$.

无限基数(infinite cardinal number)　即“超限基数”.

超限基数等幂定理(radical theorem of transfinite cardinal numbers)　见“超限基数”.

阿列夫(aleph)　集合论的一个特定符号. 表示无穷基数的一个希伯来文字母 $\aleph$，读为阿列夫(aleph). 所以习惯上把阿列夫作为无穷基数的代名词. $\aleph$ 可以看成一个定义域为序数类 ord，陪域为无穷基数类的双射类函数：$\aleph:\mathrm{ord}\to\mathrm{card}-\mathsf{N}$，$\aleph_\alpha=\aleph(\alpha)$ 满足下列条件：

1. $\aleph(0)=\aleph_0=\omega$，$\omega$ 是自然数集的基数；

2. 对任何 $\alpha\in\mathrm{card}$，
$$\aleph(\alpha^+)=(\aleph(\alpha))^+(\aleph_{\alpha^+}=\aleph_\alpha^+);$$

3. 若 β 是极限基数，则
$$\aleph_\beta=\aleph(\beta)=\sup\{\aleph_\alpha|(\alpha\in\mathrm{ord}\wedge\alpha<\beta)\},$$
其中，α^+ 是 α 的后继序数，$\aleph_\alpha^+$ 是 $\aleph_\alpha$ 的后继基数.

类函数 $\aleph$ 确定了无穷基数的正则序列. 每一个无穷基数必恰是某一个 $\aleph_\alpha$，$\aleph_\alpha$ 是后继基数的充分必要条件是 α 是后继序数；$\aleph_\alpha$ 是极限基数的充分必要条件是 α 是极限序数. 当人们把 $\aleph_\alpha$ 看成基数为 $\aleph_\alpha$ 的所有序数中之最小者时，$\aleph_\alpha$ 就是一个序数. 它的型用 ω_α 表示. 因此，$\aleph_\alpha$ 在序列 $\aleph_0,\aleph_1,\cdots$ 中的位置，正是 ω_α 在型序列 $\omega_0,\omega_1,\cdots$ 中的位置，该型序列是序数序列的子序列.

超限基数的正则序列(regular sequence of transfinite cardinal numbers)　一种特殊的序列. 将所有超限基数从小到大排成一良序序列：$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\cdots,\aleph_\omega,\aleph_{\omega+1},\cdots,\aleph_\alpha,\aleph_{\alpha+1},\cdots$，称为超限基数的正则序列. 此序列与序数序列 $0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,\alpha,\alpha+1,\cdots$ 有下列关系：

1. $\aleph_0=\omega_0=\omega$，即 $\aleph_0$ 是自然数集的序数.

2. $\aleph_{\alpha+1}=\omega_{\alpha+1}=\aleph_\alpha^+$，即 $\aleph_{\alpha+1}$ 是 $\aleph_\alpha$ 的后继基数.

3. 若 α 是极限序数，则 $\aleph_\alpha=\omega_\alpha=\sup\{\omega_\beta|\beta<\alpha\}$，即 $\aleph_\alpha$ 是极限基数.

可数集(countable set)　亦称可列集. 一种特殊的无限集合. 即最小的无限集. 与自然数集N等势的集合称为无限可数集，简称可数集. 设 A 是可数集，N 到 A 的双射为 $f:\mathsf{N}\to A$，当 $n\in\mathsf{N}$ 时，$f(n)=a_n\in A$. 于是集合 A 可表示为序列的形式
$$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots\}=\{a_i\}_{i\in\mathsf{N}}.$$
反之，若 A 可表示成序列的形式，则 A 必为可数. A 的序列形式称为 A 的一种数法. 故 A 可数的充分必

要条件为存在 A 的一种数法. 可数集的基数记为 $\aleph_0$,是最小的超限基数,也是最小的超限序数.

可数集有下列性质:

1. 任何无限集包含一个可数真子集.
2. 至多可数个可数集的并集是可数集.
3. 可数集的子集是至多可数的.
4. 有限个可数集的笛卡儿乘积是可数集.
5. 可数集的所有有限子集的族是可数族.
6. 可数集的任何无限子集是可数集.

常见的可数集如自然数集、奇数集、偶数集、质数集、平方数集、n 次方数集、整数集、有理数集、有理系数多项式集、代数数集、平面上的有理点集、n 维空间的有理点集等.

可列集(countable set)　即"可数集".

无限可数集(infinite countable sets)　见"可数集".

数法(enumeration)　见"可数集".

可数基数(countable cardinal number)　一种无穷基数. 指可数集的基数即自然数集合 $\omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 的基数,记为 $\aleph_0$. $\aleph_0$ 是一个最小的超限基数. 自然数集合 ω 本身是一序数,并且是初始序数. 因此按基数的定义,ω 就是自然数集的基数,即 $\aleph_0=\omega$. 由于 ω 是最小的无穷序数,故记为 ω_0. 与自然数集等势的集合很多,例如整数集 Z、有理数集 Q、平面上或空间中的有理点集等,所以

$$|\mathrm{Z}|=|\mathrm{Q}|=\aleph_0=\omega_0.$$

至多可数集(at most countable set)　一类特殊的集合. 有限集与可数集的统称. 有时称有限集为有限可数集,可数集为无限可数集. 至多可数集的子集是至多可数的. 至多可数个至多可数集的并集是至多可数的. 在任意无限集中添入至多可数个元素后其基数不变.

不可数集(uncountable set)　一种无限集合. 不能与自然数集对等的无限集统称为不可数集. 1873 年 12 月 7 日,康托尔(Cantor,G. F. P.)写信告诉戴德金(Dedekind,J. W. R.),他成功地证明了实数集的不可数性. 1874 年,他在《克列勒》杂志上发表的论文《论所有实代数数的一个性质》中包含该定理与证明该定理的对角线方法. 数学史上第一次认识到不可数集的存在. 可以举出一些不可数集的例子:整数无穷序列的集合、任意实数区间$[a,b]$($a<b$)上的实数集合、无理数集合、超越数集合等.

不可数基数(uncountable cardinal number)　一种无穷基数. 不可数集的基数统称为不可数基数. 一个无穷集合,如果不与自然数集等势,它就具有不可数基数. 例如实数集 R 的基数、R 的幂集 $\mathscr{P}(\mathrm{R})$的基数都是不可数基数. 不可数基数有无穷多个等级. 因为根据著名的康托尔定理:对任何基数 a,$a<2^a$,故可得

$$\aleph_0<2^{\aleph_0}<2^{2^{\aleph_0}}<\cdots$$

连续统基数(cardinal number of the continuum)　亦称连续统的势,一个特殊的不可数基数. 即实直线的基数称为连续统基数. 记为$\aleph$或 c. 实直线的基数是 $2^{\aleph_0}$,故$\aleph=2^{\aleph_0}$. 在连续统假设下 $2^{\aleph_0}$是第一个大于$\aleph_0$ 的基数,记为$\aleph_1$,故$\aleph=2^{\aleph_0}=\aleph_1=c$ 都表示连续统的基数. 在连续统假设下,连续统基数也是不可数基数中最小的一个.

连续统基数具有下列性质:

1. $n+2^{\aleph_0}=\aleph_0+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}(n\in\mathrm{N})$.
2. $n\cdot2^{\aleph_0}=\aleph_0\cdot2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}\cdot2^{\aleph_0}$
$=2^{\aleph_0}(n\in\mathrm{N},n>0)$.
3. $(2^{\aleph_0})^n=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=n^{\aleph_0}=\aleph_0{}^{\aleph_0}$
$=2^{\aleph_0}(n\in\mathrm{N},n>1)$.

连续统与连续统基数在概念上是有区别的,连续统的基数是 $2^{\aleph_0}$,但具有 $2^{\aleph_0}$基数的集合不一定是实直线. 具有连续统基数的集合很多,例如:

1. n 维空间中所有点的集合.
2. 所有复数的集合.
3. 所有自然数的无穷序列的集合.
4. 所有实数的无穷序列的集合.
5. $\mathrm{R}-A$,R 是实数集,A 是 R 的任一可数子集.
6. 所有无理数的集合.
7. 所有自然数的无穷子集的集合.
8. 所有 N 到 N 的双射的集合.
9. 所有 R 到 R 的连续函数的集合.
10. 所有实数的开集的集合.

连续统的势(potency of the continuum)　即"连续统基数".

基数加法(addition of cardinal numbers)　自然数加法的超穷推广. 定义在基数类上的二元运算 f:card^2→card,若对任意的$\langle\kappa,\lambda\rangle\in$card^2,有$f(\kappa,\lambda)=|\kappa\times\{0\}\cup\lambda\times\{1\}|$,则 f 称为基数的加法运算,$f(\kappa,\lambda)$称为 κ 与 λ 的和,记为 $\kappa+\lambda$. 若 A,B 为集合,$|A|=\kappa,|B|=\lambda,A\cap B=\varnothing$,则 $\kappa+\lambda=|A|+|B|=|A\cup B|$.

基数加法有下列性质,对任意基数 κ,λ,μ:

1. $\kappa+0=\kappa$.
2. $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$.
3. $(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu)$.
4. $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$.
5. 若基数 κ 与 λ 中至少有一个是无穷基数,则 $\kappa+\lambda=\max(\kappa,\lambda)$;基数的加法可推广到任意一个基数集上去. 设$\{\alpha_m\}_{m\in M}$是由基数 α_m 作成的集合,定义

$$\sum_{m\in M}\alpha_m=|\bigcup_{m\in M}\alpha_m\times\{m\}|.$$

亦可定义为

$$\sum_{m\in M}\alpha_m = |\bigcup_{m\in M}A_m|.$$

这里集族$\{A_m\}_{m\in M}$中的元两两不相交，且对任何$m\in M$有$|A_m|=\alpha_m$.

6. 对于互不相交集合的族$\{A_m\}_{m\in M}$与$\{B_m\}_{m\in M}$，若对所有$m\in M$，有$|A_m|=|B_m|$，则

$$|\bigcup_{m\in M}A_m|=|\bigcup_{m\in M}B_m|.$$

7. 若对所有$m<\lambda$，$\kappa_m=\kappa$，则

$$\sum_{i<\lambda}\kappa_i = \lambda\cdot\kappa.$$

8. 若λ是无穷基数，对每个$m<\lambda$，$\kappa_m>0$，则

$$\sum_{i<\lambda}\kappa_i = \lambda\cdot\sup\kappa_i.$$

当$\lambda\leqslant\sup_{i<\lambda}\kappa_i$时，

$$\sum_{i<\lambda}\kappa_i = \sup_{i<\lambda}\kappa_i.$$

基数乘法(multiplication of cardinal numbers) 自然数乘法的超穷推广. 定义在基数类上的二元运算$f:\mathrm{card}^2\to\mathrm{card}$，若对任意的$\langle\kappa,\lambda\rangle\in\mathrm{card}^2$，有$f(\kappa,\lambda)=|\kappa\times\lambda|$，则$f$称为基数乘法运算. $f(\kappa,\lambda)$称为κ与λ的积，记为$\kappa\cdot\lambda$. 若A,B为集合，$|A|=\kappa$，$|B|=\lambda$，则$\kappa\cdot\lambda=|A\times B|$.

基数乘法运算具有下列性质，对任意基数κ,λ,μ:

1. $\kappa\cdot 0=0$，$\kappa\cdot 1=\kappa$.
2. $\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$.
3. $\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu)=(\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu$.
4. $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$.
5. 若κ与λ中至少有一个是无穷基数，则$\kappa\cdot\lambda=\max(\kappa,\lambda)$；基数的乘法可以推广到任意一个基数集上去. 设$\{\alpha_m\}_{m\in M}$是由基数$\alpha_m$组成的集合，定义

$$\prod_{m\in M}\alpha_m = |\mathop{X}_{m\in M}\alpha_m| = \left|\prod_{m\in M}A_m\right|,$$

式中

$$\mathop{X}_{m\in M}\alpha_m$$

表示诸基数α_m作为集合时的笛卡儿积；对任何$m\in M$，集合A_m的基数$|A_m|=\alpha_m$.

6. 对集族$\{A_m\}_{m\in M}$与$\{B_m\}_{m\in M}$，若对所有$m\in M$有$|A_m|=|B_m|$，则

$$\left|\prod_{m\in M}A_m\right| = \left|\prod_{m\in M}B_m\right|.$$

7. 若对所有的$m<\lambda$，$\kappa_m=\kappa$，$|M|=\mu$，则

$$\prod_{m\in M}\kappa = \kappa^{\mu}.$$

8. 若$M=\sum_{k\in S}\theta_k$是直和(互不相交集合之并集)，则

$$\prod_{m\in M}\kappa_m = \prod_{k\in S}\Big(\prod_{m\in\theta_k}\kappa_m\Big).$$

9. 若$\lambda\leqslant\lambda'$和$\mu\leqslant\mu'$，则$\lambda\cdot\mu\leqslant\lambda'\cdot\mu'$.

10. 若对所有$m\in M$，$\kappa_m\geqslant 2$，则

$$\sum_{m\in M}\kappa_m \leqslant \prod_{m\in M}\kappa_m.$$

11. 若λ是无穷基数，$\{\kappa_m\}_{m<\lambda}$是不降的非空基数序列，则

$$\prod_{m<\lambda}\kappa_m = (\sup_{m\in M}\kappa_m)^{\lambda}.$$

特别地，有

$$\prod_{n=0}^{\infty}n = \aleph_0^{\aleph_0},$$

$$\prod_{n<\omega}\aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0},$$

$$\prod_{\alpha<\omega+\omega}\aleph_\alpha = \aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}.$$

基数乘方(exponentiation of cardinals) 自然数乘方的超穷推广. 设$|A|=\kappa$，$|B|=\lambda$，映射集合$A^B=\{f\,|\,f:B\to A\}$的基数$|A^B|$称为κ的λ次方，记为κ^λ. 基数乘方有下列性质，对任意基数κ,λ,μ:

1. $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$，一般地

$$\prod_{m\in M}\kappa^{\lambda_m} = \kappa^{\sum_{m\in M}\lambda_m}.$$

2. $(\kappa\cdot\lambda)^\mu=\kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$，一般地

$$\prod_{m\in M}\kappa_m^\lambda = \Big(\prod_{m\in M}\kappa_m\Big)^\lambda.$$

3. $(\kappa^\lambda)^\mu=\kappa^{\lambda\cdot\mu}$.
4. 若$\kappa\leqslant\lambda$，则$\kappa^\mu\leqslant\lambda^\mu$.
5. 若$0<\lambda\leqslant\mu$，则$\kappa^\lambda\leqslant\kappa^\mu$.
6. $\kappa^0=1$；$1^\kappa=1$；若$\kappa>0$，则$0^\kappa=0$.
7. 对于正则基数κ，且$\lambda<\kappa$，有$\kappa^\lambda=\sum_{\alpha<\kappa}|\alpha|^\lambda$. 特别地，当$\kappa$是后继基数时，$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1}$. 此即豪斯多夫公式.
8. 若κ是极限基数，$\lambda\geqslant\mathrm{cf}(\kappa)$，则

$$\kappa^\lambda=(\lim_{\alpha\to\kappa}\alpha^\lambda)^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

9. 取$\aleph_\beta$为固定基数：

1) 若$\alpha<\beta$，则$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}$.

2) 若存在$\gamma<\alpha$，使$\aleph_\gamma^{\aleph_\beta}\geqslant\aleph_\alpha$，则$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=\aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$.

3) 若$\alpha>\beta$，且对所有$\gamma<\alpha$，有$\aleph_\gamma^{\aleph_\beta}<\aleph_\alpha$，则：

① 当$\aleph_\alpha$是正则基数或$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)>\aleph_\beta$时，有$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha$.

② 当$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)\leqslant\aleph_\beta<\aleph_\alpha$时，有$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$.

由此，对任何α与β，$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$的值为$2^{\aleph_\beta}$或$\aleph_\alpha$或$\aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}$(对某个使$\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)\leqslant\aleph_\beta<\aleph_\gamma$成立的$\gamma\leqslant\alpha$).

10. 在广义连续统假设成立时：

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases}\aleph_\alpha & (\text{如 } \aleph_\beta<\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)),\\ \aleph_{\alpha+1} & (\text{如 } \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)\leqslant\aleph_\beta\leqslant\aleph_\alpha),\\ \aleph_{\beta+1} & (\text{如 } \aleph_\alpha\leqslant\aleph_\beta).\end{cases}$$

初等基数(elementary cardinal number) 三种特殊基数的统称. 可数集A的基数$\aleph_0$，可数集A的幂集$\mathscr{P}(A)$的基数$2^{\aleph_0}=\aleph$，以及$\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$的基

数 $2^{\aleph}$ 统称初等基数. 这三个基数中 $\aleph_0$ 是自然数集的基数, $2^{\aleph_0}$ 为连续统基数, 而 $2^{\aleph}$ 是实数集上的一切实函数的集合的基数, 它们的关系是 $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph < 2^{\aleph}$. 有限基数与初等基数的运算有下列结果:

1. $1^{\aleph_0} = 1^{\aleph} = 1$.

2. $n + \aleph_0 = n\aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

3. $(n+1)^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = n + \aleph = n \cdot \aleph = \aleph^n = \aleph_0 + \aleph = \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph^{\aleph_0} = \aleph + \aleph = \aleph \cdot \aleph = \aleph$.

4. $(n+1)^{\aleph} = \aleph_0^{\aleph} = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$.

基数的大小关系(magnitude relation of cardinal numbers)　自然数的大小关系的推广. 对于任何两个集合 A 与 B, 若存在单射 $f: A \to B$, 则称 A 的基数小于或等于 B 的基数, 记为 $|A| \leqslant |B|$ (或 $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(B)$, $\overline{A} \leqslant \overline{B}$). 当 $|A| \leqslant |B|$ 且 $|A| \neq |B|$, 即 A, B 不等势时, 记为 $|A| < |B|$. 基数的小于或等于关系是所有基数构成的真类 card 上的良序关系. 有自反性、反对称性、传递性、连通性. 把所有基数从小到大排成一列, 并用序数编号, 得到基数的正则序列, 它是一个严格升链: $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, \aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}, \cdots$, 其中, $\aleph_\alpha$ 的下标为序数 α, $\aleph_\alpha$ 的序型为 ω_α, $\aleph_0 = \omega$ 是自然数集的序型.

基数的大小关系有下列性质:

1. 对于任何有限基数 n 与无限基数 $\aleph_\alpha$, 有 $n < \aleph_\alpha$.

2. 对于任何两基数 α 与 β, 若 $\alpha \in \beta$, 则 $\alpha \subseteq \beta$, 且 $\alpha \leqslant \beta$.

3. 对于任意两基数 α 与 β, $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ 三式有且只有一个成立(三歧性).

4. 对 $\alpha, \beta, \gamma \in \text{card}$, $\alpha < \beta$, $\beta \leqslant \gamma$ (或 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta < \gamma$ 或 $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$), 则 $\alpha < \gamma$.

5. 若对 $m \in M$, 有 $\alpha_m < \beta_m$, 则

$$\sum_{m \in M} \alpha_m \leqslant \sum_{m \in M} \beta_m,$$

$$\prod_{m \in M} \alpha_m \leqslant \prod_{m \in M} \beta_m,$$

$$\sum_{m \in M} \alpha_m < \prod_{m \in M} \beta_m.$$

(最后一式是著名的柯尼希定理)

6. 若 $\alpha, \beta, \gamma \in \text{card}$, $\alpha \leqslant \beta$, 则 $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$.

7. 若 $0 < \lambda \leqslant \mu$, 则 $\alpha^\lambda \leqslant \alpha^\mu$.

8. 若基数族 $\{\alpha_m\}_{m \in M}$ 中没有最大的基数, 则对任何 $m \in M$, 有

$$\alpha_m < \sum_{m \in M} \alpha_m = \bigcup_{m \in M} \alpha_m,$$

并且

$$\sup_{m \in M} \{\alpha_m\} = \sum_{m \in M} \alpha_m.$$

康托尔定理(Cantor theorem)　集合论中最重要的定理之一. 该定理断言: 任何集合的基数小于它的幂集合的基数. 对任何集合 A, 有 $|A| < |\mathscr{P}(A)|$ (或 $|A| < 2^{|A|}$). 康托尔(Cantor, G. F. P.)在 1873 年讨论基数的理论时提出, 无穷基数可以有无限多的等级. 1892 年, 康托尔证明了对任何集合 A, 有 $|A| \neq |\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$. 在证明该定理时, 康托尔使用了他创造的对角线方法.

康托尔-伯恩施坦定理(Cantor-Bernstein theorem)　关于两集合等势的定理. 该定理断言: 若两集合中的每一个与另一个的子集等势, 则该两集合本身等势. 该定理有下列等价的表述形式:

1. 给定集合 A 与 B, 若 $|A| \leqslant |B|$, $|B| \leqslant |A|$, 则 $|A| = |B|$.

2. 给定集合 A 与 B, 若存在单射 $f: A \to B$ 与单射 $g: B \to A$, 则 $A \sim B$ (A 与 B 等势).

康托尔-伯恩施坦定理亦称康托尔-施罗德-伯恩施坦定理. 康托尔(Cantor, G. F. P.)于 1895 年建立基数理论时, 已经猜到该定理. 并在 1896 年的一个摘要中宣布了这个定理. 于 1897 年给出它的证明. 但在证明中使用了一个与选择公理等价的原理. 他的证明在 1898 年出版. 直到 1911 年才发表了一个更正后的证明. 这个定理的第一个完全满意的证明由伯恩施坦(Bernstein, F.)给出, 并于 1898 年刊在波莱尔(Borel, (F. -É. -J. -)É.)的书中.

基数不等式(inequalities of cardinal numbers)　一类不等式. 是关于基数的不等式. 常见的基数不等式有:

1. 对任何基数 κ, $\kappa < 2^\kappa$.

2. 对任何无穷后继基数 $\aleph_{\alpha+1}$, 有

$$\aleph_{\alpha+1} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}, \text{cf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

3. 对任何极限基数 $\aleph_\alpha$, 有 $\text{cf}(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\alpha$.

4. 对任何无穷基数 α, 有 $\alpha < \alpha^{\text{cf}(\alpha)}$.

5. $\text{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

6. $\text{cf}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) > \aleph_\beta$.

策梅洛-柯尼希定理(Zermelo-König theorem)　比较基数和与基数积的大小的一个基本不等式. 该定理断言: 若对每个 $m \in M$, 基数 κ_m 与 λ_m 满足 $\kappa_m < \lambda_m$, 则

$$\sum_{m \in M} \kappa_m < \prod_{m \in M} \lambda_m.$$

柯尼希(König, D.)于 1905 年最先发现了这个定理. 1908 年, 策梅洛(Zermelo, E. F. F.)又独立地得到了这一结果. 定理中当每个 $\kappa_m = 1$, $\lambda_m = 2$, $|M| = \alpha$ 时, 得 $\alpha < 2^\alpha$. 故该定理是康托尔定理的推广. 也可以证明该定理与选择公理等价.

连续统假设(continuum hypothesis)　关于基数大小的猜测. 指连续统的基数的假设. 通常用 $\aleph_0$

表示自然数集的基数，用 c 表示实数集合(连续统)的基数. 康托尔(Cantor, G. F. P.)证明了 $\aleph_0 < c$，他猜测实数集与它的每个不可数子集等势. 即不存在基数 λ，满足 $\aleph_0 < \lambda < c$. 这一猜测被后人称为连续统假设，记为 CH. 由于 $2^{\aleph_0} = c$，$\aleph_0^+ = \aleph_1$，连续统假设可等价地表示为 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. 即 c 是 $\aleph_0$ 的后继基数. 在数学研究的许多领域中，CH 是不可缺少的. 例如，在讨论实数子集的测度性质和拓扑性质时，其中的一个基本问题"与 R 不等势的子集是否测度为零？是否属于第一范畴？"在没有 CH 的情况下，不能回答. 实际上 CH 等价于下述命题 K 和 L 的合取：

K：每一个 $X \subseteq \mathrm{R}$，$|X| < 2^{\aleph_0}$，X 是第一范畴集；

L：存在一 $L \subseteq \mathrm{R}$，$|L| = 2^{\aleph_0}$，且 L 和每一无处稠密集的交是至多可数的.

CH 也等价于下述命题 M 和 S 的合取：

M：基数比 $2^{\aleph_0}$ 小的实数子集测度为零；

S：存在 $S \subseteq \mathrm{R}$，$|S| = 2^{\aleph_0}$，且 S 和测度为零的集合的交是至多可数的.

此外，以下每一命题都等价于 CH：

P_1：实平面可以分成两个集合 X, Y. X 和每一水平线只有可数交，Y 和每一垂直线只有可数交；

P_2：实平面是可数多条曲线的并.

关于实数集上的实函数论，在假定了 CH 的前提下就有：

C_1：存在一个从 R 到 R 的函数 f，它在任一不可数的 $P \subseteq \mathrm{R}$ 上都不连续；

C_2：存在一个 $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 和一个 $P \subseteq \mathrm{R}$，$|P| = 2^{\aleph_0}$，f 在 P 上连续. 但在 P 的任一可数子集上 f 都不一致连续.

连续统问题是 1878 年康托尔提出的，在希尔伯特(Hilbert, D.)于 1900 年提出的 23 个数学问题中位居第一. 包括希尔伯特在内的许多数学家都曾致力于这一著名问题的研究，长时间内无进展. 直到 1938 年，哥德尔(Gödel, K.)证明了 CH 相对于 ZFC 系统是相容的. 即若 ZFC 是协调的，则在 ZFC 中推不出 $\neg$CH. 1963 年，科恩(Cohen, P. J.)证明了 CH 相对于 ZFC 系统是独立的. 即：若 ZFC 系统是协调的，则在 ZFC 系统中 CH 是不可证的. 综上所述即得：在 ZFC 系统中 CH 是不可判定的. 哥德尔和科恩的成果被誉为 20 世纪数学基础研究中的两个重大成就. 由于 ZFC 系统无法决定连续统问题，甚至附加直观上可靠的大基数公理(例如可测基数存在公理)仍然无法推出 CH. 因此包括哥德尔在内的一些数学家认为 CH 不可信，想用一条新的公理取代 CH，这方面由马丁(Martin, D. A.)等人在 1970 年提出的马丁公理是最佳选择. 目前尚在进一步研究中. 连续统问题至今尚未得到解决.

广义连续统假设(generalized continuum hypothesis)　连续统假设的推广. 康托尔(Cantor, G. F. P.)继 1878 年提出连续统假设后，在 1883 年进一步猜测 $2^{\aleph_1} = \aleph_2$. 1908 年，豪斯多夫(Hausdorff, F.)在此基础上提出下述更一般的猜测：对每个序数 α，有 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. 数学上把"断言这一猜测正确"称为广义连续统假设. 记为 GCH. 在 GCH 假设下可以将基数的幂运算简化如下：

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & (\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)), \\ \aleph_{\alpha+1} & (\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha), \\ \aleph_{\beta+1} & (\aleph_\beta \geqslant \aleph_\alpha). \end{cases}$$

1938 年，哥德尔(Gödel, K.)证明了 GCH 相对于 ZFC 系统的相容性，即在 ZFC 中推不出 $\neg$GCH. 1963 年，科恩(Cohen, P. J.)证明了 GCH 相对于 ZFC 系统的独立性，即从 ZFC 中推不出 GCH. 至此，GCH 与 ZFC 的关系的研究告一段落. 但 GCH 问题的研究并未结束，尚在继续深入(参见"连续统假设").

基数的分类(classification of cardinal numbers)　对基数可作如下分类：

- 基数
  - 有穷基数 $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$
  - 无穷基数 $\aleph_\alpha (\alpha \geqslant 0)$
    - 可数基数 $\aleph_0 = \omega$
    - 不可数基数 $\aleph_\alpha (\alpha > 0)$
      - 后继基数 $\aleph_\alpha^+$(都是正则基数)
      - 极限基数 $\aleph_\alpha$ (α 为极限序数)
        - 奇异基数 $\aleph_\alpha (\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) < \aleph_\alpha)$
        - 正则基数 $\aleph_\alpha$ $(\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha)$
          - 弱不可达基数
          - (强)不可达基数 $\aleph_\alpha$ $(\aleph_\alpha > 2^\lambda, \lambda < \aleph_\alpha)$

后继基数(successor cardinal number)　一种不可数基数. 在超限基数正则序列 $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}, \cdots$ 中，$\aleph_{\alpha+1}$ 称为 $\aleph_\alpha$ 的后继基数，$\aleph_\alpha$ 称为 $\aleph_{\alpha+1}$ 的前行基数. 一个基数 $\aleph_\alpha$ 与它的后继基数 $\aleph_{\alpha+1}$ 是紧相邻的两个基数. 即不存在基数 $\aleph_\beta$，使 $\aleph_\alpha < \aleph_\beta < \aleph_{\alpha+1}$ 成立. 每一基数都有后继基数，但极限基数与 $\aleph_0$ 没有前行基数. 在广义连续统假设下，$\aleph_\alpha$ 的后继基数 $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

前行基数(predecessor cardinal number)　见"后继基数".

极限基数(limit cardinal number)　一种不可数基数. 即与后继基数相对的一类基数. 在超限基数正则序列 $\aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_\alpha, \cdots$ 中，若序数 α 是极限序数，则 $\aleph_\alpha$ 称为极限基数. 每一个超限基数都是极限序数. 若 $\alpha > 0$ 是一极限序数，则 $\aleph_\alpha$ 是序列 $\langle \aleph_\beta | \beta < \alpha \rangle$ 的极限.

强极限基数(strong limit cardinal number)　一种特殊的极限基数. 如果无穷基数 $\aleph_\alpha$ 对所有 $\beta < \alpha$ 都有 $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$，则称 $\aleph_\alpha$ 为强极限基数. 强极限基数是极限基数. 因为，如果 $\aleph_\alpha = \aleph_{r+1}$，则 $2^{\aleph_r} \geqslant \aleph_\alpha$. 但不是每个极限基数都是强极限基数：如果 $2^{\aleph_0}$ 大

于$\aleph_\omega$,则$\aleph_\omega$将是极限基数,但不是强极限基数.可是,在连续统假设下,极限基数与强极限基数没有区别.

强极限基数有下列性质:

1. 若κ是强极限基数,则对任何$\lambda,\nu<\kappa$有$\lambda^\nu<\kappa$.

2. 若κ是强极限基数,则$2^\kappa=\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

3. 若κ是正则的强极限基数,则$\kappa^{<\kappa}=\kappa$,这里

$$\kappa^{<\kappa}=\lim_{\alpha\to\kappa}\kappa^\alpha.$$

4. 若κ是奇异的强极限基数,则$2^{<\kappa}=\kappa$,且

$$\kappa^{<\kappa}=\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

奇异基数(singular cardinal number) 一种无穷基数.无穷基数可按共尾度的性质分成两大类:正则基数和奇异基数.若$\mathrm{cf}(\omega_\alpha)<\omega_\alpha$,则无穷基数$\aleph_\alpha$称为奇异的;若$\mathrm{cf}(\omega_\alpha)=\omega_\alpha$,则$\aleph_\alpha$称为正则的.即对无穷基数$\kappa$,若存在递增的超穷序列$\langle\alpha_\upsilon|\upsilon<\theta\rangle$,其中$\alpha_\upsilon$是序数且$\alpha_\upsilon<\kappa$,该序列的长度$\theta$是小于$\kappa$的极限序数,使得

$$\kappa=\lim_{\upsilon\to\theta}\alpha_\upsilon,$$

则κ称为奇异基数.不是奇异的无穷基数称为正则基数.所有后继基数都是正则基数,奇异基数都是极限基数,例如:$\aleph_\omega$,$\aleph_{\omega+\omega}$,$\aleph_{\omega_1}$等都是奇异基数.存在任意大的奇异基数,如$\aleph_{\alpha+\omega}$.

正则基数(regular cardinal number) 见"奇异基数".

弱不可达基数(weakly inaccessible cardinal number) 一种正则基数.既是极限基数又是正则基数的不可数基数.若$\aleph_\alpha$为弱不可达基数,则$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)=\aleph_\alpha$,且$\alpha$是极限序数.因为$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)\leqslant\alpha$,$\aleph_\alpha\geqslant\alpha$,所以$\aleph_\alpha=\alpha$.可见$\aleph_\alpha$是非常大的.由定义还可看出,不可达基数$\kappa$不可能由比它小的基数通过基数的加法、乘法、乘幂和取极限等运算得到.豪斯多夫(Hausdorff,F.)在1908年提出了弱不可达基数的概念.现已知道弱不可达基数的存在性在ZFC系统中是不可证的.

强不可达基数(strongly inaccessible cardinal number) 一种正则基数.简称不可达基数.既是正则的又是强极限的无穷基数.即如果正则基数κ满足$\kappa>\aleph_0$,且对任何$\lambda<\kappa$有$2^\lambda<\kappa$,κ就是一个强不可达基数.强不可达基数一定是弱不可达的.在广义连续统假设成立时,每个弱不可达基数也是强不可达的.这时这两个概念是相同的.在ZFC系统中不能证明不可达基数的存在性.称这种基数为不可达的原因是它不可能从比它小的基数出发,使用通常的集合论运算得到.

可测基数(measurable cardinal number) 一种大基数.令κ是不可数基数,S上的滤子F是κ完全的,当对每个基数$\lambda<\kappa$.若对所有的$\alpha<\lambda$有$X_\alpha\in F$,则$\bigcap_{\alpha<\lambda}X_\alpha\in F$.一个不可数基数$\kappa$被称为可测基数,如果在$\kappa$上存在一个非主$\kappa$完全的超滤子.

可测基数有下列性质:

1. 每个可测基数都是强不可达的.

2. 令κ是可测基数,若T是高度为κ的树,并且每个结点有小于κ个后继,则T有一长度为κ的分支(树性质).

3. 若κ是可测基数,则$[\kappa]^2$的每个划分有一个基数为κ的齐次集(划分性质).

弱紧基数(weakly compact cardinal number) 一种大基数,特殊的强不可达基数.一个基数κ被称为弱紧的,如果κ是强不可达的并且满足树性质或划分性质(参见"可测基数").从定义可见,弱紧性弱于可测性但强于不可达性.

紧基数(compact cardinal number) 亦称强紧基数.一种大基数.一个不可数正则基数κ是紧的,如果对任何集合S,S上的每一个κ完全的滤子都扩充成S上的κ完全的超滤.每个紧基数κ都是可测的.但反之不然,即不是每个可测基数必须是紧的.故紧基数强于可测基数.

强紧基数(strongly compact cardinal number) 即"紧基数".

哈托格斯数(Hartogs number) 一种与子集有关的最小序数.不与集合A的任何子集等势的最小序数$h(A)$称为集合A的哈托格斯数.即$h(A)$是满足条件$|\alpha|\not\leq|A|$的最小序数α.对任何A,$h(A)$是初始序数,故它是基数.此定义由哈托格斯(Hartogs,F.M.)给出.

公理与悖论

概括原则(principle of comprehension) 集合论的一项重要原则.集合论创始人康托尔(Cantor,G.F.P.)提出的确定集合的基本原则:对于任何性质P,都存在一个集合A,它恰好由具有性质P的所有元素组成.即$A=\{x|P(x)\}$.康托尔提出的这一确定集合的原则失之过宽(例如,由它允许x是自己的元素这个性质出发,会导出一些悖论(如著名的罗素悖论),而被认为是不正确的.分离公理弥补了概括原则的缺点(参见"分离公理"),把集合限制为由已给集合与已给性质共同确定的对象.例如,它不允许一切集合的集合存在.用概括原则确定的对象称为类.任何性质P都确定一个类$C=\{x|P(x)\}$.类可以是集合,可以不是集合.不是集合的类称为真类.例如,完全类$V=\{x|x=x\}$就是真类,而空类$\varnothing=\{x|x\neq x\}$就是集合:空集$\varnothing$.对于类仍可如下定义包含关系与各种运算:

1. $\mathrm{ord}\,C\subseteq \mathrm{ord}\,D\Leftrightarrow\forall\ x(x\in \mathrm{ord}\,C\rightarrow x\in \mathrm{ord}\,D)$.

2. $\mathrm{ord}\,C\cap \mathrm{ord}\,D=\{x\mid x\in \mathrm{ord}\,C\wedge x\in \mathrm{ord}\,D\}$.

3. $\mathrm{ord}\,C\cup \mathrm{ord}\,D=\{x\mid x\in \mathrm{ord}\,C\vee x\in \mathrm{ord}\,D\}$.

4. $\mathrm{ord}\,C-\mathrm{ord}\,D=\{x\mid x\in \mathrm{ord}\,C\wedge x\notin \mathrm{ord}\,D\}$.

5. $\bigcup \mathrm{ord}\,C=\{x\mid\exists\ S(S\in \mathrm{ord}\,C\wedge x\in S)\}$.

悖论(paradox) 集合论的一类自相矛盾的命题.即如果承认这个命题成立,就可推出它的否定成立.反之,如果承认这个命题的否定成立,又可推出这个命题自身成立.1900 年前后,在集合论中发现了三个著名的悖论:1897 年的布拉利·福尔蒂悖论,1899 年的康托尔悖论和 1902 年的罗素悖论.这些悖论,特别是罗素悖论,明确无误地表明集合论中存在矛盾.按照一般人的观点,数学被认为是绝对精确不含矛盾的科学,它的基础是绝对可靠的.但是作为数学基础的集合论中出现了像罗素悖论这样无法回避的矛盾,在当时的数学界与逻辑学界引起了极大震动,触发了数学的第三次危机.1908 年,罗素(Russell,B. A. W.)的类型论和策梅洛(Zermelo,E. F. F.)的公理集合论都是为了排除悖论而提出的.经过 20 世纪前 30 年的努力,终于将康托尔集合论建立在一个科学的、严谨的理论基础之上,成为公理集合论.可以说,古典集合论中的悖论的发现与排除,对集合论的完善与发展,从而对整个数学的发展都具有重大的意义(参见本卷《形式逻辑》中的“悖论”).

布拉利·福尔蒂悖论(Burali-Forti paradox) 亦称最大序数悖论.在集合论历史上的第一个悖论.设 W 为一切序数组成的集合,即 $W=\{1,2,\cdots,\omega,\cdots\}$.可以看出 W 按自然数大小顺序成一良序集,故由 W 中有一序数 Ω 必比 W 中任一序数都大.但由定义知,Ω 也出现在 W 中,从而将有 $\Omega>\Omega$.而这是矛盾的.1897 年 3 月 28 日在意大利巴洛摩数学会上,布拉利·福尔蒂(Burali-Forti,C.)宣读了一篇论文,提出了上述悖论,揭开了数学基础第三次危机的序幕.

最大序数悖论(paradox of greatest ordered number) 即“布拉利·福尔蒂悖论”.

康托尔悖论(Cantor paradox) 集合论的一个重要悖论.康托尔(Cantor,G. F. P.)于 1899 年发现的集合论悖论.设 S 是一切集合组成的集合.考虑 S 的势 $\overline{S}$.因为任何集合都是 S 的子集,故不存在其势大于 $\overline{S}$ 的集合.但由康托尔定理可知,S 的幂集 $\mathscr{P}(S)$ 的势 $\overline{\mathscr{P}(S)}$ 大于 $\overline{S}$.这就得到矛盾.

罗素悖论(Russell paradox) 集合论中最著名的悖论.罗素(Russell,B. A. W.)于 1902 年发现.设 $R=\{x:x\notin x\}$,即 R 为一切不属于自身的集合所组成的集合.在经典集合论中这样的 R 是合法的.现在问:R 是否属于 R?若 $R\in R$,由 R 的定义推出 $R\in\!\!\!/\ R$;若 $R\notin R$,由 R 的定义推出 $R\in R$.无论如何,都是矛盾的.罗素悖论如此简单明了,用的概念如此基本,这就排除了它是由于引入概念不当或推理错误的可能性.集合论本身含有矛盾的事实已无容置辩了.因此,引发了数学史上的又一次危机,即第三次数学危机,这一危机促使公理集合论的诞生.

外延公理(axiom of extensionality) 见“集合的相等”.

并集公理(axiom of union) 集合论的一条重要公理.由策梅洛(Zermelo,E. F. F.)于 1908 年提出.该公理断言:对任何集合 X,存在 X 的所有元素的并集 $Y=\bigcup X$.这条公理可以形式化为:

$$\forall\ X\exists\ Y\forall\ u(u\in Y\leftrightarrow\exists\ z(z\in X\wedge u\in z)).$$

利用这条公理可以定义集合的并运算.例如,$X\cup Y=\bigcup\{X,Y\}$,$X\cup Y\cup Z=(X\cup Y)\cup Z$.$\{a,b,c\}=\{a,b\}\cup\{c\}$等.也可以定义集合的包含关系:

$$X\subseteq Y\Leftrightarrow\bigcup\{X,Y\}=Y.$$

由于 $X\subseteq X\cup Y$,$Y\subseteq X\cup Y$,所以,从并集公理可以得出包含公理:对任意两集 X 与 Y,存在同时以 X,Y 为子集的集合.

包含公理(axiom of inclusion) 见“并集公理”.

幂集公理(axiom of power set) 集合论的一条重要公理.由策梅洛(Zermelo,E. F. F.)于 1908 年首先提出.该公理断言:对任何集合 X,存在它的所有子集组成的集合(幂集)$Y=\mathscr{P}(X)$.这条公理可以形式化为 $\forall\ X\exists\ Y\forall\ u(u\in Y\leftrightarrow\forall\ v(v\in u\rightarrow v\in X))$.如果把 $\forall\ v(v\in u\rightarrow v\in X)$ 记为 $u\subseteq X$,表示 u 是 X 的子集,公理又可形式化为:$\forall\ X\exists\ Y\forall\ u(u\in Y\leftrightarrow u\subseteq X)$.从幂集公理得,$X\in\mathscr{P}(X)$ 且 $\neg(\mathscr{P}(X)\subseteq X)$.并可以定义集合论中一系列重要的概念.例如,集合的笛卡儿积、二元关系、二元关系的定义域、值域、域、n 元关系、对应、映射、映射的限制、映射的扩张、运算、集上等价关系等.因为这些概念都有一个根本的出发点:对任何二集合 X 与 Y,$X\times Y\subseteq\mathscr{P}(\mathscr{P}(X\cup Y))$,即 $X\times Y$ 是集合.

空集公理(axiom of empty set) 集合论的一条重要公理.由策梅洛(Zermelo,E. F. F.)于 1908 年提出.该公理断言:存在一个没有元素的集合.这条公理可形式化为

$$\exists\ X\forall\ u\neg(u\in X)$$

这条公理肯定了不含元素的集合是存在的.由外延公理还可推出:空集只有一个.用 $\varnothing$ 表示($\varnothing$ 为丹麦文字母,发音为 O).利用分离公理,可以断言空类 $\varnothing=\{u\mid u\neq u\}$ 为集合.故在 ZF 系统中空集公理可以省掉.

无穷公理(axiom of infinity) 亦称无限公理.

集合论的一条重要公理. 由策梅洛(Zermelo, E. F. F.)于 1908 年首先提出. 该公理是断言:存在无穷集合. 对策梅洛这一公理的形式化有各种不同的方法,较为成功的有:

1. $\exists X(\exists u(u\in X)\wedge(\forall u\in X)$
$(\exists v(v\in X\wedge u\subseteq v\wedge\neg(v=u))$.

2. 存在一个递归集 S: $\exists S(\varnothing\in S\wedge(\forall X\in S)[X\cup\{X\}\in S])$. 递归集是无限集;反之,利用替换公理模式可从无限集的存在性推出递归集的存在性.

另外,1925 年,塔尔斯基(Tarski, A.)定义了 T 无限的概念:如果存在 $X\subseteq\mathscr{P}(N)$,没有 $\subseteq$ 极大元素,则称 N 是 T 无限集. 他证明了一个集合无限,当且仅当它是 T 无限的. 因此无穷公理也可表述为:存在 T 无限集.

无限公理(infinite axiom) 即"无穷公理".

替换公理(axiom of replacement) 亦称置换公理. 集合论的一条重要公理. 替换公理由弗伦克尔(Fraenkel, A. A.)于 1922 年首先提出. 该公理断言:对任何集合论公式 $A(u,v)$ 有

$$\forall u\exists v\forall w(A(u,v)\wedge A(u,w)\rightarrow v=w)\rightarrow$$
$$\forall X\exists Y\forall v(v\in Y\leftrightarrow(\exists u\in X)A(u,v)).$$

这条公理指出,对于任何集合 X 与任何公式 $A(u,v)$ 确定的映射 f,映射的象 $f(X)$ 是一个确定的集合. 由于公式 $A(u,v)$ 有无穷多个,每个具体的公式都确定一条公理,因此,弗伦克尔的公理实质上是一个公理模式. 它包含了无穷多条公理. 替换公理的引入,解决了某些 ZF 集合论其他公理不能解决的问题. 有了这条公理,可以推得某种非常大的特殊集合. 但是如果去掉无穷公理,由替换公理推不出无穷集的存在性. 在 ZF 中,子集公理与空集公理可直接由替换公理推出. 由替换公理与幂集公理可导出配对公理.

替换公理有下列各种等价形式:

1. 若 F 是一个映射,则对任何集合 A, $F(A)$ 是一个集合.

2. 若 F 是一个映射,且定义域 $\mathrm{dom}(F)$ 是集合,则值域 $\mathrm{ran}(F)$ 也是集合.

3. 若 F 是一个映射,则 $\forall A\exists f(F|A=f)$,下面的 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是参变元.

4. 对任何集合论公式 $\varphi(x,y,P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 有 $\forall x\exists y\forall z(\varphi(x,y,P_1,P_2,\cdots,P_n)\wedge\varphi(x,z,P_1,P_2,\cdots,P_n)\rightarrow y=z)\rightarrow\forall X\exists Y\forall y(y\in Y\leftrightarrow(\exists x\in X)\varphi(x,y,P_1,P_2,\cdots,P_n))$.

置换公理(axiom of replacement) 即"替换公理".

替换公理模式(axiom schema of replacement) 见"替换公理".

配对公理(axiom of pairing) 亦称无序对公理. 集合论的一条重要公理. 由策梅洛(Zermelo, E. F. F.)于 1908 年提出. 该公理断言:对任意集合 a 与 b,存在只含 a 与 b 的集合 $\{a,b\}$. 这条公理可形式化为

$$\forall a\forall b\exists c\forall u(u\in c\leftrightarrow u=a\vee u=b).$$

$\{a,b\}$ 称为 a,b 的无序对. 利用无序对的概念,可定义单元集的概念: $\{a\}=\{a,a\}$,有序对的概念 $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}$,乃至 n 元序组的概念等.

无序对公理(axiom of pairing) 即"配对公理".

无序对(unordered pair) 见"配对公理".

分离公理(axiom of separation) 亦称分离公理模式、子集公理、子集公理模式. 集合论的一条重要公理. 由策梅洛(Zermelo, E. F. F.)于 1908 年提出. 该公理断言:如果 φ 是带参变元 P 的性质,则对任何集合 X 和 P,都存在集合 $Y=\{u|u\in X\wedge\varphi(u,P)\}$,它含有 X 中所有性质 φ 的元素. 这条公理可形式化为

$$\forall X\forall P\exists Y\forall u(u\in Y\leftrightarrow u\in X\wedge\varphi(u,P)).$$

其中, P 亦可以是参变元组 $P=\langle P_1,P_2,\cdots,P_n\rangle$. 如果记具有性质 $\varphi(u,P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的类为 $\mathscr{A}$,利用交的定义可将公理写成下面的形式

$$\forall X\exists Y(\mathscr{A}\cap X=Y).$$

它的意义是类与任何集合的交是集合. 由集合组成的非空类 $\mathscr{A}$ 的交 $\bigcap\mathscr{A}$ 是集合等. 分离公理的另一推论是全类 $\mathscr{V}$ 是真类,否则 $\{x|x\in\mathscr{V}\wedge x\notin x\}$ 就会是集合. 由于公式 $\varphi(u,P)$ 有无穷多个,对于每个具体的 $\varphi(u,P)$ 都将得到一条公理,故分离公理实质上是一个公理模式,它包含了无穷多条公理. 策梅洛的这条公理形象地刻画了从已给集合按一定的限制(性质)可分离出它的子集这一性质. 策梅洛用分离公理代替弗伦克尔(Fraenkel, A. A.)的替换公理后得到的公理体系称为策梅洛集合论. 它比 ZF 弱. 例如在 ZF 中能证明集 $\{\omega,\mathscr{P}(\omega),\mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega)),\cdots\}$ 的存在性,而在策梅洛集合论中却不能,这里 ω 为自然数集.

子集公理(axiom of subset) 即"分离公理".

策梅洛集合论(Zermelo set theory) 见"分离公理".

正则公理(axiom of regularity) 亦称基础公理、限制公理. 集合论的一条重要公理. 任何非空集合都有 $\in$ 极小元素. 这个公理形式化为: $\forall X(X\neq\varnothing\rightarrow(\exists Y\in X)(Y\cap X=\varnothing))$ 或 $\forall X(X\neq\varnothing\rightarrow(\exists Y\in X)(\forall Z(Z\in Y\rightarrow Z\notin X)))$. 该公理断言:任何集合在关系 $\in$ 下是良基的,不存在无限递降链 $x_0\ni x_1\ni x_2\ni\cdots$ 也就不会有 $x\in x$ 与循环 $x_0\in x_1\in x_2\in\cdots$

$\in x_0$. 实质上此公理是对集合概念的一种限制：有性质 $x\in x$ 的集合是不存在的. 该公理的另一表述方法是：对任何集合论公式 $\varphi(x)$，有

$$\exists x\varphi(x)\rightarrow\exists Z(\varphi(Z)\wedge\neg\exists y(\varphi(y)\wedge y\in Z)).$$

这种表述下的正则公理实际上是正则公理模式. 此公理是冯·诺伊曼(von Neumann, J.)于 1925 年提出的.

基础公理(axiom of foundation)　即"正则公理".

限制公理(axiom of restriction)　即"正则公理".

初等集公理(axiom of elementary sets)　集合论的一条公理. 策梅洛(Zermelo, E. F. F.)于 1908 年提出集合论公理体系时，其中有一公理称为初等集公理. 该公理断言：存在空集，它不含任何元素；如果 a 是一个集合，则存在集 $\{a\}$，它仅含 a 为元素. 如果 a,b 是两个集合，则存在集 $\{a,b\}$，它含有且只含有 a 与 b. 初等集公理的内容，在后来的 ZF 系统中有的被保留，有的被删去.

存在性公理(axiom of existence)　集合论的一条重要公理. 该公理断言：至少存在一个集合. 要讨论集合，自然首先要假定集合存在. 该公理在后来的 ZF 系统中被删去，因为在 ZF 系统中的无穷公理就是存在性公理.

选择函数(choice function)　集合论的一个特殊函数. 设 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m\in M}$ 是由非空集合组成的非空集族，若映射

$$f:\mathscr{A}\rightarrow\bigcup_{m\in M}A_m$$

对任何 $m\in M$ 有 $f(A_m)\in A_m$，则称 f 是集族 $\mathscr{A}$ 上的一个选择函数. 选择函数的存在，肯定了在族 $\mathscr{A}$ 中的每一个集合内能一次性地选出一个元素并组成集合的可能性. 这种可能性在一些特殊情况下是明显的. 例如，每一个集 A_m 都是单元集时，或 $\mathscr{A}$ 是有限个集合组成的集时，或每一个 A_m 是有限实数集时. 但在一般情况下，这种可能性并不能认为是无疑的. 例如，利用第二科恩模型可以证明在 ZF 系统中，甚至可数族 $\mathscr{A}$ 中每个集合只有两个元素时，选择函数不存在.

代表集(set of representatives)　给定集合的一个特殊子集. 该子集由该集合的一个划分所决定. 给定集合 $X\subseteq A$ 和 A 的划分 S. 若对每个 $C\in S$，存在某个 $a\in C$，使 $X\cap C=\{a\}$，则称 X 为 A 的划分 S 的代表集. 利用代表集，可等价地将选择公理叙述为：每个划分都有一个代表集.

选择公理(axiom of choice)　简称 AC. 集合论的一条重要公理. 由策梅洛(Zermelo, E. F. F.)于 1904 年证明良序定理首先清楚地陈述出来. 该公理断言：对任何由两两不相交的非空集组成的集族，都存在一个选择集，它与族中每个集合恰有一个公共元素. 粗略地说，选择公理表明：给定任意个非空集合，可以同时从每个集合中取出一个元素. 这公理常用 AC 表示. 它可形式化为

$$\forall X[(\forall u\in X)(u\neq\varnothing)\wedge(\forall u,v\in X)(u\neq v\rightarrow u\cap v=\varnothing)]\rightarrow(\exists Y)\{(\forall u\in X)[(Y\cap u\neq\varnothing)\wedge(\forall w,z\in(Y\cap u)(w=z))]\}.$$

习惯上把 AC 叙述为更一般的形式：在任何由非空集合组成的集族 $\mathscr{A}=\{a_m\}_{m\in M}$ 上都有一个选择函数

$$f:\mathscr{A}\rightarrow\bigcup_{m\in M}A_m,$$

使对任何 $m\in M$，有 $f(A_m)\in A_m$.

19 世纪，人们在数学论证中经常使用选择公理，但尚未深入研究它的不同表现形式和推论. 例如，佩亚诺(Peano, G.)于 1890 年证明常微分方程解的存在性定理时，第一次陈述了选择公理并对它提出怀疑. 列维(Levi, B.)于 1902 年证明非空集合的集族 $\mathscr{F}$ 的并集的基数不小于 $\mathscr{F}$ 的基数时，也注意到需要选择公理，但他并未明确地表述出来. 康托尔(Cantor, G. F. P.)在研究序数理论时提出，是否每一集合都可良序的问题. 1904 年，策梅洛第一次用现代术语严格地陈述了选择公理，并用它证明了著名的良序定理. 康托尔最早使用选择公理的等价形式，即关于集合基数的三歧性原则：对于任何集合 S_1 和 S_2，

$$\overline{\overline{S_1}}<\overline{\overline{S_2}},\quad \overline{\overline{S_1}}=\overline{\overline{S_2}},\quad \overline{\overline{S_1}}>\overline{\overline{S_2}}$$

三式中有且仅有一个成立. 1906 年，罗素(Russell, B. A. W.)给出了选择公理的形式语言表示式. 1935 年，佐恩(Zorn, M. A.)用选择公理证明了第一极大原理，现今被称为佐恩引理. 泰希米勒(Teichmüller, O.)于 1939 年和图基(Tukey, J. W.)于 1940 年先后提出了第二极大原理. 现称为图基引理. 这两条引理都同选择公理等价. 人们在对选择公理的深入讨论中不断发现了上百个与 AC 等价的数学命题.

选择公理在数学中有着广泛的应用. 没有它，数学中的许多基本知识都无法获得. 例如，常微分方程解的存在定理、连续函数的定义. 利用选择公理可以证明，连续函数的 ε-δ 型与序列型两种定义是等价的；没有选择公理，它们是不等价的. 利用力迫法可以证明存在着选择公理不成立的模型. 在其中有函数 f 和实数 x_0 使得 f 在 x_0 点在 ε-δ 型意义下是不连续的，而在序列型意义下是连续的. 但是另一方面，由选择公理也可以导出许多直观上不易被接受的奇怪结果. 如豪斯多夫分球面定理与巴拿赫-塔尔斯基分球定理. 1924 年，巴拿赫(Banach, S.)与塔尔斯基(Tarski, A.)使用选择公理揭示了对球体的分

解与组合的悖论：把一个球切成有穷个片断，然后重新组合，可得到与原球有相同尺寸的两个球. 其次，根据选择公理，实数集是可良序的，但至今人们没有找到它的良序. 综上所述，选择公理就成为数学基础中最重要的问题之一. 历史上对是否承认选择公理一直有两种不同意见. 1939 年，哥德尔(Gödel，K.)证明了选择公理与 ZF 公理系统相容，1963 年，科恩(Cohen，P. J.)证明了选择公理相对于 ZF 公理系统独立.

1964 年，迈切尔斯基(Mycielski，J.)发表论文《决定性公理》，并在此前提下证明了许多有趣的结果. 例如：①实数的不空集合的每一可数集族都有一个选择函数；②实数的每一集合都是勒贝格可测的. 对于①选择公理成立，但对于②选择公理不成立. 因为在选择公理下，可作出勒贝格不可测集合. 不难看出，①是选择公理的一种较弱形式，而②的否定式是选择公理的一种较强形式. 因此，有可能选择公理的一般形式不成立，而它的某些较弱形式是成立的. 贝尔奈斯(Bernays，P.)、塔尔斯基、库拉托夫斯基(Kuratowski，K.)、莱维(lévy，P.)、哈尔佩恩(Halpern，J. D.)和叶克(Jech，T. J.)等人系统地研究了选择公理的较弱形式.

选择公理的较弱形式有：

1. 次序原则(简记为 OP). 每一集合都能全序化.

2. 对 n 个元素集合族的选择(Cn). 对任一具有 n 个元素的集合的族(即若 $x\in S$，则 $|x|=n$)都有一选择函数 f.

3. 对有穷集合族的选择(ACF). 对于有穷集合的族(即若 $x\in S$，则 x 有穷)都有一选择函数 f.

4. 序扩充原则(OEP). 任一集合 S 的每个偏序都能扩充为 S 的全序.

5. 挑选原则(SP). 对每一集合族 S(至少有两个元素)都存在一函数 f，使对每个 $x\in S$ 都有 $f(x)\neq\varnothing$，且 $f(x)$ 是 x 的真子集.

6. ACW. 对于任一良序集合，选择公理成立.

7. 素理想定理(PIT). 每一布尔代数都有一素理想.

上述 1—7 都是 AC 的推论. 但 1—7 中的任何一个都推不出 AC. 目前，大多数数学家倾向于接受选择公理，但对它的研究尚在继续中.

选择公理的等价命题(equivalent proposition of axiom of choice)　集合论的一系列重要命题. 它们都与选择公理等价. 选择公理常被叙述为下面几种形式：

1. 由两两不相交的非空集合组成的族恒存在一个选择集合，它与族中每一集合恰有一个公共元素.

2. 每一由非空集合组成的族 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m\in M}$ 都存在一个选择函数

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup_{m\in M}A_m,$$

使得对每个 $m\in M$，有 $f(A_m)\in A_m$.

3. 每一划分都有一个代表集合.

已知与选择公理等价的命题有上百个，现列举一些.

4. 集 A 到集 B 的满射 $f:A\to B$ 恒存在右逆映射 $g:B\to A$，使 $f\circ g=I_B$.

5. 良序定理：任何非空集合都存在良序.

6. 佐恩引理：如果非空偏序集 S 的任何全序子集均在 S 中有上界，则 S 必有极大元素. 由于全序子集均有上界的偏序集又称为归纳序集，此引理又可叙述为：非空归纳序集至少有一个极大元素.

7. 图基引理：在存在有限特征条件 C 的集合 X 的所有满足条件 C 的子集中，至少有一个关于条件 C 的 $\subseteq$ 极大元素. 所谓 C 是 X 的有限特征条件，是指 X 的子集 A 满足条件 C，当且仅当 A 的所有有限子集满足条件 C.

8. 对任何非空偏序集，若其每一良序子集上方有界，则它至少有一个极大元素.

9. 任何偏序集都有一良序子集 W，它没有不属于 W 的上界.

10. 设 C 是从集合 X 到集合 Y 的映射的图象的有限特征条件，则在满足 C 的映射中，至少有一个映射，其定义域为 $\subseteq$ 极大元素(通常把 6—10 这五个命题统称为佐恩引理. 它们都是由佐恩(Zorn，M. A.)首先提出的，应用也比较方便).

11. 直积定理(亦称集合乘积定理)：若干非空集合的直积非空.

12. 多个选取公理：对非空集合作成的族 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m\in M}$，存在映射

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup_{m\in M}A_m,$$

对所有 $m\in M$，$f(A_m)$ 为 A_m 的有限非空子集.

13. 豪斯多夫定理：偏序集的任何链都包含在一个极大链中.

14. 反链原理：每个偏序集必有极大反链.

15. 全序集可良序定理：每个全序集可良序化.

16. 良序集的幂集可良序定理：每个良序集的幂集合可良序化.

17. 极大不交子类存在性定理：任意类都含有互不相交的集合作成的极大子类.

18. 投射原理：存在真类到非空集合的满射.

19. 内射定理：存在非空集到真类的单射.

20. 基数的可比较性：任何两个基数 α 和 β 是可比较的.

21. 对任何无穷基数 a，$a^2=a$.

选择公理有着十分广泛的应用，借助于它与它

的等价命题可以推出集合论中许多重要的结论. 数学其他分支中的许多重要结论都需用选择公理才能推出.

集合乘积定理(product theorem of sets)　见“选择公理的等价命题”.

可数选择公理(countable axiom of choices)　集合论的一条公理. 它是选择公理的一种较弱的形式,该公理断言:每一个由非空集合组成的可数集族 $\mathscr{A}=\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$有一选择函数

$$f:\mathscr{A}\to\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n,$$

对任何 $n\in\mathbf{N}$,有 $f(A_n)\in A_n$. 由此公理可推出可数个可数集的并集可数,实数集不是可数个可数集的并集,每个无穷集有可数子集等. 但不能推出实数集可良序化. 1942 年,贝尔奈斯(Bernays,P.)证明了可数选择公理比相关选择原理弱.

相关选择原理(DC)(principle of correlation choices (DC))　集合论的一条公理. 它是比选择公理弱的命题. 由贝尔奈斯(Bernays,P.)于 1942 年提出. 该原理断言:若 R 是非空集合 A 上的二元关系,并且对任何 $a\in A$,存在 $b\in A$,使 bRa,则存在 A 中的序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,使得对任何 $n\in\mathbf{N}$,有 $a_{n+1}Ra_n$. 从相关选择原理可推出可数选择公理. 因此,它比可数选择公理强,又在 ZF 内 DC 可由 AC 推出,故 DC 比 AC 弱.

豪斯多夫极大集套原理(Hausdorff principle of maximal nested sets)　集合论的一条重要命题. 非空集族 $\mathscr{A}$ 的任何非空子族 $\mathscr{B}$ 都存在 $\mathscr{A}$ 中的极大集套 $\mathscr{B}_0$,使 $\mathscr{B}_0\supseteq\mathscr{B}$. 这一命题称为豪斯多夫的极大集套原理. 含 $\mathscr{B}$ 的极大集套可以不惟一,除非 $\mathscr{B}$ 本身是极大套.

选择集合(choice set)　与选择函数相联系的一个特定的集合. 对于由两两不相交的非空集合组成的族 $\mathscr{A}=\{A_m\}_{m\in M}$,若集合 S 满足:

1. $S\subseteq\bigcup_{m\in M}A_m$;

2. 对每个 $m\in M$,有 $S\cap A_m$ 为单元素集;

则称 S 为族 $\mathscr{A}$ 的一个选择集合.

族的选择集合的存在性与选择函数的存在性是等价的.

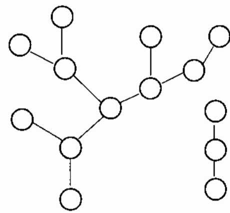
集合的有限特征条件(condition of finite character of a set)　亦称集合的有限特征性质. 对集合的一种刻画. 设 C 是关于集合的一个条件,若集合 A 满足条件 C 的充分必要条件是 A 的每个有限子集都满足条件 C,则称 C 是集的有限特征条件. 例如,在线性空间中,线性无关是一个有限特征条件,因为一个向量组线性无关当且仅当它的任何有限子组线性无关. 偏序集的升链是一个有限特征条件,因为 X 是一个升链当且仅当它的有限子集在同一序关系下都是升链. 而良序性不是有限特征条件,例如,实数集在大小顺序下不是良序的,但它的任何有限子集在同一种顺序下都是良序的. 图基引理指出:若 C 是关于集合的有限特征条件,则集合 A 的所有满足 C 的子集中,至少有一个关于条件 C 的$\sqsubseteq$极大元素. 使用这个引理于线性空间 V,取 C 为线性无关,可推出 V 中必有极大线性无关子集构成 V 的基. 这证明了线性空间基的存在性.

集合的有限特征性质(finite character property of set)　即“集合的有限特征条件”.

映射的有限特征条件(condition of finite character of a mapping)　对映射的一种刻画. 映射的图象是集合. 因此,映射满足有限特征条件指它的图象满足有限特征条件. 例如,单射是映射有限特征条件. 因为 $R\subseteq A\times B$ 是单射的图象的充分必要条件是,R 的任何有限子集 R_0(它是 R 向 A 的有限子集的限制映射)是单射. 利用图基引理,存在 A 到 B 的极大单射 f,这个单射以 $f^{-1}(B)$为定义域.

良序原理(well-ordering principle)　集合论的一条重要命题. 它是康托尔(Cantor,G. F. P.)于 1883 年研究序集,建立序数理论时揭示的. 该原理是:每个集合都可编成良序集. 1904 年,策梅洛(Zermelo,E. F. F.)利用选择公理证明了良序原理,良序原理便以定理形式出现在公理集合论中. 由于良序定理与选择公理等价,故选择公理的各种等价命题也与良序定理等价. 下面是用 AC 对良序原理的一个证明:设 $A\neq\varnothing$,f 是$\mathscr{P}(A)$上的一个选择函数,$a_0=f(A)$,$a_1=f(A-\{a_0\})$,$a_2=f(A-\{a_0,a_1\})$,…假设对所有小于 σ 的序数 v 已定义了 a_v,令 $a_\sigma=f(A-\{a_v|v<\sigma\})$,则 A 被编成良序 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_\sigma,\cdots$这个证明使用了序数理论.

良基关系(well-founded relation)　集合上的一种重要关系. 它是策梅洛(Zermelo,E. F. F.)于 1935 年提出的. 设 R 是集合 A 上的一个关系. 若 A 的任何非空子集 B 都有 R 极小元,则称 R 是 A 的良基关系. A 是关于 R 的良基集,记为 $\mathrm{wf}_R(A)$. A 上的任何良序关系都是 A 上的良基关系. 但 A 上的良基关系不一定是 A 上的良序关系. 如果 A 对于关系 R 不但是良基的,而且是全序的,那么 A 是良序集.



良基伪树

例如,自然数集$\{1,2,\cdots\}$对小于关系既是良序的也是良基的. 如果有限偏序集的哈塞图是有分叉的伪树(如图),则它是良基的但不是良序的. 在良基集 $\mathrm{wf}_R(A)$中,不存在无穷的单调递降序列

$$\{a_n\}_{n\in\omega}:a_0R^{-1}a_1R^{-1}a_2R^{-1}a_3R^{-1}\cdots$$

若定义良基集到序数集内一个映射 $f_R: A\to \mathrm{ord}$，使得当 $a\in A$ 时，

$$f_R(a)=\sup\{f_R(b)+1\mid(b\in A\wedge bRa)\},$$

且 f_R 的值域是一个序数，则 f_R 是 A 到 ord 内的一个确定单调增映射. f_R 的值域称为 R 的长度，即

$$\mathrm{length}(R)=\sup\{f_R(a)+1\mid a\in A\}.$$

例图中 R 的长度为 6.

良基集(well-founded set) 见"良基关系".

良基归纳原理(principle of well-founded induction) 超穷归纳原理的推广. 依据良基集的归纳性质的原理. 归纳性质指：在良基集 $\mathrm{wf}_R(A)$ 中，若 $B\subseteq A$，对任何 $a\in A$，当 $\{b\mid(b\in A\wedge bRa)\}\subseteq B$ 时，有 $a\in B$，则 $B=A$. 良基归纳原理表述如下：设 R 是 A 上的良基关系，φ 是一个性质，如果：

1. A 中每一个 R 极小元素有性质 φ.

2. 对 $a\in A$，当 $b\in A$，bRa，b 都有性质 φ 时，a 有性质 φ，则 A 中每个元素有性质 φ.

归纳序集(inductive ordered set) 集合论的一种特殊的偏序集. 全序子集均有上界的偏序集. 根据佐恩引理，任何非空归纳序集都有极大元素. 此结论与选择公理等价.

佐恩引理(Zorn lemma) 亦称第一极大原理. 集合论的一条重要引理. 它由佐恩(Zorn，M. A.)于1935年用选择公理给以证明. 该引理断言：如果非空偏序集 S 的任何子链在 S 中有上界，则 S 至少有一个极大元素. 佐恩引理与选择公理等价，但它比选择公理使用方便. 它不仅是近世代数中的有力工具，而且已应用到其他许多数学分支中. 通常人们也把由佐恩指出的另外4个与第一极大原理等价的命题称为佐恩引理. 它们是：

1. 若偏序集 S 的任何良序子集均有上界，则 S 至少有一个极大元.

2. 偏序集 S 必含有良序子集 w，它没有不属于自己的上界.

3. 图基引理.

4. 若 C 是一个关于映射的有限特征条件，则在满足 C 的映射中，有一个映射的定义域是 $\subseteq$ 极大元.

第一极大原理(first maximal principle) 即"佐恩引理".

图基引理(Tukey lemma) 亦称第二极大原理. 集合论的一条重要引理. 它与选择公理等价，由图基(Tukey，J. W.)于1940年独立提出. 该引理断言：若 C 是关于集合的有限特征条件，则集 X 中所有满足条件 C 的子集中，至少有一个满足条件 C 的 $\subseteq$ 极大元素.

第二极大原理(second maximal principle) 即"图基引理".

可构造性公理(axiom of constructibility) 集合论的一条重要公理. 该公理断言：所有集合都是可构造的. 哥德尔(Gödel，K.)为了证明连续统假设与ZFC是相容的，在1939年第一次构造出集合论的一个非平凡的模型，称为可构造模型. 在该模型中连续统假设，即 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ 成立. 在构造模型时，哥德尔从无穷公理出发，用超穷递归方法逐步定义出一些集合. 这些集合称为可构造集. 最后以所有可构造集所组成的集族作为该模型的集合.

可构造模型(constructibility model) 见"可构造性公理".

可构造集(constructibility set) 见"可构造性公理".

决定性公理(determinstic axiom) 集合论的一条重要公理. 在现代描述集合论中无穷对策具有重要的作用. 考虑二人对策：设 $M=\{0,1,\cdots,m-1\}$，参赛者Ⅰ和Ⅱ轮流在 M 中选取 n 个数，得到结果序列，设为 $\langle p_1,q_1,p_2,q_2,\cdots,p_n,q_n\rangle$，称为一个结局. 一个结局的集合 S 被事先给出并且为Ⅰ和Ⅱ知道. 最后，若 $\langle p_1,p_2,\cdots,q_n\rangle\in S$，则Ⅰ获胜；否则 $\langle p_1,p_2,\cdots,q_n\rangle\notin S$，则Ⅱ获胜，把这种对策记为 G_S. 许多二人参赛的智力游戏，如下棋，都能在适当地选择 M,n 和 S 后，以这一抽象的形式被数学地表示. Ⅰ的一种必胜策略是指一规则：在Ⅰ的每一步，该规则可以根据双方在此以前的取法告诉Ⅰ这一步该怎样取，最终使Ⅰ获胜. 类似地，可定义Ⅱ的必胜策略. 在 n 是有穷的情况下，容易证明Ⅰ或Ⅱ必然有一个必胜的策略，也就是说对策是决定的. 但在 n 是无穷时，对策是否是决定的就不再是明显的事实. 决定性公理是：对于每个结局集 S，G_S 是决定的. 这里

$$S\subseteq\{\langle p_1,q_1,p_2,q_2,\cdots,p_n,q_n,\cdots\rangle\mid p_n,q_n\in w\}.$$

力迫法(forcing method) 一种构造公理系统模型的方法. 它由科恩(Cohen，P. J.)于1963年为证明连续统假设相对于ZF系统的独立性而提出.

对角线方法(diagonal method) 一种重要的反证法. 为康托尔(Cantor，G. F. P.)于1874年所创造，它第一次用来证明实数集是不可数的. 为了证明 $\mathbb{R}$ 是不可数的，只要证明 $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ 不可数. 现用反证法，设 $[0,1]$ 可数，则可设 $[0,1]=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. 由于 $a_n\in[0,1]$，故可用无穷十进制小数表示，并将这些数依次列出：

$$\begin{aligned}
a_1&=0.\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\cdots\,a_{1n}\cdots\\
a_2&=0.\,a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\cdots\,a_{2n}\cdots\\
a_3&=0.\,a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\cdots\,a_{3n}\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_n&=0.\,a_{n1}\,a_{n2}\,a_{n3}\cdots\,a_{nn}\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

现在定义一数 $b=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，其中

$$b_i=\begin{cases}a_{ii}+1 & (a_{ii}<9),\\ 0 & (a_{ii}=9).\end{cases}$$

则显然 $b\in[0,1]$. 但 $b\neq a_i,i=1,2,\cdots,n,\cdots$这样就与[0,1]可数相矛盾. 即证明了[0,1]不可数，从而R不可数. 这种用完全直观的无穷阶方阵的对角线构造出一个不包含在某个集合的元素，也就是在特定的系统中构造一个自我否定. 正是在这一方法精神实质的指导下，对角线方法得到了脱离直观的发挥和推广. 康托尔用对角线方法证明了他著名的定理：对任意集合 A，$|P(A)|>|A|$. 现在，对角线方法反复地出现在递归函数论、计算机科学中，还出现在哥德尔(Gödel，K.)的第一不完全性定理的证明和塔尔斯基(Tarski，A.)关于真理的论证中. 汤姆森(Thomson，W.(L.K.))在《论一些悖论》一文中对对角线方法进行了更一般的抽象表示：设 S 是一集合，P 是一个二元谓词，对每个 $b\in S$ 定义一个一元谓词

$$P_b(a)\Leftrightarrow P(a,b)\quad(\forall\ a,b\in S),$$

则对角线引理即为：设 P 为二元谓词，定义一个一元谓词 Q 为

$$Q(a)\Leftrightarrow\neg P(a,a)\quad(\forall\ a\in S),$$

则$Q(a)$与所有的 $P_b(a)$不同，$\forall\ b\in S$. 可以看出对角线证法的关键在于构成一个自我否定的例外. 作为前提的外部关系：$P_b(a)\Leftrightarrow P(a,b)$没有矛盾. 而当把二元关系变为否定的内部的一元关系($\neg P(b,b)$)的特殊情形时，出现了矛盾. 在前提中并没有错误，而是在作为外部关系的理论形式逻辑推理中出现了内部的自我否定 $P(b,b)\Leftrightarrow\neg P(b,b)$. 汤姆森指出：罗素悖论、格瑞林悖论和里夏尔悖论都是建立在康托尔对角线方法之上. 现代一些逻辑学家几乎把所有逻辑悖论(集合论的和语义学的)都称为对角线悖论. 包括著名的哥德尔不完全性定理.

对角线悖论(diagonal antinomy)　见“对角线方法”.

集合论公理系统(axiom systems for set theory)　集合论的一组特定的公理系统. 在集合论公理系统中，集合是一个不加定义的原始概念. 集合和属于关系“∈”是通过公理来刻画的. 虽然每条公理都不是借助于直观而是借助于严谨的形式语言加以刻画的，然而公理的背景都是很深刻和直观的. 它们来源于康托尔(Cantor，G.F.P.)的集合论，是从经典集合论中整理和抽象出来的基本原则. 每一公理都刻画集合的某一基本性质. 把某些公理放在一起组成刻画集合特征的若干基本原则，就称为集合论的一个公理系统. 公理系统的选择不是惟一的，但是应该遵循一些基本原则. 如系统的相容性(协调性)、完备性以及独立性等要求. 1908 年出现两个著名的公理系统，这就是策梅洛(Zermelo，E.F.F.)的公理系统和罗素(Russell，B.A.W.)的类型论. 前者经斯科伦(Skolem，A.T.)、弗伦克尔(Fraenkel，A.A.)的改进与补充，成为最易于理解、影响最广的一个系统. 被称为 ZF 系统. 1925 年，冯・诺伊曼(von Neumann，J.)又提出一个系统，后经贝尔奈斯(Bernays，P.)、哥德尔(Gödel，K.)修改形成 GB 系统(亦称 NGB 系统). 除上述两个著名的系统外，还有奎因系统、王浩系统、阿克曼系统、莫利和斯科特系统.

建立众多集合论公理系统的背景是在康托尔集合论中包含着深刻的、丰富的、新的概念和方法. 悖论的发现促使人们借助于公理化方法，以期排除集合论中已知的悖论，并系统地整理康托尔的理论和方法. 评价集合论公理系统的科学标准是：

1. 能够描述康托尔理论的丰富内容，尽可能多地建立康托尔理论中已有的定理.
2. 能够避免已经发现的悖论.
3. 便于解决集合论中尚未解决的问题，主要是连续统假设和选择公理.
4. 系统的协调性、独立性、完备性以及是否便于理解和表达等.

ZF 系统(ZF system)　简称 ZF. 集合论的重要公理系统之一. 它在 1908 年首先由策梅洛(Zermelo，E.F.F.)提出，后经斯科伦(Skolem，A.T.)、弗伦克尔(Fraenkel，A.A.)的改进与补充而建立的一个公理系统，是康托尔(Cantor，G.F.P.)集合论方法的形式化处理. 该系统称为 ZF 系统. 它的原始概念是集合和属于关系. 这一系统包括下列九条公理：

1. 外延公理.
2. 空集公理.
3. 配对公理.
4. 并集公理.
5. 幂集公理.
6. 无穷公理.
7. 分离公理.
8. 替换公理.
9. 正则公理.

在 ZF 系统中添加选择公理而得到的系统称为 ZFC 系统. 这个系统是数学中使用最广泛的系统. 关于 ZFC 系统的独立性问题. ZFC 系统不是独立的. 例如，1—6 和 8—9 可以推出 7，故 7 是多余的，删去 7 并不影响该系统. 但由于 7 是策梅洛首先提出的，且有历史意义，并且运用方便、形式简洁，因此予以保留.

关于 ZFC 系统的完备性问题. 佩亚诺(Peano，G.)算术的公理都是 ZFC 系统的定理. 因此，由哥

德尔(Gödel,K.)不完备性定理可知 ZFC 系统是不完备的.

关于 ZFC 系统的协调性问题.根据哥德尔第二不完备性定理,ZF 系统的协调性只能在比它更强的系统中证明.可以在 ZFC 系统加大基数公理的公理系统中证明 ZFC 系统是协调的.

ZFC 系统(ZFC system)　见“ZF 系统”.

GB 系统(GB system)　集合论的重要公理系统之一.该系统中有集合与类两个基本概念.用小写英文字母 $x,y,z,\cdots$ 作为集合变元,用大写英文字母 $X,Y,Z,\cdots$ 作为类变元.此外,$\mathrm{cla}(X)$ 与 $m(X)$ 分别表示 X 是一类与 X 是一集合.公理分为五组.

A 组公理:

1. $\mathrm{cla}(x)$(任意集合 x 都是类).
2. $X\in Y\to m(X)$(类的任意元都是集合).
3. $(x\in X\leftrightarrow x\in Y)\to X=Y$(类的外延公理).
4. 无序对公理.

B 组公理(类的存在公理):

1. 存在一类 E,它的元素都是有序对集合,并且该有序对的第一元属于第二元.
2. 对于任意类 X,Y,都有一类 Z,它为 X 和 Y 的交类.
3. 对于任意类 X,它的补也是一类.
4. 对于任意类 X,它的元素中有序对的第一元组成一类.
5. 对于任意类 X,它的元作为有序对的第一元,而第二元为任意的集合.所有这些有序对组成一类.
6. 对于任意类 X,它的逆 X^{-1} 也是一类.X^{-1} 是这样定义的:$\langle S_1,S_2\rangle\in X$ 当且仅当 $\langle S_2,S_1\rangle\in X^{-1}$.
7. 对于类 X,存在类 Y,使得对任意 $\langle x,y,z\rangle\in X$,当且仅当 $\langle y,z,x\rangle\in Y$.
8. 对于类 X,存在类 Y,使得 $\langle x,y,z\rangle\in X$,当且仅当 $\langle x,z,y\rangle\in Y$.

C 组公理(集合存在公理):

1. 无穷公理.
2. 并集公理.
3. 幂集公理.
4. 替换公理.

D 组公理:对于任意的不空类 X,都有 $y\in X$,使 $y\cap X=\varnothing$.

E 组公理(选择公理).

这个公理系统的最大特点是没有公理模式,因此,它是一有穷公理系统.并且它规定真类不能作为类的元素.从而避免了以往的悖论.

马丁公理(Martin axiom)　简称 MA.集合论的一条假设.它有多种等价的形式:

1. 不存在由 $<2^{\omega}$ 个闭无处稠密的集合的并集组成的具有可数链条件($C.C.C$)的紧豪斯多夫空间.

2. 令 $\langle \mathrm{P},\leqslant\rangle$ 是非空的具有 $C.C.C$ 的偏序集,且 $\mathscr{D}$ 是 P 的 $<2^{\omega}$ 个稠密子集所组成的族,则在 P 中存在滤子 G,使得 $\forall\ D\in\mathscr{D}(G\cap D\neq 0)$.

MA 是 CH 的推论,它可看成 CH 的弱形式.马丁公理不是普通意义下的集合论中的公理.一般公理应具有某种自明性,但马丁公理不具有这一性质.所以 MA 应被称为假设.由于习惯的原因,现仍称公理.MA 假设是马丁(Martin,D.A.)提出的.

描述集合论(descriptive set theory)　集合论的一种形式和方法.描述集合论处理可用一些简单方法描述的实数集合,即有简单拓扑结构的或可用简单方法定义的集合.因为有些问题对任意实数集难于回答,但对有简单描述的集合问题变得容易得多.例如,对闭实数集连续统假设(康托尔-本迪克松定理)——每个闭的实数集至多可数或有 $2^{\aleph_0}$ 个元素,是可以证明其成立的,但对一般集合连续统假设的证明就十分困难.

撰　稿　王和宽　卢景波　纪善韬　杨安洲　李泽民
　　　　吴利生　何纯瑾　陈立中　钱如平　蒋星耀
审　阅　王戍堂　杨安洲　应制夷　蒋星耀

形 式 逻 辑

形式逻辑(formal logic)　研究正确思维(概念、判断或命题、推理)的形式结构、规律、方法和应用的科学.其主要研究对象是演绎推理的形式."逻辑"一词来源于希腊文 λόγos(逻各斯),原意主要指思想、言辞、理性、规律等."形式逻辑"这一名称最初由康德(Kant,I.)在《纯粹理性批判》一书中提出,指从亚里士多德(Aristotle)到中世纪这一段时期内建立起来的逻辑科学.康德认为:形式逻辑的特点是抽掉思维的具体内容,只考察思维的形式.后来,形式逻辑有了新发展,产生了用数学方法研究逻辑的新学科——数理逻辑.因此,人们把形式逻辑分为传统的形式逻辑(或传统逻辑)和现代形式逻辑(或数理逻辑)两种.习惯上,传统的形式逻辑简称形式逻辑.

形式逻辑所研究的思维形式,指思维的存在和表现的形式.思维或是形成概念,或是进行判断,或是进行推理.思维就是以概念、判断(命题)、推理这几种形式表现出来的.思维的形式结构就是思维的各个组成部分的联系方式.概念是思维的细胞.因此,思维形式结构也就是概念在判断中的联系方式,判断在复合判断和推理中的联系方式,以及概念、判断、推理在更复杂的思维中的联系方式等.形式逻辑研究概念的外延间的种种关系,概念内涵和外延间的关系;研究判断的形式结构所体现的一般含义,它们的真值情况和它们之间的真值关系;以及研究推理有效性的形式准则,从而揭示思维的规律和规则.其中,最基本的规律是同一律、矛盾律、排中律和充足理由律等.形式逻辑从形式方面给思维提出规范和要求.遵守这些要求,思维就能达到形式正确性,而形式正确性是思维正确性的必要条件.因此,形式逻辑是一门教给人们正确地进行思维,识别论断中的逻辑谬误,以及如何准确有效地表达自己思想的科学,是一切其他科学的基础.因此,德·摩根(De Morgan,A.)说:"数学和逻辑是精确科学的两只眼睛".皮尔勒(Pierre,B.)则说:"逻辑是不可战胜的,谁反对逻辑,谁就要用到逻辑."形式逻辑除了以思维形式结构及其规律为主要研究对象外,还研究一些简单的逻辑方法,如定义、划分、分析、综合、实验、假说等,它们和思维形式结构及其规律有着密切的联系.

形式逻辑又是一门古老的科学,迄今已有两千多年的历史,其内容和方法都在不断变化和发展.形式逻辑在西方产生于古希腊时期.古代的中国和古印度差不多同时期也进行了对逻辑问题的研究.中国春秋战国时期在关于名词(名)与其所代表的事物(实)的关系的讨论中,公孙龙、惠施、墨翟和荀况等人对逻辑问题都作过研究.亚里士多德是形式逻辑的奠基人.他的主要逻辑著作《工具论》对概念、判断、推理(主要是直言三段论)和证明都做了系统的论述,并在另一部著作《形而上学》中,对矛盾律、排中律等形式逻辑的基本规律作了较详细的讨论.后来的斯多噶学派主要研究了假言推理和选言推理的理论,丰富和发展了形式逻辑.中世纪,逻辑主要发展了词项理论和推导学说,研究了悖论问题,提出种种语义悖论和解决悖论的方法.17 世纪之后,随着实验科学的发展,近代归纳逻辑发展起来.1620 年,培根(Bacon,F.)在他的著作《新工具》中奠定了近代归纳逻辑的基础.

近代,演绎逻辑更有新的突破.特别是从莱布尼茨(Leibniz,G. W.)到布尔(Boole,G.),他们应用数学方法研究逻辑,从而产生了数理逻辑这门新学科.数理逻辑开始应用于数学基础的研究,如公理方法及其有关证明,并取得巨大成果.20 世纪 30 年代以来,数理逻辑又有了新发展,其应用范围不断扩大,并日益显示出它的重要性.数理逻辑的迅速发展,改进、充实和丰富了形式逻辑的内容和方法,使其进一步适应现代科学思维发展水平.

形式逻辑的基本规律

工具论(organon)　形式逻辑术语.即古希腊亚里士多德(Aristotle)六篇逻辑著作的总称.逍遥派继承亚氏对逻辑学的看法,认为逻辑学既非理论知识,也非实际知识,而是知识的工具.因此,约在公元 6 世纪,亚氏的逻辑著作就被命名为《工具论》.其中《范畴篇》以论实体、量、关系、质等范畴为主;《解释篇》由对词、句的研究引至关于命题(判断)的学说;《前分析篇》系统地阐述了三段论式推理问题;《后分析篇》论述证明、定义等问题;《论辩篇》论反驳;《辩谬篇》研究论辩中各种谬误.《工具论》为形式逻辑奠定了基础,对这门科学的发展有深远的影响.

思维形式(form of thinking)　亦称思维形态.形式逻辑术语.即思维(思想)存在和表现的形式.一般指人们思维中用以反映客观对象的形态,即概念、判断(命题)和推理等思维的基本形态.

思维形态(form of thinking)　即"思维形式".

思维形式结构(formal structure of thinking)

形式逻辑术语.指思维内容的组成部分之间的联系.即概念在判断(命题)中的联系方式,判断(命题)在推理中的联系方式等.例如:"所有 S 是 P","如果 P 则 Q"等判断(命题)形式,以及"有 S 是 P,所以有 P 是 S"等推理形式,有时也称为思维的逻辑形式.思维形式结构是形式逻辑的研究对象.思维中以概念为基本细胞的每一个具体的判断和推理都具有形式结构.例如,"一切自然数都是整数","所有的人都是要死的","凡气体都是有弹性的"是三个内容不同的判断(命题),但它们都有相同的形式:所有 S 是 P.又如:"自然数是整数,5 是自然数,所以 5 是整数","人是要死的,亚里士多德(Aristotle)是人,所以亚里士多德是要死的"是两个具体内容不同的推理,但它们具有同样的形式:M 是 P,S 是 M,所以 S 是 P.形式逻辑就是通过这些抽象的形式,来研究思维形式的特性和规律.

形式逻辑的基本规律(basic laws of formal logic) 形式逻辑研究的基本内容.指人们在思维过程中必须遵守的思维逻辑规律.即同一律、矛盾律、排中律和充足理由律.前三条规律,早为亚里士多德(Aristotle)发现.除了同一律没明确陈述外,矛盾律和排中律在他的《形而上学》一书中已明确提出,并作了较详尽的论述.充足理由律则是由莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于 17 世纪提出的.这些规律之所以被称为形式逻辑的基本规律,是因为它们对于一切思维形式都普遍有效,是各种思维形式特殊的逻辑规律、规则的基础.同一律、矛盾律和排中律各自内容虽然不同,但它们之间有密切联系.它们从不同角度要求并保证思维有确定性和一贯性.充足理由律则要求思维的论证性.

形式逻辑的基本规律是客观事物的某些最普遍的性质和最基本的关系在思维中的反映.遵守形式逻辑的基本规律是正确思维的必要条件.关于形式逻辑基本规律是否应包括充足理由律,逻辑学界尚未取得一致.

同一律(law of identity) 形式逻辑的基本规律之一.指思想的同一性,即在同一思维过程中,反映同一对象的思想(概念、判断)必须是确定的、同一的.

矛盾律(law of contradiction) 亦称不矛盾律.形式逻辑的基本规律之一.指在同一思维过程中,一个判断及其否定不能同真,即至少有一个是假的.矛盾律的公式是:非"A 与非 A",其符号表示为$\models\neg(A\wedge(\neg A))$,其中"$A$"表示一个判断,"非 A"表示对 A 的否定,$\models B$ 表示 B 为真,$\models\neg(A\wedge(\neg A))$ 表示"A 与$\neg A$ 同真"为假.矛盾律要求一个思想不自相矛盾.违反矛盾律,就要犯自相矛盾的逻辑错误.《韩非子·难势》中有这样一个典故:人有鬻矛与盾者,誉其盾之坚"物莫能陷也".俄而又誉其矛曰:"吾矛之利,物无不陷也",人应之曰:"以子之矛陷子之盾何如?"其人弗能应也.该典故揭露了卖矛与盾的人违反矛盾律的逻辑错误.自相矛盾一词,就出自这个典故.通常所说的自相矛盾、出尔反尔、自己打自己嘴巴等都是指犯了违反矛盾律的逻辑错误.运用矛盾律时必须注意正确认识逻辑矛盾的问题.逻辑矛盾是同时断定一个思想及其否定都是真的.但在不同时间、不同方面、不同条件下,对同一事物做出两个相反的或矛盾的判断,并不构成逻辑矛盾.

不矛盾律(law of non-contradiction) 即"矛盾律".

逻辑矛盾(logical contradiction) 形式逻辑术语.指违反矛盾律的逻辑错误.即在同一思维过程中违反矛盾律要求,同时肯定一个判断(命题)及其否定都真的论断.逻辑矛盾一定是假的.例如,"2 是素数又不是素数"便是假的.形式逻辑中的矛盾律恰恰就是要排除思想和论断中的这种逻辑矛盾,以保持思想和论断的合理性.

排中律(law of excluded middle) 形式逻辑的基本规律之一.指在同一思维过程中,两个互相矛盾的判断不能同假,必有一真,即要求思想具有是非分明性.排中律的公式是:A 或非 A,其符号表示为$\models A\vee(\neg A)$,其中,"A"和"非 A"表示两个相互矛盾的判断,"或"表示在 A 和非 A 两个判断中,必有一真.$\models A\vee(\neg A)$ 表示"A 与$\neg A$ 两者中必有一真"为真.例如:"x 是有理数"和"x 不是有理数"这对矛盾判断中,不能同时都假,必须承认其中一个是真的.如果对两个相互矛盾的判断,既不承认这个,又不承认那个,那么就违反了排中律.排中律要求人们在是非面前,对问题做出确定的回答.遵守排中律就能消除思维中的不确定性,否则就会犯模棱两可的逻辑错误.排中律与矛盾律既有联系又有区别.它们的主要区别表现在运用范围不同.矛盾律除了适用于互相矛盾的判断,还适用于互相反对的判断;而排中律只适用于互相矛盾的判断,不适用于互相反对的判断.

充足理由律(law of sufficient reason) 亦称充分理由律.形式逻辑的基本规律之一.由莱布尼茨(Leibniz,G. W.)提出.指在论证过程中,任何一个判断被确定为真时,必须要有充分理由.充分理由律的公式是:如果"B 真",并且"若 B 真则 A 真"为真,则"A 真".其符号表示为

$$(\models B\wedge\models B\to A)\to\models A(\text{或}\models B\wedge(B\to A)\to A).$$

其中 A 代表在论证中被确定为真的判断,B 代表用来确定 A 真的判断,即理由.在上述过程中,A 所以

能被确定为真，是由于 B 真，并且 B 与 A 有必然的逻辑联系. 理由充分的特点是：理由本身必须为真，并且能从这个理由必然地得出所要的判断. 充足理由律是客观事物间必然联系规律性的反映，任何事物的存在都必然有它存在的条件和原因，这种条件和因果联系的客观规律性，就是充足理由律的客观基础. 违反它就要犯虚假理由或推不出的逻辑错误.

充分理由律(law of sufficient reason)　即“充足理由律”.

概　　念

概念(concept)　形式逻辑术语. 指反映事物的本质属性的思维形式. 在客观世界中存在许多事物，它们都有许多性质，并和其他事物发生各式各样的关系. 这些性质和关系都是事物的属性. 事物由属性的同异分类. 人们在实践活动中，在感性认识的基础上，运用比较、分析、综合、抽象和概括等方法，抽象出一类事物所具有它类事物不具有的那些属性，即特有属性或本质属性，形成了反映事物的各种各样的概念. 概念的产生，是从感性认识上升到理性认识的飞跃. 概念与感觉、知觉、表象不同，感觉、知觉、表象是反映事物具体的形象的属性，因此，它们具有直观性和个别性. 而概念却是反映事物本质和规律性的属性，因此，概念具有抽象性和普遍性. 概念是思维的细胞，是构成判断(命题)、推理的基本要素. 任何概念都是通过语词来表达的. 但是，并不是所有的语词都表达概念，一般，实词都表达概念而虚词则不表达概念.

基本概念(basic concept)　亦称原始概念或初始概念. 一个学科领域的最初始的一些概念. 指那些本身不加定义，却作为定义该学科中其余一切概念的出发点的概念. 对于这些基本概念通常只给以描述性的说明. 例如，平面几何中的点、线、面都只给出描述性的说明. 它们是几何学中的基本概念.

原始概念(original concept)　即“基本概念”.

初始概念(original concept)　即“基本概念”.

属性(attribute)　逻辑学的基本概念之一. 指事物的性质和事物间的关系的统称. 一个事物的属性，如颜色，称为性质. 若干事物之间的属性，如大于，称为关系. 并非一类事物都具有的属性是该类事物的偶有属性，如白色的皮肤是人的偶有属性. 一类事物都具有而别的事物都不具有的属性是该类事物的特有属性. 对一类事物具有决定性的特有属性，被称为该事物的本质属性. 而固有属性是指一类事物派生的特有属性. 如能思维，有语言等是人的固有属性；能制造和使用生产工具是人的本质属性；这些都是人的特有属性.

性质(property)　见“属性”.

本质属性(essential attribute)　见“属性”.

外延(extension)　亦称外包. 逻辑学的基本概念之一. 它同内涵一起构成概念的两个重要方面. 外延就是指概念所反映的事物所组成的集合. 例如，人这个概念的外延就是人类. 正偶数概念的外延是集合 $\{2n : n\in \mathbf{Z}^+\}$，其中 $\mathbf{Z}^+$ 表示一切正整数所成的集合. 外延是概念量的方面，是概念所指的对象范围，它说明概念反映的是哪些事物. 任何概念的外延都相应着一个具有该概念所反映的事物所组成的类，虚(空)概念外延所相应的对象类为空类，在现实中是不存在的.

外包(denotation)　即“外延”.

内涵(connotation)　亦称内包. 逻辑学的基本概念之一. 它同外延一起构成概念的两个重要方面. 内涵即概念所反映的事物的特有属性、本质属性. 例如，概念人的内涵是能制造和使用生产工具的动物. 概念正偶数的内涵是能被 2 整除的正整数. 概念的内涵与客观事物的特有属性、本质属性本身是有区别的. 前者是主观方面的东西，是认识事物的结果；后者是客观存在的，是被认识对象的属性. 既然概念的内涵是对客观事物的反映，那就存在着反映内容的深浅、对错的问题. 因此，不仅正确地反映事物属性的概念有内涵，而且歪曲地反映事物属性的概念也有内涵. 内涵是任何概念都具有的重要方面.

内包(connotation)　即“内涵”.

关系(relation)　逻辑学的重要概念，也是数学中的重要概念之一. 关系就是指存在于若干事物之间的某种相互联系. 例如，逻辑学中类与类之间，就存在着同一、上属、下属、交叉、全异等关系；代数学中实数之间就存在着等于、不等于、大于、不大于、小于、不小于等关系. 对于两个确定的事物，从各种不同的角度来考察，则有各种不同的关系. 例如，平面几何中的两个圆之间，就其面积而言，可有大小、等于或小于关系，就其位置而言，可有外离、外切、相交、重合、内切以及内包的关系. 另外，视事物是两个还是两个以上可分为二元关系与多元关系. 关系概念随处可见，因而逻辑学中十分重视关系的性质及其规律的研究.

在逻辑学和数学中，各种关系常用简明的符号来表达. 例如，用 $x=y$ 表示个体 x,y 之间的相等关系. 用 $x\in M$ 表示个体 x 与集合 M 之间的属于关系. 一般地，可用 xRy 表示 x,y 之间具有某种关系 R. 逻辑学中专门研究具有任意性质的关系及其规律的理论称为关系理论. 例如，一种关系是否具有自反性、对称性、传递性、连通性等都是关系理论研究的内容(参见本卷《集合论》同名条).

相容关系(compatible relation)　两概念外延

间的一种关系.如果两个概念的外延 A,B 具有共同部分,即 $A\cap B\neq\varnothing$,则说它们之间的关系是相容关系.相容关系有三种情况:同一关系、从属关系、交叉关系(参见本卷《集合论》同名条).

相容概念(compatible concept)　外延相容的概念.它们的外延或部分重合或全部重合.例如,大学生与运动员是两个相容概念.

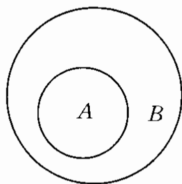
同一关系(identical relation)　亦称全同关系或重合关系.相容关系之一.两概念的外延 A,B 相同,即 $A=B$,则称这两个概念之间有同一关系.例如,等边三角形与等角三角形.

全同关系(wholly identical relation)　即"同一关系".

重合关系(coincident relation)　即"同一关系".

同一概念(identical concepts)　一种相容概念.指外延完全重合的诸概念.例如,奇数与被 2 除余 1 的数两者是同一概念.

从属关系(dependence relation)　亦称属种关系或主从关系.相容关系之一.两个概念,其中一个概念的外延 A 完全包含在另一个概念的外延 B 之中,且仅仅成为它的一部分的关系.即 $A\subset B$ 时,则称这两个概念之间是从属关系.如图所示.例如,概念矿工和工人是从属关系.在从属关系中,外延大的那个概念称属概念,亦称上位概念.外延小的那个概念称种概念,亦称下位概念.所以,概念的从属关系就是属概念和种概念的关系.概念的从属关系不同于整体与部分的关系.在从属关系中,种概念是属概念下的子类.但部分却不是整体的子类.例如,船与轮船是从属关系,但船与构成该船的某一部件不是从属关系,而是整体与部分的关系.



属种关系(relation of genus and species)　即"从属关系".

主从关系(dependent relations)　即"从属关系".

属概念(concept of genus)　亦称上位概念.见"从属关系".

上位概念(upper seat concept)　即"属概念".

种概念(concept of species)　亦称下位概念.见"从属关系".

下位概念(lower seat concept)　即"种概念".

从属概念(dependent concepts)　亦称类概念.具有从属关系的两个概念.例如,学生与大学生是具有从属关系的概念,所以这对概念是从属概念.

类概念(concept of class)　即"从属概念".

邻近种概念(concept of near species)　一种下位概念.指在一个概念的一系列下位概念中,外延最大的一个.例如,复数的下位概念有实数、有理数、自然数,其邻近种概念是实数.

邻近属概念(concept of near genus)　一种上位概念.指在一个概念的一系列上位概念中,外延最小的上位概念.例如,等边三角形的上位概念有等腰三角形、三角形等,其中等腰三角形外延最小,所以是等边三角形的邻近属概念.

外延与内涵的反变关系(relation of inverse variation between extension and intension)　外延和内涵间的一种制约关系.指具有从属关系的概念之间内涵多少与外延大小的相互制约关系.即属概念与种概念之间,一个概念的内涵愈多,则它的外延愈小;反之,一个概念的内涵愈少,则它的外延愈大.例如,平行四边形、矩形、正方形这三个概念之间就具有从属关系.从内涵方面来看,平行四边形是具有两组对边各平行这种属性的四边形;而矩形除了具有平行四边形的一切属性外,还具有四个角都是直角这种属性;至于正方形,它的内涵又比矩形的内涵多,它还具有四条边都相等的属性.从外延方面来看,则与此正好相反.平行四边形这个概念的外延比矩形这个概念的外延大;矩形这个概念的外延又比正方形这个概念的外延大.

概念的内涵与外延的这种反变关系,并不是数学上的反比关系,它只是表示了概念的内涵与外延的相应变化的情形.根据外延与内涵的反变关系,就能通过增多概念内涵的方法来缩小概念的外延,或通过减少概念内涵的方法来扩大概念的外延.即通常所说的,对概念进行限制或概括,以便在思维活动中,使概念更加明确.

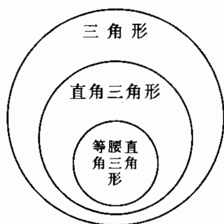
概括(generalization)　一种科学方法.即从个别事物的本质属性推知同类事物的本质属性的科学方法.例如,从正方形到矩形,再到四边形,最后到几何图形,就是一个不断概括的过程.数学中概括是形成概念的一种重要方法.数学中概括的方法主要有:

1.外推性概括,即由某类个别事物所具有的属性推广到该类全部事物都具有这种属性的概括,或把某领域的规律推广到其他领域的概括.

2.上升性概括,即由对单一的某个事物的认识,直接上升为一种具有普遍性规律认识的概括.数学中许多概念是使用上升性概括而得到的.

概念的限制(restriction of concept)　亦称概念的缩小.同概念的概括相对.是一种增多某一概念的内涵使该概念的外延缩小的逻辑方法.例如,给三角形这一概念增加直角这一内涵,就把三角形限制成外延较小的直角三角形,接着,还可对直角三角形这一概念再增加等腰这一内涵,就把直角三角形限制为等腰直角三角形.如图所示.综上所述,概念的

内涵逐渐增多，而概念的外延则逐渐缩小，这就是对概念进行限制. 对一个外延较大的概念可进行多次限制，直到满足实际需要为止. 限制是有极限的，极限就是单独概念. 因为单独概念的外延是一个独一无二的事物，所以不能再缩小了. 对概念进行限制有助于人们对事物的认识从一般过渡到特殊，使认识具体化；同时也有助于人们更准确地使用概念. 限制从语言方面来说，有的是对原有语词增加限制词，有的则是改换一个语词.



概念的缩小（reduction of concept） 即"概念的限制".

概念的概括（generalize of concept） 亦称概念的扩大. 同概念的限制相对，指通过减少某一概念的内涵来扩大该概念的外延的逻辑方法. 例如，给等腰直角三角形这一概念减少等腰这一内涵，就把等腰直角三角形变为外延较大的直角三角形. 还可对直角三角形这一概念减去直角这一属性，于是就把直角三角形概括为三角形. 参见"概念的限制"条中的图. 这样，从等腰直角三角形到直角三角形，又从直角三角形到三角形，概念的内涵逐渐减少，而概念的外延逐渐扩大，这就是概念的概括. 对外延较小的概念可以连续进行多次概括，直到满足实际需要为止. 对概念进行概括有助于人们对事物的认识从特殊过渡到一般，掌握事物的共同本质，使人们在表述思想过程中概念更加准确. 概括从语言方面来看，有的是减少原有复合语词的限制词，有的则是改换一个语词.

概念的扩大（enlargement of concept） 即"概念的概括".

交叉关系（intersected referencing） 亦称部分重合关系. 相容关系之一. 指两个概念的外延 A，B 有且仅有一部分重合的关系. 即 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap B'\neq\varnothing$ 且 $A'\cap B\neq\varnothing$，其中 A'，B' 分别为集合 A 与 B 的补集，$\varnothing$ 为空集. 例如，"等腰三角形"与"直角三角形". 这两个概念就是交叉关系. 因为"等腰三角形"和"直角三角形"这两个概念的外延中有且只有一部分是"等腰直角三角形". 两个具有交叉关系的概念称为交叉概念.

部分重合关系（partial coincident relations） 即"交叉关系".

交叉概念（intersected concepts） 见"交叉关系".

不相容关系（incompatible relations） 亦称全异关系. 两概念外延间的一种关系. 指两个概念的外延 A，B 没有任何重合部分的关系. 即 $A\cap B=\varnothing$. 例如，白与黑、奇数与偶数等. 两个具有不相容关系的概念称为不相容概念. 不相容关系又可分为矛盾关系与反对关系.

全异关系（utterly different relations） 即"不相容关系".

不相容概念（incompatible concepts） 见"不相容关系".

并列关系（juxtaposition relations） 亦称同位关系，又称平行关系. 两个或多个概念外延间的一种关系，指同一上位概念之下同一层次的几个下位概念之间的关系. 例如，同属三角形这个上位概念下的同一层次的三个下位概念，直角三角形、锐角三角形、钝角三角形之间就具有并列关系. 并列关系可分为相容并列关系和不相容并列关系. 具有并列关系的概念称为并列概念，亦称同位概念或平行概念.

同位关系（appositive relations） 即"并列关系".

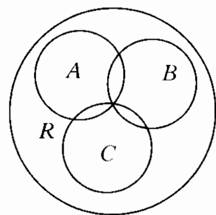
平行关系（parallel relations） 即"并列关系".

并列概念（juxtaposition concepts） 见"并列关系".

同位概念（appositive concepts） 见"并列关系".

平行概念（parallel concepts） 见"并列关系".

相容并列关系（compatible juxtaposition relation） 两个或多个概念外延间的一种关系. 指在同一上位概念的外延中，属于同一层次的且外延相互交叉的几个概念之间的关系. 即具有并列关系的概念的外延两两交叉. 例如，相对于人这一概念来说，学生、青年、运动员间具有相容并列关系，如果它们的外延分别记为 R，A，B，C，则可表示如图.



不相容并列关系（exclusive juxtaposition relation） 两个或多个概念外延间的一种关系. 在同一上位概念的外延中，属于同一层次的外延互相排斥的几个概念之间的关系. 即具有并列关系的概念的外延两两不相交.

对偶概念（dual concepts） 一种特殊的概念关系. 它与非对偶概念相对，反映两个具有相互依存、相互制约关系的对象或现象的概念. 它们通常是一一对应成对存在的. 例如，上与下、正数与负数、原因与结果等.

非对偶概念（non-antithesis concepts） 一种特殊的概念关系. 它与对偶概念相对，反映两个不具有直接相互依存关系的对象或现象的概念. 例如，风、马、牛；桌子、石头、河流等. 又如，人与空气虽然关系密切，但不是相互依存的，人虽然离开空气不能生

存，但空气离开人却可以依然存在，所以它们不是对偶概念，而是非对偶概念.

自记概念(self-recording concept)　一种特殊的概念. 即在内涵中有自记特征的概念. 在概念的内涵中有回答关于“何处?”“何时?”“何种个体?”这类问题属性的概念. 例如，“现在住在亚洲的人们”、“黄海”、“鲁迅”等均是自记概念. 任何一个自记概念，借助于逻辑上限制的方法，可变成一个单独概念.

具体概念(concrete concept)　亦称实体概念或对象概念. 外延比较特殊的概念. 它与抽象概念相对. 指反映具体事物的概念. 例如，“长江”、“金鱼”等. 这些概念的外延是一个或一类具体事物. 具体概念一般用语言中的具体名词来表达.

实体概念(substantial concept)　即“具体概念”.

对象概念(object concept)　即“具体概念”.

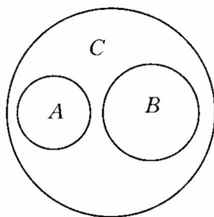
抽象概念(abstract concept)　亦称属性概念. 内涵比较特殊的概念. 它与具体概念相对. 指以事物的某种属性为反映对象的概念. 它所反映的不是事物本身，而是从事物或各事物间抽象出来某种属性作为独立的思考对象. 例如，善良、相等、线性等.

属性概念(attributive concept)　即“抽象概念”.

关系概念(relation concept)　一种属性概念. 指反映具体事物之间各种关系的概念. 例如，“x 大于 y”中的“大于”，“甲队战胜了乙队”中的“战胜”都是关系概念.

性质概念(concept of property)　一种属性概念. 指反映具体事物各种性质的概念. 例如，“紫”就是一个性质概念.

反对关系(contrary relation)　亦称对立关系，全异关系之一. 两个概念的外延 A，B 没有共同元素，且其外延的和是它们共同属概念的外延 C 的真子集，即 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B\subset C$，则称这两个概念是关于它们共同的属概念的反对关系. 具有反对关系的概念称为反对概念或对立概念. 例如，在颜色这个属概念下的两个种概念白色与黑色就具有反对关系. 白色与黑色两个概念的外延互相排斥；没有共同元素，且它们的外延之和小于属概念颜色的外延. 因为颜色除白色与黑色外，还有其他颜色. 反对关系如图所示.



对立关系(opposite relation)　即“反对关系”.

对立概念(opposite concepts)　见“反对关系”.

反对概念(contrary concepts)　见“反对关系”.

矛盾关系(contradictory relation)　全异关系之一. 在同一个属概念之下的两个种概念之间的不相容关系，它们的外延 A，B 没有共同元素，并且它们的外延之和等于它们共同的属概念的外延 C，即 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=C$，则称这两个概念是关于它们共同的属概念的矛盾关系. 具有矛盾关系的两个概念称为矛盾概念. 例如，在实数这个属概念下的有理数与无理数这两个种概念间就具有矛盾关系. 一般，具有矛盾关系的两个概念中，一个是正概念，另一个是负概念.

矛盾概念(contradictory concepts)　见“矛盾关系”.

正概念(positive concept)　亦称肯定概念. 按表述中联项区分的一种概念. 它与负概念相对，反映事物具有某种属性的概念. 例如，有机物、三角形等为正概念. 在实际思维活动中，为了突出对象具有某种属性，便运用正概念.

肯定概念(positive concept)　即“正概念”.

负概念(negative concept)　亦称否定概念. 按表述中联项区分的一种概念. 它与正概念相对，是反映不具有某种属性的事物的概念. 一般地，用正概念加否定词非、不、无等表达的就是负概念. 负概念的外延随着论域(范围)的变化而变化. 例如，相对人这个论域，非大学生的外延是指大学生以外的一切人；相对于学生这个论域，非大学生的外延是大学生以外的一切学生. 而在某一个论域中，负概念的外延却是固定的. 例如，非农业人口这个负概念的论域是人口，因此，它的外延不能扩大到人口以外的事物，譬如，绝对不能将学校、艺术包括在非农业人口的外延之中. 在实际思维活动中，有时为了突出事物不具有某种属性时，便运用负概念.

否定概念(negative concept)　即“负概念”.

单独概念(single concept)　用外延特点区分的一种概念. 它与普遍概念相对，其外延为单元集的概念. 即反映某一个特定事物的概念. 例如，太平洋、第二次世界大战、北京等概念反映的是只包括一个元素的类. 语词中的专有名词都表达单独概念. 此外，某些词组也表达单独概念. 例如，中国最大的城市(指上海)、大于 2 小于 4 的正整数等也表达单独概念. 再例如，这个数字、那个小孩均指称独一无二的对象. 这种带有这个或那个的词组称为摹状词. 摹状词表达单独概念.

普遍概念(universal concept)　用外延特点区分的一种概念. 它与单独概念相对. 是反映其外延由两个或两个以上的元素组成的概念. 从语言学的角度，普通名词表达的概念是普遍概念. 例如，自然数、教师等.

空概念(empty concept)　亦称虚概念. 一种独特概念. 指有内涵而无外延的概念，或外延为空类的

概念，即现实世界中并不存在概念所反映的对象．例如，永动机、圆的正方形等．

虚概念（null concept） 即“空概念”．

集合概念（collective concept） 用外延特点区分出的一种概念．指外延是集合体的概念，即反映具有某种联系的同类对象所构成的集合整体的概念．例如，森林是许多树木的集合整体的反映，丛书是一定数量的书的集合整体的反映等．事物的集合是由同一类的许多事物构成的统一整体．不能把集合与组成它的个体混淆起来．例如，不能说：某一棵树是森林，某本书是丛书等．因为，集合所具有的特有属性，其中某个体不一定具有．例如，森林对人类是有益的，但森林中的某些树木可能对人类是有害的．

非集合概念（non-collective concept） 用外延特点区分出来的一种概念．它与集合概念相对．是反映非集合整体的概念．例如，书、树木等（参见“集合概念”）．

绝对概念（absolute concept） 用内涵特点区分出来的一种概念．它与相对概念相对．指内涵中不具有规定着一对象与另一对象的关系的概念．例如，科学、艺术、建筑物等．

相对概念（relative concept） 用内涵特点区分出来的一种概念．它与绝对概念相对．指在内涵中规定着一对象与另一对象的关系的概念．例如，兄是一个相对概念，它反映了这些人同另外一些人之间具有同胞并且年长的关系．相对概念反映着具有确定关系的一组事物，因此，相对概念总是彼此间相互对应存在的．例如，兄与弟（或妹），上与下、轻与重等．

定义（definition） 形式逻辑术语．是揭示概念内涵的一种逻辑方法，即揭示概念所反映事物的本质属性的逻辑方法．定义由被定义项、定义项和定义联项三部分组成．例如，在“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”这个定义中，被定义项为“平行四边形”，定义项为“两组对边分别平行的四边形”，定义联项为“是”．被定义项是在定义中内涵被揭示的概念．定义项是用以揭示被定义项内涵的概念．定义联项表示被定义项和定义项联结起来的概念，常用“是”、“就是”等来表示．定义在思维过程中具有重要作用：

1．通过定义，人们可以把对客观事物的认识总结和巩固下来．

2．定义是明确概念的逻辑方法．

3．定义还用于检查人们所用概念是否明确．

4．在宣传、教育、传授知识等方面，定义起着很大作用．

定义的规则（rule of definition） 定义的基本法则．指做出正确的定义所必须遵守的基本规则．定义的基本规则如下：

1．定义项与被定义项的外延必须全同．

2．定义项不应直接或间接地包含被定义项．

3．定义项不应用比喻或含混的言辞．

4．给正概念下定义不应包含负概念．

违反定义的规则会导致一些错误的结果：

1．就要犯定义过宽或定义过窄的错误．

2．就要犯循环定义或同语反复的错误．

3．就不能准确地揭示概念的内涵，达不到定义的目的．

4．就会犯否定式定义的逻辑错误．

例如，若把偶数作为正概念，就不能把偶数定义为非奇整数，这是因为奇数尚未定义．但如果把奇数作为正概念，那么上述定义是可行的，它揭示了偶数的本质属性．

定义过宽（too wide definition） 违反定义的规则所犯的一种逻辑错误．指定义项的外延大于被定义项的外延．例如，无理数是无限小数就犯了定义过宽的错误，因为有的无限小数不是无理数．

定义过窄（too narrow definition） 违反定义的规则所犯的一种逻辑错误．指定义项的外延小于被定义项的外延．例如，三角形是三边相等的平面几何图形就犯了定义过窄的错误．该定义中，定义项三边相等的平面几何图形的外延小于被定义项三角形的外延．因为三角形的外延中除了包括三边相等的平面几何图形外，还包括三边中二边相等的和无等边的平面几何图形．

循环定义（circular definition） 违反定义的规则所犯的一种逻辑错误．指定义项直接或间接地包含了被定义项的错误定义．定义项直接包含了被定义项的错误称为同语反复．例如，平行的二条直线称为平行线．定义项间接包含了被定义项的错误称为恶性循环．例如，相交成直角的两条直线称为互相垂直的直线．倘若再用互相垂直的两直线所交成的角定义直角就构成恶性循环．循环定义不能达到明确概念的目的．

同语反复（tautology） 见“循环定义”

恶性循环（vicious circle） 见“循环定义”．

属加种差（genus plus species difference） 形式逻辑术语．是形式逻辑下定义的一般方法．其定义项是由属与种差组成．用属加种差方法定义时，首先应找出被定义项邻近的属，确定它是属于哪一类，然后，把被定义项所反映的对象同该属中的其他种进行比较，找出被定义项所反映的对象不同于其他种的特有属性，即种差，最后，把属和种差有机地结合起来．这就是属加种差定义．例如，给平行四边形下定义，首先，找出它的邻近属四边形，然后找出它与其他四边形之间的差别，即两组对边分别平行的，这就是平行四边形的种差．这样，平行四边形的定义可

表述为:平行四边形是两组对边分别平行的四边形.属加种差的定义可用下列公式表示:被定义项＝邻近的属＋种差.用属加种差的方法下定义时应注意:

1.究竟选择哪一级上位概念作为属,要看下定义的实际需要,不一定非得是最邻近的属.例如,给人下定义:人是能制造和使用生产工具的动物.这里就没有灵长类、哺乳动物、脊椎动物等概念作属.因为,定义的目的是把人和其他的动物区别开来.

2.选择哪种特有属性作种差也必须从实际出发.一类对象的特有属性不只一个,人们可以根据不同的目的和要求,从不同的方面选取被定义对象的特有属性.

属加种差定义也有局限性.例如,不能用这种方法给哲学范畴下定义,因为哲学范畴反映的是一些最大的类,因此,没有包含它的属;也不能用这种方法给单独概念下定义,因为,单独概念反映独一无二的个体事物,不能找出它的种差.依种差的具体内容,属加种差定义可分为:性质定义、关系定义、发生定义和功用定义.以上四种定义也可称为实质定义.

实质定义(substantial definition)　亦称真实定义.最常见的一种定义.是揭示事物本质属性的定义和概念内涵的定义.

真实定义(real definition)　即“实质定义”.

种加属差(genus plus species difference)　属加种差的旧用名.

种差(species difference)　见“属加种差”.

属差(species difference)　种差的旧用名.

关系定义(relational definition)　属加种差定义的一种形式.是以事物之间的独特关系作为种差的定义.例如,偶数就是能被 2 整除的数.这个定义中的种差“能被 2 整除的”是偶数与 2 的一种关系.因而,它是关系定义.

性质定义(definition by property)　属加种差定义的一种形式.是以事物的特性作为种差的定义.例如,哺乳动物就是分泌乳汁喂养初生后代的脊椎动物.

发生定义(genetic definition)　属加种差定义的一种形式.是以事物发生或形成过程作为种差的定义.例如,圆就是由线段的一端点,在平面上绕另一端不动点运动而成的一条封闭曲线.圆不同于其他封闭曲线的种差就是如何画圆的特殊方法.发生定义在科学中有重要作用,特别在数学中有它特别的功用,它告诉人们做出一个图形或得到一个公式的方法和途径.

功用定义(functional definition)　属加种差定义的一种形式.是以事物的功能作种差的定义.例如,温度计是测量温度的仪器.这个定义中的种差“测量温度的”是温度计的功能,因而它是功用定义.

否定式定义(negative definition)　一种形式定义.指定义项中含有负概念的定义.在定义一概念时,若相对概念先已有独立定义,则可用相对概念的否定作为定义.例如在定义了被 2 整除的整数称为偶数后,可以下定义,非偶数的整数称为奇数.

语词定义(nominal definition)　亦称名义定义,或名词定义,或惟名定义.一种实质定义.规定或说明语词意义的定义.语词定义可分为说明的语词定义和规定的语词定义两种.说明的语词定义是对某个语词已经确定的意义加以说明.例如,“牯”就是公牛.规定的语词定义是给一个语词规定一个意义.例如,“三同”是指同吃、同住、同劳动.语词定义是一种从语词意义方面来揭示概念内涵的逻辑方法.语词定义的被定义项是一个语词的自身,它的定义项主要是事物的某种属性或具有某种属性的事物,定义联项则表示语词与事物间的关系.说明的语词定义亦称描述性定义,它有真假的问题.说明的语词定义是关于某个语词已确立的意义的判断.如果它正确地反映了该语词已确定的意义,那么它就是真的;反之,它就是假的.规定的语词定义没有真假的问题,只有妥当与否和可接受性大小的问题.

名义定义(name definition)　即“语词定义”.

名词定义(noun definition)　即“语词定义”.

惟名定义(nominal definition)　即“语词定义”.

描述性定义(descriptive definition)　见“语词定义”.

外延定义(definition by extension)　一种实质定义.通过揭示属概念所包括的种概念来明确该属概念之所指的定义.例如,实数是有理数和无理数的统称.

实指外延定义(actual extensional definition)　一种实质定义.通过指出现实对象来明确概念所反映的对象的一种类似定义的方法.例如,1,2,3,…称为正整数.

非实指外延定义(non-actual extensional definition)　一种实质定义.利用给出被定义概念的所有并列下位概念而揭示概念外延的一种外延定义.例如,正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数、余割函数统称为三角函数.

约定式定义(stipulative definition)　一种语词定义.以约定的方式下定义的方法.例如:

$$a^0=1(a\neq 0),\ \sqrt{-1}=\mathrm{i}.$$

公理定义(axiom definition)　亦称公设定义或隐定义.一种实质定义.指在公理系统中使用被定义项,从而使被定义项的语法作用自然而然地明确起来的定义方法.如欧氏几何公理系统内使用点、线、

面等被定义项.

公设定义(postulational definition)　即"公理定义".

隐定义(implicit definition)　即"公理定义".

递归定义(recursive definition)　亦称归纳定义.一种实质定义.指用递归的方法给一个概念下的定义.它由两个部分组成:

1.初始条件:列出哪些个体属于一个给定的集合.

2.归纳条件:当在条件中列出的个体属于给定集合时,则另一些个体也属于该集合.

例如,在命题逻辑中,合式公式定义为:

1.命题变元是合式公式.

2.如果 A 是合式公式,则 $\neg A$ 是合式公式.

3.如果 A 和 B 是合式公式,则 $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 是合式公式.

4.合式公式当且仅当有限次使用上述1,2,3规则所构成.

这就是用递归的方法给合式公式下的定义,即递归定义.

归纳定义(inductive definition)　即"递归定义".

划分(division)　形式逻辑术语.指揭示概念外延的一种逻辑方法.它是按一定标准把一个概念的外延 A 分成若干互不相容的并列下位概念的外延 A_i 之并.即对每一 $i \in I, A_i \neq \varnothing$,对于每一对 $i, j \in I$,当 $i \neq j$ 时,则:

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

例如,三角形分为锐角三角形、直角三角形与钝角三角形.划分是由划分的母项、划分的子项和划分的标准(根据)三个要素组成.被划分的概念称为划分的母项;划分后所得的概念称为划分的子项;划分时所依据的属性即为划分的标准或称划分的根据.

形式逻辑中的划分比数学中的划分涵义要强一些.即要求划分的子项是并列下位概念的外延,不是上位概念的任意非空子集.划分也不同于分解.分解是把一个具体事物分成许多部分,而这些部分不必有由它组成的事物的整体的特有属性.例如,把三角形分解为三条边,其中任何一条边都不再具有三角形的特有属性,因此,不能说边是三角形.而划分则是属与种的关系.划分出来的各子项(种)都必须具有母项(属)的特有属性.例如,把大学教师分成助教、讲师、教授,这里不管助教、讲师或教授都具有大学教师的特有属性.

正确的划分必须遵守划分规则:

1.划分应当是相应相称的,即划分的子项的外延之和等于母项的外延.

2.划分的各个子项应当是互不相容的.

3.每次划分必须按同一划分标准进行.

4.划分应当按照层次进行,不应跳跃划分.

正确的划分能使人们明确概念的外延,了解和掌握概念适用的范围,对于准确地理解概念和使用概念有着重要的意义.

划分的母项(term of division)　见"划分".

划分的子项(subterms of division)　见"划分".

划分的根据(basis of division)　见"划分".

划分的规则(rule of division)　见"划分".

二分法(dichotomy)　一种特殊的划分方法.它是以有无某种属性为标准,把母项分为两个具有矛盾关系的子项的划分方法.例如,把实数分成有理数和无理数.由于二分法把一个母项划分为具有矛盾关系的两个子项,即一正概念和一负概念,因此这种方法简单易行,并且不会发生逻辑错误.但其中的负概念只反映对象缺乏某种属性,这并不能使人们明确它具有某种属性,这是二分法的欠缺.

判　断

命题(proposition)　形式逻辑术语.是一种重要的思维形式.在二值逻辑中,指一个具有真假意义的陈述语句所表述的思想.它取且仅取真假两值之一.凡与事实相符的陈述句所表述的为真命题;反之,则为假命题.例如:"雪是白的"是真命题;"地球是方的"是假命题;"一个≥4的偶数可表示成两个素数之和"(哥德巴赫猜想)是命题,它的真假是肯定的,只是目前尚未知.命题的真假与讨论问题的范围有关.例如 $1+101=110$ 可叙述为1加101等于110.它是一个命题.在十进制里,它是一个假命题,而在二进制里却是一个真命题.对一个具体命题而言,如果它是真的,则称其真值(也称逻辑值)为 T(或1);反之,则它的真值为 F(或0).疑问语句、祈使语句和感叹语句,如"你去过上海么?""请把门关好!""好极了!"都不是命题.又如"他懂英语"是一个模糊命题.它不能简单地用真或假两个值来刻画它的真值.必须注意,用逻辑联结词将两个简单的命题联成复合命题其真假在逻辑中另有规定,它与日常语言中的对与错可能有些不一致.在逻辑中,"如果 $2+2=3$,则雪是黑的"是一个真命题,而这在日常生活中是没有意义的.

形式逻辑主要从命题的形式方面来研究各简单命题与复合命题之间关于真假、性质等关系,这些研究对数学的进展意义重大.在形式逻辑中,通常把命题与判断不加区别,命题即判断或判断即命题.

真命题(true proposition)　见"命题".

假命题(false proposition)　见"命题".

判断(judgement)　形式逻辑术语.是一种重要的思维形式.即对思维对象是否具有某种性质或某种关系的断定.在一些文献中常把判断称为命题.判断所反映的思维对象的概念称为判断的主项或主词;判断所反映的思维对象是或不是某种属性的概念称为谓项、谓词或宾词.主项和谓项统称为词项.联系主项和谓项的概念称为联项、联词或系词,常用"是"、"不是"等表示思维对象和属性间肯定或否定的关系.表示主项数量的概念称为量项或量词,常用"所有"、"有"表示.量项分为全称量项与特称量项.表示全体对象的称为全称量项;表示至少有一个对象的称为特称量项.在形式逻辑中,判断即命题.

词项(term)　见"判断".

主项(subject)　见"判断".

主词(subject)　见"判断".

谓项(predicate)　见"判断".

谓词(predicate)　见"判断".

宾词(object)　见"判断".

联项(copula)　见"判断".

联词(copula)　见"判断".

系词(copula)　见"判断".

量项(quantifier)　见"判断".

量词(quantifier)　见"判断".

全称量项(universal quantifier)　见"判断".

特称量项(particular quantifier)　见"判断".

命题形式(propositional forms)　数理逻辑术语.是由命题变元 $p,q,r,\cdots$ 和命题联词 $\neg$(非),$\wedge$(与),$\vee$(或),$\rightarrow$(若……则……),$\leftrightarrow$(当且仅当)按下列规则形成的公式:

1. 任何命题变元是命题形式.

2. 如果 A 和 B 是命题形式,则$(\neg A)$,$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$都是命题形式.

命题是形式逻辑研究的主要对象,但是一般不研究具体的命题,而是研究具体命题符号化后的形式,即命题形式.以 $p,q,r,\cdots$ 表示简单命题,而以 $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ 表示命题联词,这样就可将简单命题变成复合命题.例如,"小王聪明但不用功"和"如果明天天气好,则我去公园或去看电影"可形式化成为:$p\wedge(\neg q)$和 $r\rightarrow(s\vee t)$.其中 p 表示小王聪明,q 表示小王用功,r 表示明天天气好,s 表示我去公园,t 表示我去看电影.注意,当一个复合命题被形式化后,剩下的只是它的赤裸裸的逻辑骨架.人们正是通过这些逻辑骨架分析推理,找出普遍适用的推理规则或规律.

判断的质(quality of a judgement)　对判断中的肯定和否定的一种专称.性质判断中对于思维对象所做的肯定或否定的断定.联项"是"表示判断的质是肯定的;联项"不是"表示判断的质是否定的.判断的质反映了人们对思维对象的认识.如果在判断中对于对象的性质做出肯定的断定,那么这个判断的质就是肯定的.例如 $\sqrt{2}$ 是无理数.如果对于对象的性质做出否定的断定,那么该判断的质便是否定的.例如 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

判断的量(quantity of a judgement)　对判断中所断定的主词的量的一种专称.性质判断主项外延的大小,即判断的主项被谓项所说明的数量是多少.判断的量用量词予以标志.全称判断用"所有"、"一切"、"凡"等表示;特称判断用"有"、"有的"、"存在"等表示;单称判断用"这个"表示.如果主项被谓项说明的是一类对象的全体,主项反映着对象的全部外延,那么这种判断的量是全称的.例如,所有正整数都是自然数.如果被说明的是一般的单独对象,主项也反映着对象的全部外延.这种判断的量是单称的.例如,这个数是实数.如果被说明的是一类对象中的某一部分对象,则判断的量便是特称的.例如,有些四边形是平行四边形.

简单命题(simple proposition)　亦称简单判断.数理逻辑中的同一名词(参见第四卷《数理逻辑》同名条).

简单判断(simple judgement)　亦称简单命题.是只包含一个主项和一个谓项的判断.简单判断由主项、谓项、联项和量项四部分组成.其中主项表示判断的对象概念;谓项表示主项具有或不具有的性质概念;联项反映判断的质的差异;量项表示主项的数量,反映判断的量的差别.简单判断根据量项是全称量项还是特称量项分为全称判断与特称判断;根据判断的联项是肯定还是否定分为肯定判断与否定判断;把判断的量与质结合起来就形成简单判断的四种基本形式:全称肯定判断用 A 表示;全称否定判断用 E 表示;特称肯定判断用 I 表示;特称否定判断用 O 表示.当判断的主项的外延是一个单独的个体时,判断又特别称为单称判断,且根据联项是肯定还是否定分为单称肯定判断与单称否定判断.

直言命题(categorical proposition)　亦称性质命题、属性命题、直言判断、性质判断.一类简单命题.是直接陈述事物具有或不具有某种属性的命题.例如,犯罪是违法行为.不附带任何条件而直接肯定犯罪具有违法行为的属性.直言命题是由主项、谓项、联项和量项组成.主项是表示被陈述事物的概念;谓项表示主项是否具有的某属性的概念(主项和谓项统称为词项);联项概念表示主项(事物)和谓项(属性)之间的联系,即命题的质,量项是表示主项数量的概念.直言命题按质(肯定的或否定的联项)可

分为:肯定命题和否定命题.按量可分为:全称命题、特称命题和单称命题.按质量结合可分为:全称肯定命题、全称否定命题、特称肯定命题、特称否定命题、单称肯定命题和单称否定命题.

性质命题(property proposition) 即"直言命题".

属性命题(attributes proposition) 即"直言命题".

直言判断(categorical judgement) 即"直言命题".

性质判断(property judgement) 即"直言命题".

全称命题(universal proposition) 亦称全称判断.一类简单命题.指具有全称量项的直言命题.是对一类事物的全部做出断定的判断.例如,"所有正整数都是自然数","所有奇数都不是偶数".直言命题全称与特称的区别称为量的区别.全称判断的形式结构是:"所有 S 是(不是)P".

全称判断(universal judgement) 即"全称命题".

特称命题(particular proposition) 亦称特称判断.一类简单命题.指具有特称量项的直言命题.是对某类事物中的部分对象断定有无某种性质的判断.例如,"有的数是整数".直言命题特称与全称的区别称为量的区别.特称命题的形式结构是:有些 S 是(不是)P.

特称判断(particular judgement) 即"特称命题".

单称命题(singular proposition) 亦称单称判断.一类简单命题.指主项为单独概念的直言命题.是对一个特定的个别事物做出断定的判断.在语言表达上多用专有名词,不用量词.例如,"牛顿(Newton,I.)是伟大的科学家".也可以用摹状词,又如,"这本书是一本好书".单称判断的形式结构是:这个 S 是(不是)P.

单称判断(singular judgement) 即"单称命题".

肯定命题(affirmative proposition) 亦称肯定判断.一类简单命题.指断定对象具有某种性质的判断,是直言判断按质划分的一种.肯定命题反映思维对象与性质之间是肯定的逻辑关系.主项与谓项常通过"S 是 P"联结起来.例如,"所有的矩形都是平行四边形".肯定命题的形式结构是:"S 是 P",其中 S 之前可以加上适当的量词.

肯定判断(affirmative judgement) 即"肯定命题".

否定命题(negative proposition) 亦称否定判断.一类简单命题.指断定对象不具有某种性质的判断.直言判断按质划分的一种.否定命题反映思维对象与性质之间是否定的逻辑关系.例如,2 不是奇数.否定命题的形式结构为:S 不是 P.其中 S 之前可以加上适当的量词.

否定判断(negative judgement) 即"否定命题".

全称肯定命题(universal affirmative proposition) 亦称全称肯定判断.直言命题之一.断定某类事物的全部都具有某种性质的判断.例如,"所有正整数都是自然数".全称肯定命题的主项是一个普遍概念,量项是:所有、一切、凡等.谓项则用 P 表示.全称肯定命题的形式结构是:所有 S 是 P.全称肯定命题在思维活动中,有时用于总结经验性的认识,有时用于概括掌握了必然联系的规律性的认识.全称肯定命题的代表符号为 A(拉丁文 Affirmo 的第一个元音字母).因此,全称肯定命题也称 A 型命题(判断)或 A 命题(A 判断).所有 S 是 P 可简记为 SAP.

全称肯定判断(universal affirmative judgement) 即"全称肯定命题".

***A* 命题**(A proposition) 见"全称肯定命题".

全称否定判断(universal negative judgement) 亦称全称否定命题.直言命题之一.断定某类事物的全部都不具有某种性质的判断.例如,"所有奇数都不能被 2 整除".全称否定判断的主项是一个普遍概念,量项是"所有"、"一切"等,联项是"不是",谓项也是普遍概念.全称否定判断的形式结构为:所有 S 都不是 P.全称否定判断的代表符号为 E(拉丁文 Nego 的第一个元音字母).因此,也称为 E 型判断、E 型命题、E 判断或 E 命题.所有 S 都不是 P 可简记为 SEP.

全称否定命题(universal negative proposition) 即"全称否定判断".

***E* 命题**(E proposition) 见"全称否定判断".

特称肯定判断(particular affirmative judgement) 亦称特称肯定命题.性质判断之一.指断定某一类事物中有的具备某种性质的判断.例如,"有的数是整数".特称肯定判断的主项是一个普遍概念,特称量项是"有的"、"有些"、"存在"等,谓项为 P.特称肯定判断的形式结构为:有 S 是 P.在形式逻辑中常用符号 I(拉丁文 Affirmo 的第二个元音字母)表示特称肯定判断.因此,特称肯定判断也称 I 型判断、I 判断、I 型命题或 I 命题.有 S 是 P 可简记为 SIP.

特称肯定命题(particular affirmative proposition) 即"特称肯定判断".

***I* 命题**(I proposition) 见"特称肯定判断".

特称否定判断(particular negative judgement)

亦称特称否定命题. 性质判断之一. 是断定某类事物中有的事物不具有某种性质的判断. 例如,"有的数不是有理数". 特称否定判断的主项是一个普遍概念,特称量项是"有"、"有些"、"存在"等,谓项是普遍概念. 特称否定判断的形式结构为:有 S 不是 P. 在形式逻辑中用符号 O(拉丁文 Nego 的第二个元音字母)表示特称否定判断. 因此,特称否定判断也称 O 型判断、O 判断、O 型命题或 O 命题. 有 S 不是 P 可简记为 SOP.

特称否定命题(particular negative proposition) 即"特称否定判断".

***O* 命题**(*O* proposition) 见"特称否定判断".

单称肯定判断(singular affirmative judgement) 亦称单称肯定命题. 按量划分的一种直言(性质)判断. 是断定某一特定的个别对象具有某种性质的判断. 例如,"这个三角形是等腰三角形". 判断的主项是一个单独概念,谓项是普遍概念. 单称肯定判断的形式结构是:这个 S 是 P.

单称肯定命题(singular affirmative proposition) 即"单称肯定判断".

单称否定判断(singular negative judgement) 亦称单称否定命题. 按量划分的一种直言(性质)判断. 是断定某一特定的个别事物不具有某种性质的判断. 判断的主项是一个单独概念. 例如"3 不是偶数."单称否定判断的形式结构是:这个 S 不是 P.

单称否定命题(singular negative proposition) 即"单称否定判断".

对当关系(opposition) A,E,I,O 四种主谓词相同的直言命题之间的真假关系的统称. A,E,I,O 分别为全称肯定、全称否定、特称肯定、特称否定命题的记号. A 与 O,E 与 I 之间不能同真,又不能同假,称为矛盾关系. A 与 E 不能同真,可以同假,称

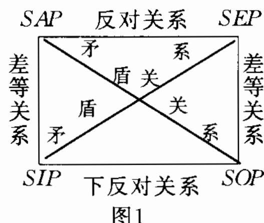


图1

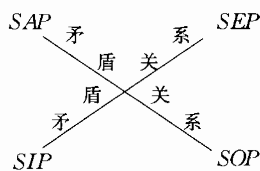


图2

为反对关系. A 真时,I 也真,但反之不然;I 假时,A 也假,但反之不然,称为差等关系(E 与 O 之间也是差等关系). I 与 O 不能同假,可以同真,称为下反对关系. 传统逻辑预设 S,P 都不是空集,故有上述对当关系. 上述四种关系可用如图 1 的逻辑方阵表示. 如果 S,P 是空集,则对当关系中只有矛盾关系成立,此时,应改为如图 2 的逻辑方阵.

逻辑方阵(logical square) 表示对当关系的图形. 见"对当关系".

矛盾关系(contradictory relation) 见"对当关系".

反对关系(upper opposition relation) 见"对当关系".

差等关系(inferior relation) 见"对当关系".

下反对关系(lower opposition relation) 见"对当关系".

周延(distributed) 一种常用的逻辑术语. 指直言命题中关于主项或谓项的量的断定. 一直言命题断定了其主项或谓项的全部外延,则这个主项或谓项称周延的;否则,该主项或谓项称为不周延的. 例如,"塑料不是金属",主项周延,谓项也周延. 又如,"鲸是哺乳动物",其中,主项周延而谓项不周延. 总之,全称命题的主项周延,特称命题的主项不周延;肯定命题的谓项不周延,否定命题的谓项周延. A,E,I,O 四种直言命题中主谓项的周延情况可见下表,周延是理解直言命题的含义以及有关直言命题推理的重要概念.

主谓项 / 周延情况 / 命题	主　项	谓　项
全称肯定(A)	周　延	不周延
全称否定(E)	周　延	周　延
特称肯定(I)	不周延	不周延
特称否定(O)	不周延	周　延

不周延(undistributed) 见"周延".

关系判断(relational judgement) 亦称关系命题. 一种和性质判断相对的判断,它断定的是两个或两个以上事物之间有无某种关系. 例如:

1."5 大于 3".

2."武汉在北京与广州之间".

关系判断由关系(谓项)、关系项(主项)、量项三个部分组成. 关系表示存在于相关事物之间的关系情况. 如例 1 中的"大于"和例 2 中的"…在…与…之间". 关系项是关系的涉及者. 如例 1 中的"5"与"3",例 2 中的"武汉"、"北京"、"广州". 一个关系判断可以有两个或更多的关系项. 有两个关系项的关系称为两项关系. 在两项关系的判断中,关系项依其次序的先后而分别称为关系前项与关系后项. 在有多项关系的判断中,关系项依次称为第一关系项,第二关系项,…量项表示关系项的数量,用"所有"、"有些"等表示. 通常用 R(英文 relation 的大写字头)表示关系,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示关系项. 关系判断的基本形式结构为:aRb.

关系命题(relational proposition) 即"关系判

断".

关系前项(relational antecedent) 见"关系判断".

关系后项(relational consequent) 见"关系判断".

关系项(relational terms) 见"关系判断".

复合命题(compound proposition) 亦称复合判断.由简单命题和命题联结词构成的命题.一个复合命题至少要包含一个简单命题和一个命题联结词.组成复合命题的命题称为支命题.支命题可以是简单命题,也可以是复合命题.复合命题的真假决定于其支命题的真假及其命题联结词.根据命题联结词的不同,复合命题可分为负命题,选言(析取)命题、联言(合取)命题、假言(条件)命题等.

复合判断(compound judgement) 即"复合命题".

支命题(subproposition) 见"复合命题".

命题联结词(propositional connectives) 见本卷《布尔代数》同名条.

负命题(negative proposition) 亦称否命题、负判断.复合命题之一,否定某个命题(判断)的命题(判断),即具有形式"非 p"的复合命题.例如,"并非所有自然数都是整数".负命题非 p 的真假与其支命题 p 的真假恰好相反.

否命题(negative proposition) 即"负命题".

负判断(negative judgement) 即"负命题".

选言命题(disjunctive proposition) 亦称析取命题、选言判断.复合命题之一,是断定在若干种可能事物情况中,至少有一种事物情况存在的复合命题.选言命题由命题联结词"或者"联结支命题而成.如"$a=0$ 或者 $b=0$".它的形式为:"p 或者 q".其中,"或者"可用符号 $\vee$ 表示,称为析取.因此选言命题的形式可用符号表示为:$p\vee q$.当且仅当 p,q 都假时,$p\vee q$ 为假,在其他三种情况下 $p\vee q$ 都真.故具有$p\vee q$形式的复合命题又称为相容的析取命题.例如,"气体体积增大,或者由于温度的增高,或者由于压力的减少".在汉语中"要么"表示不相容的析取.要么 p 要么 q 为真,当且仅当 p,q 之中恰好有一真,在其他两种情况下,要么 p 要么 q 为假;故具有要么 p 要么 q 形式的复合命题常称为不相容的析取命题.例如,"三角形要么是直角三角形,要么是锐角三角形,要么是钝角三角形"."或者"即 $\vee$ 也可联结多个支命题或选言支.$p_1\vee p_2\vee p_3\vee\cdots\vee p_n$ 假,当且仅当 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都假,在其他情况下,$p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n$ 都真.

析取命题(disjunctive proposition) 即"选言命题".

选言判断(disjunctive judgement) 即"选言命题".

选言支(disjuncts) 亦称选言肢.选言命题中的支命题.选言支的真假,决定了选言命题的真假.选言命题的几个选言支中,如果有一个或一个以上的选言支为真,则这个选言命题为真;如果没有一个选言支为真,则这个选言命题就为假.

联言命题(conjunctive proposition) 亦称联言判断、合取命题.复合命题之一.是断定若干事物同时存在的复合命题.是由命题联结词"并且"联结支命题而成的复合命题.其形式为:p 并且 q.其中,p,q 表示联言支(肢),即联言命题的支命题,"并且"表示联结词,可用符号 $\wedge$ 表示.例如,"$a>0$ 并且 $b>0$".p 并且 q 为真,当且仅当 p,q 都真,在其他三种情况下,p 并且 q 都假."并且"即 $\wedge$,也可联结多个支命题.$p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\cdots\wedge p_n$ 为真,当且仅当 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都真,在其他情况下,$p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$ 都假.在汉语中合取联结词除"并且"外,还有"又……又……"、"……也……"、"不但……而且……"等.例如:"3 是奇数,5 也是奇数","他不但聪明而且用功"等都是联言命题.

联言判断(conjunctive judgement) 即"联言命题".

合取命题(conjunctive proposition) 即"联言命题".

联言支(associative members) 亦称联言肢.一种支命题.指联言命题中的各支命题.联言支的真值决定了联言命题的真值.当联言命题的所有联言支真时,联言命题为真;只要有一个联言支为假,其联言命题就是假的.

假言命题(hypothetical proposition) 亦称假言判断、条件命题、条件判断.复合命题之一,是有条件地断定某事物情况存在的命题.它是由命题联结词"若……则……"等联结两支命题而构成的复合命题.例如,"若 $a=0$,则 $ax=0$".假言命题的前一个支命题称为前件,后一个支命题称为后件.上例中的 $a=0$ 与 $ax=0$ 分别为前件和后件.根据假言命题前件与后件不同的条件关系,假言命题可以分为充分条件的假言命题、必要条件的假言命题和充分必要条件的假言命题三种.假言命题的真假可根据前后件的真假来确定.

假言判断(hypothetical judgement) 即"假言命题".

条件命题(conditional proposition) 即"假言判断".

条件判断(conditional judgement) 即"假言判断".

前件(antecedent) 见"假言命题".

后件(consequent) 见"假言命题".

充分条件(sufficient condition) 一种逻辑术

语. 指客观情况或命题间的一种联系. 命题 A 与 B，若 A 为真，则 B 必为真，A 称为 B 的充分条件. 例如，若∠1 和∠2 是对顶角，则∠1＝∠2. 这里∠1 和∠2 是对顶角就是∠1＝∠2 的充分条件. 事物间的充分条件关系常以充分条件假言命题(判断)若 A 则 B 的形式表现出来. 如果 A 是 B 的充分条件，则 B 为 A 的必要条件.

必要条件(necessary condition) 一种逻辑术语. 指客观情况或命题间的一种联系. 命题 A 与 B，若 A 为假，则 B 必为假，A 称为 B 的必要条件. 例如，年未满 18 岁，没有选举权. 这就是说年满 18 岁是有选举权的必要条件. 事物间的必要条件关系常以条件假言命题若非 A 则非 B 的形式表现出来. 如果 A 为 B 的必要条件，则 B 为 A 的充分条件.

充分必要条件(sufficient and necessary condition) 简称充要条件. 一种常用的逻辑术语. 指客观情况或命题间的一种联系. 即既充分又必要的条件. 或者对命题 A 与 B，若 A 为真，则 B 必为真，若 A 为假，则 B 也为假. 在这种情况下，A 就是 B 的充分必要条件，同时 B 也是 A 的充分必要条件. 例如，一个数能被 2 和 3 整除，是它能被 6 整除的充分必要条件. 事物之间的充要条件以充分必要条件假言命题(判断)“A 当且仅当 B”的形式表现出来. “A 当且仅当 B”是“A 为 B 的充分必要条件”的同义语.

充分条件假言命题(hypothetical under sufficient conditions) 亦称充分条件假言判断. 一种特殊的假言命题. 指断定一命题是另一命题的充分条件的假言命题. 其结构形式为：如果 p，那么 q. 也可用符号表示为：$\models p\to q$. 其中→表示逻辑联结项“若……则……”，$\models$表示后面的命题为真. 充分条件假言命题的逻辑联结词在日常语言中常用“若……则……”、“只要……便……”等表示. 在日常语言表达中，“若”、“则”常被省略. 例如，“水涨船高”、“摩擦生热”、“风吹草动”. 充分条件假言命题的真假特征是，当前件为真时，后件也必为真. $p\to q$ 的真假值与其前后件的真假值之间的关系可用真值表来表示(T 为真，F 为假). $\models p\to q$ 则排除了 p 真 q 假的情况，也就是说当 p 为真时，q 必定为真.

p	q	$p\to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

充分条件假言判断(hypothetical judgement under sufficient conditions) 即“充分条件假言命题”.

必要条件假言命题(hypothetical proposition under necessary conditions) 亦称必要条件假言判断. 一种特殊的假言命题. 指断定一个命题是另一个命题的必要条件的假言命题. 其结构形式为：只有 p，才 q. 也可用符号表示为：$\models\neg p\to\neg q$. 必要条件假言命题逻辑联结词常用“只有……才……”、“没有……就没有……”等表示. 必要条件假言命题的真假特征是：前件 p 假时，后件 q 必定为假. $\neg p\to\neg q$ 的真假与其前后件真假的关系可用真值表来表示(T 为真，F 为假). $\models\neg p\to\neg q$ 排除了 p 假 q 真的情况，即当 p 假时 q 必定为假.

p	q	$\neg p\to\neg q$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

必要条件假言判断(hypothetical judgement under necessary conditions) 即“必要条件假言命题”.

充分必要条件假言命题(hypothetical proposition under sufficient and necessary conditions) 亦称充分必要条件假言判断，简称充要条件假言判断(或充要条件假言命题). 一种特殊的假言命题. 指断定一命题是另一命题的充分必要条件的假言命题. 其结构形式为：p 当且仅当 q. 也可用符号表示为：$p\leftrightarrow q$(读做 p 等值于 q). 或$(p\to q)\wedge(q\to p)$. “当且仅当”这个逻辑联结词在数学中经常使用，但在日常语言里则不常用. $\models p\leftrightarrow q$ 的真假特征是：前件 p 与后件 q 同真且同假. $p\leftrightarrow q$ 的真假值与其前后件的真假值之间的关系可用真值表来表示(T 为真，F 为假). $\models p\leftrightarrow q$ 就是排除 p,q 真假值不同的情况，即它要求 p,q 取相同的真假值.

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

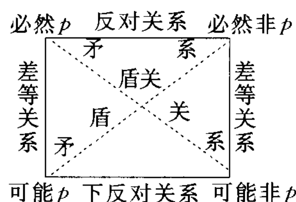
充分必要条件假言判断(hypothetical judgement under sufficient and necessary conditions) 即“充分必要条件假言命题”.

模态命题(modal proposition) 亦称模态判断. 一类重要的命题. 指断定事物情况的必然性和可能性的命题. 例如，“气体受热必然膨胀”，“水可能结冰”. 模态命题的基本特征是在命题中含有“必然”、“可能”等模态词. 其中，含有“必然”的命题称为必然命题，含有“可能”的命题称为可能命题. 模态命题有四种形式：

1. 必然肯定模态命题：必然 p.

2. 必然否定模态命题：必然非 p.

3. 可能肯定模态命题：可能 p.



4. 可能否定模态命题：可能非 p.

在传统逻辑中，四种模态命题之间的对当关系可用逻辑方阵表示如图.

模态判断(modal judgement) 即“模态命题”.

必然命题(necessary proposition) 见“模态命题”.

可能命题(possible proposition) 见“模态命题”.

等值命题(equivalent propositions) 亦称等价命题或等效命题. 一类重要的命题. 即真假值相同的两命题. 指这样两个命题，对含于这两个命题中的变元给以任意一组真值时，这两个命题的真值总相同. 如命题 $p\to q$ 与命题 $\neg p\vee q$ 是等值命题，这可由真值表验证. 命题 A 与 B 等值常记为 $\models A\leftrightarrow B$ 或 $A\models\!\mid B$. 等值命题与双重条件语句 $A\leftrightarrow B$ 是两个不同的概念：$A\leftrightarrow B$ 是一个命题，它可真可假，而 $\models A\leftrightarrow B$ 表示 $A\leftrightarrow B$ 是真的，即命题 A,B 是具有真值相同的两个命题. $A\models\!\mid B$ 表示 $A\models B$ 且 $B\models A$ 即 $\models A\to B$ 且 $\models B\to A$. 即，若 A 真则 B 真且 B 真则 A 真，亦即 A,B 具有相同的真值.

p	q	$p\to q$	$\neg p\vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

等价命题(equivalence propositions) 即“等值命题”.

等效命题(equivalent propositions) 即“等值命题”.

数学命题(mathematical proposition) 一类重要的命题. 通常指数学中的判断. 数学中的定义、公理、公式、性质、法则、定理都是数学命题.

推 理

推理(inference) 形式逻辑术语. 是一种重要的思维形式. 即由一个或几个已知命题推出一个新命题的思维形式. 作为推理中所根据的若干命题称为前提，根据前提得出的结果称为结论. 例如：

1. 平行四边形对边相等，所以，有一对对边不相等的四边形不是平行四边形.

2. 四边形四个内角和为 360°，平行四边形是四边形，所以，平行四边形内角和为 360°.

3. 金能导电，银能导电，铜能导电，铁能导电，锡能导电，金、银、铜、铁、锡都是金属，所以，金属都能导电.

上面 3 个例子，都是推理. 在“所以”前面的命题(判断)都是前提，在“所以”后面的命题(判断)是结论. 推理形式是由作为前提的命题形式逐步得到作为结论的命题形式过程中的每一步. 形式逻辑不研究推理的具体内容，而只研究怎样的推理形式才有效，即推理的合理性，研究作为前提的命题形式与作为结论的命题形式之间逻辑联系的性质及规律性. 推理是由已知寻求未知的一种方法，也是证明的工具. 推理主要分为两大类：由一般到特殊，前提与结论有蕴涵关系的推理称为演绎推理. 由特殊到一般的推理称为归纳推理. 数学证明主要运用演绎推理.

前提(premise) 见“推理”.

结论(conclusion) 见“推理”.

推理形式(form of inference) 由词项变项或命题变项组成的一组命题形式. 是用词项变项或命题变项去代替具体推理中的具体概念或具体命题的结果. 例如：若四边形是平行四边形，则其对边相等. 四边形有一对对边不相等. 所以该四边形不是平行四边形. 上述推理既有内容又有形式. 如果把该推理的内容抽去，以命题变项 p,q 分别代替具体命题，就可得如下的推理形式：若 p，则 q. 非 q，所以非 p.

演绎推理(deductive inference) 一种重要的推理形式. 指前提与结论之间有蕴涵关系的推理. 演绎推理在思维过程的方向上与归纳推理相反，是由一般到特殊的思维过程，即由一般性的前提推出个别性的结论. 例如：所有金属都是导电体，铜是金属，所以，铜是导电体. 其推理形式为

$$\begin{array}{c} M-P \\ \underline{S-M} \\ S-P \end{array}.$$

在推理形式中，不论以任何具体概念代入“S”，“M”与“P”，只要代入后的前提是真的，那么代入后的结论也是真的. 这就表明，在演绎推理中，从真前提出发，运用正确的推理形式，就必然得出真的结论.

演绎法(deductive method) 演绎方法的简称. 以演绎推理为基础的逻辑方法. 哲学上所谓演绎法是运用一般原理来分析、说明特殊、个别对象的方法. 逻辑中的演绎方法包括公理方法、形式化方法等数学方法.

直接推理(direct inference) 一种简单的演绎推理. 即只有一个前提的演绎推理. 例如，凡正整数都是有理数，所以，有些有理数是正整数.

直接推理包含三类：

1. 根据直言命题的对当关系进行的推理. 如从"所有 S 是 P"推出"并非有 S 不是 P",从"并非有 S 是 P"推出"所有 S 不是 P"等.

2. 运用命题变形方法进行的演绎推理,其中,主要有换质法、换位法、换质位法和戾换法.

3. 附性法等演绎推理.

换质法(obversion)　命题变形方法之一. 通过把一个直言命题的谓项改为其否定,而得到另一个与之等值的新命题的直接推理. 例如,"收录机是有用的",通过换质推出"收录机不是非有用的".

换质应遵守两条规则：

1. 改变前提的质,将肯定的改为否定的,将否定的改为肯定的.

2. 将谓项改为它的矛盾概念,如果用 P' 表示 P 的矛盾概念,则关于 A,E,I,O 四种命题的换质有效形式可表示如下：

原命题	换质命题
SAP	SEP'
SEP	SAP'
SIP	SOP'
SOP	SIP'

换质法的意义在于,它是从肯定或否定的不同角度揭示原命题蕴涵的思想,使人们对于同一对象的认识更加全面、深刻;它提供等值的命题形式,帮助人们更加有力地表达思想.

换位法(conversion)　命题变形方法之一. 通过互换一个直言命题的主项与谓项,但不改变其联项而得到一个新命题的直接推理.

换位应遵守两条规则：

1. 原命题与换位命题在质上必须一致.

2. 在原命题中不周延的项,在换位命题中不得周延.

例如,"有些动物是会飞的"可换位为"有些会飞的是动物". "有些文学作品不是小说"不能换位成"有些小说不是文学作品",因为它违反了第二条规则. 关于 A,E,I,O 四种命题的换位,可表示如下：

原命题	换位命题
SAP	PIS
SEP	PES
SIP	PIS
SOP	不能换位

在传统逻辑中,预设 S,P 不是空集,故有以上三种换位推理,倘若不作此假定,则 A 命题换位规则不成立. 如从"凡不接触细菌的人都不得细菌性传染病"推不出"有不得细菌传染病的人他不接触细菌". 实际上,不接触细菌的人是没有的,即这是一个空集. 换位法的作用在于它变换思考对象,进一步揭示原命题谓项被断定的情况,从而加深对事物的认识.

换质位法(contraposition)　命题变形方法之一. 交替进行换质及换位的一种直接推理. 其步骤是:先把原命题换质,然后把换质所得的命题再进行换位,最后推出一个新命题. 新命题的主项 P' 是原命题谓项 P 的矛盾概念. 例如:所有整数都是有理数(原命题). 所有整数都不是无理数(换质). 所以,所有无理数都不是整数(换质位). 直言命题的 I 命题不能换质位,而 A,E,O 三种命题的换质位可列表如下：

前提	结论
SAP	$P'AS'$
SEP	$P'OS'$
SOP	$P'OS'$

传统逻辑的换质位预设了 S,P,S',P' 都不是空集. 如无此预设,SEP 不能换质位,例如,从"凡神仙都不是凡人"推不出"有非凡人是神仙". 换质位法的意义在于它不仅有换质法的作用,而且兼有换位法的作用,即它不仅从正反两个方面阐述一个道理,而且从变换命题的对象(主项)方面加深认识,从而使原来的思想变得更加鲜明有力.

戾换法(inversion)　命题变形方法之一. 从主项为 S 谓项为 P 的命题,交替连续应用换质、换位得到一个结论的主项为 S' 的一种直接推理. 例如,从"所有金属都导电"推出"有的非金属不是导电的"或"有的非金属是不导电的". 特称命题不能戾换. A,E 命题的戾换可列表如下：

前提	结论
SAP	$S'OP,S'IP'$
SEP	$S'IP,S'OP'$

传统逻辑的戾换预设了 S,S',P,P' 都不是空集. 如无此预设,A,E 命题也不能戾换. 例如,从"事物是变化发展的"推不出"有非事物不是变化发展的".

附性法(attached inference)　一种涉及词项内涵的直接推理. 将表示某一性质的概念,附加在直言命题主谓项上面,从而形成一个新命题的直接推理. 它的前提是"所有 S 是(不是)P",结论是"所有 QS 是(不是)QP". 其中 QS,QP 分别表示具有性质 Q 的 S 与 P. 例如,由"凡整数都是有理数"推出"凡正整数都是正有理数". 附性法要求结论的主项上所附加的那个性质与谓项上所附加的那个性质是同一的,这是一个严格的语义要求,不仅指语词的同一.

间接推理(indirect inference)　与直接推理相对的一种推理. 由两个或两个以上的命题为前提推出结论的推理. 演绎推理中的三段论、假言推理、选言推理、联言推理、二难推理以及各种归纳推理都属

于间接推理.

三段论(syllogism)　直言三段论的简称. 一种间接推理. 是由包含着一个共同项(中项)的两个直言命题为前提,推出另一个直言命题为结论的一种演绎推理. 就这三个命题的主项和谓项而言,它包含而且只包含三个不同的概念,并且每个概念在两个命题中各出现一次. 如推理:物质是无限可分的,基本粒子是物质,所以基本粒子是无限可分的. 在三段论前提中,两次出现的概念称中项(或中词),以 M 表示;三段论结论中的谓项称为大项(或大词),以 P 表示;三段论结论中的主项称小项(或小词),以 S 表示. 包含大项的前提称为大前提,包含小项的前提称为小前提. 在上述例子中,"物质是无限可分的"为大前提,"基本粒子是物质"是小前提;中项是"物质",大项是"无限可分的",小项是基本粒子.

三段论的形式结构为

M — P　　(大前提)
S — M　　(小前提)
———————————
S — P　　(结　论).

三段论是形式逻辑的主要内容. 它是由亚里士多德(Aristotle)建立起来的.

中项(middle term)　见"三段论".

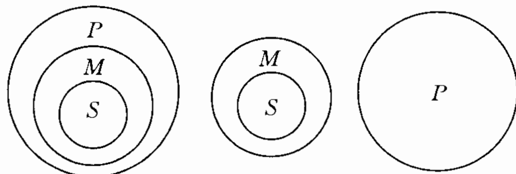
大项(major term)　见"三段论".

小项(minor term)　见"三段论".

大前提(major premise)　见"三段论".

小前提(minor premise)　见"三段论".

三段论公理(axioms of syllogism)　与推理有关的一个公理. 是直言三段论推理的根据. 公理为:凡对一类事物的全部对象有所肯定(或否定),则对该类事物的任一对象也必然有所肯定(或否定). 这一公理在三段论推理中,表现为概念之间的包含关系:如果概念 P 包含了概念 M,则必然包含 M 中的任一概念 S(见图 1);如果概念 P 排斥概念 M,则必排斥 M 中任一概念 S(见图 2).



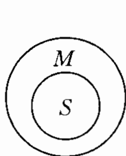


图1　　图2

三段论规则(rules of syllogism)　进行三段论推理时必须遵守的规则. 违反三段论的任一条规则,都不能得出正确的结论. 三段论规则可分为关于词项的规则和关于前提的规则两个部分.

关于词项的规则有三条:

1. 一个三段论有且只能有三个不同的词项,即中项、大项和小项. 违反这条规则,如果有四个不同的词项(概念),就会犯四概念错误.

2. 中项在前提中至少要周延一次. 否则就要犯中项不周延错误.

3. 在前提中不周延的项,在结论中也不得周延. 否则就会犯大项扩大或小项扩大的错误.

关于前提的规则有四条:

1. 两个否定的前提不能得出结论.

2. 如果前提中有一个是否定的,则结论必是否定的;如果结论是否定的,则前提中必有一个是否定的.

3. 两个特称的前提不能得出结论.

4. 前提中有一个是特称的命题(判断),其结论必是特称的命题(判断).

四概念错误(fallacy of four concepts)　违反三段论规则的一种错误. 一个三段论中出现了四个不同概念(词项)充当三命题的主项和谓项的一种逻辑错误. 一个三段论中,有而且只有三个不同概念充当主项和谓项. "四概念错误"往往是由于貌似中项的语词未能表达同一概念而引起的. 例如:

中国的大学分布于中国各地,
北京师范大学是中国的大学,
———————————
所以,北京师范大学分布于中国各地.

这个推理的错误原因是"中国的大学"未保持同一,它在第一个前提中表示中国的各所大学,在第二个前提中表示中国的一所大学.

中项不周延(undistributed middle term)　违反三段论规则的一种错误. 三段论的中项在两个前提中都不周延的一种逻辑错误. 如果中项在前提中两次都不周延,则意味着前提中大项与小项都分别只与中项的一部分外延发生联系. 这样,中项就不能起到联结大、小项的作用,并不能使大项与小项发生必然的确定的联系,因此也就不能必然地推出结论. 例如,自然数是整数,某数是整数,所以某数是自然数. 这个三段论的中项"整数"在两个前提中不周延. 在例中的小项"某数"和大项"自然数"被断定为中项"整数"的一部分,但这两个部分间的关系不确定,既可能相容,也可能不相容,故得不出必然结论.

大项不当周延错误(error of unjustifiable distribution of major term)　亦称大项扩大错误. 是违反三段论规则的一种错误. 指在三段论中大项在前提中不周延,而在结论中却周延的错误. 例如:

数学是科学,
物理不是数学,
———————————
所以,物理不是科学.

这里,大项"科学"在大前提中是肯定命题(肯定判断)的谓项,是不周延的. 但在结论中它是否定命题(或否定判断)的谓项,是周延的. 这样造成大项由不

周延变成周延，违反了三段论规则，因此，得出错误的结论.

大项扩大错误(major term amplify error)　即“大项不当周延错误”.

小项不当周延错误(error of unjustifiable distribution of minor term)　亦称小项扩大错误.是违反三段论规则的一种错误.指在三段论中小项在前提中不周延，而在结论中却周延的错误.例如：

$\sqrt{2}$不是有理数，
$\sqrt{2}$是实数
所以，实数不是有理数.

这里，小项“实数”在前提中是肯定命题(判断)的谓项，是不周延的.但在结论中，它是全称命题的主项，是周延的.这样就犯了小项扩大的错误.

小项扩大错误(minor term amplify error)　即“小项不当周延错误”.

三段论的格(figures of syllogism)　关于三段论的一个重要概念.指中项在前提中所处的不同位置而形成的四种不同的三段论的形式.三段论的中项在每个前提中各出现一次.它可以作为主项，也可作为谓项.这样就有四种不同的形式，它们分别被称为第一格、第二格、第三格和第四格.

第一格，中项是大前提的主项、小前提的谓项.它的形式结构为

$$\begin{array}{c} M — P \\ S — M \\ \hline S — P \end{array}.$$

第二格，中项在大小前提中都是谓项.它的形式结构为

$$\begin{array}{c} P — M \\ S — M \\ \hline S — P \end{array}.$$

第三格，中项在大小前提中都是主项.它的形式结构为

$$\begin{array}{c} M — P \\ M — S \\ \hline S — P \end{array}.$$

第四格，中项在大前提中是谓项，在小前提中是主项.它的形式结构为

$$\begin{array}{c} P — M \\ M — S \\ \hline S — P \end{array}.$$

三段论的四个格都有各自的特征.各格的特征是通过各格的特殊规则来体现的.而各格的特殊规则是由三段论的一般规则结合各格的具体形式推导出来的.

三段论的第一格(first figure of syllogism)　亦称典型格、公理格、完全格、标准格、完善格等.三段论的一种格式.指中项是大前提的主项、小前提的谓项的一种三段论形式.它的形式结构可表示为

$$\begin{array}{c} M — P \\ S — M \\ \hline S — P \end{array}.$$

例如：

凡自然数是整数，
4是自然数，
所以，4是整数.

第一格的特殊规则如下：

1. 大前提必须是全称的.
2. 小前提必须是肯定的.

在大前提中指出了关于一类情况，在小前提中把某些事物归到这一类中，因而得出关于某些事物情况的结论.三段论第一格明显、自然地表现了演绎推理由一般到特殊的思维过程.它是三段论中最基本的形式.这一格因此又称为完善格.

典型格(typical figure)　即“三段论的第一格”.

公理格(axiom figure)　即“三段论的第一格”.

三段论的第二格(second figure of syllogism)　亦称否定格.三段论的一种格式.指中项是大、小前提的谓项的一种三段论形式.它的形式结构为

$$\begin{array}{c} P — M \\ S — M \\ \hline S — P \end{array}.$$

例如：

矩形是平行四边形，
三角形不是平行四边形，
所以，三角形不是矩形.

第二格的特殊规则如下：

1. 两个前提必有一个是否定的.
2. 大前提必须全称.

第二格的结论是否定的，常被用来指出事物之间的区别，说明一事物不属于某一类.因此，第二格又称为区别格.第二格可化归为第一格的形式.

否定格(negative figure)　即“三段论的第二格”.

三段论的第三格(third figure of syllogism)　亦称例证格、特称格、反驳格.三段论的一种格式.指中项是大、小前提的主项的一种三段论形式.三段论第三格的形式结构可表示为

$$\begin{array}{l} M - P \\ M - S \\ \hline S - P \end{array}.$$

例如：

数学是自然科学，
数学是科学，
所以，有些科学是自然科学.

第三格的特殊规则如下：

1. 小前提必须是肯定的.
2. 结论必须是特称的.

第三格常用来反驳全称命题的虚假性. 第三格可化归为第一格的形式.

反驳格(refutation figure)　即“三段论的第三格”.

三段论的第四格(fourth figure of syllogism)　三段论的一种格式. 指中项是大前提的谓项且是小前提的主项的一种三段论形式. 如推理：如实反映客观的思想(P)是正确的思想(M)，正确的思想(M)不是主观幻想(S)，所以主观幻想(S)不是如实反映客观的思想(P). 它的形式结构可表示为

$$\begin{array}{l} P - M \\ M - S \\ \hline S - P \end{array}.$$

第四格的特殊规则如下：

1. 若前提中有一个是否定命题，则大前提必须是全称的.
2. 若大前提是肯定的，则小前提必须是全称的.
3. 若小前提是肯定的，则结论必须是特称的.

第四格可化归为第一格. 第四格在实际思维中的意义不大.

三段论的式(moods of syllogism)　三段论的具体形式. 由于构成三段论的大、小前提与结论的命题在量和质上的不同而形成的各种不同的三段论形式. 如推理：凡金属都是导电体，凡水银都是金属，所以，凡水银都是导电体. 该三段论的前提和结论都是全称命题 A，该三段论被称为 AAA 式. 构成三段论的三个直言命题(大前提、小前提、结论)可以是 A，E，I，O 四种命题中的任意三个的排列. 因此，三段论的每一格可能有 $4\times4\times4=64$ 个式. 四个格即有 $64\times4=256$ 个式. 但根据三段论的规则，这些式大多是无效的，如 EEE 违反了两否定前提不能得出结论的原则. 四个格中，共有 24 种有效式. 其中，

第一格有式：

AAA，AII，EAE，EIO，AAI^*，EAO^*；

第二格有式：

AEE，EAE，EIO，AOO，AEO^*，EAO^*；

第三格有式：

AAI，AII，EAO，EIO，IAI，OAO；

第四格有式：

AAI，AEE，EAO，EIO，IAI，AEO^*.

上述带星号的式称弱式(弱式指从全称前提只推出特称结论的三段论形式). 传统逻辑假定了主项 S 是存在的，即预设 S 不是空集，这样三段论才有 24 个有效形式. 如果没有这个预设，两全称前提得特称结论的形式(如 EAO)都是无效的. 所以，现代逻辑认为三段论只有 15 个有效形式.

省略三段论(enthymeme)　表达不完整的三段论. 指在语言表达方面省去一个前提或结论的三段论. 例如，既然你答应了人家，就不应食言. 这是一个省略三段论. 它是三段论：“答应别人的事是不该食言的，你已答应别人的事，所以你不该食言”的省略.

复合推理(complex inference)　一种叠加式的推理. 在思维中经常出现几个推理叠在一起，构成一个推理串. 其中前一推理的结论构成后一推理的前提. 复合推理中最后一个推理的结论，才是复合推理的结论.

复合三段论(polysyllogism)　亦称三段论的复合形式、三段论的复杂式. 复合推理之一，指由两个以上的三段论构成的推理形式. 它分为两种，一种是前一个三段论的结论是后一个三段论的大前提；另一种是前一个三段论的结论是后一个三段论的小前提. 前一种的形式如下：

$$\begin{array}{rl} & C\ \text{是}\ D, \\ & B\ \text{是}\ C, \\ \hline \text{所以}, & B\ \text{是}\ D, \\ & A\ \text{是}\ B, \\ \hline \text{所以}, & A\ \text{是}\ D. \end{array}$$

后一种三段论的复合式形式如下：

$$\begin{array}{rl} & A\ \text{是}\ B, \\ & B\ \text{是}\ C, \\ \hline \text{所以}, & A\ \text{是}\ C, \\ & C\ \text{是}\ D, \\ \hline \text{所以}, & A\ \text{是}\ D. \end{array}$$

复合三段论根据几个三段论的联结方式不同，分为复合推理，连锁推理和带证式.

三段论的复合形式(compound forms of syllogism)　即“复合三段论”.

三段论的复杂式(complicated expressions of syllogism)　即“复合三段论”.

连锁推理(sorites)　复合三段论的省略形式之一. 它在一个复合三段论中，只提出最后一个总的结论，而省略其他各三段论的结论. 与复合三段论相

应，它也有两种形式.

带证式（band proof expression of syllogism） 复合三段论的省略形式之一，是一个三段论的前提带有证明该前提的理由的复合三段论.例如，不循环无限小数是实数，因为无理数是实数. $\sqrt{2}$ 是不循环无限小数，所以，$\sqrt{2}$ 是实数.一个前提带有证明理由的，叫单带证式，两个前提都带有证明理由的，称复带证式.带证式与连锁推理不同，它省略了某一前提.

单带证式（single-band proof expression） 见"带证式".

复带证式（multi-band proof expression） 见"带证式".

关系推理（relational inference） 亦称关系判断的推理.与关系有关的一种推理.指以关系判断为前提和结论的推理.例如，$a=b$，所以，$b=a$.关系推理可分为纯关系推理和混合关系推理两类.在纯关系推理中又可分为直接关系推理和间接关系推理.关系推理在日常思维和科学研究中有很重要的作用，在数学中就经常要使用这种推理.

纯关系推理（pure relational inference） 一种关系推理.它的前提和结论都是关系判断.常见的纯关系推理有：

1. 对称关系推理：

$$\frac{aRb}{bRa}\quad 例如，\quad \frac{a=b}{b=a}.$$

2. 反对称关系推理（关系 R 是反对称的）：

$$\frac{aRb}{b\bar{R}a}\quad 例如，\quad \frac{a>b}{b\not>a}.$$

3. 反对称性推理（关系 R 是自返的）：

$$\frac{\begin{matrix}aRb\\bRa\end{matrix}}{a=b}\quad 例如，\quad \frac{\begin{matrix}a\geqslant b\\b\geqslant a\end{matrix}}{a=b}.$$

4. 传递关系推理（关系 R 是传递的）：

$$\frac{\begin{matrix}aRb\\bRc\end{matrix}}{aRc}\quad 例如，\quad \frac{\begin{matrix}a\geqslant b\\b\geqslant c\end{matrix}}{a\geqslant c}.$$

5. 反传递关系推理（关系 R 是反传递的）：

$$\frac{\begin{matrix}aRb\\bRc\end{matrix}}{a\bar{R}c}.$$

直接关系推理（direct relational inference） 纯关系推理的一种.指由一个关系判断为前提推出另一个关系判断的推理.常用的有两种：对称关系推理与反对称关系推理.其逻辑形式可分别表示为

$$\frac{aR_1b}{bR_1a}\quad 与\quad \frac{aR_2b}{b\bar{R}_2a}.$$

其中，R_1，R_2 分别表示对称性关系与反对称性关系.例如，"$a=b\to b=a$"是对称关系推理."$a>b\to b\not>a$"是反对称关系推理.

间接关系推理（indirect relational inference） 纯关系推理的一种.指由两个关系判断为前提推出另一个关系判断的推理.常见的间接关系推理有三种：反对称性推理（关系 R 是自返的）、传递性关系推理与反传递性关系推理.它们分别可用如下公式表示：

$$\frac{\begin{matrix}aR_0b\\bR_0a\end{matrix}}{a=b},\quad \frac{\begin{matrix}aR_1b\\bR_1c\end{matrix}}{aR_1c}\ 与\ \frac{\begin{matrix}aR_2b\\bR_2c\end{matrix}}{a\bar{R}_2c}.$$

其中，R_0，R_1 与 R_2 分别为反对称性关系、传递性关系与反传递性关系.

混合关系推理（mixed relational inference） 关系推理的一种.指由关系判断和性质判断作前提构成的关系推理.它有两个前提和一个结论，其中一个前提是一个两项的关系判断，另一个前提是性质判断，结论也是一个两项关系的判断.在前提和结论中也只出现三个不同的概念.这种混合关系推理很像直言三段论，因此，又可把它称为混合关系三段论.如推理：重金属都比水重，铜是重金属，所以，铜比水重.混合关系推理的逻辑形式可表示为

$$\frac{\begin{matrix}aRb\\c\ 是\ b\end{matrix}}{aRc}.$$

混合关系推理须遵守一定的推理规则（参见"混合关系推理规则"）.

混合关系推理规则（rules of mixed relational inference） 一种推理规则.指进行混合关系推理时必须遵守的规则.混合关系推理有下列规则：

1. 混合关系三段论前提中的直言（性质）判断只能是肯定判断.

2. 媒介项的概念必须至少周延一次（媒介项指在两个前提中出现的共同概念）.

3. 前提中不周延的概念，在结论中不得周延.

4. 若作为前提的关系判断是肯定的，则作为结论的关系判断也必须是肯定的；若作为前提的关系判断是否定的，则作为结论的关系判断也必须是否定的.

5. 如果关系 R 不是对称的，则在前提中作为关系前项（或后项）的那个概念，在结论中也必须相应地作为关系前项（或后项）.

遵守上述规则的混合关系推理才是正确的.

假言推理（hypothetical inference） 间接推理之一.指前提中至少有一个假言命题，并且根据假言命题的逻辑特点来推出结论的演绎推理.假言推理根据前提中命题的种类不同，可分为假言直言推理（一般又简称假言推理）、纯假言推理和连锁式的假言推理.其中，假言直言推理根据假言前提条件性质

的不同，又可分为：充分条件假言推理、必要条件假言推理和充分必要条件假言推理.

充分条件假言推理(hypothetical inference under sufficient conditions)　假言推理之一. 指大前提为充分条件假言命题，小前提和结论为性质命题的假言推理. 它有两种正确的推理形式：

1. 肯定前件式，即在小前提中肯定假言前提的前件，结论则肯定假言前提的后件.

2. 否定后件式，即在小前提中否定假言前提的后件，结论则否定它的前件，例如，

如果一个数能被 9 除尽，则它就能被 3 除尽，
这个数不能被 3 除尽，
所以，这个数不能被 9 除尽.

这种推理结构形式可表示为

如果 p，则 q，
非 q，
非 p.

充分条件假言推理必须遵守两条规则：

1. 肯定前件可以肯定后件，否定后件可以否定前件.

2. 否定前件不能否定后件；肯定后件不能肯定前件.

必要条件假言推理(hypothetical inference under necessary conditions)　假言推理之一. 指大前提为必要条件假言命题，小前提和结论为性质命题的假言推理. 它有两种有效的逻辑结构形式：

1. 否定前件式：在小前提中否定大前提的前件，结论则否定它的后件. 例如，

只有深入实际调查研究，才能了解到第一手材料，
他不深入实际调查研究，
所以，他不能了解到第一手材料.

这种必要条件假言推理的逻辑结构形式可表示为

只有 p，才 q，
非 p，
非 q.

2. 肯定后件式：在小前提中肯定大前提的后件，结论则肯定它的前件. 例如，

只有船准时起航，才能准时到达目的港，
这艘船是准时到达目的港的，
所以，这艘船是准时起航的.

这种必要条件假言推理的逻辑结构形式可表示为

只有 p，才 q，
q，
p.

必要条件假言推理必须遵守两条规则：

1. 否定前件就要否定后件，肯定后件就要肯定前件.

2. 肯定前件不能肯定后件，否定后件，不能否定前件.

充分必要条件假言推理(hypothetical inference under sufficient and necessary conditions)　假言推理之一. 指大前提为充分必要条件假言命题，小前提和结论为性质命题的假言推理. 充分必要条件假言命题有四种正确的推理形式：

1. 肯定前件式：小前提肯定大前提充分必要条件假言命题的前件，结论则肯定它的后件. 其推理形式可表示为

p 当且仅当 q，
p，
q.

2. 否定前件式：小前提否定大前提充分必要条件假言命题的前件，结论则否定它的后件. 其逻辑结构形式可表示为

p 当且仅当 q，
非 p，
非 q.

3. 肯定后件式：小前提肯定大前提充分必要条件假言命题的后件，结论则肯定它的前件. 其逻辑结构形式可表示为

p 当且仅当 q，
q，
p.

4. 否定后件式：小前提否定大前提的充分必要条件假言命题的后件，结论则否定它的前件. 其逻辑结构形式可表示为

p 当且仅当 q，
非 q，
非 p.

充分必要条件假言推理必须遵守四条规则：

1. 肯定前件，就要肯定后件.
2. 否定前件，就要否定后件.
3. 肯定后件，就要肯定前件.
4. 否定后件，就要否定前件.

纯假言推理(pure hypothetical inference)　一种间接推理. 指以两个假言命题为前提而推出一个假言命题的推理. 纯假言推理有三个基本形式：

1. 由两个充分条件假言命题为前提的，其结构形式可表示为

如果 p，则 q，
如果 q，则 r，
如果 p，则 r.

例如：

如果要正确进行各种推理，就要懂得各种推理形式和规则，

如果要懂得各种推理形式和规则，就要认真学习逻辑知识，

如果要正确进行各种推理，就要认真学习逻辑知识.

2. 两个必要条件假言命题为前提的形式，其结构形式可表示为

只有 p，才 q，
只有 q，才 r，
———
只有 p，才 r.

例如：

只有刻苦学习，才能掌握现代科学知识，
只有掌握现代科学知识，才能在祖国建设中发挥更大作用，

只有刻苦学习，才能在祖国建设中发挥更大作用.

3. 两个充分必要条件假言命题为前提的形式，其逻辑结构形式可表示为

p 当且仅当 q，
q 当且仅当 r，
———
p 当且仅当 r.

纯假言推理也可以两个以上的假言命题为前提，这样的纯假言推理称为假言连锁推理.

假言连锁推理(hypothetical chain inference) 亦称连锁式的假言推理. 一种复合推理. 指由多个假言命题为前提，而推出一个假言命题结论的推理. 其逻辑结构形式可表示为

如果 p，则 q，
如果 q，则 r，
如果 r，则 s，
如果 s，则 t，
———
如果 p，则 t.

例如，《论语·学路》篇说：

名不正，则言不顺，
言不顺，则事不成，
事不成，则礼乐不兴，
礼乐不兴，则刑罚不中，
刑罚不中，则民无所措手足，
所以，名不正，则民无所措手足.

选言推理(disjunctive inference) 亦称选言三段论. 一种间接推理. 指前提中有一个选言命题，并以选言命题选言支之间的逻辑性质为依据而进行的一类演绎推理. 常见的形式为：p 或者 q，非 p(或非 q)，所以，q(或 p). 如推理：$x=0$ 或者 $y=0$，$x\neq 0$，所以，$y=0$. 选言命题有相容的选言命题和不相容的选言命题两种，所以，选言推理也有相容的和不相容的选言推理两种.

选言三段论(disjunctive syllogism) 即“选言推理”.

相容选言推理(compatible disjunctive inference) 一种选言推理. 指大前提为相容的选言推理. 其结构形式为

p 或 q，
非 p(或非 q)，
———
q(或 p).

例如：

一个错误的推理或者前提不成立，或者推理形式不正确，
这个错误的推理不是前提不成立，

这个错误的推理是推理形式不正确.

相容的选言推理必须遵守两条规则：

1. 否定一部分选言支，就要肯定另一部分中的一个选言支.

2. 肯定一部分选言支，不能否定另一部分选言支.

不相容选言推理(incompatible disjunctive inference) 一种特殊的选言推理. 大前提为不相容选言命题的选言推理. 它有两种有效的推理形式：

1. 肯定否定式，即小前提肯定大前提中选言命题的一个选言支，结论否定大前提中其他选言支. 如推理：造成李某死亡的原因或者是自杀，或者是他杀，李某是自杀，所以，李某不是他杀. 这种推理结构形式可表示为

要么 p，要么 q，
p(或 q)，
———
非 q(或非 p).

2. 否定肯定式，即小前提否定大前提选言命题中除一个以外的选言支. 结论则肯定剩下的那个选言支. 例如，“$x=0$ 或 $y=0$，$x\neq 0$，所以，$y=0$”. 这种推理结构形式可表示为

要么 p，要么 q，
非 p(或非 q)，
———
q(或 p).

不相容选言推理必须遵守两条规则：

1. 肯定一个选言支，就要否定其他一切选言支.

2. 否定一部分选言支，就要肯定另一部分中的一个选言支.

假言选言推理(hypothetical disjunctive inference) 亦称选言假言推理. 一种间接推理. 指由几个假言命题和一个包含着同假言命题数量相等的选言支的选言命题为前提而构成的推理. 这种推理的特征是：

1. 选言命题提出所思考问题的几种可能性.

2. 假言命题指出采取每种可能性所引起的后果.

3. 思考者必须在这几种可能性中加以选择：

1）简单构成式：

如果 p，则 r；
如果 q，则 r；
p 或 q；
――――――
r.

2）简单破坏式：

如果 r，则 p；
如果 r，则 q；
非 p 或非 q；
――――――
非 r.

3）复杂构成式：

如果 p，则 r；
如果 q，则 s；
p 或 q；
――――――
r 或 s.

4）复杂破坏式：

如果 p，则 r；
如果 q，则 s；
非 r 或非 s；
――――――
非 p 或非 q.

二难推理(dilemma) 假言选言推理之一. 是由两个假言命题和一个包含两个选言支的选言命题为前提所构成的假言选言推理. 如推理：如果这次试验成功，应该进行总结；如果这次试验失败，也应该进行总结；这次试验或者成功或者失败；所以，都应该进行总结. 二难推理的有效形式为

（p 或 $\neg p$）（省略）
若 p，则 r；
若 $\neg p$，则 r；
――――――
所以，r.

二难推理是辩论中一种有用的工具，往往可使对方陷入进退维谷，左右为难的境地. 它必须遵守两条规则：

1. 作为前提的假言命题的前件与后件必须具有蕴涵关系.

2. 作为前提的选言命题的选言支必须穷尽.

否则不能构成正确的二难推理，而成为诡辩. 例如：

若 p 且 q，则 r；
若 $\neg p$ 且 $\neg q$，则 r，
――――――
r.

这就犯了前提的选言支未穷尽的毛病，因为另有两种情况：若 p 且 $\neg q$，若 $\neg p$ 且 q，未论及. 如果它们都蕴涵 r，那么结论正确，否则就是无效推理.

假言联言推理(hypothetical associative inference) 一种间接推理. 即由两个假言命题和一个联言命题为前提，推出一个联言命题为结论的演绎推理. 假言联言推理有两种有效形式：

1. 肯定式：

如果 p，则 q；
如果 r，则 s；
p 并且 r；
――――――
q 并且 s.

2. 否定式：

如果 p，则 q；
如果 r，则 s；
非 q 并且非 s；
――――――
非 p 并且非 r.

假言联言推理必须遵守两条规则：

1. 作为假言联言推理前提的假言命题的前件和后件，必须具有蕴涵关系.

2. 作为假言联言推理的前提的联言命题的各个联言支，必须同时都真.

归谬式推理(inference with absurdity) 一种间接推理. 是由两个前件相同，后件相矛盾的充分条件假言命题为前提，从而推出与这两个假言命题的前件相矛盾的命题的推理. 例如：如果一切判断都是假的，则世界上没有真的判断；如果一切判断都是假的，则世界上没有真的判断也假，所以，并非一切判断都是假的. 归谬式推理的形式可表示为

如果 p，则 q；
如果 p，则非 q；
――――――
非 p.

它是论证、反驳中常用的形式.

归纳法(inductive method) 归纳方法的简称. 一种重要的科学方法. 指从个别事物和现象中寻求其普遍性质所使用的方法. 这包括观察、实验、分类、假说、归纳推理等. 归纳法是实验科学不可缺少的方法. 培根(Bacon，F.)开创了归纳法的研究，是古典归纳逻辑的奠基人. 现代归纳逻辑已与概率论等数学分支密切结合.

归纳推理(inductive inference) 一种特殊的推理. 一种前提和结论间不具有蕴涵关系的推理，它从个别性的前提推出一般性的结论. 如推理：金能导电，银能导电，铜能导电，铁能导电，锡能导电，金、银、铜、铁、锡都是金属，所以，金属能导电. 归纳推理与演绎推理的主要区别是：

1. 演绎推理的前提是结论的充分条件；归纳推

理的前提是结论的必要条件.

2. 演绎推理是从一般到特殊,归纳推理是从特殊到一般.

3. 演绎推理的结论在逻辑上是必然的;归纳推理的结论是或然的,通常有待修正.

归纳推理可分为完全归纳推理与不完全归纳推理,而不完全归纳推理又可分为简单枚举归纳推理和科学归纳推理. 亚里士多德(Aristotle)首先考察过归纳推理的某些形式,培根(Bacon,F.)为创建古典的归纳逻辑奠基. 后来,赫谢尔(Herschel,J. F. W.)与密尔(Mill,J. S.)又系统讨论了探求因果联系的归纳方法,促进了归纳逻辑的进一步发展.

现代,归纳问题以其高度的复杂性与其逻辑学上的重要意义,吸引了不少逻辑学家,并取得了很大的进展. 目前逻辑学家对归纳推理与归纳法之间关系有两种看法:一曰,归纳法就是归纳推理;一曰,归纳法除包括归纳推理外,还包括归纳过程的一切思维方式,如观察、实验、比较、分类、分析、综合、抽象、概括等方法.

完全归纳推理(completely induction inference)　亦称完全归纳法. 一种名为归纳实为演绎的推理. 即根据某类事物的每一个对象具有(或不具有)某种属性,而对该类事物的全部对象做出一般性结论的一种推理. 完全归纳推理的结构形式可表示为

s_1 是(或不是)p,
s_2 是(或不是)p,
…………
s_n 是(或不是)p,
…………
$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是 s 的一个分类,
———————————————
所有 s 都是(或不是)p.

完全归纳推理要求:

1. 考察某类事物的全部对象,或在某一分类下每个所分出的子类.

2. 每一前提都必须成立.

例如,高斯(Gauss,C. F.)十岁时,教师让班上学生计算 $1+2+3+\cdots+99+100=$? 没想到高斯很快得到了答数:5 050. 教师问他如何算得这么快?他说:将 1 到 100 这一百个数,按顺序把头尾序数相同的两数相加,即 $1+100,2+99,\cdots,50+51$,每对数之和都是 101,一共有 50 对,故答数为 $101\times50=5\,050$. 他这里就是运用了完全归纳法,考虑了一类事物的全部个别对象(这 50 对数),发现有某种属性(其和为 101),从而得出了结论(所有 50 对数之和均为 101).

完全归纳法不仅适用于有限情况,也适用于无限情况. 例如,数学归纳法就是一种具有无限种情况的完全归纳法. 完全归纳推理的前提和结论间具有蕴涵关系,因而它实际上是一种演绎推理.

完全归纳法(complete induction)　即"完全归纳推理".

不完全归纳推理(incomplete induction)　亦称不完全归纳法. 归纳推理之一. 即根据某类事物中的部分对象所具有(或不具有)某种属性,从而推出此类事物的全部对象均具有(或不具有)这种属性的推理. 如推理:铜能导电,铁能导电,锌能导电,铜、铁、锌都是金属,所以金属能导电. 不完全归纳推理的结论未必正确,但能给人们以启迪,以便进一步探索. 不完全归纳推理可分:简单枚举归纳推理与科学归纳推理.

不完全归纳法(incomplete induction)　即"不完全归纳推理".

排除归纳法(exclusive induction)　一种不完全归纳法. 指在寻求研究对象的原因时,通过对所研究现象的某些(不是所有的)先行场合进行分析比较,排除那些不是始终一致地与被研究对象相联系的先行情况,最后剩下的先行情况就被确定是被研究现象的原因. 排除归纳法是通过对前提所确认的先行情况进行分离而获得的,是一种求因果联系的方法. 包括统称为密尔五法的五种方法(参见"密尔求因果五法").

简单枚举归纳法(inductive method by simple enumeration)　亦称简单枚举归纳推理或枚举法. 归纳推理之一. 指考察了某类事物的部分对象都具有(或不具有)某种属性,而未遇反例,从而得出此类事物都具有(或不具有)上述属性的一种归纳推理. 其逻辑结构形式可表示为

s_1 是(或不是)p,
s_2 是(或不是)p,
…………
s_n 是(或不是)p,
$s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n$ 是 s 类的部分对象,
———————————————
所有 s 都是(或不是)p.

这种推理方法所得到的结论未必都正确. 例如:具有 $2^{2^n}+1$ 形式的数,当 $n=1,2,3,4$ 时,分别是 5,17,257,65 537 都是素数. 因此,费马猜想:对任何自然数 n,$2^{2^n}+1$ 均是素数. 但到 18 世纪,欧拉(Euler,L.)提出 $2^{2^5}+1=641\times6\,700\,417$ 是合数. 从而证明了费马(Fermat,P. de)根据枚举法得出的猜想是错误的.

简单枚举归纳推理(inductive inference by simple enumeration)　即"简单枚举归纳法".

枚举法(enumeration)　即"简单枚举归纳法".

科学归纳推理(scientific inductive inference) 亦称科学归纳法.归纳推理之一.指根据一类事物部分对象与某属性之间的必然联系,而揭示出该类事物的全部对象的一般性结论的归纳推理.它与简单枚举归纳推理的区别在于,要进一步分析属性与对象之间的因果关系.因此,科学归纳法得出的结论较简单枚举法所得的结论具有更多正确成分.科学归纳推理的形式可表示为

s_1 是(或不是)p,

s_2 是(或不是)p,

…………

s_n 是(或不是)p,

$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是 s 类的部分对象

$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是(或不是)p 是因为有某种原因,而这种原因是 s 的元素所公有的.

所有 s 都是(或不是)p.

例如,铁受热体积膨胀,铜受热体积膨胀,锡受热体积膨胀,铁、铜、锡是金属,受热后分子凝聚力减弱,分子间距离增大,因而引起体积膨胀,所以,金属受热体积都膨胀.

科学归纳法(scientific induction) 即"科学归纳推理".

密尔求因果五法(Mill five methods of searching causal connections) 简称密尔五法.一种求因果关系的归纳推理.指排除归纳法所包含的由密尔(Mill,J. S.)提出的五种归纳方法.它们是求同法(契合法)、求异法(差异法)、求同求异并用法(契合差异并用法)、共变法和剩余法.求同法和求异法是基本的,并且都是消去方法.求同法的基础是凡可被消去者均与现象无合乎规律的联系,求异法的基础是凡不可消去者均与现象有合乎规律的联系.这五种归纳方法,至今是实验科学应用的重要方法.

密尔五法(Mill five methods) 密尔求因果五法的简称.

求同法(method of agreement) 亦称契合法.寻求因果联系的归纳方法之一.其基本内容是:如果被考察的现象 a 出现在多种场合,在这些场合中,只有一个有关因素 A 是共同的,那么这个共同因素 A 就和被考察现象 a 之间有因果联系,即 A 是 a 的原因.例如,虹的成因:人们经过观察研究,发现雨后天晴空中会出现虹,太阳光线通过三棱镜时,也会出现虹的各种颜色,此外,在早晨的露珠中,在瀑布的水雾中,在船桨溅起的水花中,都可看到虹的色彩,观察到与虹相似的现象.在这些不同的场合中,它们共同的情况是太阳光线通过球形或棱形的透明体.因此,可以确定这一共同情况,是虹出现的原因.求同法的形式可表示为

场合	有关因素	被考察现象
1	A,B,C,D	a
2	A,B,E,F	a
3	A,C,E,G	a

A 与 a 有因果联系(即 A 是 a 的原因)

求同法是一种消去无关因素的不完全归纳推理方法.应用求同法得出的结论是或然的.要提高求同法求出结论的可靠程度,必须注意:

1. 观察的场合愈多愈好.

2. 各个场合中那些不同因素(情况)间的差异程度愈大愈好.

契合法(method of agreement) 即"求同法".

求异法(method of difference) 亦称差异法.寻求因果联系的归纳方法之一.其基本内容是:如果被考察现象 a 在一个场合中出现(正面场合),在另一个场合中不出现(反面场合),而在这两个场合中,只有一个有关因素 A 不同,那么这个因素 A 与被考察现象 a 之间有因果联系.例如,在两块相邻的,因而光照、土质、气候等情况都相同的土地上,以相同方式种植同样品种的水稻,此外在浇水,田间管理上也都大体相同.所不同的是一块田里施化肥,另一块田里不施化肥.结果,施化肥的那块田的单产量高.由此,人们知道,施用化肥是水稻增产的原因.求异法可表示为

场合	有关因素	被考察现象
1	A,B,C	a 出现
2	B,C	a 不出现

所以,A 与 a 之间有因果联系.

求异法是对正面场合与反面场合进行同中求异,除同求异.此法在科学实验中运用很广.它的结论的可靠程度,比求同法大一些,但不是必然的.为了求异法结论的可靠程度,应注意两点:

1. 两场合有无其他差异,如果还有其他的差异,而又被忽略了,则很可能产生错误的结论.

2. 两场合之间惟一不同的这种因素(情况)是被考察现象的整个原因,还是部分原因.

差异法(method of difference) 即"求异法".

求同求异并用法(combination of agreement and difference) 亦称契合差异并用法或并用法.寻求因果联系的归纳方法之一.其基本内容是:如果在一组场合中,有某种情况(因素)A 就有被考察现象 a;而在另一组场合中,没有这一情况 A 就没有被考察现象 a,那么这一有关因素 A 与被考察现象 a 之间有因果联系.例如,种植豆类作物,如大豆、蚕豆等,不仅不需给土地施氮肥,而且豆类作物还可使土

壤中增加氮.而种植小麦、水稻等其他作物却没有这种现象.经观察发现,豆类作物都有一个共同点,即根部都有根瘤,而其他作物的根部却没有.因此,人们得出,豆类作物的根瘤能使土壤中增加氮.求同求异并用法可以表示为

场合		有关因素	被考察现象
正面场合	1	A,B,C	a 出现
	2	A,G,E	a 出现
	3	A,G,H	a 出现
反面场合	1′	B,H	a 不出现
	2′	$G,E,$	a 不出现
	3′	F,C	a 不出现

A 与 a 有因果联系.

求同求异并用法是通过三个步骤来确定现象之间的因果联系:

1.把被考察现象 a 出现的正面场合加以比较,发现只有一个共同因素 A,应用求同法得出结论:A 出现与 a 出现之间有因果联系.

2.把 a 不出现的反面场合加以比较,发现只有一个共同因素 A 不出现,再利用求异法得出:A 不出现与 a 不出现之间有因果联系.

3.比较正反两组场合,正面场合组中,A 与 a 共同出现,反面场合组中,A 与 a 不共同出现.最后运用求同求异法得出:A 与 a 有因果联系.

运用求同求异并用法比单独运用求同法或求异法所得到的结论更为可靠,但仍是或然的.

契合差异并用法(joint method of agreement and difference) 即"求同求异并用法".

共变法(covariant method) 寻求因果联系的归纳方法之一.基本内容是:如果某一情况(因素)A 发生一定程度的变化而其他情况(因素)不变时,被考察现象 a 也随之发生一定程度的变化,那么这惟一变化的情况 A 就与被考察现象 a 有因果联系.共变法可表示为

场合	有关因素	被考察现象
1	A_1,B,C	a_1
2	A_2,B,C	a_2
3	A_3,B,C	a_3
⋮	⋮	⋮

所以,A 与 a 有因果联系.

共变法是从现象变化的数量或程度来判明因果联系的,所以这种方法可对现象的因果联系作定性研究和定量分析,是科学实验中经常使用的方法.例如,可以应用共变法来确定物体温度的升降与物体体积大小的关系.为了提高结论的可靠程度,运用共变法应注意:

1.A 与 a 之间的共变,只在其他情况保持不变的条件,才有因果联系.

2.有的共变现象之间无因果联系.

3.共变关系常发生在一定数量的限度内,超出这个限度,两个现象之间的共变关系可能消失.

剩余法(residue method) 寻求因果联系的归纳方法之一.基本内容是:已知复合因素(A,B,C,D)是复合现象(a,b,c,d)的原因,又已知 B 是 b 的原因,C 是 c 的原因,D 是 d 的原因,那么剩下的 A 就是 a 的原因.例如,天文学中,海王星的发现就是运用了剩余法.1846 年前,天文学家观察到,天王星在其轨道上运行时,有四处发生偏离,他们已知,三处偏离是因为受到了其他已知行星的引力所致,而另处偏离原因不明.于是,科学家们认定,剩下的该处偏离也应是另一未知行星的引力所引起的.根据这一假定,天文学家们运用天体力学理论,计算了未知行星的轨道.结果于 1846 年 9 月 18 日,天文学家用望远镜在与计算相差不到一度之处发现了这颗未知行星——海王星.

剩余法可表示为

A,B,C,D 是 a,b,c,d 的原因,
B 是 b 的原因,
C 是 c 的原因,
D 是 d 的原因,
―――――――――――
A 是 a 的原因.

剩余法的结论也是或然性的.为提高其结论的可靠程度,应注意两点:

1.必须确认复合现象中 b,c,d 确实分别是复合因素中的 B,C,D 所引起的,而且复合现象中的剩余部分 a 确实与复合因素中的 B,C,D 不相干.这样,结论才可靠.否则结论就不可靠.

2.复合因素 A,有时是已知的,这时剩余法的作用仅仅在于确定 A 是 a 的原因.复合因素中的 A 有时是未知的,这时剩余法的作用是提醒人们,复合现象中的 a 必定另有原因,启发人们去寻求 a 的原因 A.

类比法(analogy) 亦称类比推理,简称类比或类推.一种归纳方法.指根据两个或两类对象在一系列属性上都相同,从而推出它们在其他属性上也相同的推理.类比法可表示为

对象 A 具有属性 a,b,c,d,
对象 B 具有属性 a,b,c,
―――――――――――
对象 B 也具有属性 d.

类比法并不能用于证明,它所得到的结论不一定真,但它却可以给人们以启发,从而进一步探索.科学上很多发明创造就是受到类比法的启发得到的.例如,二百年前,奥地利一位医生经解剖死尸发现,一些病人死后胸腔内化脓积水现象严重.为了及时诊断、挽救病人,这位医生反复思考.一次他突然想起,用手指关节叩击木制酒桶,然后根据叩击的声

音可以估量酒桶中酒量的多少.于是他想:酒桶与人的胸腔都是封闭的,叩击时都会发出声音,既然叩击能估计桶内藏酒量,那么也能用叩击声判定病人胸腔内积水量.由此,他发明了叩诊的方法.

类比推理(reasonin by analogy) 即"类比法".

证 明

论证(argument) 形式逻辑术语.是一种思维过程,它用已确立的或假设的判断来确定另一判断之成立或不成立.论证包括证明和反驳.

公理(axiom) 亦称公设.形式逻辑术语.指不加证明而取为推理根据的命题.在科学理论的命题系统中,证明一个命题的普遍有效性所用的论据往往是已证明其普遍有效的命题.这样,为证明一个命题就得先证明作为论据的命题,就出现无止境的情况.为了在逻辑上摆脱这一困境,亚里士多德(Aristotle)主张选择一些已为人类反复实践所证实,而无需证明的命题,作为证明其他命题的出发点.这样一些命题就被称为公理或公设.这一思想到 19 世纪中期后在数学中得到普遍承认.在一些初始概念和若干条公理的基础上,用演绎法推演出一系列判断形成一个命题体系的方法,称为公理化方法.例如,希尔伯特(Hilbert,D.)的《几何基础》用公理化方法讲述欧几里得几何学的命题体系.作为基础的若干条公理组成一个公理系统.公理系统应满足:

1. 相容性.就是由这些公理推出的一切结果中不能有两个互相矛盾的命题.

2. 独立性.即在该系统中的任何一个公理不能由其他公理推出.

3. 完备性.即根据这些公理就可推出这个系统的所有恒真命题.

但在一般的教科书中,由于教学上的局限性,严格要求有困难;往往对公理的独立性要求不严,采取扩大公理系统的方法,把一些定理也作为公理采用;对公理的完备性也是这样,不作深入探讨.公理这个概念的发展历史是:公元前 378 年左右,古希腊的柏拉图(Plato)在雅典创立了一个学园(Academia),并亲自任教,还在学园门口写着:"不懂几何者不得入内!",这表明柏拉图及其学派的成员们对几何学的重视程度.由于他们的努力,几何学已有显著的发展,他们已经引入了术语分析与综合,最早论证了归纳法和反证法,这些方法在数学的研究中已有广泛的应用.同时由已知结果导出新结果的推导方法已明确,从而产生了由若干个可认为完全自明的命题能推出一切的思想.根据这个思想对几何概念中的公理已有阐述.例如,柏拉图已定义点是"直线的开端"或"不可分割线",线是"无宽度的长".欧几里得(Euclid)的许多定义和公理都应归功于柏拉图学派.亚里士多德说:柏拉图最先引入了公理"等量减等量其差相等".欧几里得的《原本》一书,实际上是把柏拉图学派的几何理论更系统化完整化了.在《原本》中欧氏把可认为是完全自明的命题中那些为几何学所特有的命题称为公设,把数学中更一般的可认为自明的命题称为公理,后来人们将欧氏的公设和公理统称为公理.

公理系统(axiomatic system) 形式逻辑术语.即从公理出发根据演绎法导出定理而形成的演绎体系.在一个理论发展的高级阶段,人们总要选择一些不定义的概念和不加证明的命题作为建立一个系统学科的出发点.这些不定义的概念称为初始(原始)概念;由初始概念定义出的概念称为导出概念.不加证明的命题称为初始命题或公理;从公理推演出的命题称为定理.从初始概念和公理出发来定义其他一切概念以及演绎推导出其他一切定理的方法称为公理化方法(简称公理方法或公理法).根据公理法,由初始概念、公理、定义、推理规则、定理等所构成的演绎系统,称为公理系统.对经验知识进行整理、总结而建立起来的公理系统称为实质公理系统.这种公理系统的公理一般具有自明性.早期的公理系统属于这一类,如欧几里得几何和牛顿力学等.与实质公理系统不同,形式公理系统不预先给定任何论域.初始概念在引入公理之前是不加定义的,它在公理中引进.公理可以看成是初始概念的定义,对初始概念可通过不同的模型给予不同的解释,一个形式公理系统可以有许多不同的模型.布尔代数、群论以及希尔伯特(Hilbert,D.)的几何基础都是形式公理系统.在形式公理系统中,人们把初始概念和公理看成是没有具体内容的,而且把公理作为一个理论的前提假设,这些假设与真实性无涉,即不要求公理必须具有自明性.对公理系统一般要求满足:相容性、独立性和完备性.形式公理系统是公理方法近代发展的结果.

导出概念(derived concept) 见"公理系统".

初始命题(initial proposition) 见"公理系统".

实质公理系统(material axiomatic system) 见"公理系统".

公理化方法(axiomatic method) 见"公理系统"及本卷《高等几何》同名条.

相容性(consistency) 亦称公理系统的一致性或无矛盾性或协调性.公理系统必须具备的一种性质.公理系统只是理论的假设,公理的选取法具有相对的任意性,为使该理论有意义,至少要求公理系统不含矛盾.相容性指的是:对于公理系统中的任一命题 A,A 和非 A 至少有一个不是该系统的定理.

独立性(independence)　亦称公理系统的独立性. 公理系统一般要求具备的一种性质. 在含且仅含 $A, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 条公理的系统中, 所谓公理 A 对公理 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是独立的, 系指 $\neg A, A_1, \cdots, A_n$ 是相容的. 所谓公理系统是独立的, 系指公理中任一条公理与其他的公理相互独立. 不独立的公理系统含有多余公理, 可从其中删除多余的公理来简化使它成为独立的系统.

完备性(completeness)　亦称公理系统的完备性或完全性. 公理系统希望能具有的一种性质, 即把该公理系统所不能推出的命题加入作为新公理, 则新公理系统是不相容的. 完备性还有另一种意义: 称为语义完备性, 即该公理系统能够把系统中所有恒真命题全部推出, 亦即所有恒真命题都是定理.

公设(postulate)　通常认为即是公理. 形式逻辑术语. 在欧几里得(Euclid)的《原本》中列出 5 条公理和 5 条公设(参见本卷《平面几何》中的"原本"). 按当时的理解, 公设仅用于讨论几何问题, 而公理对数学的各个领域都适用. 在近代的公理方法中, 对公理与公设已不加区别, 均称公理.

证明(proof)　形式逻辑术语. 它是根据一些已确立的判断来确定某一判断成立的思维过程, 亦即推理的全过程. 证明由论题、论据和证明方式组成. 论题就是需要确立的判断. 它包括条件与结论两部分. 论据是在确立论题过程中用来作为根据的那些判断. 证明方式是指论题与论据之间的逻辑结构, 即在证明过程中所运用的各种推理形式的全体. 在一个公理系统中, 经过证明的逻辑公式称为该系统中的定理. 从语义上说公理与定理统称该系统中的普遍有效式. 在各门科学体系中, 除少数公理无需证明外, 其他表达规律性知识的命题都需要证明. 所以, 证明是间接认识的重要工具, 是建立科学理论和科学体系的必要条件.

普遍有效式(universally valid formula)　简称普效式, 见"证明".

论题(proposition of argument)　论证三要素之一. 指论证中需要加以确立的判断. 它是论证过程的主题, 它表明论证什么.

论据(grounds of argument)　论证三要素之一. 指论证过程中用来确立论题的推理依据, 即论题赖以成立的根由. 在论证中, 它表示用什么, 根据什么判断对论题加以论证.

证明形式(argument form)　亦称论证形式. 论证三要素之一. 指把论证中的论题和论据联系起来的形式, 即论证中采用的推理形式. 在论证过程中必须有一个从论据到论题的推演过程. 这个过程是通过一系列推理形式实现的, 因此, 证明形式是论证过程中推理形式的总和.

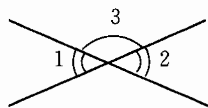
论证形式(argument form)　即"证明形式".

证明规则(rules of argument)　正确证明必须遵守的逻辑规则. 传统逻辑证明时应遵守如下规则:

1. 论题必须明确.
2. 论题必须始终同一. 违反这条规则就会犯偷换论题的逻辑错误.
3. 论据必须真实. 违反这条规则就会犯论据虚假的逻辑错误.
4. 论据的真实性不应依赖论题来证明. 违反这条规则时, 论据直接依赖论题的错误称为窃取论题; 论据间接依赖论题的错误称为循环论证.
5. 论据必须能正确地推出论题. 违反这条规则就会犯推不出的逻辑错误.

演绎证法(deductive proof)　一种证明方法. 指用演绎推理证明论题的方法. 例如, 对顶角相等的证明:

∵ $\angle 1+\angle 3=180°$,
$\angle 2+\angle 3=180°$,
$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3$,
∴ $\angle 1=\angle 2$.



其实这个证明是由一系列演绎推理组成的:

1. 第一个推理是
   $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 之和为一平角, 所以
   $\angle 1+\angle 3=180°$.
2. 第二个推理是
   $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 之和为一平角, 所以
   $\angle 2+\angle 3=180°$.
3. 第三个推理是
   所有平角均相等, 所以 $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3$.
4. 第四个推理是
   等量减等量其差相等,
   $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3$ 的两边各减去 $\angle 3$,

所以 $\angle 1=\angle 2$.

在证明表述中, 不必把这一系列推理一一写出, 常常把其中的大前提略去, 甚至连小前提也略去, 简化成上述表达式.

偷换论题(clandestine change of argumentative issue)　违反论证规则的一种逻辑错误. 在论证中, 把原来需要论证的那个论题有意或无意地换成另一个论题, 就是偷换论题. 根据同一律要求, 在同一论证过程中, 论题必须始终保持同一, 前后一贯. 如果变换了论题, 本来应该证明的论题就得不到证明. 例如, 对"人类是由猿猴进化而来的"这一论题, 曾有人提出质问: 有哪一个人不是父母所生, 而是猴子变成的? 又有哪一只猴子变成了人? 显然提出这个质问只能证明某一个人不是猴子变成的, 而不能证明人类不是由猿猴进化而来的. 这就犯了偷换论题的逻

辑错误.有意识地偷换论题,称为诡辩.

窃取论题(stealing the question) 论证中的一种逻辑错误,指论证中所用的论据,其成立与否直接依赖于论题的是否成立,即用论题来论证论据,而不是用论据来论证论题.例如,用论据"部分小于包含它的整体"来论证论题"整体大于构成它的部分".这就是窃取论题.

预期理由(expected reason) 论证中的一种逻辑错误,指用尚未确立的判断充当论据来论证论题的逻辑错误.例如,在论证为什么几千年前就能建筑埃及的金字塔时,有人提出:是外星人飞到地球上来帮助建筑的.这个论证就犯了预期理由的错误.因为其中的论据"是外星人飞到地球上来帮助人类建筑了埃及的金字塔"这个判断本身是否成立并未确定.

不合乎逻辑(illogic) 一般指在论证过程中,违反形式逻辑的规律与规则的不正确的思维.人们常把思维前后不连贯、缺乏依据、模棱两可,自相矛盾等称为不合乎逻辑.

循环论证(circular argument) 论证中的一种逻辑错误,指在论证过程中,违反论证规则,把论题作为论据去证明论据的一种逻辑错误.一个正确的论证,论题的成立是由论据推出来的,而论据本身应当是公理或经过证明的定理;论据本身决不能依靠论题来证明,因为论题的成立与否尚待证明,要靠论据来论证.如果论据反而需要靠论题来论证,这就犯了循环论证的逻辑错误.例如,有人企图证明欧几里得几何中的平行公设,所用的论据是关于三角形内角和的定理,而这类定理都是平行公设加上其他平面几何公理推导出来的.这就是循环论证.

分析法(analytic method) 证明方法之一.即从待证的论题出发,寻求其成立的充分条件,再找这一条件成立的充分条件,一直找下去,直到所找的为已知条件或已知普遍有效命题为止.例如,a,b 是不相等的正数,则 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

证明(分析法):要证 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$ 成立,

只需证 $(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$ 成立.

$\because\ a+b>0$,

$\therefore$ 只需证 $a^2-ab+b^2>ab$ 成立,

只需证 $a^2-2ab+b^2>0$ 成立,

只需证 $(a-b)^2>0$ 成立,

由于 $a\neq b$,所以 $(a-b)^2>0$ 显然成立,由此命题得证.

综合法(synthetic method) 证明方法之一.即从命题的条件出发,经过逐步推理,最后推得结论的证明方法.例如,a,b 是不相等的正数,则 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

证明(综合法):

$\because\ a\neq b$,

$\therefore\ (a-b)^2>0$.

$\because\ (a^2-2ab+b^2)>0$,

$\therefore\ a^2-ab+b^2>ab$.

$\because\ a+b>0$,

$\therefore\ (a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$,

即 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

直接证明(direct proof) 证明方法之一.即与间接证明相对应.指直接从论据推出论题而确立论题的证明方法.

间接证明(indirect proof) 证明方法之一.即与直接证明相对应,它包括反证法、归谬法、选言证法等.反证法是指通过论证否定该论题会导致矛盾,从而确定论题为真.运用间接证明的反证方法,一般是先选择一个与原论题相反的论题,论证反论题成立会导出矛盾.然后根据排中律,由于论题与反论题是两个互相否定的判断,必须有一个成立.既然已证明反论题不成立,那么论题必然成立.例如,在证明 $\sqrt{2}$ 是一个无理数时,人们先假设它是一个有理数,那么 $\sqrt{2}=p/q$(p,q 为互素的正整数),两边平方得 $2=p^2/q^2$,即 $p^2=2q^2$.所以 2 能整除 p.设 $p=2m$(m 为正整数),代入上式得:$4\cdot m^2=2q^2$,即 $q^2=2\cdot m$.所以 2 能整除 q.这样 2 是 p 和 q 的公因子,这与前面假设 p,q 互素相矛盾.所以,$\sqrt{2}$ 不是有理数.那么 $\sqrt{2}$ 只能是无理数.这种间接证明实际上是运用了选言推理进行论证的过程.因为,由论题"P"与反论题"非 P"组成一个不相容的选言判断.又由否定非 P 进而肯定了 P.归谬证法是使要证的论题相矛盾的命题归于谬误,从而论证欲证论题的正确性.运用这种方法于论证时,先设定一个与要证明的论题相矛盾的命题,并假定它成立(称归谬假设).然后从这个假设的命题中推出矛盾或荒谬的结论,然后根据充分条件假言推理的否定式,推翻假定的命题.最后根据排中律,确立要论证的论题.

反证法(proof by contradiction) 见"间接证明".

归谬法(reduction to absurdity) 见"间接证明".

归谬假设(absurdity assumption) 见"间接证明".

选言证法(disjunctive proof) 间接证法之一.它的一般步骤是:为了证明论题 A,先确定一个已知成立的选言命题"A 或 B 或 C 或……"这选言命题的选言支是不相容且有穷尽的.其后,逐一证明除 A 之外的选言支都不成立.根据选言推理否定肯定式,A 得到证明.选言证法的形式如下:

论题:A.

论证:A 或 B 或 C,成立

非 B，非 C，

所以 A.

穷举归谬法(exhaustive reduction to absurdity) 反证法之一. 指原论题的结论 B 的否定 $\overline{B}$ 不止一种情况，须把 $\overline{B}$ 的各种可能情况逐一否定的证法. 例如，用反证法证"在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle B$，则 $BC=AC$"时，原论题结论是 $BC=AC$，归谬假设 $BC\neq AC$，要分成两种情况：$BC>AC$ 与 $BC<AC$，穷举归谬法就是要对这两种情况逐一加以否定.

同一原理(principle of identity)　亦称同一法则. 相对同一概念而显现的一种关系. 一个命题的条件和结论都惟一存在，它们所指的概念是同一概念时，这个命题与其逆命题等效. 同一原理是同一法的根据，根据这一原理，对于符合同一原理的命题，就可通过证明其逆命题来确定原命题成立.

同一法则(law of identity)　即"同一原理".

同一法(method of identity)　根据同一原理的证明方法. 即对于符合同一原理的论题，通过证明与原论题等效的逆命题来间接地确立原论题的证明方法. 用同一法证明时，一般分下面几个步骤：

1. 做出符合原论题结论的命题(或图式).

2. 证明所作命题(或图式)符合原论题的条件.

3. 根据惟一性，确定所作命题(或图式)就是原论题(或图式).

4. 由于所作命题(或图式)具有原论题的结论的性质，所以原论题的结论成立.

定理(theorem)　公理体系中的一种命题. 即根据公理或其他已知为真的命题，经过逻辑推理而证明其为真的命题. 例如，"三角形的内角之和等于180°"为平面几何中一个定理. 一般并不是把所有经过逻辑推理证明其为真的命题都称为定理，而只是把其中一些基本的，常用来作为论据证明其他命题的命题作为定理. 容易从某定理直接导出的正确命题，通常称为这个定理的推论或系. 为证明某个定理做准备的定理常被称为某个定理的预备定理或辅助定理或引理.

性质定理(theorem of property)　一种命题. 指用来说明一个概念存在的必要条件的定理. 例如，"平行四边形的对边相等"就是平行四边形的一个性质定理. 它揭示平行四边形具有对边相等这一性质.

判定定理(decision theorem)　与性质定理相对的一种命题. 指用来说明一个概念存在的充分条件的定理. 例如，"对边相等的四边形是平行四边形"就是判定一个四边形是平行四边形的判定定理.

分断式命题(respectively assertive proposition) 一种复合命题. 判定某类数学命题真假时使用的一种命题形式，由若干个命题组合而成的那个命题，其中这若干个命题的条件和结论一一对应互不相容、穷尽各种可能. 如果一个分断式命题是正确的，则它的逆命题也是正确的. 例如，在$\triangle ABC$ 中，$AB\gtreqless AC\Rightarrow\angle C\gtreqless\angle B$ 就是一个分断式命题. 它是由命题：

1. 在$\triangle ABC$ 中，$AB>AC\Rightarrow\angle C>\angle B$；

2. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC\Rightarrow\angle C=\angle B$；

3. 在$\triangle ABC$ 中，$AB<AC\Rightarrow\angle C<\angle B$

组合而成的一个命题.

其中包含了两线段 AB，AC 之间所有可能的三种关系和两角$\angle B$，$\angle C$ 之间相应的三种关系，条件与结论一一对应

$$AB>AC\leftrightarrow\angle C>\angle B,$$
$$AB=AC\leftrightarrow\angle C=\angle B,$$
$$AB<AC\leftrightarrow\angle C<\angle B.$$

正确的分断式命题称为配套定理.

配套定理(assort theorem)　见"分断式命题".

闭系统(closed system)　一类特殊的支命题系统. 指分断式命题的构造模式. n 个命题：如果 A_i，则 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$. 其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 包括了所论问题一切可能性，没有重复，没有遗漏，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 亦然，就说这 n 个命题构成一个闭系统，也说这 n 个命题 $A_i\rightarrow B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 组成一个分断式命题.

闭系统定律(law of a closed system)　亦称豪伯定律. 数学中的重要定理. 即对于构成一个闭系统的 n 个命题：如 A_i 成立则 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 成立，则当 B_i 成立时 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 也成立.

豪伯定律(Hauber theorem)　即"闭系统定律".

谬误(fallacy)　形式逻辑术语. 指与客观现实不相一致的认识. 从广义上说，指不符合客观实际的一切言论. 从狭义上说，指形式逻辑中人们在思维活动中自觉或不自觉地违反思维规律或思维规则而发生的各种逻辑错误. 谬误可分为形式谬误与非形式谬误两种. 形式谬误是由于思维形式的错误(主要是推理形式不正确)产生的. 非形式谬误又可分为言辞谬误(如语言歧义)和实质谬误(不符合事实).

诡辩(sophistry)　逻辑错误之一. 是一种故意违反逻辑规律和规则或不顾事实情况，为错误所进行的似是而非的论证. 诡辩不是从事物的全面联系中客观地认识事物，而是从主观需要出发，任意挑选个别事物作例证，割裂事物间的内在联系，或以事物表面相似为根据，做出似是而非的论证来颠倒黑白，混淆是非. 诡辩的手法很多，常见有偷换论题、偷换概念、捏造论据、循环论证、强词夺理、含糊其辞、模棱两可、机械类比、以偏求全等.

悖论(paradox)　形式逻辑术语. 指思维矛盾的一种特殊形态. 悖论一词有多种定义和理解：

1. 广义地说，悖论是指一切与人们的直觉与日常经验相矛盾的结论.

2. 当前流行的说法：悖论是一种逻辑矛盾的命

题. 如果承认它成立就能推出它的否定也成立；如果承认它的否定成立就能推出它也成立.

3. 弗伦克尔(Fraenkel, A. A.)的说法：如果某一理论的公理和推理原则看上去是合理的，但在这个理论中却推出了两个互相矛盾的命题，或者证明了这样一个复合命题，它表现为两个互相矛盾的命题的合取式，则说这个理论包含一个悖论.

通常把悖论分为两类：逻辑-数学悖论和语义悖论. 比较著名的悖论有：

1. 罗素悖论和理发师悖论(罗素悖论的变形和通俗说法).

2. 康托尔悖论.

3. 布拉利·福尔蒂悖论.

4. 说谎者悖论. 这是一个古老的悖论. 为了简单起见，人们讨论所谓“强化了的说谎者悖论”. 考虑下面括号中的命题的真假：〈本语句是假的〉. 假设它是真的，则要承认“本语句”为假，即该命题为假. 若设该命题为假，则“本语句”为真，因此，该命题为真.

其他重要的悖论尚有里夏尔悖论和格雷林悖论等. 对于悖论的研究，目的在于分析产生悖论的根源，寻求克服悖论的方法、途径. 这种研究对逻辑学、数学基础、语言学和哲学都有重大意义. 例如，语义学、模型论、数理逻辑、公理化集合论，以及近代数学的三大流派的形成和发展都和悖论问题的研究密切相关. 另外哥德尔(Gödel, K.)的不完备性定理的重大发现，以及形式系统中若干不可判定语句的构造，也从悖论研究受到启发. 因此可以说，现代逻辑中的许多最为深刻的成果，都从悖论的分析中产生(参见本卷《集合论》中的“悖论”、“布拉利·福尔蒂悖论”、“康托尔悖论”和“罗素悖论”).

反驳(refutation)　形式逻辑术语. 指用已知为真的判断来确定一判断虚假性或某个证明不能成立的思维过程. 在反驳中被确立为虚假的判断称为被反驳的论题. 用来确立被反驳论题虚假的真实判断称为反驳的论据. 被反驳的论题和反驳的论据之间的逻辑联系，即在反驳过程中所运用的各种推理形式称为反驳的方式. 证明过程中的错误不外乎论题虚假、论据虚假，或论证方式不合逻辑. 因此，反驳可从上述三个方面中任何一个方面入手，也可以同时从两个方面或三个方面入手进行反驳. 用演绎推理形式进行的反驳称为演绎反驳；用归纳推理形式进行的反驳称为归纳反驳；用类比推理形式进行的反驳称为类比反驳. 通过已知为真的判断直接确定另一判断的虚假性的反驳称为直接反驳；通过论证与被反驳判断具有矛盾关系或反对关系的判断的真实性，从而确定被反驳判断虚假的反驳称为间接反驳.

演绎反驳(deductive refutation)　见“反驳”.

类比反驳(refutation by analogy)　见“反驳”.

归纳反驳(inductive refutation)　见“反驳”.

直接反驳(direct refutation)　一种反驳方式. 由已知为真实的命题(判断)，直接确定另一命题(判断)的虚假性的反驳. 直接反驳有两种不同的方法：

1. 事实反驳，即直接列举与对方论题或论据相矛盾的事实来论证对方的论题或论据是虚假的. 例如，对“任何数的平方大于这个数的本身”，可用

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ngtr \frac{1}{2}$$

的事实来反驳.

2. 归谬反驳，即把被反驳命题作为真命题，而推出荒谬的结论，然后由此否定被反驳命题. 具体步骤为：

1) 从被反驳命题 p(假设 p 真)出发，推演出谬误的命题 q.

2) 由于 q 谬误，那么应该否定 q.

3) 依充分条件假言推理否定后件到否定前件的有效式，推演出 q 之 p 也应当否定. 其形式是

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

例如，鲁迅用归谬反驳“作文有秘诀”.

如作文有秘诀，则就有许多祖传作家，
不存在许多祖传作家，
―――――――――――――
所以，作文没有秘诀.

应该指出，归谬法用在论证中是间接论证方法，而用在反驳中则是直接反驳.

间接反驳(indirect refutation)　一种反驳方式. 是通过论证与被反驳判断(命题)具有矛盾关系或反对关系的判断(命题)的真实性，从而确定被反驳判断(命题)虚假的反驳方法. 间接反驳的步骤是：

1. 确定与被反驳的命题 p 相矛盾的命题 $\neg p$.

2. 论证 $\neg p$ 是真实的.

3. 依矛盾律 $\neg(p \wedge \neg p)$ 是永真式，则可确定 p 为假.

例如，可用“鲸不生活在陆地上，鲸是哺乳动物”，以确立“并非所有的哺乳动物都生活在陆地上”. 来反驳“所有哺乳动物都生活在陆地上”的命题.

反例(counter example)　一种特殊例证. 是用来进行反驳的一种根据. 满足命题 $A \to B$ 中的条件 A，但不满足结论 B 的某个实例. 反例不仅用来揭示假命题，而且常可用来说明真命题的使用范围.

撰　稿　卢景波　冯守训　纪善韬　沈呈民　宋文坚
张昌政　陈国勋　诸葛殷同　蒋星耀
审　阅　卢景波　宋文坚　应制夷　赵序明

布 尔 代 数

布尔代数(Boolean algebra) 亦称逻辑代数.布尔(Boole,G.)为研究思维规律(逻辑学)于1847年提出的数学工具.布尔代数是指代数系统

$$\mathscr{B}=\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle,$$

它包含集合 B 连同在其上定义的两个二元运算+,·和一个一元运算′,布尔代数具有下列性质:对 B 中任意元素 a,b,c,有

1. $a+b=b+a,\quad a\cdot b=b\cdot a.$
2. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$
   $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c).$
3. $a+0=a,\quad a\cdot 1=a.$
4. $a+a'=1,\quad a\cdot a'=0.$

布尔代数也可简记为 $\mathscr{B}=\langle B,+,\cdot,'\rangle$.在不致混淆的情况下,也将集合 B 称作布尔代数.布尔代数 $\mathscr{B}$ 的集合 B 称为布尔集,亦称布尔代数的论域或定义域,它是代数 $\mathscr{B}$ 所研究对象的全体.一般要求布尔集至少有两个不同的元素0和1,而且其元素对三种运算+,·,′都封闭,因此并非任何集合都能成为布尔集.在有限集合的情形,布尔集的元素个数只能是 $2^n,n=0,1,2,\cdots$二元运算+称为布尔加法,布尔和,布尔并,布尔析取等;二元运算·称为布尔乘法,布尔积,布尔交,布尔合取等;一元运算′称为布尔补,布尔否定,布尔代数的余运算等.布尔代数的运算符号也有别种记法,如∪,∩,−;∨,∧,¬等.由于只含一个元的布尔代数实用价值不大,通常假定 $0\neq 1$,称0为布尔代数的零元素或最小元,称1为布尔代数的单位元素或最大元.布尔代数通常用亨廷顿公理系统来定义,但也有用比恩公理系统或具有0与1的有补分配格等来定义的.

创立布尔代数的布尔也是数理逻辑的创始人之一.早在17世纪,由于数学方法在认识自然和发展技术中起着重要的作用,所以人们试图将数学方法推广到其他领域中去.莱布尼茨(Leibniz,G.W.)曾设想创造一种通用语言,用它能将逻辑学中的一切概念表达出来,并通过对符号进行处理得出结论.19世纪初,由于代数学向抽象化发展,有的代数学家把代数学看做一种关于符号及其组合规律的科学.布尔由于受到代数学发展的启发和影响,对代数符号的理论及其解释进行了研究.布尔的目的是想通过对符号表达式的解释来研究语言及思维的规律性,用代数系统的概念和基本性质构造一个演绎思维演算.他在这种思想指导下,研究了逻辑关系与某些数学运算间的联系.认为逻辑关系与某些数学运算甚为相似.对同一代数系统作不同的解释,就可以构成一个思维的演算.于是他创造了一套符号系统来表示逻辑推理中的基本概念,并且找到了对这些符号作运算时应遵循的规则,创立了"逻辑代数".1847年,布尔在《逻辑的数学分析》中,将其中的符号对应着类(外延)和类运算,等式对应着判断(或命题),变换对应着推理,并在导言中指出:符号代数的有效性不依赖于符号的解释,而只依赖于符号的组合规律.他在《思维规律的考察》(1854)中强调:思维运算的规律必须独立地确定是否成立,它们之间的任何形式的相符只能通过比较后才能建立起来.进而布尔构成了一个抽象的代数系统.对于这个代数系统,在他的两本著作中给出了四种解释,一种是类的演算,两种是命题演算,还有一种是概率演算.在此基础上形成了代数学中称为"逻辑代数"的这个分支.后人也称它为布尔代数,首先这样称呼的是希菲(Sheffer,H.M.).以后由施罗德(Schröder, F.W.K.E.)进一步发展,他著的《逻辑代数讲义》将布尔代数构成一个演绎系统.因此,这一系统又称为布尔-施罗德代数.

亨廷顿(Huntington, E.V.)首先研究了布尔代数的代数结构.1921年,波斯特(Post,E.L.)证明了命题逻辑的完备性定理:每一个二元布尔代数上的恒等式可以由布尔代数的公理导出.1936年,斯通(Stone, M.H.)证明了每一个布尔代数同构于一个集合代数.在布尔代数中若引入对称差运算,则布尔代数可看做一个环.这样,布尔代数的理论与一种特殊类型的环理论等价.斯通对偶是布尔代数理论的一个重要部分,它使布尔代数与布尔空间(即完全不连通的紧豪斯多夫空间)之间建立起等价关系.这样一来,随着布尔代数与拓扑学建立了联系,拓扑学家对布尔空间日益感兴趣,通过测度空间和巴拿赫空间中的投影布尔代数,布尔代数在测度论和泛函分析中也有重要的应用.但布尔代数的主要应用仍在于与逻辑有关的那些数学分支中.例如,在开关代数中,在经典命题演算(有时在谓词演算)中以及在集合论中.最新的应用基于如下的事实:命题和谓词逻辑的语句的真值不仅能在二值布尔代数 $z=\{0,1\}=\{$假,真$\}$中给出,而且能在任意的布尔代数中给出.布尔值模型概念的首次提出是在1950年,当时拉谢娃(Rasiowa,H.)和西科尔斯基(Sikorski,R.)发现了一个关于命题和谓词逻辑完全性的特别简明的证明.但是,最重要的突破却是在1967

年，由斯科特(Scott，W. R.)、索洛韦(Solovay，R. M.)和沃彭卡(Vopenka)发现的，科恩(Cohen，P. J.)在证明集合论公理系统的独立性时生成模型的构造可以被想象成布尔值模型的实例．这样，完备的布尔代数不仅能对集合论模型的理解做出贡献，而且反过来科恩方法的布尔值陈述已经通过元数学的方法被用来证明布尔代数中的定理．

近几十年来，布尔代数得到了迅速的发展．不仅在数理逻辑、集合论、拓扑学、测度论、泛函分析、概率论等纯数学分支的理论研究中得到应用，而且在自动化技术、计算机的逻辑设计中也得到了广泛的应用．

布尔代数的基本概念

布尔集(Boolean set)　见“布尔代数”．

布尔代数的论域(discussion domain of a Boolean algebra)　见“布尔代数”．

逻辑代数(logical algebra)　即“布尔代数”．但在有的著作中，逻辑代数专指命题代数(参见“命题代数”)．

亨廷顿公理系统(Huntington axiomatic system)　通常用来定义布尔代数$\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$的一种公理系统，由亨廷顿(Huntington，E. V.)于1904年提出(参见“布尔代数”)．值得指出的是，这个公理系统中每一条都有两个式子，它们互为对偶，因此通常把这些条件称为自对偶的公理系统；然而这个公理系统却不是独立的．若将布尔代数的性质3中$a+0=a$或$a\cdot 1=a$去掉，则由其余的公理组成的系统才是独立的．

比恩代数(Byrne algebra)　布尔代数的一种变形，是由比恩(Byrne)提出的一个公理系统$\langle B,\cdot,',0\rangle$，其中$B$是集合，$\cdot$是$B$上一个二元运算，$'$是$B$上的一个一元运算，0是$B$中元素．

比恩代数满足下列公理：

1. 对任何$x,y\in B$有$x\cdot y=y\cdot x$.
2. 对任何$x,y,z\in B$，有
   $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.
3. $x\cdot x=x$.
4. $x\cdot y'=0\Leftrightarrow x\cdot y=x$.
5. $0\neq 0'$.

这个公理系统与布尔代数$\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$存在一一对应关系，这只要在比恩公理系统中定义：1为$0'$，$x+y$为$(x'\cdot y')'$，$x\leqslant y$当$x\cdot y=x$，即可证明：对任意一个布尔代数$\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$，代数系统$\langle B,\cdot,',0\rangle$是比恩代数；反过来，对任一个比恩代数$\langle B,\cdot,',0\rangle$，代数系统$\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$是一个布尔代数．

纽曼代数(Newman algebra)　一种推广的布尔代数．它放弃了交换性与结合性的公理．在纽曼代数中，有一个关于两个运算+与·封闭的集N.

纽曼代数具有下列性质：

1. 对任何$a,b,c\in N$，有
   $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$,
   $(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$.
2. 存在一个元素$1\in N$，使对一切$a\in N$，有
   $a\cdot 1=a$.
3. 存在一个元素$0\in N$，使得对一切$a\in N$，有
   $a+0=a=0+a$.
4. 对每个$a\in N$，至少有一个补$a'\in N$与之对应，使得$a\cdot a'=0$，$a+a'=1$.

如果在纽曼代数中定义$2=1+1$，且称2的左倍数$a\cdot 2$为偶元素，那么可以证明：$\langle B,+,\cdot,',0,2\rangle$构成一个布尔代数，其中$B$为全体偶元素．纽曼代数是纽曼(Newman，M. H. A.)于1941年提出的．

退化布尔代数(degenerate Boolean algebra)　亦称平凡布尔代数，指仅含一个元素的布尔代数．其特点是：

1. 退化布尔代数的最大元与最小元重合，即其惟一的元素．
2. 退化布尔代数满足布尔代数的运算律．
3. 退化布尔代数的哈塞图就是一个点．
4. 退化布尔代数实用价值不大．一般要求布尔代数至少含有0与1这两个不同的元素．这时称其为非退化布尔代数．

平凡布尔代数(trivial Boolean algebra)　即“退化布尔代数”．

非退化布尔代数(non-degenerate Boolean algebra)　见“退化布尔代数”．

布尔运算(Boolean operation)　一类特殊运算．指布尔代数$\mathscr{B}=\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$中的两个二元运算：布尔加法+和布尔乘法·，以及一个一元运算：布尔补$'$.

布尔加法(Boolean addition)　亦称布尔并(记为∪)或布尔析取(记为∨)或布尔和．指布尔代数$\mathscr{B}=\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$中记为+的二元运算．对任意给定的两个元素$a,b\in B$，经加法运算后得到一个确定的元素$c\in B$，记为$c=a+b$，$c$称为$a,b$的布尔和．布尔加法的性质参见“布尔代数的运算律”．在元素不多的情形下，常可用列表法确定布尔加法．右面是含且仅含4个元素的布尔代数的加

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

法表，表中最左一列表示加法的第一个元素，最上一行表示加法的第二个元素，各对应行列交叉处记的是两者的布尔和. 特别，对二元布尔代数，其布尔加法当且仅当两个元素 $a,b\in B$ 都是 0 时，$a+b$ 才是 0，否则 $a+b$ 是 1(参见“二元布尔代数”).

布尔并(Boolean join)　即“布尔加法”.

布尔和(Boolean sum)　即“布尔加法”.

布尔析取(Boolean disjunction)　即“布尔加法”.

布尔乘法(Boolean multiplication)　亦称布尔交(记为$\cap$)或布尔合取(记为$\wedge$)或布尔积. 指布尔代数 $\mathscr{B}=\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 中记为$\cdot$的二元运算. 对任意给定的两个元素 $a,b\in B$，经乘法运算后得到一个确定的元素 $d\in B$，记为 $d=a\cdot b$，d 称为 a,b 的布尔积. 布尔乘法的性质参见“布尔代数的运算律”. 在元素不多的情形下，常可用列表法确定布尔乘法. 右面是含且仅含 4 个元素的布尔代数的乘法表，表中最左一列表示乘法的第一个元素，最上一行表示乘法的第二个元素，各对应行列交叉处记的是两者的布尔积. 特别，对二元布尔代数，其布尔乘法当且仅当两个元素 $a,b\in B$ 都是 1 时，$a\cdot b$ 才是 1，否则 $a\cdot b$ 是 0(参见“二元布尔代数”).

$\cdot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

布尔交(Boolean meet)　即“布尔乘法”.

布尔积(Boolean product)　即“布尔乘法”.

布尔合取(Boolean conjunction)　即“布尔乘法”.

布尔补(Boolean complement)　亦称布尔否定(记为$\neg$)或布尔余运算(记为$-$). 指布尔代数 $\mathscr{B}=\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 中记为$'$的一元运算. 对任意给定的一个元素 $a\in B$，经补运算后得到一个确定的元素 $b\in B$，b 称为 a 的布尔补，记为 a'，即 $b=a'$. 布尔补满足性质：$a+a'=1$，$a\cdot a'=0$. 在元素不多的情形下，常可用列出补运算表来确定补运算. 如含且仅含四个元素的布尔代数的补运算表就可列成右表. 特别，对二元布尔代数，其布尔补运算是：1 的补为 0，0 的补为 1(参见“二元布尔代数”).

	$'$
0	1
a	b
b	a
1	0

布尔否定(Boolean negation)　即“布尔补”.

布尔代数的余运算(complementary operation of Boolean algebras)　即“布尔补”.

布尔代数的零元素(zero element of a Boolean algebra)　简称零元，亦称最小元. 布尔代数 B 中两个特殊元素之一，记为 0. 它在布尔加法和布尔乘法中具有普通的数零在数的加法和乘法中所具有的性质，即对任意元素 $a\in B$，总有 $0+a=a+0=a$；$0\cdot a=a\cdot 0=0$. 任何布尔代数都只有一个零元素.

零元(zero element)　布尔代数的零元素的简称.

布尔代数的最小元(minimal element of a Boolean algebra)　即“布尔代数的零元素”.

布尔代数的单位元素(unity element of a Boolean algebra)　简称幺元，亦称最大元. 布尔代数 B 中两个特殊元素之一，记为 1. 它对布尔乘法具有普通数 1 的性质，即对任意元素 $b\in B$，恒有 $1\cdot b=b\cdot 1=b$ 任何布尔代数都只有一个单位元素.

幺元(identity element)　布尔代数的单位元素的简称.

布尔代数的最大元(maximal element of a Boolean algebra)　即“布尔代数的单位元素”.

布尔代数的运算律(operational rule of Boolean algebra)　布尔代数的基本运算法则. 布尔代数 $\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 有如下运算律，对 B 中任意元素 a,b,c，有：

1. 结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，
   $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
2. 交换律：$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$.
3. 分配律：$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$，
   $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$.
4. 吸收律：$a+a\cdot b=a$，$a\cdot(a+b)=a$.
5. 幂等律：$a+a=a$，$a\cdot a=a$.
6. 德・摩根律(反演律)：$(a+b)'=a'\cdot b'$，
   $(a\cdot b)'=a'+b'$.
7. 对合律(双重否定律)：$(a')'=a$.
8. 互补律：$a+a'=1$，$a\cdot a'=0$.
9. 零一律(幺元律)：$a+0=a$，$a\cdot 1=a$.
10. 囿元律(极元律)：$a+1=1$，$a\cdot 0=0$.

布尔代数中的结合律(associative law in Boolean algebra)　见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的交换律(commutative law in Boolean algebra)　见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的分配律(distributive law in Boolean algebra)　见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的吸收律(absorptive law in Boolean algebra)　见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的幂等律(idempotent law in Boolean algebra)　见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的对合律(involution law in Boolean algebra)　见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的双重否定律(law of double negation in Boolean algebra)　见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的互补律(complementary law in

Boolean algebra） 见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的零一律（zero-one laws of Boolean algebra） 见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的幺元律（laws of identical element of Boolean algebra） 见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的囿元律（law of dominant element in Boolean algebra） 见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的极元律（laws of dominant elements in Boolean algebra） 见“布尔代数的运算律”.

布尔代数中的德·摩根律（De Morgan laws in Boolean algebra） 亦称布尔代数中的反演律.它是德·摩根（De Morgan, A.）发现的.见“布尔代数的运算律”.利用归纳法可得德·摩根律的一般形式：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)'=a_1'\cdot a_2'\cdot\cdots\cdot a_n',$$

$$(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n)'=a_1'+a_2'+\cdots+a_n'.$$

德·摩根律提供了由乘转换成加，由加转换成乘的方法.

布尔代数中的反演律（inversion law in Boolean algebra） 见“布尔代数中的德·摩根律”.

布尔代数中的对称差（symmetric difference in Boolean algebra） 亦称布尔代数中的异或，是布尔代数的一种导出运算，常记以△.其定义如下：对任意 $a,b\in B$，有 $a\triangle b=a\cdot b'+a'\cdot b$.因为它满足交换律、结合律及 $a\triangle b=a+b$，当且仅当 $a\cdot b=0$ 等性质，所以在计算机科学及解布尔方程中均有应用.另外，在布尔代数中引入对称差运算后，布尔代数可看做一个环，因而能够利用发展得较为深入的环的代数理论去研究布尔代数.

布尔代数中的异或（exclusive or in Boolean algebra） 即“布尔代数中的对称差”.

布尔代数中的叉积（cross product in Boolean algebra） 布尔代数的一种导出运算.记为$\dot{\times}$.其定义如下：在布尔代数$\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$中，对任意 $a,b\in B$，有 $a\dot{\times}b=a'\cdot b'+a\cdot b$.易见 $a\dot{\times}b=(a\triangle b)'$.这表明：叉积可用对称差及补运算代替，因而叉积运算用得较少.

布尔代数中的对偶原理（duality principle in Boolean algebras） 布尔代数中的一条著名定理.该原理断言：如果一个命题 A 在一个布尔代数中成立，则它的对偶命题 A^*（将 A 中 0 和 1 互换，+和·互换所得的命题）也在这个布尔代数中成立.对偶原理可拓广到格中，这时 A^* 是将 A 中的 0 与 1 互换，+与·互换，≥与≤互换.有了对偶原理使布尔代数中许多命题的证明可略去，例如，由 $\sum_{x\in\varphi}x=0$，依对偶原理可得 $\prod_{x\in\varphi}x=1$.

有限布尔代数（finite Boolean algebra） 一种常用的布尔代数.指论域 B 是有限集的布尔代数.有限布尔代数的论域 B 的元素个数必是 2 的方幂 2^n（$n=1,1,2,\cdots$）.$n=0$ 时的布尔代数是仅含一个元素的退化布尔代数.$n=1$ 时的布尔代数仅含 0 和 1 两个元素，称为二元布尔代数.区分有限与无限布尔代数是有意义的，因为有限布尔代数必是原子布尔代数，从而它同构于某个集 A 的所有子集构成的布尔代数；但一个无限布尔代数未必是一个原子布尔代数，故它无上述性质.

二元布尔代数（binary Boolean algebra） 亦称简单布尔代数.一种常用的布尔代数.指论域仅含两个相异元素的布尔代数.其特点是：

1. $B=\{0,1\}$，且其运算可用下面诸表列出：

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

a	a'
0	1
1	0

2. 二元布尔代数可用{0}是它的惟一的真理想来刻画，即在布尔代数 B 中，$B=\{0,1\}$当且仅当{0}是 B 的惟一的真理想.

3. B 的哈塞图如右图所示.



4. 若 0 和 1 分别表示真值假和真，则在{0,1}上的布尔运算+，·，′分别表示三种逻辑运算：析取、合取和否定.

5. 可以证明任何二元布尔代数都是同构的.

简单布尔代数（simple Boolean algebra） 即“二元布尔代数”.

无限布尔代数（infinite Boolean algebra） 一种常用的布尔代数.指论域 B 是无限集的布尔代数.无限集 S 的幂集代数$\langle P(S),+,\cdot,',\varnothing,S\rangle$是无限布尔代数.一般说来，无限布尔代数未必是原子布尔代数.

幂集代数（algebra of power sets） 一种特殊的布尔代数，指集合 X 的幂集 $P(X)$（即 X 的所有子集构成的集合）关于集合的并、交与补运算构成的布尔代数，即$\langle P(X),\cup,\cap,-,\varnothing,X\rangle$.它的子布尔代数称为 X 的子集代数或 X 上的集合代数，或称集合域.当$|X|=n$ 时，幂集代数的论域中含有 2^n 个元素，并且$\varnothing$为零元，X 为单位元.

集合域（field of sets） 见本卷《集合论》同名条.

布尔元（Boolean element） 布尔代数论域中元素的简称.常以字母 a 代表布尔代数论域 B 中的某个固定元素，且称 a 为布尔常元或布尔定元；而以 x 代表 B 中任意一个元素，称 x 为布尔变元.

布尔常元(Boolean constant)　见"布尔元".

布尔定元(Boolean constant)　见"布尔元".

布尔变元(Boolean variable)　见"布尔元".

布尔代数的正元素(positive element of a Boolean algebra)　一种布尔元.指布尔代数 B 的任意的非零元素,即 $B-\{0\}$ 中的任意元素.例如,对于布尔代数 $\langle\{1,2,3,6\},+,\cdot,',1,6\rangle$,其中,+表示最小公倍,·表示最大公约,$x'=6/x$,它的零元是 1,则 2,3,6 是它的正元素.

偏序(partial order)　见本卷《集合论》中的"偏序关系".

链(chain)　一种特殊的偏序集.偏序集 $\langle B,\leqslant\rangle$ 的全序子集 A 称为 B 的一条链.称 A 是全序的,如果 $x,y\in A$,则必有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$. B 的一个子集 C 称为 B 的一个反链,是指对任何 $x,y\in C(x\neq y)$,既没有 $x\leqslant y$,也没有 $y\leqslant x$(参见本卷《集合论》中的"R 链"和"R 反链").

反链(anti-chain)　见"链".

偏序集的相容元素(compatible elements of partial order set)　偏序集中有特殊关系的元素.设 P 是一个偏序集,$p,q\in P$,如果存在元素 $r\in P$ 使得 $r\leqslant p$ 并且 $r\leqslant q$,则称 p 与 q 相容,否则称 p 与 q 不相容.

布尔代数的偏序(partial order of a Boolean algebra)　布尔代数的基本概念之一.指在布尔代数 B 上建立的偏序关系.对于任意 $a,b\in B$,如果 $a\cdot b=a$ (或 $a+b=b$)成立,则规定 $a\leqslant b$.易见$\leqslant$是 B 上的一个偏序关系.

子元素(subelement)　相对于某元素而言的一些特殊元素.设 a,b 是布尔代数 B 的元素,如果 $a\leqslant b$,则称 a 为 b 的子元素.如果布尔代数 B 的元素皆是某一个集合 X 的子集,则$a\leqslant b$表示 a 是 b 的子集. a 的所有子元素构成 B 的一个理想.

不可比较的布尔元(incomparable Boolean elements)　布尔元间的一种关系.设 B 是布尔代数的论域,对于 $x,y\in B$,如果 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$,则称 x 与 y 是可比较的;否则称 x 与 y 是不可比较的.若 $X\subseteq B$ 且对于任意 $x,y\in X,x\neq y,x$ 与 y 是不可比较的,则 X 是 B 的一个反链.例如,设 $A=\{1,2,3,6\}$,+规定为二元素的最小公倍,·规定为二元素之最大公约,x 之补 $x'=6/x$,零元是 1,单位元素是 6,则元素 2 与 3 是不可比较的,$\{2,3\}$构成 A 的一个反链.

可比较的布尔元(comparable Boolean elements)　见"不可比较的布尔元".

不相交的布尔元(disjoint Boolean elements)　布尔元间的一种关系.布尔代数 B 中最大下界为 0 的两元素.即对于任意 $x,y\in B$,若 $x\cdot y=0$,则称 x 与 y 不相交.设 $X\subseteq B$,如 X 的任意两个非零元素不相交,则称 X 是一个两两不相交元素族.可以证明:每一个无限布尔代数均有一个两两不相交的无限元素族.不可比较的两元素的最大下界未必是 0;最大下界为 0 的两元素未必不可比较.例如,对于布尔代数 $\langle L,\cup,\cap,'\rangle$,其中 $L=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$,$\{a,b\}$与$\{b,c\}$不可比较,但 $\{a,b\}\cap\{b,c\}=\{b\}\neq\varnothing$;$\{a\}\cap\varnothing=\varnothing$,然而

$$\{a\}\supseteq\varnothing.$$

布尔代数的两两不相交元素族(pairwise disjoint elements family of Boolean algebras)　见"不相交的布尔元".

序列的不相交加细(disjoint refinement of a sequence)　布尔代数的基本概念之一.指相对某给定序列而言的另一具有特殊要求的序列.设 A 是一个布尔代数,κ 是一基数,$(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$是 A 的元素的一个序列,并且 $a_\alpha>0(\alpha<\kappa)$,令$(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$是 A 的元素的另一个序列,且满足下列条件:

1. $0<b_\alpha\leqslant a_\alpha$,对每一 $\alpha<\kappa$.

2. $b_\beta\cdot b_\alpha=0$,对 $\beta<\alpha<\kappa$.

则称序列$(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$是序列$(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$的不相交加细.不相交加细概念可应用于超滤和拓扑方面的问题.

布尔代数的分割(partition of a Boolean algebra)　亦称单位的分割或 1 的分割.布尔代数的基本概念之一.指布尔集的特殊子集.即满足下列条件的集合 A:

1. A 是布尔代数 B 的子集.

2. 对任意非零元 $x,y\in A$ 均有 $x\cdot y=0$.

3. 对任一 $a\in B,A\cup\{a\}$不再满足条件 2,即 A 是 B 的极大的两两不相交的元素族.

布尔代数的分割与一个完备代数的直积分解之间存在一一对应关系.

单位的分割(partition of unity)　即"布尔代数的分割".

1 的分割(partition of 1)　即"布尔代数的分割".

(偏序集的)原子(atom (of a partial set))　偏序集的特殊元素.对具有零元 0(指最小元)的$\langle P,\leqslant\rangle$来说,是指这样的非零元素 b:$\forall x\in P$,只要 $x\leqslant b$ 就有 $x=b$ 或 $x=0$.在$\langle P,\leqslant\rangle$的哈塞图中,若 0 所在位置为第一级,则原子就是第二级的所有元素.如果 A 是布尔代数,$a\in A,0<a$,并且不存在 A 的元素 x 使 $0<x<a$,则称 a 为 A 的原子.这里 $x<y$ 是指 $x\leqslant y$ 但 $x\neq y$.而 $x\leqslant y$ 是布尔偏序关系.用 At A 表示 A 的原子集合.不含原子的布尔代数 A 称为无原子的.如果对 A 的每个正元素 $x>0$,存在原子 a 使得 $a\leqslant x$,则称 A 为原子布尔代数.

格(lattice)　一种特殊的代数系统.指满足交换律、结合律及吸收律的代数系统$\langle L,+,\cdot\rangle$,即

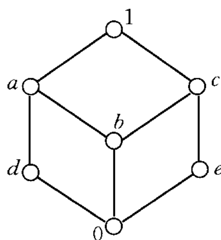
$\forall a,b,c \in L$，有：

1. 交换律：$a+b=b+a$，$a \cdot b=b \cdot a$.
2. 结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$，
$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.
3. 吸收律：$a+(a \cdot b)=a$，$a \cdot (a+b)=a$.

另外，格也可用偏序关系定义：一个偏序集$\langle L, \leqslant \rangle (L \neq \varnothing)$是格，当且仅当 L 的每一对元素均有最大下界与最小上界. 可以证明这两种定义是等价的.

有界格(bounded lattice)　具有最大元与最小元的格. 通常以 0,1 分别记最小元与最大元. 有限个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所构成的格是有界格，其最小元是 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$，最大元是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

有补格(complemented lattice)　亦称有余格. 一种特殊的有界格. 在有界格$\langle L, \leqslant \rangle$中，对于 L 中的任意元素 a，如果存在 $b \in L$，使得 $a+b=1$，$a \cdot b=0$，则称元素 b 是元素 a 的补元. 如果一个有界格的每个元素都至少存在一个补元，则此格称为有补格. 补元是对称的，如果 a 是 b 的补元，则 b 也是 a 的补元，也可以说，a 和 b 这两个元素是互补的. 对于任一元素 $a \in A$，可以存在多个补元，也可以不存在补元. 例如，在上图所示的有界格中，因为 $d \vee c=1$ 和 $d \wedge c=0$，所以 d 和 c 是互补的. 但 b 没有补元，而 a 和 d 都是 e 的补元.



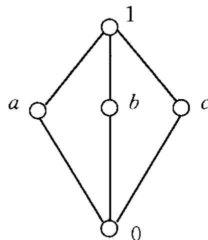
有余格(complemented lattice)　即“有补格”.

补元(complement (of an element))　见“有补格”.

分配格(distributive lattice)　一种特殊的格. 设$\langle L, +, \cdot \rangle$，是格，如果对于集 L 中所有的元素 a，b，c，都有(即$\forall a,b,c \in L$)：

$$a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c),$$
$$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c),$$

则称$\langle L, +, \cdot \rangle$为分配格. 可以验证：具有如右哈塞图的五元格不是分配格，而元素个数不超过四的格均是分配格. 上面例子表明，有补格未必是分配格(上面五元格)，分配格也未必有补格(如三元格).



布尔格(Boolean lattice)　与布尔代数有密切关系的一类格. 一个有补分配格称为布尔格. 由一个布尔格$\langle L, \leqslant \rangle$可以诱导出一个布尔代数$\langle L, \cdot, +, ', 0, 1 \rangle$. 在布尔格$\langle L, \leqslant \rangle$中可以定义出两个二元运算$\cdot$，$+$：$a \cdot b=\inf\{a,b\}$，$a+b=\sup\{a,b\}$. 由于布尔格是有界格，因此它必有最大元和最小元，分别记为 1 和 0，且有 $a \cdot 1=a$，$a+0=a$. 由于布尔格是有补格，故对任意元素 $a \in L$，存在元素 $a' \in L$，使得 $a \cdot a'=0$，$a+a'=1$. 又由于布尔格是分配格，即有

$$a \cdot (b+c)=(a \cdot b)+(a \cdot c),$$
$$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c),$$

故$\langle L, \cdot, +, ', 0, 1 \rangle$是由$\langle L, \leqslant \rangle$诱导出的布尔代数.

布尔代数的胞腔度(cellularity of a Boolean algebra)　布尔代数的基本概念之一. 即与布尔代数中两两不相交族有关的概念. 设 A 是一个布尔代数，则 $cA=\sup\{|X| \mid X$ 是 A 中的一个两两不相交族$\}$称为布尔代数 A 的胞腔度(其中$|X|$表示 X 的基数). 如果存在 A 的一个两两不相交族 X，使得 $cA=|X|$，则称 cA 是可达的.

布尔代数的浸润度(saturation of a Boolean algebra)　布尔代数的基本概念之一. 即与布尔代数中两两不相交族有关的概念. 设 A 是一个布尔代数，则 $\mathrm{sat}A=\min\{u \mid u$ 是一个基数，且对 A 的每一个两两不相交族 X，有 $|X|<u\}$称为 A 的浸润度. 对每一个布尔代数 A，$\mathrm{sat}\,A$ 是一个正则基数.

布尔环(Boolean ring)　一种特殊环. 环 $R=(R, +, \cdot)$的元素 x 称为幂等的，是指 $x \cdot x=x$. 如果 R 是一个含幺环，并且它的每一个元素都是幂等的，则称 R 为布尔环. 给了布尔代数 $\mathscr{B}=\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$，令 $x \triangle y=(x \cdot y')+(y \cdot x')$，则 $r\mathscr{B}=(\mathscr{B}, \triangle, \cdot, 0, 1)$是布尔环. 反之给了布尔环 $R=\langle R, \oplus, \cdot, 0, 1 \rangle$，对 $x,y \in R$，令 $x+y=x \oplus y \oplus (x \cdot y)$，$x \cdot y=x \cdot y$ 而 $x'=x \oplus 1$，则 $bR=\langle R, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$是布尔代数. 所以，布尔代数和布尔环之间可以建立一一对应.

幂等元(idempotent element)　见“布尔环”.

布尔代数中的无限和(infinite sum in Boolean algebras)　布尔代数的一种运算. 设 A 是布尔代数$\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$中 B 的一个子集，A 的无限和 $\sum\limits_{x \in A} x$ 是指 A 的最小上界. 此时有

$$\sum_{x \in \varnothing} x=0 \text{ 且 } \sum_{x \in B} x=1,$$

讲无限和自然要假定其最小上界存在.

布尔代数中的无限积(infinite product in Boolean algebras)　布尔代数的一种运算. 设 A 是布尔代数$\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$中 B 的一个子集，A 的无限积 $\prod\limits_{x \in A} x$，是指 A 的最大下界. 此时有 $\prod\limits_{x \in \varnothing} x=1$ 且 $\prod\limits_{x \in B} x=0$，讲 A 的无限积自然要假定 A 的最大下界存在.

关于无限和与积的德·摩根定理(De Morgan Theorem of infinite sum and infinite product)　布尔代数中有限德·摩根律的推广. 它是指下面的运

算律:设 H 是布尔代数 B 的无限子集,若

$$\sum_{x\in H}x \text{ 与 } \prod_{x\in H}x$$

存在,则有:

1. $\sum_{x\in H}x=\left(\prod_{x\in H}x'\right)'$.

2. $\prod_{x\in H}x=\left(\sum_{x\in H}x'\right)'$.

无限分配性(infinite distributivity) 无限布尔代数中的一种运算律.设 H 是布尔代数 B 的无限子集,则下列二式在无限运算意义下成立:

1. $x\cdot\left(\sum_{u\in H}u\right)=\sum_{u\in H}(x\cdot u)$.

2. $x+\left(\prod_{u\in H}u\right)=\prod_{u\in H}(x+u)$.

如果等式左边是有意义的,则其右边亦是有意义的,并且两边相等.但上面二式右边有意义时,其左边未必有意义.例如,若 $x=0$,则 $\sum_{u\in A}(x\cdot u)=0$,但当 B 不完备时,$\sum_{u\in A}u$ 未必存在.

完全可分配性(completely distributivity) 可分配律的推广.对于任意两个集合 S 和 W,用 S^W 表示由 W 到 S 中的所有映射的集合.给定一个由 $W\times S$ 到布尔代数 B 的映射,它对于每一对 $w,s(w\in W,s\in S)$确定 B 中一个元素 $x_{w,s}$.考虑等式

$$\prod_{w\in W}\left(\sum_{s\in S}x_{ws}\right)=\sum_{f\in S^W}\left(\prod_{w\in W}x_{w,f(w)}\right).\qquad(1)$$

这里右边的和是对所有 $f\in S^W$ 取的.如果对于基数分别为 κ 和 λ 的任意两个集合 W 和 S 以及由$W\times S$ 到 B 中的任何映射,只要(1)的左边有意义,且右边每一项有意义,则右边在 B 中有意义且(1)成立,那么称 B 为(κ,λ)可分配的.如果对所有基数 κ,λ,B 都是(κ,λ)可分配的,则称 B 是完全可分配的.

完备布尔代数(complete Boolean algebra) 一种特殊的布尔代数.即每个子集都有最小上界和最大下界的布尔代数.对于无限基数 κ,每个基数小于 κ 的子集都有最小上界和最大下界的布尔代数称为 κ 完备布尔代数.$\aleph_0$(可数基数)完备布尔代数称为 σ 完备布尔代数.

1. 由德·摩根律,对于完备性(κ 完备性),只需布尔代数的每个子集(每个基数小于 κ 的子集)有最小上界(或最大下界)即可.

2. 幂集代数是完备的;反过来,每个完备的集合代数都同构于一个幂集代数.

3. 每个 κ^+ 完备的且$(\kappa,2)$可分配的布尔代数是 κ^+ 可表示的.

4. 每个 σ 完备的布尔代数是 σ 可表示的.

κ 完备布尔代数(κ-complete Boolean algebra) 见“完备布尔代数”.

σ 完备布尔代数(σ-complete Boolean algebra) 见“完备布尔代数”.

κ 可表示的布尔代数(κ-representable Boolean algebra) 一种特殊的布尔代数.指具有如下性质的布尔代数 A:对于一无限基数 κ,存在 κ 完备集合代数 B,使得 B 到 A 有一 κ 完备满同态映射.$\aleph_1$ 可表示的布尔代数称为 σ 可表示的.κ 可表示的与(κ,λ)可分配的具有如下的联系:每个$(2^\kappa)^+$可表示的布尔代数是$(\kappa,2)$可分配的.每个 κ^+完备的且$(\kappa,2)$可分配的布尔代数是 κ^+可表示的.

σ 可表示的布尔代数(σ-representable Boolean algebra) 见“κ 可表示的布尔代数”.

独立的分割集合(independent set of partitions) 由布尔代数的分割所组成的集合.设 P 是布尔代数 A 中单位分割的集合.如果对 $n\in\omega,P$ 的两两不相同的元素 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 和任意的 $p_1\in P_1$,$p_2\in P_2,\cdots,p_n\in P_n$,有 $p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_n>0$,则称该分割集合 P 是独立的.

布尔代数的(κ,λ,μ)可分配性((κ,λ,μ)-distributivity of a Boolean algebra) 两个参数(κ,λ)可分配性的推广.设 A 是布尔代数,κ,λ,μ 是基数.如果对任何至多 κ 个 λ 拟分割的集合 P,存在一个拟分割 q,使得 q 的每个元素与每个 $p\in P$ 的少于 μ 个元素相交,即对每个 $x\in q$ 和 $p\in P$,$|\{y\in p\mid x\cdot y>0\}|<\mu$,则称布尔代数 A 是(κ,λ,μ)可分配的.如果在 A 中存在至多 κ 个 λ 拟分割的集合 P,使得对每个 $x\in A^+$,有 $p\in P$ 使 x 至少与 μ 个 p 的元素相交,则称布尔代数 A 是无处可分配的.

拟分割(quasi-partition) 分割概念的推广.布尔代数 A 中的族$(a_j)_{j\in J}$称为 A 的拟分割,是指其元素 a_j 两两不相交且 $\sum_{j\in J}a_j=1$.这里并不要求 a_j 非空.如果$|J|=\lambda$,则称拟分割$(a_j)_{j\in J}$为 λ 拟分割.

κ 封闭偏序(κ-closed partial order) 布尔代数的基本概念之一.设 κ 是无穷基数,如果对每个序数 $\rho<\kappa$,偏序集$(P,\leqslant)$中的每个递减序列$(P_\alpha)_{\alpha<\rho}$都有一个下界,即存在 $q\in P$ 满足 $q\leqslant P_\alpha$ 对 $\alpha<\rho$,则称此偏序集$(P,\leqslant)$是 κ 封闭的.

弱(κ,λ)可分配(weak (κ,λ)-distributive) (κ,λ)可分配概念的推广.对任何集合 I 和 J,令 $F(I,J)$是所有从 I 到 J 的有限子集的集合中的函数所组成的集合.对布尔代数 A 中的一个族$(a_{ij})_{i\in I,j\in J}$和 J 的有限子集 e,令

$$S_{ie}=\sum_{j\in e}a_{ij}.$$

对任何基数 κ 和 λ,对$|I|\leqslant\kappa$,$|J|\leqslant\lambda$ 和 A 中的族$(a_{ij})_{i\in I,j\in J}$,如果每个和 $\sum_{j\in J}a_{ij}$ 对 $i\in I$,$\prod_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}$ 与 $\prod_{i\in I}S_{ih(i)}$ 对 $h\in F(I,J)$ 在 A 中都存在时,有

$$\prod_{i\in I, j\in J}\sum a_{ij} = \sum\{\prod_{i\in I} S_{ih(i)} \mid h \in F(I,J)\},$$

则布尔代数 A 称为弱(κ,λ)可分配.

布尔代数的代数理论

布尔代数的可数分离性质(countable separation property of a Boolean algebra)　σ完备性的推广. 指对布尔代数 A 的任意两个满足条件 $x\cdot y=0$(对任意 $x\in X, y\in Y$)的至多可数的子集 X 和 Y,都存在 $a\in A$ 分离 X 和 Y,即 $x\leqslant a$ 和 $y\leqslant a'$ 对所有 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 成立.

1. A 有可数分离性质当且仅当对 A 的任何两个至多可数子集 X 和 Y,只要使得 $X\cup Y$ 是两两不相交的族,就存在 A 的元素 a 分离 X 和 Y.

2. A 有可数分离性质当且仅当对 A 的任何两个满足 $x\leqslant z$ 对所有 $x\in X$ 和 $z\in Z$ 的至多可数子集 X 和 Z,都有 A 的元素 a 使得 $x\leqslant a\leqslant z$ 对所有 $x\in X$ 和 $z\in Z$.

每一个 σ 完备布尔代数具有可数分离性质. 并且,如果布尔代数 A 具有可数分离性质,则 A 的每个商代数亦然. 科珀尔伯格(Koppelberg, S.)证明了:若 A 是无限布尔代数且具有可数分离性质,则 $|A|^{\omega}=|A|$.

布尔代数的强可数分离性质(strong countable separation property of a Boolean algebra)　可数分离性质的推广. 布尔代数 B 的强可数分离性质,是指 B 满足下面两个条件:

1. B 是一个无限布尔代数.

2. 设 X,Y 是 B 的任何两个至多可数的非空子集,如果对于 $m,n\in\omega, x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$ 及 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in Y$,有 $x_1+x_2+\cdots+x_n<y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_m$,那么有 $b\in B$,使得

$$x_1+x_2+\cdots+x_n<b<y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_m.$$

对一切 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$ 及 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in Y$ 成立.

布尔代数 B 具有强可数分离性质,当且仅当下面四个条件同时成立:

1. B 是无限的.

2. B 是无原子的.

3. B 具有可数分离性质.

4. B 无可数无限单位分割.

每个具有强可数分离性质的布尔代数是 ω_1 万有的.

布尔代数的直积(direct product of Boolean algebras)　亦称布尔代数的积代数. 由布尔代数族构造出的新布尔代数. 设$(A_i)_{i\in I}$是布尔代数族,则集合 A_i 的笛卡儿积

$$\prod_{i\in I} A_i = \{a \mid a=(a_i)_{i\in I}, a_i\in A_i, i\in I\}$$

在分量方式运算下是一种布尔代数,被称为 A_i 的直积(或积代数). 分量方式运算指

$$(a+b)_i=a_i+b_i,\quad (a\cdot b)_i=a_i\cdot b_i,$$

$$(a')_i=a_i',\quad 0=(0_i)_{i\in I},\quad 1=(1_i)_{i\in I}.$$

布尔代数的直积,也可看成由已知布尔代数族$(A_i)_{i\in I}$构造新的布尔代数 $\prod_{i\in I}A_i$ 的一种方法.

布尔代数的积代数(product algebra of Boolean algebras)　即"布尔代数的直积".

布尔代数κ弱直积(κ-weak direct product of Boolean algebras)　布尔代数直积的子代数. 设 $\prod_{i\in I}A_i$ 是布尔代数直积,κ 是无穷基数

$$\prod_{i\in I}^{<\kappa} A_i = \{a\in\prod_{i\in I}A_i \,\Big|\, |\{i\in I \mid a_i\neq 0\}|<\kappa$$

$$\text{或 } |\{i\in I \mid a_i\neq 1\}|<\kappa\},$$

式中 $a=(a_i)_{i\in I}$,则 $\prod_{i\in I}^{<\kappa}A_i\subset\prod_{i\in I}A_i$,以 $\prod_{i\in I}^{<\kappa}A_i$ 为布尔集的子代数称为 A_i 的弱 κ 直积. 在 $\kappa=\omega$ 时,它称为 A_i 的弱积并记为$\prod_{i\in I}^{\omega}A_i$.

收缩(retraction)　布尔代数间的一种关系. 布尔代数 C 的收缩是指这样的布尔代数 B:如果有同态映射 $e:B\to C$ 和 $r:C\to B$ 使得 $r\circ e=\mathrm{id}_B$,其中"$\circ$"表示映射的复合,id_B 是 B 上的恒等映射. 若 B 是 C 通过 e 与 r 的收缩,则 e 是单射且 r 是满射,从而 B 既是 C 的子代数又是 C 的同态象. 布尔代数 B 是完备的,当且仅当 B 是完备布尔代数的收缩.

生成元集(set of generators)　布尔代数的特殊子集. 令 X 是布尔代数 B 的子集,则 X 在 B 中生成子代数是

$$\langle X\rangle=\bigcap\{A\subseteq B \mid X\subseteq A, A\text{ 是 }B\text{ 的子代数}\}.$$

它是 B 的包含 X 的最小的子代数. 如果 $X\subseteq A$ 且 $\langle X\rangle=A$,则称 X 为布尔代数 A 的一个生成元集.

布尔代数的沃特关系(Vaught relation of Boolean algebras)　布尔代数间的特殊关系. 设 A,B 都是布尔代数,R 是二元关系,称布尔代数 A 和 B 有沃特关系,如果它们满足条件:

1. R 是对称的,即对任意布尔代数 A 和 B,如果 ARB,那么 BRA.

2. 如果 ARB 并且 A 是平凡布尔代数(即 A 只含一个元素),那么 B 也是一个平凡布尔代数.

3. 往返性质:如果 ARB 并且 $a\in A$,那么存在 $b\in B$ 使得$(A\upharpoonright a)R(B\upharpoonright b)$并且$(A\upharpoonright a')R(B\upharpoonright b')$,其中 $A\upharpoonright a, B\upharpoonright b, A\upharpoonright a'$ 和 $B\upharpoonright b'$ 为相对布尔代数.

例如,同构关系是一个沃特关系. 这种关系是由沃特(Vaught, R. L.)引入,用来证明以下结果:设 A,B 都是至多可数的布尔代数,并且对某个沃特关系 R 有 ARB,那么 $A\cong B$. 沃特还证明了:若 A 是具有无限多个原子的可数的布尔代数,则 $A\times 2\cong A$;

式中 2 代表两个元素的布尔代数，这里$\cong$表示同构关系.

布尔代数的合同关系(congruence relation of a Boolean algebra)　一种特殊的等价关系. 设有布尔代数 A 上的一个等价关系$\sim$，它对任意的 $x,y,x_1,y_1\in A$，$x\sim x_1$ 且 $y\sim y_1$ 蕴含 $-x\sim -x_1$ 和 $x+y\sim x_1+y_1$，则称此保持$+$，$'$ 运算的等价关系为合同关系. 合同关系对运算$\cdot$也是保持的. 布尔代数的每一个同态映射 $f:A\to B$ 可按下面的规定诱导出 A 上的合同关系$\sim$：$x\sim x_1$ 当且仅当 $f(x)=f(x_1)$. 布尔代数的合同关系主要是通过理想来描述. 一方面，令 I 是布尔代数 A 的一个理想，定义 A 上的关系$\equiv$：$x\equiv y$ 当且仅当 $x\triangle y\in I$，那么$\equiv$是 A 上的一个合同关系；另一方面，若令 $J_{\sim}=\{x:x\sim 0\}$，则 $J_{\sim}$是一个理想.

子布尔代数(subalgebra of a Boolean algebra)　布尔代数的子代数. 结构$\langle A,+_A,\cdot_A,'_A,0_A,1_A\rangle$是布尔代数$\langle B,+_B,\cdot_B,'_B,0_B,1_B\rangle$的子代数，是指 $A\subseteq B$，$0_A=0_B$，$1_A=1_B$，运算$+_A$，$\cdot_A$，$'_A$ 是运算$+_B$，$\cdot_B$，$'_B$ 限制到 A 且 A 在运算$+_A$，$\cdot_A$，$'_A$ 下封闭.

最小子布尔代数(minimal Boolean subalgebra)　一种特殊的子布尔代数. 设 $\mathscr{B}=\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 是布尔代数，$S\subseteq B$，$\mathscr{B}$ 必有子代数，其论域包含 S(例如 $\mathscr{B}$ 本身就是). 对 $\mathscr{B}$ 的一切其论域包含 S 的子代数作交集，可得 $\mathscr{B}$ 的子代数 $\mathscr{B}_0$，称为其论域包含 S 的最小子布尔代数. 若 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 为 $\mathscr{B}$ 的任一个其论域包含 S 的子代数，则 $\mathscr{B}_0\subseteq\widetilde{\mathscr{B}}$.

完备子代数(complete subalgebra)　一种特殊的子布尔代数. 指布尔代数 B 的满足下列条件的子代数 A：对 A 的每个使$\sum^B M$ 存在的子集 M，$\sum^A M$ 也存在，且$\sum^A M=\sum^B M$，其中$\sum^B M$ 是 M 在 B 中的最小上界.

κ 完备子代数(κ-complete subalgebra)　一种完备子代数. 指布尔代数 B 的满足下列条件的子代数 A：对 A 的每个使$\sum^B M$ 存在的基数少于 κ 的集合 M，$\sum^A M$ 也存在，且$\sum^A M=\sum^B M$，其中$\sum^B M$ 是 M 在 B 中的最小上界.

σ 完备子代数(σ-complete subalgebra)　一种完备子代数. 指 κ 为可数基数时的 κ 完备子代数.

布尔代数中的稠密子代数(dense subalgebra in Boolean algebra)　一种特殊的子布尔代数. 指布尔代数 B 的子代数 A：$A\setminus\{0\}$在 B 中稠密.

布尔代数的稠密度(density of Boolean algebra)　布尔集的所有稠密子集的基数的极小值. 指布尔代数 B 的 $\pi B=\min\{|X|:X\subseteq B$ 在 B 中稠密$\}$. 稠密子集与稠密度是研究完备布尔代数的有力工具.

布尔代数的完备化(completion of Boolean algebra)　布尔代数的一种扩张. 设 A 是布尔代数，B 是完备布尔代数. 如果 A 是 B 的稠密子代数，则称 B 是 A 的完备化，记为 $B=\overline{A}$. 在同构的意义下，每一个布尔代数的完备化是惟一的.

偏序的完备化(completion of partial order)　偏序集到完备布尔代数的一个特殊映射. 设 P 是偏序集，(e,B)是 P 的完备化的条件是：

1. B 是完备布尔代数.

2. e 是 P 到 $B^+=B\setminus\{0\}$的映射，并且：

1) e 是保序的，即如果 $q\leqslant p$，则

$$e(q)\leqslant e(p)\ (p,q\in P).$$

2) e 保持不相容性，即如果 p,q 在 P 中是不相容的，那么在 B 中 $e(p)\cdot e(q)=0$.

3) $e[P]$在 B 中稠密.

布尔代数的无赘子集(irredundant subset of Boolean algebras)　布尔代数的特殊子集. 布尔代数的子集 X 是无赘的，是指没有 X 的元素 x 由 $X\setminus\{x\}$所生成. 即无 x 在$X\setminus\{x\}$所生成的子代数中. 并非每一个布尔代数都有无赘子集，但是布尔代数的每个极大无赘子集生成一个稠密子代数(麦肯济(McKenzie)).

正则子代数(regular subalgebra)　一种特殊的子代数. 布尔代数 B 的子代数 A 称为 B 的正则子代数，是指对于 A 的每个子集 M，若 M 在 A 中的最小上界$\sum^A M$($\prod^A M$)存在，则 M 在 B 中的最小上界$\sum^B M$($\prod^B M$)也存在，且有

$$\Sigma^A M=\Sigma^B M\ (\prod^A M=\prod^B M).$$

布尔代数 B 的每一个稠密子代数是正则的.

对偶原子(dual atom)　sub(B)中对偶原子的简称，这里 sub(B)表示布尔代数 B 的子代数所构成的格. sub(B)的对偶原子 C，实即 B 的极大子代数，满足：C 是 B 的真子代数，并且无真子代数介于 C 与 B 之间. 如果 B 的每一个真子代数均含于 sub(B)的一个对偶原子中，则称 sub(B)是对偶原子的. sub(B)及其对偶原子具有性质：

1. 如果 sub(B)是有补的，即 sub(B)中每个元素都有补元素，则 B 是收缩布尔代数.

2. sub(B)中每个对偶原子是 B 的对偶子代数.

对偶子代数(dual subalgebra)　一种特殊的子代数. 即这样的布尔代数 C，C 是布尔代数 B 的子代数，且 C 是由 B 的一个理想 I 生成的. B 中每个对偶子代数是 B 中的某些极大对偶子代数之交.

布尔代数的理想(ideal of Boolean algebra)　布尔代数的基本概念之一. 指布尔代数的具有特定结构的子集. 即布尔代数的特殊非空子集 I，对于布尔代数$\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$，$I\subseteq B$，且满足下列条件：

1. 若 $x\in I$，$y\in I$，则 $x+y\in I$.

2. 若 $x\in I$，$y\in B$，则 $x\cdot y\in I$.

由定义可看出：

1. $\{0\}$与 B 均为 B 的理想.

2. 定义中的 2 可改为 2′:若 $x\in I$ 且 $y\leqslant x$,则 $y\in I$.

3. I 是理想的另一等价定义为

$$x+y\in I\Leftrightarrow x\in I \text{ 且 } y\in I.$$

4. B 中所有理想的全体记以 $\mathrm{Id}(B)$,在包含关系下构成一个格.

理想是滤子的对偶概念,它们之间有紧密的对偶关系:对每个 B 的滤子 F,$F'=\{x'\mid x\in F\}$是 B 的一个理想,称为 F 的对偶理想;反之,对 B 的每个理想 I,$I'=\{x'\mid x\in I\}$是 B 的滤子,称为 I 的对偶滤子.

对偶理想(dual ideal) 见"布尔代数的理想".

对偶滤子(dual filter) 见"布尔代数的理想".

布尔代数的极大理想(maximal ideal of Boolean algebra) 一种特殊的理想.指布尔代数 B 的这样的真理想 M,它不被 B 的其他真理想包含.例如 $P(\{1,2,3\})$有三个极大理想:$\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,$\{\varnothing,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$,$\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$.布尔代数 B 的真理想 M 是极大理想,当且仅当对任何 $y\in B$,有 $y\in M$ 或 $y'\in M$,且二者不同时成立.布尔代数 B 的真理想 I 是极大理想,当且仅当它是素理想.每一布尔代数至少有一个极大理想.布尔代数的每一理想包含在一个极大理想内.无限的有序集可能没有原子,无限布尔代数也可能没有原子.因此,在处理无限布尔代数的表示问题时,将用极大理想和超滤来起原子的作用.

布尔代数的素理想(prime ideal of Boolean algebra) 亦称布尔代数的质理想.一种特殊的理想.指布尔代数 B 的这样的真理想 I,对任何 $x,y\in B$,由 $x\cdot y\in I$ 得出 $x\in I$ 或 $y\in I$.亦即:

1. $\{0\}$是布尔代数 $B=\{0,1\}$的素理想.

2. 每一布尔代数至少有一个素理想.

3. 布尔代数 B 的真理想 I 是极大理想,当且仅当它是一个素理想.

布尔代数的质理想(prime ideal of Boolean algebra) 即"布尔代数的素理想".

布尔代数的主理想(principal ideal of Boolean algebra) 由布尔代数某个元素生成的理想.设 B 为布尔代数,由 $a\in B$ 生成的主理想是 $I=\{x\in B\mid x\leqslant a\}$.例如 $I=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$是幂集代数 $P(\{1,2,3\})$的主理想,它是由$\{1,2\}$生成的.在有穷布尔代数 B 中,每一个极大理想都是 B 的主理想.但是,若 A 是无穷集,则 A 的所有有穷子集所成的理想就不是 $P(A)$的主理想.对于非空集 A,$P(A)$的原子是$\{a\}(a\in A)$,A 中所有不含有 a 的子集组成 $P(A)$的极大主理想.

布尔代数的平凡理想(trivial ideal of Boolean algebra) 一种特殊的理想.指理想$\{0\}$,这里 0 为布尔代数的零元.每一个布尔代数都有平凡理想,它是布尔代数的最小理想.

布尔代数的真理想(proper ideal of Boolean algebra) 异于布尔代数 B 本身的理想.其定义为:

1. $\{0\}$是真理想.

2. 如果$\{0\}$是布尔代数 B 的惟一的真理想,则 $B=\{0,1\}$,即 B 是简单布尔代数.

3. 一个理想为真理想,当且仅当它不含有 1.

布尔代数的滤子(filter of a Boolean algebra) 布尔代数的具有特定结构的子集.布尔代数 A 的滤子是 A 的子集 F,它满足条件:

1. $1\in F$.

2. 如果 $x\in F$,$y\in A$ 且 $x\leqslant y$,则 $y\in F$.

3. 如果 $x\in F$ 且 $y\in F$,则 $x\cdot y\in F$.

由定义可推出:

1. $\{1\}$与 A 均为 A 的滤子.

2. F 是一滤子,当且仅当 $F'=\{x'\mid x\in F\}$是一理想,该理想称为 F 的对偶理想.

3. 涉及滤子,子代数的基数之间有如下不等式:对每一无限布尔代数 A,

$$|A|\leqslant|\mathrm{Ult}\,A|\leqslant|\mathrm{Filt}\,A|\leqslant|\mathrm{Sub}\,A|\leqslant 2^{|A|},$$

其中 $\mathrm{Ult}\,A$ 为 A 的超滤子的全体,$\mathrm{Filt}\,A$ 是 A 的一切滤子所构成的集合,而 $\mathrm{Sub}\,A$ 为 A 的一切子代数所构成的集合.

布尔代数的平凡滤子(trivial filter of Boolean algebra) 一种特殊的滤子.指滤子$\{1\}$.其中 1 是布尔代数 A 的最大元.每一布尔代数都有滤子$\{1\}$,并且平凡滤子是最小滤子.

布尔代数的真滤子(proper filter of Boolean algebra) 异于布尔代数本身的滤子.其定义为:

1. 滤子 F 是真滤子,当且仅当 $0\notin F$;

2. 简单布尔代数 $B=\{0,1\}$有惟一的真滤子$\{1\}$.

布尔代数的超滤子(ultrafilter of Boolean algebra) 一种特殊的滤子.布尔代数 B 的一滤子 F,对于每个 $x\in B$,有 $x\in F$ 或 $x'\in F$,但不能同时成立,则称该滤子 F 为 B 的超滤子.B 不是超滤子,超滤子 F 必是真滤子,且在 B 中无其他真滤子包含 F.因此,超滤子亦称极大滤子.超滤子、素滤子和极大滤子三者是等价的真滤子.超滤子与极大理想之间有密切联系:F 是超滤子,当且仅当 $F'=\{x':x\in F\}$是极大理想.无限序集可能没有原子.无限布尔代数也可能没有原子,在无限布尔代数中,极大理想和超滤子可起到原子的作用.

布尔代数的极大滤子(maximal filter of Boolean algebra) 见"布尔代数的超滤子".

布尔代数的素滤子(prime filter of Boolean al-

gebra） 超滤子的等价定义. 布尔代数 B 的真滤子 F，对于 B 的任二元素 x,y，由 $x+y\in F$ 可推出 $x\in F$ 或 $y\in F$. 素滤子、极大滤子及超滤子三者是等价的真滤子.

布尔代数的主滤子（principal filter of Boolean algebra） 一种特殊的滤子. 设 F 是布尔代数 B 的一个滤子，如果对于某个 $a\in B$，有 $F=\{x\in B|a\leqslant x\}$，则称 F 为 B 的主滤子. F 也称为由 a 生成的主滤子. 当 $a=1$ 时 $F=\{1\}$，则 F 是平凡滤子；当 $a>0$ 时 $0\notin F$，即 $F\neq A$，则 F 是真滤子.

理想对偶（ideal dual） 由给定滤子经对偶定义出的理想. 即形如 $F'=\{x'|x\in F\}$ 的理想，其中 F 是布尔代数 B 的滤子，x' 是 x 之补. 例如，对于任一集 X，X 的有限子集组成的集合是幂集代数 $P(X)$ 的一个理想，它的对偶滤子是 X 的余有限集组成的集合. 理想对偶使布尔代数的滤子与理想之间建立了一一对应关系.

滤子对偶（filter dual） 由给定理想经对偶定义出的滤子. 即形如 $I'=\{x'|x\in I\}$ 的一个滤子，式中 I 是布尔代数 B 的一个理想，x' 是 x 之补. 滤子对偶使布尔代数的理想与滤子之间建立了一一对应关系.

布尔代数的完备理想（complete ideal of Boolean algebra） 一种特殊的理想. 设 I 是布尔代数 B 的一理想，若对 I 中使最小上界 $\sum M$ 存在的任意子集 M 都有 $\sum M\in I$，则称 I 是 B 的一个完备理想.

布尔代数的完备理想的性质是：

1. 每个完备理想均是主理想.

2. 如果 I 是布尔代数 B 的一完备理想，则商代数 B/I 是完备布尔代数.

布尔代数的 κ 完备理想（κ-complete ideal of Boolean algebra） 一种特殊的完备理想. 设布尔代数 B 中理想 I，对 I 中使最小上界 $\sum M$ 存在的每个基数小于 κ 的子集 M，均有 $\sum M\in I$，其中 κ 是一无穷基数. 则称 I 为布尔代数 B 的 κ 完备理想.

布尔代数的 σ 完备理想（σ-complete ideal of Boolean algebra） 一种特殊的完备理想. 指 κ 是可数无穷基数时的 κ 完备理想.

布尔代数的 σ 界理想（σ-bounded ideal of a Boolean algebra） 一种特殊的理想. 布尔代数 A 的一个理想 I 是 σ 界理想，是指 I 的每一个可数子集在 I 中有一个上界. σ 界理想不同于 σ 完备理想，它只要求每个可数子集有上界，而不要求有最小上界.

布尔代数的有限扩张（finite extension of Boolean algebra） 一种特殊的子代数. 设 A 是布尔代数 B 的子代数，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in B$，由 A 和 $\{x_1,x_2\cdots,x_n\}$ 生成的 B 的子代数称为 A 的有限扩张，记为 $A(x_1,x_2\cdots,x_n)=\langle A\cup\{x_1,x_2\cdots,x_n\}\rangle$.

布尔代数的单扩张（simple extension of Boolean algebra） 布尔代数的一种有限扩张. 即 $n=1$ 时的有限扩张. 设 A 是布尔代数 B 的子代数，对于 $x\in B$，由 A 和 x 生成的子代数 $A(x)=\langle A\cup\{x\}\rangle$ 称为 A 的由 x 生成的（简）单扩张. 不难由范式定理证明：

$$A(x)=\{a_1\cdot x+a_2\cdot x';\ a_1,a_2\in A\}$$
$$=\{a_1\cdot x+a_2\cdot x'+a_3;a_1.a_2.a_3\in A\ \text{且两两不相交}\}.$$

单扩张概念在研究子代数，同态扩张中是有用的概念.

布尔代数的同态（homomorphism of Boolean algebras） 两个布尔代数间的一种对应关系. 设 $\langle B,\cup,\cap,',0,1\rangle$ 与 $\langle P,\oplus,*,-,\alpha,\beta\rangle$ 是两个布尔代数，满足下列条件的映射 $h:B\to P$ 称为由布尔代数 B 到布尔代数 P 的同态. 对任何 $a,b\in B$ 有：

1. $h(a\cup b)=h(a)\oplus h(b)$.
2. $h(a\cap b)=h(a)*h(b)$.
3. $h(a')=\overline{h(a)}$.
4. $h(0)=\alpha$.
5. $h(1)=\beta$.

此外，若 h 是满（单）射，则 h 称为布尔满（单一）同态. 布尔代数的单一同态又称为嵌入. 若 h 是双射，则 h 称为布尔同构，并说布尔代数 B 与 P 同构. 布尔代数 B 到 B 内（上）的同态（同构）称为布尔代数 B 的自同态（自同构）. 其实，只要 h 满足 1 与 3 或 2 与 3，h 就是布尔代数的同态.

布尔代数的满同态（surjective homomorphism of Boolean algebra） 见“布尔代数的同态”.

布尔代数的嵌入（embedding of Boolean algebra） 见“布尔代数的同态”.

布尔代数的单一同态（monomorphism of Boolean algebra） 即“布尔代数的嵌入”.

布尔代数的同构（isomorphism of Boolean algebras） 见“布尔代数的同态”.

布尔代数的自同态（endomorphism of a Boolean algebra） 见“布尔代数的同态”.

布尔代数的自同构（automorphism of a Boolean algebra） 见“布尔代数的同态”.

布尔代数的同态象（homomorphic image of a Boolean algebras） 与给定布尔代数相似的一种布尔代数. 若 h 是布尔代数 B 到布尔代数 P 的同态，令 $h[B]=\{p\in P|\text{存在 } b\in B \text{ 且 } p=h(b)\}$，则 $h[B]$ 称为 B 的同态象. 若 h 是 B 到 P 的满同态，则 B 的同态象就是 P.

布尔代数的商代数（quotient algebra of a Boolean algebras） 由布尔代数紧缩成的一个同态象. 设 I 是布尔代数 A 的一个理想，F 是它的对偶滤

子,则如下定义的关系≡是 A 上的合同关系:$x\equiv y$ 当且仅当 $x\triangle y\in I$,这里△是对称差运算.即对 A 中的任何 x,y, $x\equiv y$,当且仅当 $x+i=y+i$ 对某个 $i\in I$,当且仅当 $x\cdot f=y\cdot f$ 对某个 $f\in F$.令 $[x]=\{x_1\in A:x\equiv x_1\}$ 表示 x 关于≡的等价类,再令 $A/\equiv=\{[x]:x\in A\}$ 表示关于≡的等价类的集合,在其中定义:

$$[x]\vee[y]=[x\vee y],$$
$$[x]\wedge[y]=[x\wedge y],$$
$$[x]'=[x'],$$

则 $\langle A/\equiv,\vee,\wedge,',[0],[1]\rangle$ 也构成一个布尔代数,称为 A 关于 I(或 F)的商代数,记为 $A/\equiv$ 或 A/I 或 A/F.如果 I 是 A 的真理想,则商代数 A/I 是非退化布尔代数.

代数 $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ (algebra $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$) 一种特殊的商代数.$\mathscr{P}(\omega)$ 是自然数的幂集代数,而 fin 是 $\mathscr{P}(\omega)$ 中有限集的理想.这个代数具有许多特性:

1. $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 具有可数分离性.
2. $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 无原子.
3. $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 中每个无限单位分割是不可数的.
4. 如果 C 是 $(\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin})\setminus\{1\}$ 中的有限或可数链,则对每个 $c\in C$ 有 $b\in B$ 使 $c\leqslant b<1$.
5. $c(\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin})=2^{\omega}$ 是可达的,这里 $c(\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin})$ 是 $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 的胞腔度,即 $c(\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin})=\sup\{|x|\,|x$ 是 $\mathscr{P}(\omega)/\mathrm{fin}$ 中两两不相交的族$\}$.如果对 A 中的某个两两不相交的族 X, $cA=|X|$,则 cA 是可达的.

布尔代数的自然同态(natural homomorphism of Boolean algebras) 亦称布尔代数的典型同态.布尔代数到它的商代数上的同态.指一种特殊的同态映射 $f:\mathscr{U}\to\mathscr{U}/\Delta$,式中 $\mathscr{U}$ 为一布尔代数,Δ 为 $\mathscr{U}$ 的一个理想,$\mathscr{U}/\Delta$ 为 $\mathscr{U}$ 关于 Δ 的商代数,并规定 $f(a)=[a]$,而 $[a]$ 是包含 a 的关于二元关系~的等价类,其中对任意 $a,b\in\mathscr{U}$ 有 $a\sim b$ 当且仅当 $a\cdot b'\oplus b\cdot a'\in\Delta$.自然同态还可以从合同关系出发来描述(参见"布尔代数的典型同态").

布尔代数的典型同态(canonical homomorphism of Boolean algebras) 即"布尔代数的自然同态".设~是布尔代数 A 的一个合同关系,对每一个 $x\in A$,令 $\pi(x)=\{x_1\,|\,x_1\in A$ 且 $x\sim x_1\}$,又令 $A/\sim=\{\pi(x)\,|\,x\in A\}$ 是~的等价类构成的集合,则 $A/\sim$ 是布尔代数的商代数(参见"布尔代数的商代数").令 $\pi:A\to A/\sim;\pi(x)=\pi(x)$,对 $x\in A$.π 称为 A 到 $A/\sim$ 的典型同态.

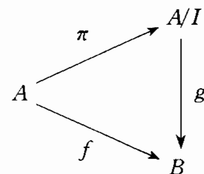
布尔代数的同态核(kernel of a homomorphism of Boolean algebras) 布尔代数的一个子集,涉及布尔代数的同态.设 f 是布尔代数 A 到布尔代数 B 的一个同态映射,则称集合

$$f^{-1}(0)=\{x\,|\,x\in A\text{ 且 }f(x)=0\}$$

是 f 同态核.$f^{-1}(0)$ 是 A 的一个理想.设 $f:A\to B$ 是具有核 I 的满同态,$g:A\to C$ 是具有核 J 之同态,那么存在惟一的同态 $h:B\to C$ 使 $h\circ f=g$,当且仅当 $I\subseteq J$.

布尔代数的对偶核(dual kernel of Boolean algebras) 布尔集的一个特殊子集.指集合 $f^{-1}(1)=\{x\,|\,x\in A$ 且 $f(x)=1\}$,式中 f 为布尔代数 A 到布尔代数 B 的一个同态映射,$f^{-1}(1)$ 是 A 的一个滤子.设 I 是布尔代数 A 的理想,F 为其对偶滤子,定义≡:$x\equiv y$ 当且仅当 $x\triangle y\in I$,≡是 A 上的合同关系,以 A/I 或 A/F 记商代数 $A/\equiv$.那么自然满同态 $\pi:A\to A/I$ 的对偶核是 F.

布尔代数的同态定理(homomorphism theorem of Boolean algebras) 布尔代数的代数理论的一个重要定理.设 $f:A\to B$ 是具有核 I 的布尔代数的一个满同态,那么存在惟一的同构 g: $A/I\to B$ 使得 $g\circ\pi=f$,式中 π: $A\to A/I$ 是一自然同态(如图所示).同态定理常用来检验两布尔代数是否同构.例如:设 a 是布尔代数 A 的任一元素,而 $I=\{x\in A\,|\,x\leqslant a'\}$ 是 A 由 a' 生成的主理想.那么 $A/I\cong A\restriction a$.这是因为由 $p_a(x)=x\cdot a$ 定义的投影满同态 $p_a:A\to A\restriction a$ 有 I 为其核.



完备同态(complete homomorphism) 保持最小上界的一种布尔同态.设 f 是布尔代数 A 到布尔代数 B 内的一个同态.如果对 A 的每一个子集 M,只要最小上界 $\sum M$ 存在,就有 $f(\sum M)=\sum f(M)$,则称 f 是一个完备同态.

κ 完备同态(κ-complete homomorphism) 一种特殊的完备同态.设 f 是布尔代数 A 到布尔代数 B 内的一个同态,κ 是一个无穷基数.如果对 A 的每一个基数比 κ 小的子集 M,只要最小上界 $\sum M$ 存在,就有 $f(\sum M)=\sum f[M]$,其中 $\sum M$ 表示 M 的最小上界,$f[M]$ 表示 M 在 f 之下的象集.设 A 是 κ 完备布尔代数,I 是 A 的一理想,那么 I 是 κ 完备的,当且仅当自然满同态 $\pi:A\to A/I$ 是 κ 完备的.

σ 完备同态(σ-complete homomorphism) 见"κ 完备同态".即 κ 为可数基数时的 κ 完备同态.

二值同态(two-valued homomorphism) 布尔代数到一个二元布尔代数的同态映射.布尔代数 B 的一个极大理想 Δ 可决定一个二值同态 $h:B\to\{0,1\}$,这可置

$$h(a)=\begin{cases}0 & (a\in\Delta),\\ 1 & (a\overline{\in}\Delta).\end{cases}$$

反之,布尔代数 B 的一个二值同态 h 可决定 B 的一个极大理想 $\Delta=\{a\,|\,h(a)=0,a\in B\}$.这表明 B 的极

大理想与二值同态间存在一一对应关系.由于极大理想与极大滤子是对偶的,故二值同态与极大滤子之间也存在一一对应关系.

同态对偶(dual of a homomorphism)　一个特殊的映射.设 f 是布尔代数 A 到布尔代数 B 的一个同态映射,f 的对偶是映射 f^d: $\mathrm{Ult}\,B\to\mathrm{Ult}\,A$,它的定义如下:$f^d(y)=f^{-1}[y]$,$y\in\mathrm{Ult}\,B$,其中 $\mathrm{Ult}\,A$ 表示 A 的所有超滤子构成的集合.

闭开代数(clopen algebra)　一种特殊的布尔代数.拓扑空间 X 的所有闭开子集构成 X 上的集合代数,称为 X 的闭开代数,记为 $\mathrm{clop}\,X$(集合是闭开的,是指它既是闭集,也是开集).

正则开代数(regular open algebra)　一种特殊的布尔代数.设 X 是一个拓扑空间,对任意 $a\subseteq X$,设$\mathrm{cl}(a)$表示 a 的闭包,$\mathrm{int}(a)$表示 a 的内部.令 $r(a)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(a))$是 a 的正则化.如果 $r(u)=u$,则称 $u\subseteq X$ 为正则开集.记

$$RO(X)=\{u\mid u\subseteq X\text{ 且 }r(u)=u\}.$$

$RO(X)$是关于集合的包含关系构成的完备布尔代数,称其为 X 的正则开代数.

贝尔代数(Baire algebra)　一种特殊的布尔代数.拓扑空间 X 的一个子集 a 有贝尔性质,是指存在 X 的一个开集 u 使得对称差 $a\triangle u$ 是一个贫集,即可数多个无处稠密集的并集.用初等拓扑方法不难证明集合 $\mathrm{Bai}\,X=\{a\subseteq X\mid a\text{ 有贝尔性质}\}$是 X 上集合的 σ 代数称为 X 的贝尔代数.上述内容由贝尔(Baire,R.L.)提出.

布尔空间(Boolean space)　一种特殊的拓扑空间.如果拓扑空间 X 的所有闭开子集的集合 $\mathrm{clop}\,X$ 是 X 的拓扑的基,则说 X 是零维的.紧致的并且零维的豪斯多夫空间称为布尔空间.其特点是:

1. 每一个有穷离散空间是布尔空间.
2. 任何布尔空间族的乘积空间都是布尔空间.
3. 布尔空间的每一个子空间是布尔空间.

可利用布尔空间这一概念研究布尔代数的结构,建立布尔代数和拓扑空间之间的联系.

对偶代数(dual algebra)　一种特殊的布尔代数.设 X 是一个布尔空间,闭开代数 $\mathrm{clop}\,X$ 称为 X 的对偶代数.每一个布尔代数同构于一个对偶代数.

对偶空间(dual space)　一种特殊的拓扑空间.设 A 是一个布尔代数,$\mathrm{Ult}\,A$ 是布尔代数 A 的所有超滤子构成的集合,又设 $S: A\to P(\mathrm{Ult}\,A)$是斯通映射.$\mathrm{Ult}\,A$ 加上以 $S[A]$为拓扑基的拓扑称为 A 的对偶空间,亦称 A 的斯通空间,或称 A 的超滤空间.

斯通空间(Stone space)　即"对偶空间".

超滤空间(space of ultrafilter)　即"对偶空间".

相对完备子代数(relatively complete subalgebra)　一种特殊的子布尔代数.如果布尔代数 B 的一个子布尔代数 A,对每一个 $b\in B$,在 A 中有一个最大元素 a,使得 $a\leqslant b$;或对 B 中每个 b,在 A 中存在一个最小元 a,使得 $b\leqslant a$,则称 A 是 B 的相对完备子代数.若 A 是 B 中一个相对完备子代数,则:

1. $\mathrm{id}_A: A\to B$ 保持 A 中一切和与积,式中 id_A 指单位映射.
2. 如果 B 是完备的,那么 A 也完备.

斯通映射(Stone map)　布尔代数的一个特殊的同态映射.设 A 是一个布尔代数,$\mathrm{Ult}\,A$ 是 A 的超滤子的集合,映射 $S: A\to\mathscr{P}(\mathrm{Ult}\ A)$对每一 $x\in A$ 由下式定义:

$$S(x)=\{p\in\mathrm{Ult}\,A\mid x\in p\},$$

其中 $\mathscr{P}(\mathrm{Ult}\,A)$表示 $\mathrm{Ult}\,A$ 的幂集.称这样的映射 S 为 A 的斯通映射.S 是 A 到 $\mathscr{P}(\mathrm{Ult}\,A)$内的一个同态映射.

斯通表示定理(Stone representation theorem)　布尔代数的结构理论中最重要的定理.这个定理有两种表现形式:

1. 集合论形式.每一个布尔代数同构于一个集合代数.
2. 拓扑形式.每一个布尔代数同构于一个布尔空间的闭开代数.或说布尔代数 A 的对偶空间 $\mathrm{Ult}\,A$ 是布尔空间,并且 A 的斯通映射是 A 到 $\mathrm{clop}\text{-}\mathrm{Ult}\,A$ 上的同构.

斯通表示定理把对布尔代数的研究归结为对集合代数或闭开代数的研究.同时可以把集合代数中的定理和恒等式不加证明地推广到一切布尔代数中.斯通(Stone,M.H.)发表过大量的专题论文,其内容有布尔代数的表示,布尔环论在一般拓扑中的应用等.

布尔代数的表示(representation of a Boolean algebra)　布尔代数 A 到幂集代数内的一个单一同态.设 A 是一个布尔代数,$e: A\to P(X)$是 A 到幂集代数 $P(X)$的单一同态.则称该同态为布尔代数 A 的一个表示.表示 $e: A\to P(X)$称为约化的,是指 $e[A]$分离 X 的点,即如果 x,y 是 X 的不同点,那么存在 $a\in A$,使得 $x\in e(a)$并且 $y\notin e(a)$.表示 e 称为完美的,是指对 A 的每一个超滤子 p,存在 X 的一个点 x,使得对所有 $a\in A$,$a\in p$,当且仅当 $x\in e(a)$.任一表示 $e: A\to P(X)$可以诱导出一个映射 φ: $X\to\mathrm{Ult}\,A$,$\varphi(x)=\{a\in A\mid x\in e(a)\}$.$e$ 是约化的,当且仅当 φ 是单射;e 是完美的,当且仅当 φ 是满射.这里 $\mathrm{Ult}\,A$ 是 A 上一切超滤子所构成的集合.

布尔代数的约化表示(reduced representation of a Boolean algebra)　见"布尔代数的表示".

布尔代数的完美表示(perfect representation of a Boolean algebra)　见"布尔代数的表示".

齐次布尔代数(homogeneous Boolean algebra) 一种特殊的布尔代数.设 B 是一个布尔代数,如果对于布尔代数 B 的每一个非零元素 b,相对代数 $B\upharpoonright b=\{x|x\in B$ 且 $x\leqslant b\}$ 同构于 B.则称 B 为齐次布尔代数.退化布尔代数与二元布尔代数都是齐次的;四元布尔代数不是齐次的;有限齐次布尔代数的例子很少,然而每一个无限自由布尔代数都是齐次的.

布尔代数的自由生成元集(set of free generators of Boolean algebra) 一种特殊的生成元集.设 X 是布尔代数 B 的一个生成元集,对于由它到布尔代数 C 的每个映射 h,都存在 h 的一个扩充 g,使得 g 是 B 到 C 中的布尔同态,则称 X 是 B 的自由生成元集:

1. 对任一非负整数 k,如果 B 是一个布尔代数而且有一个由 k 个元素组成的自由生成元集,则 B 有 2^{2^k} 个元素.

2. 如果 D_1,D_2 是同一个布尔代数 B 的自由生成元集,则 D_1 与 D_2 有相同的基数.

3. 如果 D_1 是 B_1 的自由生成元集,D_2 是 B_2 的自由生成元集,且 D_1 与 D_2 有相同的基数,则 B_1 与 B_2 同构.

自由布尔代数(free Boolean algebra) 一种特殊的布尔代数.令 X 是任意集合,称有序对 (e,F) 在 X 上自由,其中 F 是布尔代数,e 是从 X 到 F 中的映射,如果对每个从 X 到布尔代数 A 的映射 f 存在惟一的同态 $g:F\to A$,满足 $g\circ e=f$.如果存在 X 和 $e:X\to F$ 使得 (e,F) 在 X 上自由,则称布尔代数 F 是自由的.对每个集合 I,存在一个 I 上的自由布尔代数.

布尔代数的无关子集(independent subset of Boolean algebra) 布尔代数的一个特殊子集.设 B 是一个布尔代数,且 $U\subset B$,对 U 中任意两个不相交的有限子集 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 及 $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$,有 $u_1\cdot u_2\cdot\cdots\cdot u_n\cdot v_1'\cdot v_2'\cdot\cdots\cdot v_m'>0$,即 U 上的所有非平凡初等积是非零的.则称 U 是 B 的无关子集.由这样的 U 生成的子代数 A 称为由 U 无关生成的或自由生成的.贝尔卡(Balcar)与弗兰尼克(Franěk)指出:每个无限完备布尔代数 A 有一个基数为 $|A|$ 的无关子集.

无关子代数族(independent family of subalgebra) 一种特殊的子代数集合.布尔代数 A 的一个子代数族,设 $(B_i)_{i\in I}$ 是对于任何正整数 n,若 I 中 $i(1),i(2),\cdots,i(n)$ 两两互异,且 $b_{i(k)}$ 是 $B_{i(k)}$ 中的非零元素,则在 A 中就有 $b_{i(1)}\cdot b_{i(2)}\cdot\cdots\cdot b_{i(n)}>0$,则称 $(B_i)_{i\in I}$ 是无关子代数族.无关子代数自然出现在自由布尔代数中,设 F 在 $U\subseteq F$ 上是自由的,且 $(U_i)_{i\in I}$ 是 U 的两两不相交的子集族,那么 F 的子代数 $\langle U_i\rangle$ 就构成无关子代数族,这里 $\langle U_i\rangle$ 表示由 U_i 生成的子代数.

布尔代数的无关度(independence of a Boolean algebra) 表示无关子集大小的一种度量.对布尔代数 B,基数 $\operatorname{ind}B=\sup\{|U|\,|U$ 是 B 的一个无关子集$\}$ 称为 B 的无关度.对每一个不可数布尔代数 B 有 $\operatorname{ind}B=|B|$.

理想无关子集(ideal-independent subset) 布尔代数的一个特殊子集.设 D 是布尔代数 A 的子集,其任意元素 d 都不属于由 $D\backslash\{d\}$ 在 A 中生成的理想,则称 D 是 A 的理想无关子集.谢拉赫(Shelah,S.)引进此概念以证明下面结果:如果 A 是一个无限布尔代数且 $\operatorname{id}(A)$ 是 A 的理想的个数,则

$$\operatorname{id}(A)^{\omega}=\operatorname{id}(A).$$

布尔代数中的稠密子集(dense subset in Boolean algebra) 布尔代数的一种特殊子集.设 X 是布尔代数 B 的子集,若:

1. $X\subseteq B^+=B\backslash\{0\}$;

2. 对每个 $b\in B^+$,有 $x\in X$ 使得 $0<x\leqslant b$,

则称 X 是布尔代数 A 的稠密子集.

B 中的稠密子集 X 有多种等价的刻画法:

1. 对每个 $b\in B$,有一两两不相交族 $M\subseteq X$ 使得 $b=\sum M$.

2. 对每个 $b\in B$,有 $M\subseteq X$ 使 $b=\sum M$.

3. 对每个 $b\in B$,$b=\sum\{x\in X:x\leqslant b\}$.其中 $\sum M$ 表示 M 的最小上界,而 $X\subseteq B^+$.

κ 链条件(κ-chain condition) 集合的两两不相交子集族的基数的上界.设布尔代数 A 的每一个两两不相交子集族 X 均有 $|X|<\kappa$,则称 A 满足 κ 链条件.

如果布尔代数 A 满足 κ 链条件,且 $X\subseteq A$,那么有某个基数小于 κ 的 $Y\subseteq X$,使得 X 与 Y 在 A 中有相同的上界.特别,如果 $\sum X$ 与 $\sum Y$ 之一存在,则 $\sum X=\sum Y$.

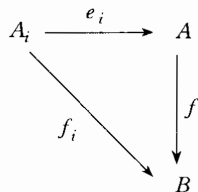
可数链条件(countable chain condition) κ 链条件中的 κ 为可数基数时的特殊情况.可数链条件简记为 c.c.c.每一个自由布尔代数均满足可数链条件.

布尔代数的自由积(free product of Boolean algebras) 自由布尔代数的推广.设 $(A_i)_{i\in I}$ 是一族布尔代数,$((e_i)_{i\in I},A)$ 称为 $(A_i)_{i\in I}$ 的自由积的条件是:

1. A 是布尔代数.

2. 每一 e_i 是 A_i 到 A 内的同态.

3. 对每一族同态 $(f_i)_{i\in I}$,存在惟一的同态 $f:A\to B$ 使得 $f\circ e_i=f_i\ (i\in I)$,其中 f_i 是 A_i 到布尔代数 B 内的同态(如图).



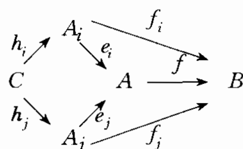
每一个布尔代数族，在同构的意义下有惟一的自由积.

布尔代数的融和自由积(amalgamated free product of Boolean algebras)　布尔代数自由积的推广. 设$(A_i)_{i\in I}$是一族布尔代数，C 是另一个布尔代数，并且对每一 $i\in I$，$h_i: C\to A_i$ 是单一同态. $((e_i)_{i\in I},A)$称为$((h_i)_{i\in I},(A_i)_{i\in I})$在 C 上的融和自由积的条件是：

1. A 是布尔代数.

2. $e_i: A_i\to A$ 是同态，且 $e_i\circ h_i=e_j\circ h_j$(对所有 $i,j\in I$).

3. 对每一族同态$(f_i)_{i\in I}$(f_i 是 A_i 到任一布尔代数 B 内的同态)，只要 $f_i\circ h_i=f_j\circ h_j(i,j\in I)$，就存在惟一的同态 $f: A\to B$ 使得 $f\circ e_i=f_i(i\in I)$(如图).



当 C 是二元代数时布尔代数的融和自由积，就退化成布尔代数的自由积.

特殊布尔代数

有限-余有限代数(finite-cofinite algebra)　一种特殊的布尔代数. 如果集合 X 的子集 A 关于 X 的余集 $X\setminus A$ 是有限的，则称 A 为在 X 中余有限的. $Y=\{A|A$ 是 X 的有限子集或是余有限的子集$\}$是幂集代数 $P(X)$的子布尔代数，称为有限-余有限代数. 对每一无限集 X，有限-余有限代数是 $P(X)$的真子代数.

区间代数(interval algebra)　一种特殊的布尔代数. 设 L 是有首元素 O_L 的线性序集，将 L 的线性序扩充到 $L\cup\{\infty\}$，其中∞是不在 L 中的一个元素，并且规定对每一个 $x\in L, x<\infty$. 对任意 $x,y\in L\cup\{\infty\}$，集合$[x,y)=\{z\in L|x\leqslant z<y\}$称为 L 的由 x 与 y 决定的半开区间. 设 A 是由 L 的所有可以表示为有限个半开区间的并的子集所构成的集合，那么 A 对集合的并、交、补运算构成布尔代数，称为 L 的区间代数. 当 L 没有首元素时也可构成区间代数. 布尔代数 A 同构于一个区间代数当且仅当它由一个链 $C\subseteq A$ 所生成.

原子布尔代数(atomic Boolean algebra)　一种特殊的布尔代数. 设 B 是一个布尔代数，对于布尔代数 B 中每个非零元 x，均存在某个原子 a 使 $a\leqslant x$ 成立，则称 B 为原子布尔代数. 有限布尔代数皆为原子布尔代数. 含有 n 个原子的有限布尔代数共有 2^n 个元素. 可以证明：每一个原子布尔代数同构于一个集合代数；而每一个完备的原子布尔代数同构于一个幂集代数. 这是著名的斯通表示定理的一种较弱说法(参见“原子”).

无原子布尔代数(non-atomic Boolean algebra)　一种特殊的布尔代数. 指不含原子的布尔代数. 主要包括以下几种：

1. 因有限布尔代数皆为原子代数，故凡无原子布尔代数均是无限的.

2. 语句丛布尔代数是无原子布尔代数的一个例子.

3. 可以证明：一布尔代数 B 是无原子的(或原子的)，当且仅当补 $\overline{B}$ 是无原子的(或原子的).

4. 每个无穷自由布尔代数是无原子的(参见“原子”).

超原子布尔代数(super-atomic Boolean algebra)　一种特殊的布尔代数. 设 A 是布尔代数，如果 A 的每一个非平凡同态象都有一个原子. 则称 A 为超原子布尔代数. 退化布尔代数及每一个有限布尔代数均是超原子的. 超原子布尔代数具有下列特征. 令 A 是一个非平凡布尔代数，则下列命题是等价的：

1. A 是超原子的.

2. A 的每个子代数是原子的.

3. A 的每个子代数有一个原子.

4. A 的每个非平凡同态象有一个原子.

相对代数(relative algebra)　亦称因子代数. 一种特殊的布尔代数. 设 A 是一个布尔代数并且 $a\in A$，那么 A 的子集 $A\upharpoonright a=\{x|x\in A$ 且 $x\leqslant a\}$关于 A 的偏序构成一个布尔代数，称此代数为 A 关于 a 的相对代数. 例如，对于任何集 X 及任何 $a\subseteq X$，$P(X)\upharpoonright a$是 a 的幂集代数. 但对于 $a\neq 1$，$A\upharpoonright a$ 不是 A 的一个子代数. 对于布尔代数 A 中每个 a，$A\cong(A\upharpoonright a)\times(A\upharpoonright a')$. 这正是将$(A\upharpoonright a)$称为因子代数的原因.

因子代数(factor algebra)　即“相对代数”.

公式代数(algebra of formulas)　一种特殊的布尔代数. 令 L 是关于命题或一阶逻辑的语言，T 是 L 中语句的任一集合，对于 L 中的公式 α,β 定义 $\alpha\sim\beta$，当且仅当 $T\vdash\alpha\leftrightarrow\beta$，即当且仅当 $\alpha\leftrightarrow\beta$ 在命题(或谓词)演算中从公理 T 形式可证明. “$\sim$”是在一切公式集上的一个等价关系. 令$[\alpha]$是 α 关于$\sim$的等价类，且令 $B(T)=\{[\alpha]:\alpha$ 是 L 的一个公式$\}$，并规定：

$$[\alpha]+[\beta]=[\alpha\vee\beta],[\alpha]\cdot[\beta]=[\alpha\wedge\beta],$$

$$[\alpha]'=[\neg\alpha],1=[\alpha_0\to\alpha_0],0=[\alpha_0\wedge\neg\alpha_0],$$

式中 α_0 是任一公式. 则$\langle B(T),+,\cdot,',1,0\rangle$构成布尔代数，称此布尔代数为关于 T 的公式代数. 公式代数建立了布尔代数与逻辑之间的联系；进而可以

证明：每个布尔代数同构于某个公式代数 $B(T)$.

林登包姆-塔尔斯基代数(Lindenbaum-Tarski algebra) 公式代数的一个子代数. 设$B(T)$是公设代数，令 $A=\{[\alpha]|\alpha$是 L 的一个语句(命题)$\}$，则 $A\subseteq B(T)$，且 A 是公式代数的子代数，称为 T 的林登包姆-塔尔斯基代数：

1. $[\alpha]$实际上是语句(命题)丛，因而此代数又称为语句丛布尔代数或命题布尔代数.

2. 可以证明：每一个布尔代数同构于一个(林登包姆-塔尔斯基)代数.

此代数为林登包姆(Lindenbaum, A.)与塔尔斯基(Tarski, A.)所提出，

语句丛布尔代数(Boolean algebra of the statement bundle) 见“林登包姆-塔尔斯基代数”.

ω_1 万有布尔代数(ω_1-universal Boolean algebra) 一种特殊的布尔代数. 设 B 是布尔代数，对基数至多为 ω_1 的每一个布尔代数均可嵌入到此布尔代数 B 中，则称布尔代数 B 为 ω_1 万有布尔代数. 所谓布尔代数 A 嵌入到布尔代数 B 中，是指存在一个单一同态映射 $f: A\to B$. 可以证明，具有强可数分离性质的布尔代数是 ω_1 万有的.

刚体布尔代数(rigid Boolean algebra) 恒等映射 id_B 是其惟一的自同构的布尔代数. 一个布尔代数 B 是刚体的，当且仅当在 B 中没有非零不相交元素具有同构的相对代数. 即没有非零不相交的 a，b 使得相对代数 $B\upharpoonright a$ 与 $B\upharpoonright b$ 同构. 范道文(Van Douwen)、蒙克(Monk)和鲁宾(Rubin, M.)等人指出：获得刚体布尔代数有些困难，因为至少有四个元素的可数布尔代数不可能是刚体的.

树代数(tree algebra) 一种特殊的布尔代数. 一个偏序集$(T,\leqslant_T)$是一棵树，如果每一个 $t\in T$，集合 $\mathrm{pred}(t)=\{x\in T|x<_T t\}$是由$<_T$ 决定的一个良序集合. 设$(T,\leqslant)$是一棵树，对每一个 $t\in T$，令 $b_t=\{s\in T|t\leqslant s\}$；由$\{b_t|t\in T\}$生成的 T 上的集合代数 B_T 称为 T 的树代数. 其中 b_t 称为 B_T 的典范生成元. 可以证明：每个树代数可嵌入到一个区间代数. 特别地，每个树代数是收缩的. 树代数是 20 世纪 80 年代初由布列纳(Brenner, G.)引进，用来提供具有悖论性质的布尔代数.

收缩布尔代数(retracting Boolean algebra) 一种特殊的布尔代数. 一个布尔代数 B 是收缩的，如果对每一个满同态映射 $\pi: B\to B'$，均有一个同态映射 $\varepsilon: B'\to B$ 使得 $\pi\circ\varepsilon=\mathrm{id}_{B'}$，其中 B'是布尔代数，$\circ$是映射的复合，$\mathrm{id}_{B'}$是 B'上的恒等映射. 一个区间代数的一个子代数未必同构于一个区间代数，但是一个区间代数的子代数却具有一个很强的性质，即收缩性，这就是鲁宾(Rubin, M.)证明的一个定理：一个区间代数的每一个子代数都是收缩的.

霍普夫-布尔代数(Hopfian-Boolean algebra) 一种特殊的布尔代数. 布尔代数 A 是霍普夫的，如果 A 是无穷的并且每一个满自同态是一对一的. 霍普夫(Hopf, H)在研究李群的同调与余同调时，于 1935 年首次提出.

康托尔-本迪克松导数(Cantor-Bendixson derivative) 拓扑空间的所有非孤立点组成的子空间. 布尔空间 X 的一阶康托尔-本迪克松导数是指 $X'=X\backslash I_s(X)$，这里 $I_s(X)$表示 X 的孤立点的集合，即 $I_s(X)=\{x\in X|x$ 是 X 的孤立点$\}$. 然后规定 X 的闭子集的一个递减序列$(X_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{ord}}$，这里 ord 表示一切序数的类：

$$X_0=X, X_{\alpha+1}=(X_\alpha)', X_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}X_\alpha.$$

当 λ 是极限序数时，X_α 称为 X 的 α 阶康托尔-本迪克松导数.

康托尔-本迪克松不变量(Cantor-Bendixson invariant) 超原子代数研究中的重要概念. 设 A 是超原子布尔代数，且 X 是它的对偶空间. 存在惟一的对$(\alpha(A),n(A))=(\alpha(X),n(X))$使得：

1. 如果 A 平凡，则 $\alpha(A)=-1$ 且 $n(A)=0$；否则 $\alpha(A)$是序数，且 $n(A)$是正整数.

2. 如果 A 非平凡，则 $A_{\alpha(A)}$，A 的 $\alpha(A)$阶康托尔-本迪克松导数，是有限的且正好具有 $n(A)$个原子.

3. 当 A 无限时，$\alpha(A)<|A|^+$，$\alpha(A)$和 $n(A)$则为 A 的康托尔-本迪克松不变量.

此概念在康托尔-本迪克松分析中，被用来了解超原子代数的结构.

布尔代数的基数序列(cardinal sequence of a Boolean algebra) 一个特殊的序列. 令 A 是非平凡超原子布尔代数，A 的基数序列是序列 $C=(C_\alpha)_{\alpha\leqslant\rho}$. 这里 $\rho=\alpha(A)$，且 C_α 是 $At(A_\alpha)$的基数，$At(A_\alpha)$是 A 的 α 阶康托尔-本迪克松导数的原子的集合.

递归布尔代数(recursive Boolean algebra) 具有递归性质的布尔代数. 设 $\mathscr{U}=\langle A,+,\cdot,',0_A,1_A\rangle$是一个可数布尔代数(即 A 至多含可数个元素). 如果 $\mathscr{U}$ 的论域 A 是自然数集 N 的一个递归子集，并且运算$+$，$\cdot$ 和 $'$ 是部分递归的，那么称 $\mathscr{U}$ 是一个递归布尔代数(参见《数学辞海》第四卷《数理逻辑》中的有关条目).

可判定布尔代数(decidable Boolean algebra) 能用程序来决定其命题真假的布尔代数. 设 $\mathscr{U}=\langle A,+,\cdot,',0_A,1_A\rangle$是一个可数布尔代数(即 A 至多含可数个元素). 如果 A 是自然数集 N 的一个递归子集，并且 $\mathscr{U}$ 的理论 $Th\langle A,+,\cdot,',0_A,1_A,\{a\}_{a\in A}\rangle$是可判定的，那么就称 $\mathscr{U}$ 是可判定的布尔代数(参见《数学辞海》第四卷《数理逻辑》中的有关条目).

递归可枚举布尔代数(recursively enumerable Boolean algebra)　一种特殊的布尔代数. 设 $\mathscr{U}=\langle A,+,\cdot,',0_A,1_A\rangle$ 是一个可数布尔代数(即 A 至多含可数个元素). 如 A 是自然数集 N 的一个递归子集,并且运算 $+$, $\cdot$ 和 $'$ 是部分递归的,而且相等关系"$=_A$"是递归可枚举的(即存在一个关于 $+$, $\cdot$ 和 $'$ 的递归可枚举合同关系"$=_A$"使得 $\mathscr{U}/=_A$ 是一个布尔代数),那么就称 $\mathscr{U}$ 为一个递归可枚举布尔代数(参见《数学辞海》第四卷《数理逻辑》中的有关条目).

算术布尔代数(arithmetic Boolean algebra)　一种特殊的布尔代数. 设 $\mathscr{U}=\langle A,+,\cdot,',0_A,1_A\rangle$ 是一个可数布尔代数(即 A 至多含可数个元素). 如果 A 是自然数集合 N 的一个算术子集,并且运算 $+$, $\cdot$ 和 $'$ 是算术的,而且 A 上的相等关系也是算术的,则称 $\mathscr{U}$ 是一个算术布尔代数. n 元关系 R 是算术的,如果存在一个 $n+m$ 元递归关系 S 使得

$$R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid(Q_1y_1),(Q_2y_2),\cdots,(Q_my_m)S(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)\},$$

其中 Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

布尔代数的可判定性(decidability of Boolean algebra)　数理逻辑中的重要概念之一. 关于布尔代数的可判定性主要有以下结果:

1. 塔尔斯基定理:布尔代数的一阶理论 $Th(BA)$ 是可判定的.

2. 鲁宾定理:有一个特异子代数的布尔代数的一阶理论是不可判定的. 例如,设 B 是 A 的一个子布尔代数,则 (A,B) 的一阶理论是不可判定的.

布尔函数与方程

布尔表达式(Boolean expression)　简称布尔公式. 布尔代数研究的基本对象. 是布尔代数 $\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 中按如下递归定义的符号串:

1. B 中任何元素是布尔表达式.

2. 任何变元是布尔表达式.

3. 若 h_1 和 h_2 是布尔表达式,则 (h_1+h_2), $(h_1\cdot h_2)$ 和 (h_1') 也是布尔表达式.

4. 只有通过有限次运用规则 1,2 与 3 所构成的符号串才是布尔表达式. 人们将含有 n 个相异变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的布尔表达式记为 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,并称为 n 元布尔表达式.

只有按定义中规则所得到的符号串才是布尔表达式,如 $h+$, $\cdot h$ 均不是布尔表达式. 不同的布尔表达式可能确定同一个布尔函数,如 $x\cdot(y+z)$ 和 $(x\cdot y)+(x\cdot z)$ 确定同一个布尔函数.

布尔公式(Boolean formula)　即"布尔表达式".

布尔表达式的值(value of a Boolean expression)　函数值的推广. 设 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为布尔代数 $\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 的一个布尔表达式,用 B 中布尔常元 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分别代替 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$(称为赋值),将 $+$, $\cdot$, $'$ 理解为 B 中相应的具体运算,其所得到的结果就称为布尔表达式的值,并且记以 $E(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 例如,对于 $E(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)\cdot(x_1'+x_3')$,当对变元 x_1,x_2,x_3 分别代以 1,0,1 时得 $E(1,0,1)=(1+0)\cdot(0+0)=1\cdot 0=0$,即其值为 0. 显然对同一布尔表达式赋值不同,其值可能相同. 如上例 $E(0,0,0)=(0+0)\cdot(1+1)=0\cdot 1=0=E(1,0,1)$.

布尔表达式的相等(equality of Boolean expressions)　两布尔表达式间的一种等价关系. 对于两个 n 元布尔表达式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,如果对于任意 n 元列 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in B$,均有

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2\cdots,a_n),$$

则称布尔表达式 f 与布尔表达式 g 在布尔代数 B 上相等. 例如,布尔表达式 $x\cdot(y+z)$ 与布尔表达式 $x\cdot y+x\cdot z$ 是相等的.

布尔函数(Boolean function)　一种特殊函数. 能用布尔代数 B 上的 n 元布尔表达式来表示的函数 $f:B^n\to B$. 可以证明:对于二元布尔代数 $\{0,1\}$ 而言, $\{0,1\}^n$ 到 $\{0,1\}$ 的任意一个函数,都是布尔函数. 注意:对于 $|B|\geqslant 4$,从 B^n 到 B 的函数未必是布尔函数. 比如取布尔代数 $B=\{0,1,2,3\}$, $n=2$,且规定: $g(\langle 0,1\rangle)=g(\langle 0,2\rangle)=g(\langle 1,2\rangle)=g(\langle 2,1\rangle)=g(\langle 3,1\rangle)=0$, $g(\langle 0,0\rangle)=g(\langle 1,0\rangle)=g(\langle 1,1\rangle)=g(\langle 2,2\rangle)=g(\langle 2,3\rangle)=1$, $g(\langle 2,0\rangle)=g(\langle 3,2\rangle)=g(\langle 3,3\rangle)=2$, $g(\langle 0,3\rangle)=g(\langle 1,3\rangle)=g(\langle 3,0\rangle)=3$,那么 $g:B^2\to B$ 就不是布尔函数. 即 g 不能用布尔表达式来表示. 在二元布尔代数 $B=\{0,1\}$ 中,不同的 n 元布尔函数只有 2^{2^n} 个.

布尔函数的相等(equality of Boolean functions)　布尔函数间的一种等价关系. 两个 n 元布尔函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,如果 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 对任意 n 元组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in B^n$ 成立,则称该两布尔函数相等,记为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 例如若设 $f(x_1,x_2)=x_1\cdot(x_1+x_2)$, $g(x_1,x_2)=x_1+x_1\cdot x_2$,则 $f(x_1,x_2)=g(x_1,x_2)$.

布尔函数的代数(algebra of Boolean functions)　一种特殊的布尔代数. 设 $\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 是布尔代数, $FB(X)$ 是此代数的所有 n 元布尔函数 $f(X)$ 的集合,对 $FB(X)$ 中任两个元素 $f:B^n\to B$, $g:B^n\to B$,定义 $f+g$, $f\cdot g$ 及 f' 如下:

$$\left.\begin{aligned}(f+g)(X)&=f(X)+g(X)\\(f\cdot g)(X)&=f(X)\cdot g(X)\\f'(X)&=(f(X))'\end{aligned}\right\}$$

（对任何 $X=(x_1,\cdots,x_n)\in B^n$）

如此得到的 $\langle FB(X),+,\cdot,',0,1\rangle$ 是一个布尔代数（其中 0 为恒取值 0 的函数，1 为恒取值 1 的函数），称为布尔函数的代数.

初等积(elementary product)　亦称积范式或单项式. 一种特殊的布尔表达式. 它由有限个布尔变元或变元的补之积所构成. 可写成 $\prod_{i\in T}x_i^a$ 的形式，其中 x_i^a 或为 x_i 或为 x_i'，而 T 为某有限指标集. 在命题代数中，初等积又称为小项或简单合取. 例如 x，$x'\cdot y$，$x\cdot y'\cdot z'$ 均为初等积. 初等积是命题代数中简单合取概念的推广. 在初等积中，如至少有一个变元及其补同时出现，则此初等积恒等于 0.

积范式(normal form of product)　即"初等积".

布尔代数的单项式(monomial of a Boolean algebra)　即"初等积"或"积范式".

初等和(elementary sum)　亦称和范式或单因式. 一种特殊的布尔表达式. 它由有限个布尔变元或变元的补的和所构成. 可写成 $\sum_{i\in T}x_i^a$ 的形式，其中 x_i^a 或为 x_i 或为 x_i'，而 T 为某一有限指标集. 在命题代数中，初等和又称为大项或简单析取. 例如 x'，$x'+y'$，$x+y'+z'$ 均为初等和. 在初等和中，如果至少有一个变元及其补同时出现，则此初等和恒等于 1.

和范式(sum normal form)　即"初等和".

布尔代数的单因式(single factor of a Boolean algebra)　即"初等和"或"和范式".

析取范式(disjunctive normal form)　亦称积和范式、多项式或加性范式. 一种特殊的布尔表达式. 它由有限个初等积之和构成，可写成

$$\sum_{i=1}^{n}P_i,$$

其中 P_i 是初等积. 任一布尔表达式可通过对合律，德·摩根律，分配律及其他布尔代数运算律化为析取范式. 例如

$$\begin{aligned}&[x+z+(y+z)']'+xy\\&=(x+z)'(y+z)+xy\\&=x'z'(y+z)+xy\\&=x'z'y+x'z'z+xy\\&=x'yz'+xy,\end{aligned}$$

析取范式不是惟一的. 例如 $x+(y\cdot z)$ 是析取范式，但它亦可写成

$$\begin{aligned}&x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)\\&=(x\cdot x)+(x\cdot z)+(y\cdot x)+(y\cdot z).\end{aligned}$$

积和范式(product sum normal form)　即"析取范式".

布尔代数的多项式(polynomial of a Boolean algebra)　即"析取范式"或"积和范式".

合取范式(conjunctive normal form)　亦称和积范式或多因式. 一种特殊的布尔表达式. 它是有限个初等和之积，可写成形状 $\prod_{i\in T}P_i$，这里 P_i 是初等和，T 是有限指标集. 任一布尔表达式可通过德·摩根律，对合律，分配律及其他布尔代数运算律将其化为合取范式. 例如

$$\begin{aligned}[(x+y)z']'(x'y')&=[(x+y)'+z](x+y')\\&=(x'y'+z)(x+y')\\&=(x'+z)(y'+z)(x+y').\end{aligned}$$

合取范式不是惟一的，例如 $x\cdot(y+z)$ 是合取范式，但它亦可写成 $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)=(x+x)\cdot(x+z)\cdot(y+x)\cdot(y+z)$.

和积范式(sum product normal form)　即"合取范式".

布尔代数的多因式(multiple factor of a Boolean algebra)　即"合取范式"或"和积范式".

布尔代数的极小项(minimal term of a Boolean algebra)　亦称布尔代数的最小项或基本积. 一种特殊的布尔表达式. 对于 n 个布尔变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来说，它是形如

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^a$$

之初等积，并且对于每个 i，x_i^a 表示 x_i 或 x_i'，且 x_i 与 x_i' 恰有一个出现. 对于一个变元 x 来说，有 2^1 个极小项：x 与 x'；对于两个变元 x,y 来说，有 2^2 个极小项：$x\cdot y,x\cdot y',x'\cdot y,x'\cdot y'$；一般地，对于 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来说，共有 2^n 个极小项：$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n,\cdots,x_1'\cdot x_2'\cdot\cdots\cdot x_n'$. 极小项是一种特殊的初等积，比初等积具有更规范的形式. 极小项有简单的表示法，称为向量表示法，设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\{0,1\}^n$，则用 X^A 表示极小项 $x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{a_n}$. 例如

$$X^{(1,0,1,0)}=x_1\cdot x_2'\cdot x_3\cdot x_4',$$
$$X^{(0,1,1,0)}=x_1'\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4',$$

X 称为极小项 X^A 的底向量，而 A 称为极小项 X^A 的指向量. 在二值布尔代数 $B=\{0,1\}$ 中，n 个变元的极小项的 2^n 个不同的赋值中，有且只有一个赋值使该极小项取值为 1，其余的赋值均使该极小项取值为 0，称此极小项为使该项为 1 的那个赋值所对应的极小项.

布尔代数的最小项(minimal term of a Boolean algebra)　即"布尔代数的极小项".

基本积(fundamental product)　即"布尔代数的极小项".

布尔代数的极大项(maximal term of a Boolean algebra) 亦称布尔代数的最大项或基本和．一种特殊的布尔表达式．对于 n 个布尔变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来说，它是具有形状

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

之初等和，并且对每个 i，$x_i^{a_i}$ 表示 x_i 或 x_i'，其中 x_i 与 x_i' 恰有一个出现．对于一个变元 x 来说，有 2^1 个极大项：x 与 x'；对于两个变元 x,y 来说，共有 2^2 个极大项：$x+y,x+y',x'+y,x'+y'$；一般地，对 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，共有 2^n 个极大项：$x_1+x_2+\cdots+x_n,\cdots,x_1'+x_2'+\cdots+x_n'$．极大项是一种特殊的初等和，它比初等和具有更规范的形式，极大项可通过极小项的简便表示法表示：

$$x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\cdots+x_n^{a_n}=(X^{A'})'.$$

在二值布尔代数中，对任意一个 n 变元的极大项，在它的 2^n 种不同赋值中有且仅有一个赋值使该项取值为 0，其余赋值下该项均取值 1，称该极大项为使它为 0 的那个赋值的对应极大项．

布尔代数的最大项(maximal term of a Boolean algebra) 即"布尔代数的极大项"．

基本和(fundamental sum) 即"布尔代数的极大项"．

布尔代数的析取范式定理(theorem of disjunctive normal form of a Boolean algebra) 关于布尔表达式的一个表示定理．若 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是布尔代数 $\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 上任何一个布尔表达式，则它一定能写成如下形式：

$$\begin{aligned}&E(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\sum_{\alpha_1=0}^{1},\sum_{\alpha_2=0}^{1},\cdots,\sum_{\alpha_n=0}^{1}\\&[E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cdot x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2},\cdots,x_n^{\alpha_n}]\end{aligned}$$

其中 $x_i^{\alpha_i}=\begin{cases}x_i & (\alpha_i=1),\\ x_i' & (\alpha_i=0).\end{cases}$

例如

$$\begin{aligned}E(x,y,z)&=[x+z+(y+z)']'+x\cdot y\\&=0\cdot x'\cdot y'\cdot z'+0\cdot x'\cdot y'\cdot z\\&\quad+1\cdot x'\cdot y\cdot z'+0\cdot x\cdot y'\cdot z'\\&\quad+1\cdot x\cdot y\cdot z'+0\cdot x\cdot y'\cdot z\\&\quad+0\cdot x'\cdot y\cdot z+1\cdot x\cdot y\cdot z\\&=x'\cdot y\cdot z'+x\cdot y\cdot z'+x\cdot y\cdot z.\end{aligned}$$

布尔代数的合取范式定理(theorem of conjunctive normal form of a Boolean algebra) 关于布尔表达式的一个表示定理．若 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是布尔代数 $\langle B,+,\cdot,',0,1\rangle$ 上任一布尔表达式，则它可写成如下形式：

$$\begin{aligned}&E(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\prod_{\alpha_1=0}^{1},\prod_{\alpha_2=0}^{1},\cdots,\prod_{\alpha_n=0}^{1}[E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\\&\quad+x_1^{\alpha_1'}+x_2^{\alpha_2'}+\cdots+x_n^{\alpha_n'}],\end{aligned}$$

其中 $x_i^{\alpha_i'}=\begin{cases}x_i' & (\alpha_i=0),\\ x_i & (\alpha_i=1).\end{cases}$

例如

$$\begin{aligned}E(x_1,x_2)=&(E(0,0)+x_1+x_2)\\&\cdot(E(0,1)+x_1+x_2')\\&\cdot(E(1,0)+x_1'+x_2)\\&\cdot(E(1,1)+x_1'+x_2').\end{aligned}$$

布尔方程(Boolean equation) 一类特殊方程．指布尔代数 B 上含有未知元的等式：$f(X)=g(X)$，其中 $f(X)$ 与 $g(X)$ 均为 B 上之布尔函数．当 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 时，称此方程为 n 元布尔方程，而称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未知元．若有 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in B$ 使之 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 元布尔方程的一个解．对于具有形状 $h(X)=0$ 或 $h(X)=1$ 的布尔方程，称为 0-1 布尔方程．可以证明：形如 $f(X)=g(X)$ 的布尔方程均可化为等价的 0-1 布尔方程．解 0-1 布尔方程的一个可行方法是逐次消元法．对于布尔函数中仅含 0 与 1 为其常量的 0-1 布尔方程有三种解法：即分项求解法，分支解法及卡诺图解法．求解布尔方程不仅具有理论意义，而且在计算机科学及电路设计中均有重要应用．对于布尔方程 $x+y=a+b$ 显然有一解：

$$x=a,y=b.$$

0-1 布尔方程(0-1 Boolean equation) 见"布尔方程"．

布尔方程的解(solution of a Boolean equation) 布尔方程的基本概念之一．在布尔代数 B 中，如果存在一个 n 元列 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in B$ 满足布尔方程

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则称 n 元列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为布尔方程在 B 中的一个特解，简称布尔方程的解（所谓 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足布尔方程 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，是指 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$）．例如，$x=a'$ 为布尔方程 $a+x=1$ 的一个解，并且 $x=a'+u$（u 是布尔代数 B 中任意元素）也是方程的解．为区别起见，称前者为特解，后者为通解——方程的每个解所具有的一般形式．

布尔方程的特解(particular solution of a Boolean equation) 见"布尔方程的解"．

布尔方程的通解(general solution of a Boolean equation) 见"布尔方程的解"．

布尔方程组(system of Boolean equations) 布尔方程构成的方程组．在布尔代数 B 中，由 $2m$ 个 n 元布尔函数（可分为两组）$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(i=1,2\cdots,m)$ 可组成 m 个布尔方程，

$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(i=1,2,\cdots,m)$，这 m 个方程所构成的方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

称为 B 上的布尔方程组.

布尔方程组的解（solution of system of Boolean equations） 布尔方程组的基本概念之一.在布尔代数 B 中，如果存在一个 n 元列 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in B$ 满足布尔方程组 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(i=1,2,\cdots,m)$的每个方程，则称 n 元列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为布尔方程组在 B 中的一个特解，简称布尔方程组的解.而所有解的一般形式称为通解.如布尔方程组

$$\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=1, \\ z+x=1 \end{cases}$$

有通解

$$\begin{cases} x=u+v', \\ y=v+w', \\ z=w+u', \end{cases}$$

其中 u,v,w 为布尔代数中的任意元素.

布尔方程组的特解（particular solution of system of Boolean equations） 见"布尔方程组的解".

布尔方程组的通解（general solution of system of Boolean equations） 见"布尔方程组的解".

命 题 代 数

命题代数（propositional algebra） 一种特殊的布尔代数.设 W 是某一语言中所有命题构成的集合，且设 T 与 F 分别为真、假命题，$\vee,\wedge,\neg$ 分别为命题的析取，合取，否定联结词，则布尔代数$\langle W,\vee,\wedge,\neg,T,F\rangle$就是命题代数（参见"逻辑代数"或"林登鲍姆-塔尔斯基代数"）.

命题（proposition） 命题代数的基本概念之一.指一个有真假可言的陈述句.详见本卷《形式逻辑》同名条.

命题常元（propositional constant） 亦称命题定元.初等代数中的常数或常元在命题代数中的对应概念.在命题代数 W 中，用一个字母表示 W 的某个固定的命题，这个字母称为 W 的常元或定元.如 F,T 都是命题常元.

命题定元（propositional constant） 即"命题常元".

命题变元（propositional variable） 初等代数中的变数或变元在命题代数中的对应概念.在命题代数$\langle W,\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$中用一个字母表示 W 中的某个可变的不固定的命题，这个字母称为命题变元.命题变元常用字母 $x,y,\cdots$表示，x 表示的命题可能为真（取值为 T），也可能为假（取值为 F）.如果不考虑命题的实际意义，而只考虑它的取值，则当 x 表示确定的命题 a 时，其值只能是 T 或 F.

有限命题代数（finite propositional algebra） 一种特殊的命题代数.即由有限个命题构成的布尔代数$\langle B,\vee,\wedge,\neg,F,T,\rangle$，其中 B 为有限命题的集合.如二元命题代数 $B=\{F,T\}$.任给一个命题变元 p，通过布尔代数的 $\vee,\wedge,\neg$ 这三个联结词可组成下面 $2^2=4$ 个命题函数：$F,p,\neg p,T$，即除 p 自身外，再通过否定词形成$\neg p$，通过析取词形成 $p\vee\neg p=T$，通过合取词形成 $p\wedge\neg p=F$.如果把 $F,p,\neg p,T$ 作为元素组成 4 元集合 $B_{2^2}=\{F,p,\neg p,T\}$，则它对 $\vee,\wedge,\neg$ 封闭.由此可构成一个 4 元布尔代数的具体模型$\langle\{F,p,\neg p,T\},\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle$.对任给 n 个命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，通过 $\vee,\wedge,\neg$ 可组成 2^{2^n}个不同的命题函数，并由 2^{2^n}个不同的命题函数可组成 2^{2^n}元集合 $B_{2^{2^n}}$，它对 $\vee,\wedge,\neg$ 封闭.由此可构成一个 2^{2^n}元布尔代数的具体模型

$$\langle B_{2^{2^n}},\vee,\wedge,\neg,F,T\rangle.$$

真值表（truth table） 一种数表.指布尔表达式在其变元的不同赋值下所对应的真假值列出的表.令 A 是命题代数中的布尔表达式.$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是出现在 A 中的所有命题变元.给 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 指定一组真值，称为对 A 的一个指派（或赋值）.A 在其所有可能指派下取得的值列成的表格，称为 A 的真值表.例如$(x\cdot y)+(x'\cdot y')$的真值表为：

x	y	$(x\cdot y)+(x'\cdot y')$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

重言式（tautology） 亦称恒真命题.一种命题公式.指对于命题变元的所有真值指派总取真值 T 的命题公式.例如$(\neg p\wedge q)\vee(p\vee\neg q)$是重言式，这可用真值表来验证.重言式常简记为 T.

恒真命题（identically true proposition） 即"重言式".

命题联结词（propositional connectives） 一种命题运算符号.用它们可以将简单命题组合成复合

命题.常用的命题联结词有以下五个：

1.否定词(逻辑非)$\neg$：设 A 是一命题，用 $\neg A$ 表示与 A 真值相反的命题，称为 A 的否定命题. $\neg$ 是命题代数的布尔补运算.否定词 $\neg$ 与自然语言中的"不"相似.

2.合取词(逻辑积)$\wedge$：设 A 和 B 都是命题，用 $A\wedge B$ 表示 A 与 B 的合取命题，$A\wedge B$ 为真，当且仅当 A,B 同时为真. $\wedge$ 是命题代数的布尔积，它与自然语言中的"与"意义相似.

3.析取词(逻辑和)$\vee$：设 A 和 B 都是命题，用 $A\vee B$ 表示 A 与 B 的析取命题，$A\vee B$ 为假，当且仅当 A,B 同时为假. $\vee$ 是命题代数的布尔和，它与自然语言中的"或"意义相似.

4.蕴含词$\rightarrow$：设 A 和 B 都是命题，则 $A\rightarrow B$ 表示 A 与 B 的蕴含命题，$A\rightarrow B$ 为假当且仅当 A 真且 B 假.在 $A\rightarrow B$ 中 A 称为前件，而 B 称为后件."$\rightarrow$"与自然语言中的"如果……则……"意义相似.

5.双蕴含$\leftrightarrow$：用 $A\leftrightarrow B$ 表示命题 A 与 B 的双蕴含命题. $A\leftrightarrow B$ 真当且仅当 A 与 B 有相同的真值."$\leftrightarrow$"与自然语言中的"当且仅当"相似.命题连结词的符号形式不是惟一的，不同的逻辑系统中，不同的逻辑著作中，所用的符号并不相同，其常用的几种形式列表如下：

	罗　素	希尔伯特	武卡谢维奇	目前常用的
否　定	$\sim$	—	N	$\neg$
合　取	$\circ$	&	K	$\wedge$
析　取	$\vee$	$\vee$	A	$\vee$
蕴　含	$\supset$	$\rightarrow$	C	$\rightarrow$
双蕴含	$\equiv$	$\sim$	E	$\leftrightarrow$
放置式	中置式"$\sim$"置于命题之上	中置式"—"置于命题之上	前置式	中置式"$\neg$"置于命题之前

命题的运算(operation of propositions)　见"命题联结词".

否定词(negation)　见"命题联结词".

逻辑非(logical not)　即"否定词".

合取词(conjunction)　见"命题联结词".

逻辑积(logical product)　即"合取词".

析取词(disjunction)　见"命题联结词".

逻辑和(logical sum)　即"析取词".

蕴含词(implication)　见"命题联结词".

双蕴含(double implication)　见"命题联结词".

命题公式(propositional formula)　命题代数中的一种布尔表达式.其递归定义如下：

1.命题常元和命题变元是命题公式.

2.如果 p 是命题公式，那么 $\neg p$ 是命题公式.

3.如果 p 和 q 是命题公式，那么 $p\vee q$，$p\wedge q$ 是命题公式.

4.只有有限次地应用定义1至定义3得到的符号串才是命题公式.

命题函数(propositional function)　一种特殊函数.指函数 $G:\{F,T\}^n\rightarrow\{F,T\}$.此函数具有 n 个命题变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$.其定义域是 $\{F,T\}^n$ 而值域是 $\{F,T\}$.

矛盾式(contradictory expression)　亦称恒假命题.一种命题公式.指对于命题变元的所有真值指派总取真值 F 的命题公式.例如，用真值表可以验证 $q\wedge(p\wedge\neg p)$ 是矛盾式.矛盾式常简记为 F.

恒假命题(identically false proposition)　即"矛盾式".

命题的蕴含(implication of propositions)　命题间的一种关系.命题 A 蕴含命题 B，当且仅当 $A\rightarrow B$ 是重言式，简记为 $A\Rightarrow B$. A 蕴含 B 意味着如果 A 真则 B 必真，即 A 是 B 的充分条件，或 B 是 A 的必要条件.

条件命题(conditional proposition)　命题的一种变形，严格说来是一种谓词或命题函数.在一个语句中如果含有一个未确定的字母 x(也可以为多个)，它可以代表一定范围内的任何个体或对象，这样的字母称为个体变元，简称变元.给定的取值范围称为全集，记为 U.当个体变元 x 表示某一特定个体，且此个体是用某个特定的字母 a 表示时，可记为 $x=a$，此时称 x 取值为 a，字母 a 称为个体常元.设 U 为全集，$p(x)$ 为含有个体变元 x 的陈述语句，当 x 在 U 中任意取定一值 a 时，$p(a)$ 变成命题.此时称 $p(x)$ 为 U 上的条件命题，全集 U 称为条件命题 $p(x)$ 的论域，亦称定义域.例如，当全集 U 取为实数集时，$(x-3)(x-1)\geqslant 0$ 是一个条件命题.数学中通常见到的方程及不等式都是条件命题.

命题的等价(equivalence of propositions)　命题间的一种关系.设 A,B 为两个命题，当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 为重言式时，称命题 A 与命题 B 等价，记为 $A\Leftrightarrow B$，A 等价于 B 意味着 A 真当且仅当 B 真，即 A 是 B 的充分必要条件.例如，$p\rightarrow q$ 与 $\neg p\vee q$ 在任何指派下取相同的真值.故 $p\rightarrow q\Leftrightarrow\neg p\vee q$.等值命题是等价的(参见本卷《形式逻辑》中的"等值命题").

四种命题(four propositions)　命题变形里各相关命题的统称.一个命题的前提和结论是由条件命题组成的.当它们经过交换、否定等变形后，就会得出与该命题相关的各种命题. $B\rightarrow A$，$\neg A\rightarrow\neg$

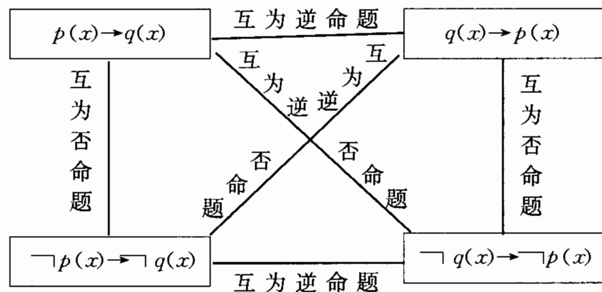
B，$\neg B\to\neg A$ 分别称为 $A\to B$ 的逆命题，否命题及逆否命题，而称 $A\to B$ 为它们的原命题. 一般称为四种命题. 例如“若两三角形同底且等高，则这两个三角形等积”(真)作为原命题时，其逆命题、否命题及逆否命题分别是“若两三角形等积，则这两个三角形同底等高”(假)，“若两三角形不同底等高，则这两个三角形不等积”(假)，“若两三角形不等积，则这两个三角形不等积，则这两个三角形不同底等高”(真). 这四种命题之间的关系是：互为逆否的两命题是等价的，即 $(A\to B)\Leftrightarrow(\neg B\to\neg A)$，$(B\to A)\Leftrightarrow(\neg A\to\neg B)$. 由真值表容易验明.

四种命题间的关系(relations among the four propositions)　四种命题间的逻辑关系. 原命题 $p(x)\to q(x)$，逆命题 $q(x)\to p(x)$，否命题 $\neg p(x)\to\neg q(x)$，逆否命题 $\neg q(x)\to\neg p(x)$ 之间的关系可用真值表给出(下表是当 x 在论域中取定一个元素为值后，各命题的真假)：

$p(x)$	$q(x)$	$\neg p(x)$	$\neg q(x)$	$p(x)\to q(x)$
T	F	F	T	F
F	F	T	T	T
F	T	T	F	T
T	T	F	F	T

$q(x)\to p(x)$	$\neg p(x)\to\neg q(x)$	$\neg q(x)\to\neg p(x)$
T	T	F
F	F	T
T	T	T
T	T	T

由上表可以看出 $p(x)\to q(x)\Leftrightarrow\neg q(x)\to\neg p(x)$，$q(x)\to p(x)\Leftrightarrow\neg p(x)\to\neg q(x)$，即原命题和逆否命题逻辑等值，逆命题和否命题逻辑等值. 四种命题间的关系可由下图表示出来.



原命题(primitive proposition)　四种命题中最简单的一种命题. 常取作讨论的出发点，该命题相对于其他三种命题而言是原命题. 在数学中许多命题都是全称命题. 在全称命题“对所有的 x，$p(x)\to q(x)$”中，通常省略“对所有的 x”，用形式“$p(x)\to q(x)$”来表示. 有时，以 $p(x)\to q(x)$ 为出发点来讨论其他命题和它的关系，这时，可以把 $p(x)\to q(x)$ 称为(相对于其他命题的)原命题，其中 $p(x)$ 称为前提或前件，$q(x)$ 称为结论或后件.

逆命题(inverse proposition)　一类基本的、常见的命题. 在原命题 $p(x)\to q(x)$ 中，交换前提 $p(x)$ 与结论 $q(x)$，得到的命题 $q(x)\to p(x)$ 称为原命题 $p(x)\to q(x)$ 的逆命题，简称逆.

否命题(negative proposition)　一类基本的、常见的命题. 把原命题 $p(x)\to q(x)$ 的前提和结论同时否定得到的命题 $\neg p(x)\to\neg q(x)$. 简称否.

逆否命题(converse-negative proposition)　一类基本的、常见的命题. 把原命题 $p(x)\to q(x)$ 的前提与结论交换，并同时否定得到的命题 $\neg q(x)\to\neg p(x)$ 称为原命题的逆否命题，简称逆否.

偏命题(partial proposition)　一种特殊结构的命题. 即在命题的特殊变形里部分前提条件保持不变时所得各相关命题的统称. 如果给出一个如下形式的假言命题：$p(x)\wedge q(x)\to r(x)$，其前提由两个(或两个以上)并列条件构成，如 $p(x)\wedge q(x)$ 即是：结论是一个，即 $r(x)$. 如果将某个(或某些)条件，如 $p(x)$，视为前提中的不变部分，讨论四种变形所得的命题均称为原来命题的偏命题，其中 $p(x)\wedge q(x)\to r(x)$ 称为偏原命题；$p(x)\wedge r(x)\to q(x)$ 称为偏逆命题；$p(x)\wedge\neg q(x)\to r(x)$ 称为偏否命题；$p(x)\wedge\neg r(x)\to\neg g(x)$ 称为偏逆否命题. 例如命题“同底且等高的两个三角形必等积”(真)，在此例中，$p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ 分别代表条件命题：“三角形 x 与三角形 A 同底”. “三角形 x 与三角形 A 等高”，“三角形 x 与三角形 A 等积”，其中 A 为任一取定的与三角形 x 同底的三角形. 那么原来的命题便是一个偏(原)命题，其偏逆命题，偏否命题及偏逆否命题分别是“同底等积的两个三角形必等高”(真)，“同底不等高的两个三角形必不等积”(真)，“同底不等积的两个三角形必不等高”(真). 又如命题“若一三角形有两边及其夹角与另一三角形的两边及其夹角对应相等，则这两个等角所对的边也相等”(真)，在比例中，$p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，$s(x)$ 分别代表条件命题“在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle B=\angle B'$”，“在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$BC=B'C'$”，“在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$AC=A'C'$”. 若认定前两个条件命题是前提中的不变部分，则这个命题便是一个偏命题，其偏原命题、偏逆命题、偏否命题及偏逆否题分别是：

$p(x)\wedge q(x)\wedge r(x)\to s(x)$：

“在 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 中，若 $\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，$AB=A'B'$，则 $AC=A'C'$”(真).

$p(x)\wedge q(x)\wedge s(x)\rightarrow r(x)$：

"在 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$中若 $\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，$AC=A'C'$，则 $AB=A'B'$"（假）.

$p(x)\wedge q(x)\wedge\neg r(x)\rightarrow\neg s(x)$：

"在 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$中若 $\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，$AB\neq A'B'$，则 $AC\neq A'C'$"（假）.

$p(x)\wedge q(x)\wedge\neg s(x)\rightarrow\neg r(x)$：

"在 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$中若 $\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，$AC\neq A'C'$，则 $AB\neq A'B'$"（真）.

由真值表容易验明：偏原命题与偏逆否命题是逻辑等值的：

$$[p(x)\wedge q(x)\rightarrow r(x)]$$
$$\Leftrightarrow[p(x)\wedge q(x)\wedge\neg r(x)\rightarrow\neg q(x)],$$
$$[p(X)\wedge q(x)\wedge r(x)\rightarrow r(x)]$$
$$\Leftrightarrow[p(x)\wedge q(x)\wedge\neg s(x)\rightarrow\neg r(x)].$$

偏逆命题与偏否命题也是逻辑等值的：

$$[p(X)\wedge r(x)\rightarrow q(x)]$$
$$\Leftrightarrow[p(x)\wedge q(x)\wedge\neg q(x)\rightarrow\neg r(x)],$$
$$[p(X)\wedge q(x)\wedge s(x)\rightarrow r(x)]$$
$$\Leftrightarrow[p(x)\wedge q(x)\wedge\neg r(x)\rightarrow\neg s(x)].$$

偏原命题(partial primitive proposition)　见"偏命题".

偏逆命题(partial inverse proposition)　见"偏命题".

偏否命题(partial negative proposition)　见"偏命题".

偏逆否命题(partial inverse negative proposition)　见"偏命题".

存在命题(existential proposition)　一种特殊结构的命题. 设 $p(x)$为全集 U 上的条件命题，利用它写出如下形式的命题："存在 x，使得 $p(x)$"，也可表示为"$\exists x\in U,p(x)$"，或"$\exists xp(x)$". 这样的命题称为存在命题. 条件命题前所加的短语"存在 x"，称为存在量词，记为$\exists x$. 存在命题已不是条件命题，而变成了为真或为假的确定的命题. 存在命题的真假可如下给出：如果存在 $x\in U$，使 $p(x)$为真，则$\exists xp(x)$为真；如果对任何 x，$p(x)$都为假，则$\exists xp(x)$为假. 即若 $A=\{x\mid p(x)\}$，则当 $A\neq\varnothing$时，$\exists xp(x)$为真；当 $A=\varnothing$时，$\exists xp(x)$为假. 特别地，若 p 为不含 x 的命题，则规定$\exists xp=p$.

存在量词(existential quantifier)　见"存在命题"

命题函数的析取范式(disjunctive normal form of propositional functions)　命题函数的一种特殊形式. 如果 n 元命题函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，是若干合取式 $\tilde{x}_{i_1}\wedge\tilde{x}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\tilde{x}_{i_k}(i_1<i_2<\cdots<i_k,1\leqslant k\leqslant n)$的析取，其中 $\tilde{x}_{i_j}=x_{i_j}$或 $\tilde{x}_{i_j}=\neg x_{i_j}(j=1,2,\cdots,k)$，式中用$\vee$隔开的部分称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的项. 例如 $f(p,q,r)=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge r)$是析取范式，其中 $p\wedge q$，$\neg p\wedge q\wedge r$，$p\wedge r$ 都是项. 对任何一个布尔表达式，求它的析取范式可通过下列步骤完成：

1. 利用德·摩根律将求补运算移到各布尔变元之前.

2. 利用分配律、结合律将公式归约为析取范式.

命题函数的合取范式(conjunctive normal form of propositional functions)　命题函数的一种特殊形式. 如果 n 元命题函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，是若干析取式 $\tilde{x}_{i_1}\vee\tilde{x}_{i_2}\vee\cdots\vee\tilde{x}_{i_k}(i_1<i_2<\cdots<i_k,1\leqslant k\leqslant n)$的合取，其中 $\tilde{x}_{i_j}=x_{i_j}$或 $\tilde{x}_{i_j}=\neg x_{i_j}(j=1,2,\cdots,k)$，式中用$\wedge$隔开的部分称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的项. 例如 $f(p,q,r)=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee r)\wedge(q\vee r)$是合取范式，其中$\neg p\vee q$，$p\vee r$，$q\vee r$ 是项. 对任何一个布尔表达式，求它的合取范式可通过下列步骤完成：

1. 利用德·摩根律将求补运算移到各布尔变元之前.

2. 利用分配律、结合律将公式归约为合取范式.

命题函数的主析取范式(primary disjunctive normal form of propositional functions)　一种规范的析取范式. 指 n 元命题函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可以化成如下形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_m.$$

其中每个项 $A_k(k=1,2,\cdots,m)$都是 n 个变元或变元的补的合取，即 $\tilde{x}_1\wedge\tilde{x}_2\wedge\cdots\wedge\tilde{x}_n(\tilde{x}_i=x_i$ 或 $\tilde{x}_i=\neg x_i,i=1,\cdots,n)$，这里的每个项 $\tilde{x}_1\wedge\tilde{x}_2\wedge\cdots\wedge\tilde{x}_n$ 称为最小项. 例如 $f(p,q,r)=(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$是主析取范式. 每个命题函数都可归约到与它等价的主析取范式.

命题函数的主合取范式(primary conjunctive normal form of propositional functions)　一种规范的合取范式. 指 n 元命题函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，可以化成如下形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_m.$$

其中每个项 $A_k(k=1,2,\cdots,m)$都是 n 个变元或变元的补的析取，即 $\tilde{x}_1\vee\tilde{x}_2\vee\cdots\vee\tilde{x}_n(\tilde{x}_i=x_i$ 或 $\tilde{x}_i=\neg x_i,i=1,2,\cdots,n)$，这里的每个项 $\tilde{x}_1\vee\tilde{x}_2\vee\cdots\vee\tilde{x}_n$ 称为最大项. 例如$f(p,q,r)=(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$是主合取范式. 每个命题函数都可归约到与它等价的主合取范式.

推理(inference)　见本卷《形式逻辑》同名条.

推理规则(inference rule)　数理逻辑中的基本概念之一. 即正确的推理形式. 在形式逻辑学中研究

推理时，往往只研究推理形式，而不研究推理的具体内容. 推理形式实质上是对有具体内容的推理的一种抽象. 推理形式有正确的，也有不正确的. 正确的推理形式是在假设前提为真时其结论必真的推理形式.

蕴含规则(rule of implication)　亦称分离规则. 最基本的一种推理规则. 如果前提 $p\to q$ 和 p 为真，则命题 q 必为真. 由此可得推理规则：

$$\begin{array}{l} p\to q \\ \underline{p\qquad} \\ q \end{array}.$$

该规则称为蕴含规则，是亚里士多德(Aristotle)建立的. 它是关于直言三段论的符号化.

分离规则(rule of detachment)　即"蕴含规则".

蕴含传递规则(transitive rule of implication)推理规则的一种. 如果已知前提 $p\to q$ 和 $q\to r$ 为真，则命题 $p\to r$ 必为真. 由此可得推理规则：

$$\begin{array}{l} p\to q \\ \underline{q\to r} \\ p\to r \end{array}.$$

这个推理规则称为蕴含传递规则.

等价传递规则(transitive rule of equivalence)推理规则的一种. 如果已知前提 $p\leftrightarrow q$ 和 $q\leftrightarrow r$ 为真，则命题 $p\leftrightarrow r$ 必为真. 由此可得推理规则：

$$\begin{array}{l} p\leftrightarrow q \\ \underline{q\leftrightarrow r} \\ p\leftrightarrow r \end{array}.$$

这个推理规则称为等价传递规则.

合取引入规则(introduction rule of conjunction)　推理规则的一种. 如果前提 p 为真，q 为真，则得结论 p 与 q 为真，即 $p\wedge q$ 为真. 由此可得推理规则：

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ p\wedge q \end{array}.$$

这个推理规则称为合取引入规则.

合取消去规则(elimination rule of conjunction)推理规则的一种. 如果前提 $p\wedge q$ 为真，则得结论命题 p 为真与 q 为真. 由此可得两个推理规则：

$$\frac{p\wedge q}{p}\text{与}\frac{p\wedge q}{q}.$$

这两个规则称为合取消去规则.

析取引入规则(introduction rule of disjunction)　推理规则的一种. 如果前提 p 为真(或 q 为真)，则可得结论命题 $p\vee q$ 为真. 由此可得两个推理规则：

$$\frac{p}{p\vee q}\text{与}\frac{q}{p\vee q}.$$

这两个推理规则称为析取引入规则.

析取消去规则(elimination rule of disjunction)推理规则的一种. 如果前提 $p\vee q$ 和 $\neg p$ 均为真，则可得结论命题 q 为真. 由此可得如下推理规则：

$$\begin{array}{c} p\vee q \\ \underline{\neg p} \\ q \end{array}.$$

这个推理规则称为析取消去规则.

蕴含移位规则(shifting rule of implication)推理规则的一种. 由 $p\to q=\neg q\to\neg p$ 可知，如果已知前提 $p\to q$ 为真，则 $\neg q\to\neg p$ 为真. 由此可得推理规则：

$$\frac{p\to q}{\neg q\to\neg p}.$$

这个推理规则称为蕴含移位规则.

事件代数(event algebra)　一种特殊的布尔代数. 设 $P(\Omega)$ 是适合某种条件的所有事件的全体. Ω 与 $\varnothing$ 分别是必然事件与不可能事件，$\cup,\cap,-$ 分别是事件的和、积、逆运算，则布尔代数 $\langle P(\Omega),\cup,\cap,-,\Omega,\varnothing\rangle$ 称为事件代数.

开关代数

开关代数(switch algebra)　开关代数的基本概念之一. 指以开关电路为讨论对象的特殊的布尔代数. 设 K 是由一些(抽象的)开关组成的集合，1，0 分别表示恒通开关，恒断开关，$\cup,\cap,-$ 分别表示开关的并联，串联及反相，由此构成的布尔代数 $\langle K,\cup,\cap,-,0,1\rangle$ 称为开关代数(有时 $A\cap B$ 简单地写成 AB，A' 写成 $\overline{A}$). 开关代数有很重要的应用价值，它是关于电路分析和电路设计的有力工具.

开关电路(switching circuit)　开关代数的基本概念之一. 指用到开关的电路. 开关是在电路中有且仅有接通(关)或断开(开)两种状态之一的组件，有动合与静合两种. 当控制的设备启动时成通路的称为动合开关，否则称为静合开关. 常用各种字母表示动合开关，$x=1$ 表示开关 x 接通，$x=0$ 表示 x 断开. 通常规定 1 和 0 也表示开关，1 表示恒通开关，0 表示恒断开关. 在电路分析与电路设计中，可通过接通或断开的开关以及这种开关的并联与串联组成各种开关电路. 任一个开关电路都可以用含有逻辑运算的公式来表达；反之，任何一个逻辑运算公式也都可以代表开关电路. 在庞大的、复杂的电路设计及分析中，常常需要将开关电路表示成逻辑运算公式或通过逻辑运算公式来设计开关电路.

动合开关(switch of start lead to close)　见"开关电路".

静合开关(still and close switch)　见"开关电路".

恒通开关(normally closed switch)　见“开关电路”.

恒断开关(normally open switch)　见“开关电路”.

开关变元(switch variable)　用来表示某个一般的、非固定的开关符号. 在开关代数中,常用字母 x 表示开关,若 x 可任意地取 0 和 1 为值,则称 x 为开关变元,0 和 1 称为开关定元. 开关定元与开关变元统称为开关元.

开关定元(switch constant)　见“开关变元”.

开关元(switch element)　开关变元与开关定元的统称.

开关并联(switch parallel connection)　开关运算的一种. 两个开关 A 和 B 的并联是由 A 和 B 组成的组合开关 P:P 接通,当且仅当 A 和 B 中至少有一个接通. A 和 B 的并联记为 $A\cup B$,$\cup$是开关代数中的布尔和.

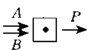
开关串联(switch series connection)　开关运算的一种. A 和 B 的串联是由 A 与 B 组成的组合开关 P:P 接通,当且仅当 A 与 B 同时接通. A 与 B 的串联记为 $A\cap B$(或 AB),$\cap$是开关代数中的布尔积.

开关反相(switch negative-phase)　开关运算的一种. 若开关 B 的状态与开关 A 的状态相反,即 A 接通时,B 断开;A 断开时,B 接通,则称 B 为 A 的反相. 记为 A'(或 $\overline{A}$),读作 A 的反相,是开关代数中的布尔补.

门(gate)　一类基本开关. 现代各种高速电子控制装置必不可少的组件,即由电子元件组成的非触点开关. 常用的电子元件有晶体二极管,三极管和集成块. 在门电路中,各种门都有一个或几个输入端和一个输出端,这些端点起着开关电路中的开关(触点)的作用. 一般以拉丁字母表示端点并规定:$A=1$ 表示“A 为高电位”;$A=0$ 表示“A 为低电位”. 每个端点的输入或输出信号有且仅有高电位或低电位两种状态. 这与开关电路中开关的接通与断开两种状态相当. 常用的门有与门,或门和非门.

与门(AND gate)　一种特殊功能的门. 它有两个输入端,一个输出端. 设以 A,B 表示两个输入端,P 表示输出端. 如果当 A 与 B 都是高电位时,P 是高电位;当 A,B 至少有一个是低电位时,P 是低电位. 则该器件称为与门,记为 $A\cap B$,读作 A 与 B. 也可以用图

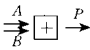
A	B	$A\cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



表示. 与门可视为用上表给出的二元代数运算,其中 0 代表低电位,1 代表高电位. 与门的逻辑功能相当于逻辑代数中的乘法,电路功能相当于串联,这种运算亦称与运算.

或门(OR gate)　一种特殊功能的门. 它有两个输入端,一个输出端. 设以 A,B 表示两个输入端,P 表示输出端. 如果当 A 和 B 都是低电位时,P 是低电位;当 A,B 至少有一个是高电位时,P 是高电位. 则称该电子元件为或门,记为 $A\cup B$,读作 A 或 B. 也可以用图

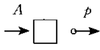
A	B	$A\cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



表示. 或门可视为用右表给出的二元代数运算,其中 0 代表低电位,1 代表高电位. 或门的逻辑功能相当于逻辑代数中的加法,电路功能相当于并联,这种运算亦称或运算.

非门(negation gate)　一种特殊功能的门. 它有一个输入端,一个输出端. 设以 A 表示输入端,P 表示输出端. 如果当 A 为高电位时,P 为低电位;当 A 为低电位时,P 为高电位. 则该电子元件称为非门,记为 A',读作反相 A,或非 A. 也可以用图

A	A'
0	1
1	0



表示. 非门可视为用右表给出的一元代数运算,其中 0 代表低电位,1 代表高电位. 非门的逻辑功能相当于逻辑代数中的非,电路功能相当于反相,这种运算亦称非运算.

正逻辑(positive logic)　开关代数的基本概念之一. 它与门和或门的概念是相对的. 如果规定:用 1 表示高电位,用 0 表示低电位. 则输入端与输出端之间的关系称为正逻辑. 在正逻辑之下:对于与门,当且仅当 A,B 都是 1 时 $P=1$,也称为正与门. 对于或门,当且仅当 A,B 都是 0 时 $P=0$,也称为正或门. 反之,若规定 1 表示低电位,0 表示高电位,则输入端与输出端之间的关系称为负逻辑. 此时得出的门应称为负与门及负或门. 正逻辑下的命题“当且仅当 A,B 都是 1 时 $P=1$”在负逻辑下应改为“当且仅当 A,B 都是 0 时 $P=0$”. 如果保持 $A\cap B$ 与 $A\cup B$ 的定义不变,那么在正逻辑中 $P=A\cap B$,在负逻辑中应为 $P=A\cup B$;反之亦然. 所以正与门相当于负或门,正或门相当于负与门.

正或门(positive OR gate)　见“正逻辑”.

正与门(positive AND gate)　见“正逻辑”.

负逻辑(negative logic)　见“正逻辑”.

负或门(negative OR gate)　见“正逻辑”.

负与门(negative AND gate)　见“正逻辑”.

异或门(exclusive OR gate) 一种特殊功能的门. 完成 $F=A\overline{B}+B\overline{A}$ 运算的逻辑电路. 当输入 A 和输入 B 相同时,输出 $F=0$;否则输出 $F=1$. 其真值表如右.

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

开关函数(switch function) 开关代数中的布尔函数. 由开关元经有限次 $-,\cup,\cap$ 运算得到的开关称为复合开关. 若对开关变元$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的任一组值$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$(a_i=0$ 或 $1;i=1,2,\cdots,n)$,复合开关 P 都有惟一确定的值 0 或 1,则 P 称为以 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$为变元的(n 元)开关函数,记为 $P=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或 $P=f(X)$,其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 开关定元 0 和 1 及单个开关变元也都是开关函数.

复合开关(composite switch) 见"开关函数".

开关函数的相等(equality of switch functions) 两个开关函数间的一种恒等关系. 给定的两个开关函数 $f(X)$与 $g(X)$相等,是指对于 X 的每一个值组,开关函数 $f(X)$与 $g(X)$的值都相同. 两个开关函数相等记为 $f(X)=g(X)$. 使用代入法可以鉴别两个开关函数是否相等. 每一个开关函数都代表一个电路. 如果开关函数相等,则这两个开关函数所代表的电路是等效的.

极小化问题(minimization problem) 求出与给定电路等效的一个(或所有)最简电路的问题. 实际上极小化问题就是求与给定真值函数(一种特殊的布尔函数)的一个(或所有)最简的等值函数. 较复杂的开关函数,常可化成与它相等但形式较简单的开关函数. 例如,$f(A,B,C)=AB\cup B'C\cup AB'C\cup B'$与 $\psi(A,B,C)=A\cup B'$相等,但 ψ 比 f 简单,实现 ψ 的组件比实现 f 的组件要少许多,而它们的逻辑功能却相同. 因此,用电路 ψ 来取代 f 既符合节省原则,而且还可提高效率. 所以极小化问题是开关电路中的重要研究课题. 求最简电路的方法有多种,如代数化简法,奎因-麦克勒斯基法,嘎柴拉法及卡诺图法等.

代数化简法(algebraic reduced method) 亦称公式化简法. 求极小化问题的一种方法. 由于开关函数和真值函数都是二值布尔代数 $B=\{0,1\}$中的布尔函数,所以这两种函数可看成同一种真值函数. 真值函数的代数化简法就是反复应用下列公式来化简它:

1. $A\cup(AB)=A$,　　$A(A\cup B)=A$.
2. $AB\cup AB'=A$,　　$(A\cup B)(A\cup B')=A$.
3. $A\cup A'B=A\cup B$,　　$A(A'\cup B)=AB$.
4. $AB\cup A'C\cup BCX=AB\cup A'C$,
$(A\cup B)(A'\cup C)(B\cup C\cup X)=(A\cup B)(A'\cup C)$.

卡诺图化简法(reduced method of a Karnaugh map) 化简真值函数的方法之一. 它具有几何直观性这一明显的特点,在变元较少(不超过六个)的情况下比较方便,且能得到最简结果. 此法由卡诺(Karnaugh,M.)于 1953 年提出,其具体步骤如下:

1. 构造卡诺框.
2. 在卡诺框上做出所给真值函数 f 的卡诺图.
3. 用卡诺图化简真值函数,首先把相邻的 1 字块两两合成矩形得到一维块;把 2^2 个相邻的 1 字块合成矩形(或正方形)得到二维块;把 2^3 个相邻的 1 字块合成矩形得到三维块等. 合成的各种维块统称 f 的合块.
4. 把 f 的卡诺图中全部 1 字块做成若干个合块,这样一组合块就称为 f 的一个覆盖组,f 的一切覆盖组中所含块数最小的组即是 f 的最小覆盖组.
5. 在最小覆盖组中,合块维数总和最大的组的对应式是 f 的最简式.

卡诺框(Karnaugh block) 卡诺图化简法中的步骤之一. 把一个矩形分成小方格,使每一个小方格表示一个极小项,这样的矩形称为卡诺框. 由于 n 个变元的一切可能的最小项有 2^n 个,所以 n 元的卡诺框具有 2^n 个小方格. 当 n 为偶数时,卡诺框呈正方形,否则

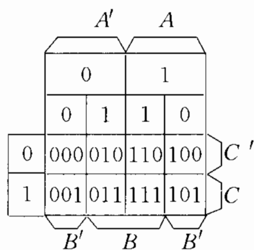


图1

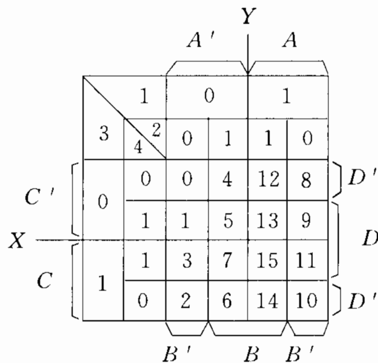


图2

呈长方形. r 个不同字的乘积一般用所谓坐标架法

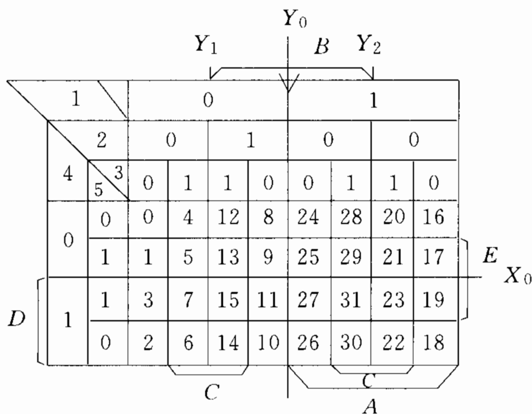
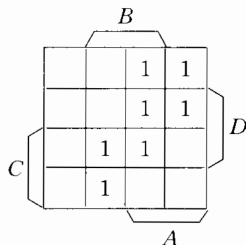


图3

来构造卡诺框,图中给出三至五元的卡诺框的三个

结构(在图 2、图 3 的小方格中用 10 进位数代替二进位数). $A_1A_2\cdots A_r(1\leqslant r\leqslant n)$称为小项,其中每个字分别是变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中某个变元或变元的补,极小项显然是小项. 两个小项中,如果一项有一个字与另一项的同位字互相否定,而其他的字完全相同,则称这两个项互为邻项. 如果两极小项互为邻项,则称卡诺框中表示这两项的小格互为邻格. 邻格在框图中是有公共边的或关于某个轴对称的两个小格. 卡诺框中的各小格称为 0 维块. 两个相邻的 0 维块合并成一个一维块. 两个相邻的一维块的对应项仍为邻项,二者合并成一个二维块等.

真值函数的卡诺图(Karnaugh map of truth-value function) 求极小化问题的一种方法. 将所给的真值函数 f 化成析取范式,把表示它的极小项的小格标上 1(或相应的十进位数),即得 f 的卡诺图. 例如,$f=AC'\cup A'BC\cup ABD$ 的卡诺图如右图.



C 法(C method) 用卡诺图法求真值函数 f 的最简式 φ 的一种方法. 要点是从 f 的卡诺图上选取个数最少、维数尽可能高的合块组把 f 覆盖起来. 这个工作可以不通过卡诺图来完成,而用 C 法,即克兰菲尔德方法来完成. 若极小项 P 含有小项 T 的所有字,则称 T 是 P 的因式. 容易证明:设小项 $T=A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_r$,其中每个字是变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中某个变元或变元的补,那么 T 必为含有 T 为因式的一切极小项之和. 这说明,若 T 为 r 个字的小项,又若在 f 的析取范式中,有 2^{n-r}个极小项包含 T 为其因式,那么这些极小项的和必等于 T. 把 T 在 f 的卡诺图上表示出来,便是一个 $n-r$ 维合块. T 就是这个合块的对应项. 设 f 中其余极小项的和为 g,则 $f=g\cup T$. 若 T 是维数最高的合块的对应项,人们便得到最简式 φ 的一个加项 T. 对 g 继续作同样考虑,便可逐步求出 φ 的其余加项.

质项(prime) 特殊的小项. 设 R 为真值函数 f 的卡诺图的合块. 若 f 的其他任何合块都不能覆盖 R,则 R 称为 f 的质块. 质块的对应小项称为 f 的质项. 质项有下列性质:

1. 若 φ 为 f 的最简式,则 φ 必为 f 的某些质项之和.

2. 若 $f\neq 0$,则 f 必有质项,而且只有有限个.

3. f 等于它的全部质项之和.

因此,可以由质项求最简式.

奎因-麦克勒斯基方法(Quine-McCluskey method) 亦称列表法. 求非重言的以基本积为项的析取范式的所有质项的方法. 目的是使析取范式极小化. 此方法由奎因(Quine, W. van O.)和麦克勒斯基(McCluskey, E. J.)提出,其主要步骤如下:设 $\Phi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k$,式中 φ_i 为极小项.

1. 把 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_k$ 列成表.

2. 如表中有 φ_i 与 φ_j,它们分别含有某一变元与此变元的补,其余相同,则将其共同的部分加入表中,并且在 φ_i 与 φ_j 旁打上记号"√".

3. 重复 2 中所述过程,直到不能再进行为止. 已记"√"之合取式可以再次使用.

在最后所得的表中没有"√"号的合取式就是 Φ 的质项. 例如,求 $\Phi=AB'C'D'+A'B'CD+AB'C'D+ABC'D'+A'BCD+ABC'D$ 的析取范式:

1. $AB'C'D'$—1000√ [1,3] 100*√.
   [1,3,4,6] 1*0*.

2. $A'B'CD$—0011√ [1,4] 1*00√.
   [1,4,3,6] 1*0*.

3. $AB'C'D$—1001√ [2,5] 0*11.

4. $ABC'D'$—1100√ [3,6] 1*01√.

5. $A'BCD$—0111√ [4,6] 110*√.

6. $ABC'D$—1101√.

上表中没有记上"√"号的 [2,5] 和 [1,3,4,6](或 [1,4,3,6])即 $A'CD$ 和 AC'是质项,因此 Φ 的质项析取范式为

$$\Phi=A'CD+AC'.$$

嘎柴拉法(Ghazala method) 从质项出发求极小析取范式的方法. 此法属于嘎柴拉(Ghazala, M. J.). 下面叙述的是嘎柴拉法的几种变形:

1. 将 $\Phi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_k$ 之各 φ_i 放在各列,而将质项 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_l$ 放在各行成一表.

2. 若 φ_i 为真时 σ_j 为真,则在(i,j)处记上"√"号.

3. 若第 i 列时"√"位置分别为$(i_1,i),(i_2,i),\cdots,(i_m,i)$,则作析取式 $\sigma_{i_1}+\sigma_{i_2}+\cdots+\sigma_{i_m}$,进而作

$$\prod_{i=1}^{k}(\sigma_{i_1}+\sigma_{i_2}+\cdots+\sigma_{i_m})=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_l).$$

4. 将 $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_l)$展开成析取范式,若它只含质项 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_l$ 中极少的析取项,设为 $\sigma_{j_1},\sigma_{j_2},\cdots,\sigma_{j_p}$,则 $\sigma_{j_1}+\sigma_{j_2}+\cdots+\sigma_{j_p}$即为所求之极小析取范式.

撰　稿　王永诚　卢景波　杨成新　沈呈民　陈国勋
周以铨　钱传宗　黄立丹　蒋星耀
审　阅　杨安洲　陶懋颀　蒋星耀　程其襄

概率论与统计学初步

概率论与统计学初步(elements of probability theory and mathematical statistics) 概率论和统计学的初步知识(基础知识).两者都是从数量侧面研究随机现象规律性的学科,但两者的研究方法不同.概率论是通过研究随机事件概率之间的定量关系来研究随机现象的规律性.而统计学则是从具体资料出发来研究随机现象的规律性.概率论最基本的概念是随机事件及其概率.对于随机现象,通常关心的是在试验或观察中某种结果出现的可能性,在用数学方法研究随机现象的过程中,常用数量来表示试验结果.由于随机试验的结果是不确定的,所以表示试验结果的数量是一个随试验结果而变的变量,这就是随机变量的概念.而统计学则是针对实际处理随机现象的任务,研究如何搜集、整理从调查或实验中得到数据资料,提出数学模型,并进行分析和推断,研究其规律,提出解决问题的方法.概率统计的理论已广泛应用于科学研究、经济管理、工农业生产和社会调查之中.随着电子计算机的普遍使用,过去人力难以完成的繁重数字计算已成为可能,这就加强了概率统计在科学研究和经济决策中的重要作用.由于它能够从部分的数据资料进行统计分析与统计推断而认识总体,因而能在许多学科中得到广泛的应用.概率统计初步仅包含概率论和统计学的基础知识.

概率论和统计学起源于17世纪中叶,当时在测量误差、人口统计、航海风险、人寿保险等问题中需要研究庞大的统计资料,需要创立一种专门研究大量随机现象的规律的数学.但当时刺激数学家们思考概率论问题,却是从赌博问题开始的.在惠更斯(Huygens,C.)去巴黎时得知帕斯卡(Pascal,B.)和费马(Fermat,P. de)在通信中讨论有关赌博的问题,对概率论产生了兴趣,决心自己解决这个问题.他于1657年发表了《论骰子游戏的推理》,书中解决了许多有趣的问题,还第一次引入了数学期望这个概念,奠定了古典概率论的基础.格兰特(Graunt,J.)于1662年发表专著《自然与政治观测……死亡率表》,通过对已有数据的计算和推理分析,得出伦敦与威尔士两地的人口预测.他应用统计抽样和自己创立的计算方法,对一定范围内的人口状况做出预测,这是历史上最早出现的统计推断.1746年,阿亨瓦尔(Achenwall,G.)所编统计学讲义,详述了英、法、德、俄、荷兰、丹麦、瑞典、西班牙、葡萄牙诸国的人口、土地、物产、兵力状况,首创了统计推断的方法.但是,这时的统计学实为社会情况统计研究的学科.1713年,雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)发表了概率论原理的专著《猜度术》,书中提出:“未知概率可以通过重复试验来确定,而且多次重复可以增加其准确性”,这就是大数定律的最早形式.1733年,棣莫弗(De Moivre,A.)导出了正态曲线,发表于1799年,使正态理论成为现代概率统计的躯干.19世纪中叶,凯特勒(Quetelet,L.-A.-J.)在《概率通讯》上发表了65篇统计学方面的论文,将统计方法应用于天文学、物理学、人类学、生物学以及行政管理等方面.高尔顿(Galton,F.)对遗传学的研究,是导致发现相关与回归概念的关键,回归一词即由高尔顿首先提出并应用于统计学的.他还提出了中数、四分数、百分数和四分差等概念.

19世纪末,概率理论迅速发展成为理论数学的一个分支,并开始和应用统计学相结合.戈塞特(Gossett,W. S.)于1908年发现了 $Z(=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)/S)$ 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布,开创了精确样本理论的研究,并为研究小样本分布理论奠定了重要基础;费希尔(Fisher,R. A.)致力于统计学在农业科学和遗传学中应用的研究,对当时被广泛应用的统计方法,进行了一系列的理论研究,给出了许多现代统计学中重要的基本概念,如研究了小样本理论,用实验结果进行参数估计的理论,奠定了实验设计和统计推断的基础.20世纪以来,概率论逐步发展成为具有严格理论基础的数学学科,以概率论为理论基础的统计学也获得了辉煌的进展和广泛的应用.

随机事件与概率

随机现象(random phenomenon) 概率论的基本概念之一.指在一次试验或观测中,其结果有多种可能,事先无法精确断定究竟发生哪一种结果的现象.随机现象的本质特点是通过大量的试验和多次的观测以后,就其整体来看,将出现严格的非偶然的规律性.概率论和统计学的目的,就是从数量方面去研究这种规律性.例如,观测某城市近郊公路上汽车的流量,在不同日期的相同单位时间内,通过的汽车辆数是预先不能确定的,这种现象就是随机现象.但经过多次的观测,该城市近郊的公路上在单位时间内汽车的流量总是在某一个常数附近摆动的.随机现象可有数量性的表现(如学生的身高、体重),也可

有非数量性的表现(如学生的智力及思想品德情况).后者必须经过量化(如智力用智商表示,思想品德可按某些标准评分)才适合用概率统计的方法去研究.

随机试验(random trial) 常简称试验,亦称随机实验.概率论的基本概念之一.指在科学研究或工程技术中,对随机现象在相同条件下的观察.对随机现象的一次观察(包括试验、实验、测量和观测等),事先不能精确地断定其结果,而且在相同条件下可以重复进行,这种试验就称为随机试验.

随机实验(random trial) 即"随机试验".

随机事件(random event) 简称事件.概率论的基本概念之一.指在相同的确定条件下,随机试验所可能有的表现或结果.例如枪手射靶时,"命中10环"或"命中8环以上"等.随机事件一般用大写字母$A,B,C,\cdots$表示.为了研究的方便,有两种极端情况,即在相同条件下,每次试验中都一定发生和一定不发生的事件,也都当成随机事件,分别称为必然事件和不可能事件,以专用记号Ω和$\varnothing$表示(参见"基本事件空间").随机事件可分为基本事件与复合事件两类.在概率论的公理化体系中,随机事件是基本事件空间的子集.

事件(event) 随机事件的简称.

偶然事件(accidental event) 随机事件的旧称.

必然事件(certain event) 随机事件的特殊情况之一.指在相同条件下每次试验都必然发生的事件.例如"掷一枚骰子,出现点数小于7".若事件A是必然事件,则试验n次就出现n次,所以必然事件的频率总为1,从而必然事件的概率等于1.

不可能事件(impossible event) 随机事件的特殊情况之一.指在相同条件下每次试验一定不发生的事件.例如,掷一枚骰子出现7点.不可能事件的频率总等于零,所以不可能事件的概率等于零.

基本事件(elementary event) 亦称简单事件或样本点.概率论的基本概念之一.特殊的随机事件,指不能再分解为几种更简单情形的随机试验的结果.它是基本事件空间的元素,当把任何随机事件看做基本事件空间的子集时,基本事件就是其中的单元素子集(这里没有严格区分一个元素与只含这个元素的单元素集).例如,掷一枚骰子(它的6面分别标有1至6点),出现1点,出现2点,…,与出现6点,这些事件都是基本事件.不同的基本事件是互不相容的事件.相对于此,一个事件如果是两个以上基本事件的并事件,就称为复合事件(例如,掷一枚骰子出现偶数点).

简单事件(simple event) 亦称单纯事件.即"基本事件".

样本点(sample point) 即"基本事件".

复合事件(compound event) 见"基本事件".

基本事件空间(space of elementary event) 概率论的基本概念之一.指同一问题中的所有基本事件组成的集合.通常用Ω表示.在统计学中习惯称为样本空间,它的元素称为样本点,即基本事件.基本事件空间所含元素个数为有限或可数时,分别称为有限基本事件空间或离散基本事件空间.在现代概率论中,随机事件被看做基本事件空间的子集,于是不可能事件就是空集$\varnothing$,必然事件就是全空间Ω.

样本空间(sample space) 全体样本点的集合(参见"基本事件空间").

有限基本事件空间(finite space of elementary events) 一种基本事件空间.即只包含有限个基本事件的基本事件空间.例如,掷一颗骰子,则可能出现的点数为1点,2点,…,6点,若用$A_i(i=1,2,\cdots,6)$表示基本事件"出现i点",则用Ω表示的基本事件空间

$$\Omega=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6\}$$

就是有限基本事件空间.

离散基本事件空间(discrete space of elementary events) 一种基本事件空间.指包含可列个基本事件的基本事件空间.例如,随机试验是测定某城市近郊公路上在一日内的汽车流量,其可能结果用非负整数表示.这个基本事件空间可记为$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$,它相当于可列的非负整数集,故为离散基本事件空间.

互不相容事件(mutually incompatible events) 亦称互斥事件.概率论的基本概念之一.指不可能同时发生的两个事件.从集合的意义上来讲,互不相容事件A和B是基本事件空间Ω中互不相交的两个子集.即$A\cap B=\varnothing$,或记为$AB=\varnothing$.例如:$A=\{$抽查到的不合格产品件数小于3$\}$,$B=\{$抽查到的不合格产品件数大于5$\}$,则事件A,B是互不相容事件.

互斥事件(mutually exclusive events) 即"互不相容事件".

互逆事件(mutually reciprocal events) 亦称互补事件,又称对立事件.概率论的基本概念之一.指在每次随机试验中,必然有一个发生,但又不能同时发生的两个随机事件.事件A和B互逆必须且只须$A\cup B=\Omega$(必然事件)且$A\cap B=\varnothing$(不可能事件).A与B是互逆事件时,A和B互称为逆事件,记为$A=\overline{B}$($\overline{B}$表示B的逆事件),或$B=\overline{A}$($\overline{A}$表示A的逆事件).若随机事件A是基本事件空间Ω的某个子集,则逆事件$\overline{A}$就是A在Ω中的补集.猜测在掌心中的钱币朝上的一面"是正面"与"是反面"这两个事件就是互逆事件.

互补事件(mutually complementary events)

即“互逆事件”.

对立事件(complementary events) 即“互逆事件”.

事件的包含关系(relation of inclusion of events) 概率论的基本概念之一.如 A 与 B 是两个事件,且 A 的发生必导致 B 发生,则称事件 A 含于事件 B 或 B 包含 A,记为 $A\subseteq B$.若 $A\subseteq B$,则有 $AB=A, A\cup B=B, P(A)\leqslant P(B)$.检验事件 A 是否含于事件 B,可以从集合的角度检查 A 是否为 B 的子集,也可以从推理上看 A 发生时是否必定 B 发生.这二者是一致的.例如,检验某厂生产的螺钉是否合格,若事件 A 表示螺距不合格,事件 B 表示产品不合格,此时 A 发生必然导致 B 发生,所以有 $A\subseteq B$,即事件 A 含于事件 B.

并事件(union of events) 亦称和事件.事件的基本运算之一.若 A,B 为两个事件,则 A,B 中至少有一个发生这一事件,称为事件 A,B 的并事件.记为 $A\cup B$.特别地,当 A,B 互不相容时,亦记为 $A+B$.从集合论的角度看,二事件 A,B 的并就是他们作为集合的并 $A\cup B$.例如,随机试验是记录某电话交换台在一分钟内接到呼唤的次数,用 A 表示每分钟接到一次呼唤,用 B 表示每分钟接到两次呼唤,则 $A\cup B$ 表示每分钟接到 1 次或 2 次呼唤.类似地,随机事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中至少有一个发生这一事件称为诸 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的并事件,或称为 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的和事件,记为

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{n}A_i(各\ A_i\ 互不相容时).$$

和事件(sum event) 即“并事件”.

交事件(intersection of events) 亦称积事件.事件的基本运算之一.两个事件 A,B 同时发生的事件,称为事件 A 与 B 的交事件.记为 $A\cap B$ 或 AB.例如,随机试验是检测某圆柱形产品是否合格(假定该产品合格与否只由其直径与长度决定),其中 A 表示直径合格,B 表示长度合格,则 $A\cap B$ 表示产品合格.类似地,诸事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 同时发生这一事件称为诸 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的交事件,记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i,$$

或记为 $$A_1A_2\cdots A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i.$$

积事件(product event) 即“交事件”.

事件运算的性质(properties of operation of events) 概率论中事件的运算性质与集合论中集合的运算性质是一致的,主要包括:

事件加法(并)运算的主要性质:

1. $A\cup B=B\cup A$.
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.
3. $\varnothing\cup A=\Omega\cap A=A$.

事件乘法(交)运算的主要性质:

1. $AB=BA$.
2. $(AB)C=A(BC)$.
3. $\varnothing A=\varnothing$.
4. $A\overline{A}=\varnothing$.
5. $A\subseteq B\Leftrightarrow AB=A$.
6. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.
7. $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
8. $A(B\cup A)=A, A(B\cup C)=AB\cup AC$.

等可能的(equally probable) 对样本空间中的每个样本点(基本事件)的假设条件.在随机试验时,若一些随机事件发生的可能性是完全相同的,或者说它们出现的机会是均等的,则称这些事件为等可能的.例如,随意掷一颗骰子,如果骰子是完善的,出现 1 至 6 点中的任何一个点数的可能性是相同的,则称这 6 个事件是等可能的.

频率(relative frequency) 概率论的基本概念之一.如果在相同条件下进行 n 次重复试验,事件 A 在这 n 次试验中发生了 m 次,则数 m 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频数,而频数 m 与试验的总次数 n 之比 $f_n(A)=m/n$ 称为 A 在这 n 次试验中出现的频率.对于任何事件 A,总有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

频数(absolute frequency) 见“频率”.

概率(probability) 亦称或然率、几率、机率.概率论的基本概念之一.随机事件发生可能性大小的数字度量,称为随机事件的概率.在 n 次重复试验中,当重复试验的次数 n 越大时,事件 A 发生的频率 m/n 总在某个常数 p 附近摆动,而频率与 p 有显著差异的情况是罕见的,就称数 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

事件的概率有下述性质:

1. 任何随机事件 A 的概率总是介于 0 与 1 之间的一个数,即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

2. 必然事件 Ω 的概率为 1,即 $P(\Omega)=1$;不可能事件 $\varnothing$ 的概率为零,即 $P(\varnothing)=0$.

3. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容,则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{m}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

所以,某事件的概率就是指在一定条件下该随机事件发生机会的大小,概率越大,表示该事件发生的可能性越大.日常生活中人们常通过事件发生的频率来判断概率的大小.在古典概型中可通过基本事件的等可能性求得任一随机事件的概率.在近代概率论中是用公理化的方法来定义概率的.

或然率(probability) 即“概率”.

几率(probability) 即“概率”.

古典概型(classical probability model) 一种

概率模型.如果随机试验具有下列性质:

1.基本事件空间中的基本事件只有有限多个.

2.任一基本事件发生的可能性都是相同的,

则称此随机试验为古典概型.

例如,投掷一枚完善的骰子,从一本书上任意地查阅一页,或从有限件产品中抽样检查等,都可归为古典概型.设基本事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 且各 ω_i $(1\leqslant i\leqslant n)$,发生的可能性是相同的,则有:

1.每个基本事件的概率均等于 $1/n$,即

$$P(\omega_i)=1/n(1\leqslant i\leqslant n).$$

2.基本事件空间 Ω 的任一子集亦为随机事件.

若 A 由 k 个 $(0\leqslant k\leqslant n)$ 基本事件组成,则 A 的概率为 $P(A)=k/n$.式中的 k 称为有利于事件 A 的基本事件数,或称为 A 的有利场合数,n 为基本事件总数或称所有可能的场合总数.这样

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{A\text{ 的有利场合数}}{\text{所有可能的场合总数}}.$$

古典概型是概率论中最简单且直观的模型.在概率论的历史上,许多概率的运算法则都是在古典概型这个模式中得到证明的,卡尔达诺(Cardano,G.)在所著《论赌博》一书中已计算了同时掷两颗或三颗骰子时,在一切可能情况中出现某一总点数的概率.塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)也曾发表过类似的计算.1812年,拉普拉斯(Laplace,P.-S.)在所著的《关于概率的分析理论》一书中给出了只有有限个可能结果出现时事件的概率的古典定义.

基本事件数(numbers of elementary events) 见"古典概型".

几何概型(geometric probability model) 一种概率模型.它是古典概型的补充和推广.随机试验的基本事件空间包含无穷多个元素,每个基本事件由在几何空间(一维、二维……n 维)中的某一区域 G 内随机而取的点的位置来确定,各个基本事件的发生或出现是等可能的,即所取点在区域 G 内的任意位置是等可能的.在此模型下,随机事件 A 可表示所取点落入 G_A,G_A 是 G 的某个子集.如果用 $m(G_A)$ 和 $m(G)$ 分别表示区域 G_A 和 G 的测度(长度、面积或体积),这时事件 A 的概率是

$$P(A)=\frac{m(G_A)}{m(G)}.$$

由于对几何概型中随机取点的"随机"二字理解的不同,常有同一问题引出不同结果的现象.几何概型中的一个最有名的例子是布丰投针问题(参见本卷《数学辞海》第四卷《概率论》中的"布丰问题").

概率加法定理(addition theorem of probability) 亦称有限可加性,或称概率的加法规则.概率论的重要定理之一.即有限个互不相容事件的和的概率等于这些事件的概率的和.设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 n 个互不相容的随机事件,此定理可表达为:

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

概率加法定理可作如下推论:

1.若有限个随机事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 构成互不相容的完备群,则这些事件的概率之和等于1,即

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1.$$

2.对立事件的概率之和等于1,即 $P(A)+P(\overline{A})=1$,式中 $\overline{A}$ 表示事件 A 的对立事件.有时直接计算 $P(A)$ 较困难,常利用此推论先算出 $P(\overline{A})$,然后可得 $P(A)$.

3.任意两事件和的概率等于这两事件概率的和减去这两事件积的概率,即

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

当 A,B 两事件互不相容时,则 $P(AB)=0$,就得到本定理当 $i=2$ 时的特殊情况.

4.若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是任意 n 个随机事件,则有

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P\Big(\prod_{i=1}^{n}A_i\Big).$$

条件概率(conditional probability) 概率论的重要概念之一.它是全概率公式和贝叶斯公式的基础.若 A,B 为两个事件,且 $P(B)>0$,则在事件 B 已经发生的条件下,事件 A 再发生的概率称为 A 关于 B 的条件概率,记为 $P(A|B)$,并规定:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

相应地,$P(A)$ 可称为无条件概率.条件概率 $P(A|B)$ 就是在随机试验原有的条件下,增加了"事件 B 已经发生"这个附加条件时,事件 A 发生的概率.例如,袋中装有8枚20世纪的伍分硬币,其中50年代的有两枚,60年代的有6枚.今从袋中两次取出硬币,每次取1枚后不放回.计算第一次取出50年代币一枚以后,第二次取出也是50年代币的概率.若事件 B 表示第一次取出的是一枚50年代币,事件 A 表示第二次取出的是一枚50年代币,则 AB 表示两次取出的都是50年代币,而要求的是 $P(A|B)$.于是:

$$P(B)=\frac{C_2^1}{C_8^1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}>0,$$

$$P(AB)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28},$$

依条件概率的定义，即得：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{28}\Big/\frac{1}{4}=\frac{1}{7}.$$

若将上述条件概率定义中的公式改写为 $P(AB)=P(B)P(A|B)$，这个等式称为概率的乘法公式，它可推广到 n 个事件的情形（参见“概率乘法定理”）.

概率乘法定理(multiplication theorem of probability)　亦称概率乘法规则. 概率论的重要定理之一. 即两事件积的概率，等于其中一事件的概率与另一事件在前一事件已发生时的条件概率的乘积. 若 A,B 为随机事件，当$P(B)>0$ 时，则定理可表示为

$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

其中 $P(A|B)$为事件 A 关于事件 B 的条件概率. 同理，当 $P(A)>0$ 时，亦可表为

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

若事件 A 与事件 B 相互独立时，则有$P(AB)=P(A)P(B)$. 若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$为 n 个随机事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

此即上述定理的推广，常称此为一般概率乘法公式. 若事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

概率乘法规则(multiplication rule of probability)　即“概率乘法定理”.

概率乘法公式(multiplication formula of probability)　见“概率乘法定理”和“条件概率”.

完备事件群(complete events group)　简称完备群. 概率论的基本概念之一. 即试验中的若干个事件，它们互斥且至少有一事件发生. 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$为 n 个事件，若满足：

1. $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$；

2. $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,

则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为基本事件空间 Ω 的一个有限完备事件群.

全概率公式(formula of total probability)　概率计算的基本公式之一. 若事件组$\{B_i\}\ (i=1,2,\cdots,n)$，是基本事件空间 Ω 的完备群，且$P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 A，有全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

全概率公式可用于概率的实际计算，运用全概率公式的关键在于找出完备事件群.

贝叶斯公式(Bayes formula)　亦称逆概率公式，或称事后概率公式，原因概率公式等. 有关条件概率计算的重要公式. 若事件组$\{B_i\}\ (i=1,2,\cdots,n)$，是基本事件空间 Ω 的完备群，且 $P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则对任意事件 A，$P(A)>0$，有贝叶斯公式：

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

这个公式的意义为：若引起事件 A 发生的原因很多，它们是$\{B_i\}\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $P(A|B_k)$可以看做在原因事件 B_k 已发生的情况下，事件 A 的概率；$P(B_k)$称为先验概率，它反映了各个原因发生的可能性大小. 而 $P(B_k|A)$可以看做事件 A 的发生是由原因 B_k 引起的概率，此称为后验概率. 贝叶斯公式给出了先验概率与后验概率的关系，在统计中能起决策的作用. 贝叶斯(Bayes，T.)在《论有关机遇问题的求解》中建立了条件概率的贝叶斯公式，使人们得以用经验方法来估计事件出现的概率，在现代概率论和统计学中起重要作用. 贝叶斯最先将归纳推理法用于概率基础理论，以后被一些统计学者发展为一种系统的统计推断方法，称为贝叶斯方法. 贝叶斯所采用的概率论中的许多术语沿用至今.

逆概率公式(formula of inverse probability)　即“贝叶斯公式”.

先验概率(prior probability)　见“贝叶斯公式”.

后验概率(posterior probability)　见“贝叶斯公式”.

独立事件(independent events)　概率论的基本概念之一. 两个事件 A 与 B，若事件 B 发生与否同事件 A 发生的概率无关，反之亦然，则称 A 与 B 是相互独立的事件. 两个事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$. 式中的 AB 表示事件 A 和 B 同时发生(即 A,B 的交).

两个事件相互独立有如下性质：

1. 必然事件 Ω 及不可能事件$\varnothing$与任何事件独立.

2. 若 $P(B)>0$，则事件 A,B 相互独立的充分必要条件是：$P(A|B)=P(A)$.

3. 若事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B 及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 这三对事件也是分别相互独立的.

在实际应用中，判定两个事件是否相互独立，常常依靠经验直观的方法. 比如，两名射手独立地射击同一目标，他们各自射中的环数是相互独立的. 对于条件复杂的试验，判定两事件是否相互独立要特别谨慎，比如甲、乙两地的气象情况就不一定是相互独立的，它们可能存在某些内在联系. 对于这类条件复杂的问题就要依靠统计资料进行分析，看是否符合

事件相互独立的条件来判定之.

三个事件的独立性(independence of three events) 独立事件概念的推广. 对于三个事件 A, B, C, 若下面四个等式:

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

同时成立, 则称 A, B, C 这三个事件是相互独立的, 或称这三个事件总体独立. 若三个事件 A, B, C 两两独立(即前三个等式成立), 则还不能保证三个事件相互独立, 因为上述前三个等式成立不一定能推出第四等式的成立. 反之, 仅有三个事件之积的概率等于各个事件概率之积这第四个等式成立, 也不能称为三个事件相互独立, 亦因这第四等式成立不一定就能推出前三个等式的成立. 因此, 要使三个事件相互独立, 上述四个等式缺一不可.

***n* 个事件的独立性**(independence of n events) 独立事件概念的推广. 若对于 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的所有可能组合, $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$, 下列 2^n-n-1 个等式:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),$$
$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

都能同时成立, 则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相互独立的, 或称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 总体独立. 这里第一个等式共包含 C_n^2 个等式, 第二个等式共包含 C_n^3 个等式……因此, 共包含

$$\sum_{m=2}^{n} C_n^m = 2^n - n - 1$$

个等式. n 个事件相互独立有如下性质:

1. 若 n 个事件相互独立, 则它们中任意 m 个 ($2\leqslant m<n$) 事件也是相互独立的, 因为这 m 个事件所应满足的 2^m-m-1 个等式已经包含在其中.

2. 若随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则将 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 中的任意几个换成它们的对立事件, 所得到的 n 个事件仍是相互独立的.

伯努利试验(Bernoulli trials) 一个著名的随机试验, 即试验结果只有 A 和 $\bar{A}$ 两个基本事件的随机试验 E. 把伯努利试验 E 在相同条件下重复地独立进行 n 次的试验称为 n 重伯努利试验, 常记为 E^n. 将伯努利试验 E 独立地重复可列无穷多次的试验称为可列重伯努利试验. 以上三种伯努利试验统称为伯努利概型. 如投掷钱币的试验, 产品抽样(有放回的)检查的合格与否的试验都属于伯努利概型. 它是最早被研究的随机试验模型之一, 概率论中许多极限定理都是先在这种模型下得到的. 雅各布第一·伯努利(Bernoulli, Jacob I)在《猜度术》中最先给出这种随机试验的概型.

***n* 重伯努利试验**(n-fold Bernoulli trials) 见"伯努利试验".

可列重伯努利试验(countable fold Bernoulli trials) 见"伯努利试验".

伯努利概型(Bernoulli probability model) 见"伯努利试验".

随机变量与分布函数

随机变量(random variable) 概率论的基本概念之一. 指定义于基本事件空间 $\Omega=\{\omega\}$ 上的单值实函数 $\xi(\omega)$. 常见的随机变量有离散型和连续型两类(参见本卷《数学辞海》第四卷同名条).

离散型分布(discrete distribution) 随机变量的两个常用的分布类型之一. 可用分布列去描述它所可能取的值及取这些值的概率.

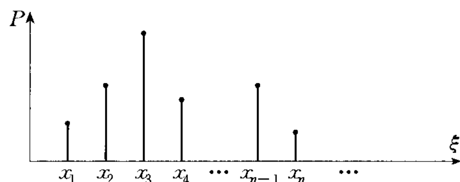
1. 只取有限或可列个值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 或 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的随机变量 ξ, 其概率分布可用数列 $P(\xi=x_i)=p_i\,(i=1,2,\cdots)$ 表示, 称为一维(实值)离散型随机变量, 简称离散型随机变量. 它的概率分布称为离散型分布. 离散型分布还可用列表法或图示法表示:

1) 用列表法表示离散型随机变量 ξ 的分布表:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$P(\xi=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

并称此表为随机变量 ξ 的分布列, 或称为分布律, 亦简称分布.

2) 用图示法表示离散型随机变量 ξ 的分布图:



图中各垂直线段(表示 p_i 的值)都在横轴上方, 且各线段长度之和为 1.

离散型随机变量的分布列必须满足下面两个条件:

① (1)$P(\xi=x_i)=p_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$.

② $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

离散型分布的分布函数为

$$F(x)=\sum_{i:x_i<x} p_i.$$

2. 定义在基本事件空间 Ω 上的 n 维随机向量 ξ

$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，只取有限或可列组值（实值）

$$(x_{1i_1},x_{2i_2},\cdots,x_{ji_j},\cdots x_{ni_n})$$

$$(i_j:i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots n),$$

其概率分布可以用 n 重数列表示

$$P(\xi_1=x_{1i_1},\xi_2=x_{2i_2},\cdots,\xi_j=x_{ji_j},\cdots,\xi_n=x_{ni_n})$$
$$=p_{i_1i_2\cdots i_j\cdots i_n}\ (i_j:i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,n)$$

称为 Ω 上的离散型随机向量，它的分布是离散型分布.

若(ξ,η)是二维离散型随机变量，取值为(a_i,b_j) $(i,j=1,2,\cdots)$，则概率 $P(\xi=a_i,\eta=b_j)=p_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots)$，称为(ξ,η)的联合分布.

ξ \ η	b_1	b_2	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
a_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
a_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	

由此表中可以看到在联合分布 p_{ij}的右边多了一列，它是将每行中的 p_{ij}对 j 相加而得到的 $p_{i\cdot}$，它即为 ξ 的分布列；又由此表的下边看到联合分布 p_{ij}的下面也增加了一行，它是将每一列中的 p_{ij}对 i 相加而得到的 $p_{\cdot j}$，即 η 的分布列. 这样，ξ 和 η 的分布列的位置就在(ξ,η)的联合分布的边上，因而常形象地称 ξ 和 η 的分布列是(ξ,η)联合分布的边际分布或边缘分布.

二维离散型随机变量(ξ,η)的联合分布具有下面三个性质：

1) $p_{ij}\geqslant 0\ (i,j=1,2,\cdots)$.

2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$.

3) $\begin{cases}P(\xi=a_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},\\ P(\eta=b_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}.\end{cases}$

常用的离散型分布有退化分布、两点分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布、帕斯卡分布等（参见本卷《数学辞海》第四卷《概率论》中的“离散型随机变量”及“离散型随机向量”）.

离散型随机向量(discrete random vector)　见“离散型分布”.

离散型随机变量(discrete random variable)　见“离散型分布”.

单点分布(one-point distribution)　亦称一点分布，或称退化分布. 一种最简单的离散型分布. 若随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=c)=1$，则称 ξ 服从单点分布. 这时 ξ 只取一个值 c，且取 c 的概率为 1. 这样的 ξ 并不随机，而是把它看成随机变量的退化情况，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0\ (x<c),\\1\ (x\geqslant c).\end{cases}$$

退化分布(degenerated distribution)　即“单点分布”.

两点分布(two-points distribution)　亦称伯努利分布. 一种基本的离散型分布. 若随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=x_1)=p,P(\xi=x_2)=1-p,0<p<1$，则称 ξ 服从两点分布. 若 $x_1=1,x_2=0$ 时，则称 ξ 服从 0—1 分布. 当试验 E 是伯努利试验时，即 E 只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$，且 $P(A)=p$，可定义随机变量 ξ 为$\xi(A)=1,\xi(\overline{A})=0$，则 ξ 是服从 0—1 分布的随机变量，因此，伯努利试验均可用两点分布来描述. 0—1 分布的随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\1-p & (0\leqslant x<1),\\1 & (x\geqslant 1).\end{cases}$$

伯努利分布(Bernoulli distribution)　即“两点分布”.

泊松分布(Poisson distribution)　一种重要的离散型分布. 若离散型随机变量 ξ 可取一切非负整数值，且有

$$P(\xi=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ (k=0,1,2,\cdots),$$

则称 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布. 其中 $\lambda>0$，e 是自然对数的底. 此分布的平均值 $m=\lambda$，标准差 $\sigma=\sqrt{\lambda}$. 当二项分布中成功的概率 p 较小时，用泊松分布近似地计算二项分布较为方便. 泊松分布描述的是稀有事件的概率，这种事件在每次试验中出现的概率 p 很小，但试验的次数 n 较大. 例如，在一定空间内所测到的放射性有害粒子数；在一定时间内电话交换台收到的呼唤次数等都服从泊松分布. 一般地，若用 $\xi_{(a,b]}$表示时间区间$(a,b]$中某一事件发生的次数，且这一事件的发生满足条件：

1. 平稳性：$P(\xi_{(a,b]}=k)$只与 $b-a$ 和 k 有关.

2. 无后效性：对任意不相交的区间$(a_i,b_i]$，$\xi_{(a_i,b_i]}$，$1\leqslant i\leqslant n$，相互独立.

3. 普通性：即

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}P(\xi_{(a,a+t]}\geqslant 2)=0.$$

这时 $\xi_{(a,b]}$必服从泊松分布. 泊松(Poisson,S.-D.)是近代概率论奠基人之一. 他在 1837 年发表的《概率在刑事与民事诉讼方面应用的研究》中，给出了描述这种离散型随机变量的分布.

二项分布(binomial distribution)　一种重要的离散型分布. 在 n 重伯努利试验中，某一随机事件 A

发生的次数是随机变量 ξ，若 ξ 的所有可能取值为 $k=0,1,2,\cdots,n$，其分布列为

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}\ (0<p<1,\text{且 } p+q=1).$$

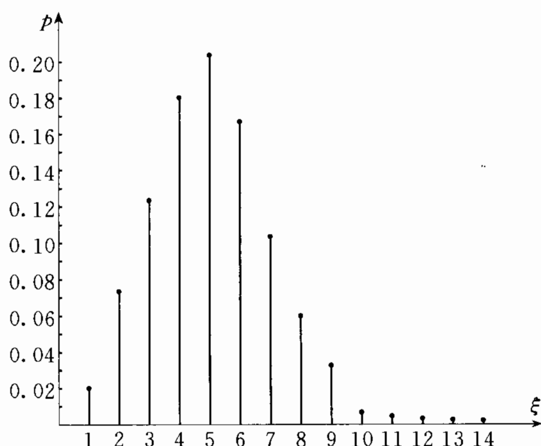
其中 p 为随机事件 A 发生的概率. 由于上述概率恰为二项式 $(p+q)^n$ 展开式中的各项，故称上述 ξ 的分布为二项分布，它仍满足：

1. $P(\xi=k)$ 的每一个数都非负，即 $C_n^k p^k q^{n-k}\geqslant 0$.

2. 所有各概率之和为 1，即

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=1.$$

上述二项分布的参数 n 和 p 确定时，可作随机变量 ξ 的概率分布图. 这里设 $n=20,p=0.25$，作概率分布图如下：



从图中可看出，当 k 增加时，$P(\xi=k)$ 先是增加，达到某一极值后又减少.

格点分布(lattice distribution)　亦称格子点分布. 一种基本的离散型分布. 若离散型随机变量 ξ 取的值 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，是直线上的等距点列 $\{a+ih\}$，其分布列为 $P(\xi=x_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，则称 ξ 服从格点分布. 其中 i 为任意整数，a,h 为固定实数. 二项分布，泊松分布都是格点分布的特殊情况.

几何分布(geometrical distribution)　一种常见的离散型分布. 在伯努利试验中，成功的概率为 p，若 ξ 表示出现首次成功时的试验次数，则 ξ 是离散型随机变量，它只取正整数，且有 $P(\xi=k)=(1-p)^{k-1}p\ (k=1,2,\cdots,0<p<1)$，此时称随机变量 ξ 服从几何分布. 它的期望为 $1/p$，方差为 $(1-p)/p^2$. 注意：ξ 等于 k 的充分必要条件是前 $k-1$ 次试验都失败，而第 k 次试验成功. 又因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi=k)=p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}$$
$$=\frac{p}{1-(1-p)}=1.$$

这表明最终取得成功的概率为 1.

超几何分布(hypergeometric distribution)　一种常用的离散型分布. 设有 N 件产品，其中 M 件是次品，现不放回地随机抽取 n 件，设 ξ 表示所抽 n 件产品中的次品数，则 ξ 是离散型随机变量，当 $\xi=k$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 时的概率为

$$P(\xi=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

此时称 ξ 服从参数为 N,M 的超几何分布. 其均值为 nM/N，方差为

$$\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}.$$

当 n 较小，N 较大时，有下述近似公式

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\approx C_n^k p^k q^{n-k}.$$

其中 $p=M/N,q=1-p$. 即是说这时超几何分布的概率计算可以近似地用二项分布来代替. 超几何分布是不放回抽样，而二项分布则是放回抽样，当产品总数 N 很大时，不放回抽样近似于放回抽样. 超几何分布在产品检验中经常用到.

帕斯卡分布(Pascal distribution)　亦称负二项分布. 一种常用的离散型分布. 在伯努利试验中，成功的概率用 p 表示，令 ξ 表示出现第 r 次成功时的试验次数，则 ξ 是离散型随机变量，ξ 的取值范围是 $\{r,r+1,r+2,\cdots,\}$，其概率分布为

$$P(\xi=k)=C_{k-1}^{r-1}q^{k-r}p^r\ (k=r,r+1,\cdots),$$

此时称 ξ 服从帕斯卡分布. 其中 p 表示每次试验出现成功的概率，而 $q=1-p$. 它的期望为 r/p，方差为 rq/p^2，当 $r=1$ 时，即为几何分布. 帕斯卡(Pascal,B.)曾于 1654 年与费马(Fermat,P. de)在通信中研讨有关概率问题，他们的研究被认为共同奠定了概率论和组合分析的基础. 在他的《算术三角形》一书中，建立了概率论的基本原理和若干重要的组合定理. 此分布即由帕斯卡首先引入并载于此书中.

负二项分布(negative binomial distribution)　即“帕斯卡分布”.

广义二项分布(generalized binomial distribution)　二项分布的一种推广. 在伯努利试验 $E=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 中，第 i 次试验成功的概率为 p_i，若 ζ 表示成功的次数，则 μ 为离散型随机变量. $\zeta=k$ 的概率为

$$\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_ix) \qquad (1)$$

的展开式中 x^k 项的系数 $(k=0,1,2,\cdots,n)$. 此时称 ζ 服从广义二项分布，其中 $q_i=1-p_i$. (1)式称为概率母函数.

概率母函数(probability generating function)　见“广义二项分布”.

概率分布函数(distribution function of proba-

bility） 描述随机变量取值的概率规律的函数. 若 ξ 为随机变量，对任意实数 x，称

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=P(-\infty<\xi\leqslant x)$$

为 ξ 的概率分布函数.

概率分布函数具有下述性质：

1. 单调性. 若 $x<x'$，则 $F(x)\leqslant F(x')$.

2. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

3. 右连续性. 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$.

概率分布函数的图形称为分布曲线，亦有人把概率密度函数的图形称为分布曲线.

分布曲线（distribution curve） 见“分布函数”.

连续型分布（continuous distribution） 随机变量的两个常用的分布类型之一. 它的分布函数不能用列表方式表示. 若随机变量 ξ 可取某个区间 (c,d) 中的一切值，且存在一个非负可积函数 $f(x)$，使得 ξ 的分布函数 $F(x)$ 可以表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)\mathrm{d}y\quad(x\in R),$$

则称 ξ 服从连续型分布，或称 ξ 是连续型随机变量，$f(x)$ 称为 ξ 的分布密度.

连续型分布函数 $F(x)$ 有如下主要性质：

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\mathrm{d}y=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

2. $P(a<\xi\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$,

即连续型随机变量 ξ 落在任一区间 $(a,b]$ 内的概率等于分布密度在该区间上的积分.

3. 因为 $F(x)$ 是连续函数，故有

$$P(\xi=a)=F(a)-F(a-0)=F(a)-F(a)=0,$$

即连续型随机变量取任一单个值的概率为 0.

4. 若 x_0 是 $f(x)$ 的连续点，则

$$F'(x_0)=f(x_0)\geqslant 0.$$

5. 若 $F'(x)$ 是连续函数，则

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}F'(y)\mathrm{d}y,$$

即此时概率分布密度就是 $F'(x)$.

常用的连续型分布有正态分布、均匀分布、指数分布、对数正态分部、韦布尔分布、Γ 分布、B 分布等（参见本卷《数学辞海》第四卷《概率论》中的“连续型随机变量”和“连续型随机向量”）.

对二维随机向量 (ξ,η)，用 $F(x,y)$ 表示它们的分布函数，若存在非负的二元函数 $f(x,y)$，使对任意实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则 (ξ,η) 称为连续型随机向量，$F(x,y)$ 称为连续型分布函数，而 $f(x,y)$ 称为 (ξ,η) 的分布密度，其分布密度有如下性质：

1. $f(x,y)\geqslant 0$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

3. 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则有

$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$$

4. 若 G 是 xOy 平面上的一个区域，则点 (ξ,η) 落在 G 内的概率为

$$P\{(\xi,\eta)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

亦即概率 $P\{(\xi,\eta)\in G\}$ 等于以 G 为底、以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶面的柱体体积.

连续型分布函数（continuous distribution function） 见“连续型分布”.

连续型随机变量（continuous random variable） 见“连续型分布”.

概率分布密度（density of probability distribution） 见“连续型分布”.

均匀分布（uniform distribution） 亦称一致分布，又称等概率分布. 一种常用的连续型分布. 即随机变量在确定的区间中取每个值具有等可能性的分布. 若 $a<b$ 是两个有限数，而随机变量的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & (x\in[a,b]),\\ 0 & (x\overline{\in}[a,b]),\end{cases}$$

则称 ξ 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布. 其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<a),\\ \dfrac{x-a}{b-a} & (a\leqslant x\leqslant b),\\ 1 & (x>b).\end{cases}$$

均匀分布反映 ξ 的一切可能值充满整个有限区间 $[a,b]$，并且在该区间内的任一点有相同的分布密度，即分布密度 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为常量. 在数值计算中，拟在小数点后第 n 位上进行四舍五入，若用 η 表示舍入误差，则 η 服从区间

$$\left[-\frac{1}{2}\cdot10^{-n},\frac{1}{2}\cdot10^{-n}\right]$$

上的均匀分布.

一致分布（uniform distribution） 即“均匀分布”.

等概率分布（equal probability distribution） 即“均匀分布”.

正态分布（normal distribution） 亦称常态分布、误差分布、高斯分布. 概率论中最重要的一种连续型分布. 若随机变量 ξ 取不超过实数 x 的值这一事件的概率为

$$P(\xi \leqslant x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

式中 a,σ 为实参数，且 $\sigma>0$，则 ξ 的分布称为(一维)正态分布，简记为 $N(a,\sigma^2)$. 它的密度函数为

$$\varphi(x;a,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathrm{R}^1).$$

实参数 a,σ^2 分别是正态分布的数学期望和方差，所以正态分布是由其数学期望和方差惟一确定的.

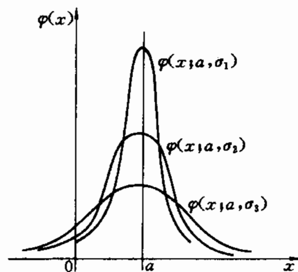


图 1

正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的密度函数 $\varphi(x;a,\sigma)$ 的图象是一条位于 x 轴上方的钟形曲线(图 1)，它在 $x=a$ 处达到最大值，且关于直线 $x=a$ 成轴对称；σ 越小，分布越集中于 $x=a$ 附近，σ 越大，分布越分散；曲线在远离 $x=a$ 处迅速趋于 x 轴. 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$，则：

$$P(|\xi - a| < 2\sigma) \approx 95.45\%,$$
$$P(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 99.73\%.$$

正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 当 $a=0,\sigma=1$ 时，即 $N(0,1)$，称为标准正态分布，其分布函数及密度函数分别为：

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \quad (x \in \mathrm{R}^1);$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty).$$

对于给定的 x，标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 的值可从正态分布表中查得. 标准正态变量 ξ 落入任何区间 (x_1,x_2) 内的概率可通过查表求出，根据下式：

$$P(x_1 < \xi \leqslant x_2) = P(\xi \leqslant x_2) - P(\xi \leqslant x_1) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

对于一般正态分布 $N(a,\sigma^2)$ 的变量 ξ 的分布函数 $P(\xi\leqslant x)$ 的值，只要经过变换

$$P(\xi \leqslant x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

亦可从正态分布表中查到. 在二维情形，当随机向量 $\xi=(X,Y)$ 的分布密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

时，称 ξ 服从二维正态分布，简记为 $N(m_1,\sigma_1^2;m_2,\sigma_2^2;\rho)$. 其中 $m_1,m_2;\sigma_1,\sigma_2$ 分别是两个边际分布的数学期望和标准差，而 ρ 是 X,Y 之间的相关系数(图 2). 若某个随机变量受到大量的、相互独立的随机因素的影响，而每个因素在总的影响中都是均匀微小的，则这种变量一般都是服从正态分布的. 例如，测量误差、炮弹落点分布、某工厂的总耗电量、一定条件下某校学生的考试成绩等都是服从正态分布的. 棣莫弗(De Moivre, A.)于 1733 年首次给出正态分布，作为二项分布当参数 n 较大时的近似分布. 19 世纪初，拉普拉斯(Laplace, P.-S.)和高斯(Gauss, C. F.)又各自独立地重新发现了正态分布.

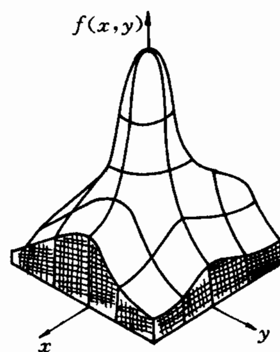


图 2

误差分布(errors distribution)　即“正态分布”.

高斯分布(Gauss distribution)　即“正态分布”.

标准正态分布(standard normal distribution)　见“正态分布”.

韦布尔分布(Weibull distribution)　一种常用的连续型分布. 若随机变量 ξ 的分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{m}{\alpha}(x-\gamma)^{m-1}e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{\alpha}} & (x \geqslant \gamma), \\ 0 & (x < \gamma), \end{cases}$$

则称 ξ 服从韦布尔分布. 其中 $m>0$ 称为形状参数，γ 称为位置参数，$\alpha>0$ 称为尺度参数. 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^m} & (x \geqslant \gamma), \\ 0 & (x < \gamma), \end{cases}$$

韦布尔分布最初是在解释疲劳数据时提出的，后被用于有关生存现象的领域中. 例如，当某对象适合最弱链模型时，此对象的寿命就服从韦布尔分布. 韦布尔分布在工程技术中有广泛应用价值，还在可靠性问题中占有重要的地位. 此分布是韦布尔(Weibull, W.)于 1939 年首次提出的.

指数分布(exponential distribution)　一种常用的连续型分布. 它是韦布尔分布的特殊情况. 指分布密度中 $m=1, 1/\alpha=\lambda$ 的韦布尔分布. 分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\gamma)} & (x \geqslant \gamma), \\ 0 & (x < \gamma). \end{cases}$$

其中参数 λ 为正的常数. 相应的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-\gamma)} & (x \geqslant \gamma), \\ 0 & (x < \gamma). \end{cases}$$

其数学期望为 $\gamma+1/\lambda$，方差为 $1/\lambda^2$. 指数分布具有无记忆性.

若 ξ 服从指数分布，则对任何 $s>0, t>0$，有

$$P(\xi > \gamma + s + t \mid \xi > \gamma + s) = P(\xi > \gamma + t).$$

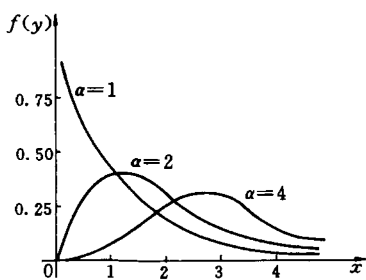
若用 ξ 表示某仪器的使用寿命，则上式说明：若以 γ 作为寿命计算的起点，则在已知仪器使用了 s 小时的条件下，它总共能使用至少 $s+t$ 小时的概率，等于从 γ 小时开始使用时算起它至少再能用 t 小时的概率. 即是说，当仪器在时刻 s 仍在被使用时，它的剩余使用寿命的分布与它原来使用寿命的分布相同(即是说仪器对它已使用过 s 小时无记忆).

指数分布是惟一具有无记忆性的连续型分布. 服从指数分布的随机变量 ξ 常被用于描述仪器的使用寿命、排队等候服务的时间等. 指数分布是瑞利(Rayleigh, J. W.)提出的.

Γ 分布(gamma distribution) 一种常用的连续型分布. 若随机变量 ξ 的分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & (x > 0), \\ 0 & (x \leqslant 0). \end{cases}$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 是数学分析中由无穷积分定义的 Γ 函数，分布参数 $\lambda>0, \alpha>0$，则称其为 Γ 分布. Γ 分布常简记为 $\Gamma(\lambda, \alpha)$. 它的数学期望为 α/λ，方差为 α/λ^2. 当 $\alpha=1$ 时 Γ 分布即指数分布. 当 α 为正整数时，Γ 分布是 α 个指数分布的卷积. 当 $\alpha=n/2, \lambda=1/2$ 时，Γ 分布就是自由度为 n 的 χ^2 分布，因此可以把 χ^2 分布看做 Γ 分布的特殊情形. Γ 分布在统计学和随机服务系统中都有广泛应用. 另外推导 χ^2 分布、t 分布和 F 分布时都要用到它. 其分布密度图形如上.



B 分布(beta distribution) 一种常用的连续型分布. 若随机变量 ξ 的分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & (0 < x < 1), \\ 0 & (x \leqslant 0 \text{ 或 } x \geqslant 1). \end{cases}$$

其中
$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$
是 Γ 函数，$p>0, q>0$ 为分布参数. 由于 $f(x)$ 的形式与 B 函数的积分表示

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

有密切联系，故称 ξ 服从 B 分布. 它的数学期望为

$$\frac{p}{p+q},$$

方差为

$$\frac{pq}{(P+q)^2(p+q+1)}.$$

B 分布在统计学中常用以描述统计量.

柯西分布(Cauchy distribution) 概率论的著名分布之一. 若随机变量 ξ 的分布密度为

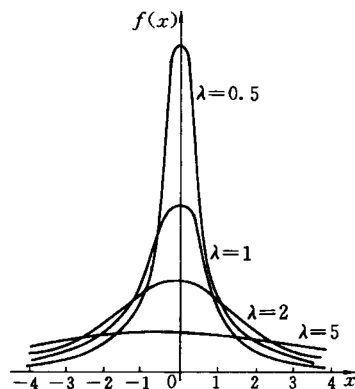
$$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left[1 + \left(\dfrac{x-\theta}{\lambda}\right)^2\right]}$$

$$(-\infty < x < +\infty; \lambda > 0, -\infty < \theta < +\infty),$$

则称 ξ 服从参数为 θ 和 λ 的柯西分布，其分布密度图形如下图. 当 $\theta=0, \lambda=1$ 时，化为

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

通常称 $g(x)$ 为标准柯西分布. 由于柯西分布的数学期望和方差都不存在，使得它在分布理论中占有特殊的地位，常以不存在常用矩(均值、方差等)的反例而出现于各概率论的教材中，柯西分布在力学、电学、心理生物学、人类学和计量学中都有应用.



标准柯西分布(standard Cauchy distribution) 见“柯西分布”.

二维随机向量(two-dimensional random variable) 亦称二维随机变量. 概率论的基本概念之一. 若随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$，而 $\xi(\omega)$，$\eta(\omega)$ 是定义在 Ω 上的随机变量，则由它们构成的向量 $(\xi(\omega), \eta(\omega))$ 称为二维随机向量. 在实际试验中，有些随机试验的结果需用两个有顺序的实数来描述，于是产生了二维随机向量的概念. 例如，要研究炮弹落地位置的分布情况，在平面坐标系中用坐标 (ξ, η) 来确定炮弹的位置，(ξ, η) 就是二维随机向量. 同样地，对需要 n 个变量来描述的随机现象，亦可定义 n 维随机向量的概念.

联合分布函数(joint distribution function) 亦称多维分布函数. 随机向量的分布函数. 以二维情形为例. 若 (ξ, η) 是二维随机向量，x, y 是任意两个实数，则称二元函数

$$F(x,y) = P(\xi \leqslant x, \eta \leqslant y)$$

为 (ξ, η) 的分布函数，亦称为 ξ 和 η 的联合分布函数. 它有如下性质：

1. 若 y 固定，则 $F(x,y)$ 是 x 的不减函数；若 x 固定，则 $F(x,y)$ 是 y 的不减函数.

2. $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$，且

$$F(-\infty, y) \equiv \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0,$$

$$F(x,-\infty)\equiv\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$
$$F(+\infty,+\infty)\equiv\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

3. $F(x,y)$关于 x 右连续，也关于 y 右连续.

4. 对于任意 $a_1<b_1,a_2<b_2$ 有不等式

$$F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2)\geqslant 0.$$

多维分布函数(multidimensional distribution function)　即“联合分布函数”.

边际分布(marginal distribution)　亦称边缘分布. 概率论的基本概念之一. 常有下列情形：

1. 若二维离散型随机向量(ξ,η),

$$P\{(\xi,\eta)=(x_i,y_j)\}=p(x_i,y_j)$$
$$(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$$

是它的联合分布函数，则称

$$p_1(x_i)=\sum_j p(x_i,y_j)\quad(i=1,2,\cdots);$$
$$p_2(y_j)=\sum_i p(x_i,y_j)\quad(j=1,2,\cdots)$$

分别为 $p(x_i,y_j)$关于 ξ 和 η 的边际分布，或称边际概率函数(参见“离散型分布”).

2. 若二维连续型随机向量(ξ,η), $f(x,y)$是它的密度函数，则称

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,$$
$$p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

为关于 ξ 和 η 的边际分布密度，若(ξ,η)的分布函数是 $F(x,y)$，则

$$F_\xi(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y),F_\eta(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y).$$

分别称为 ξ 和 η 的边际分布函数.

边缘分布(marginal distribution)　即“边际分布”.

边际概率函数(marginal probability function)　即“边际分布”.

边际分布密度(marginal distribution density)　见“边际分布”.

边际分布函数(marginal distribution function)　见“边际分布”.

随机变量的独立性(independence of random variables)　概率论的重要概念之一. 若二维随机向量(ξ,η)的联合分布函数为 $F(x,y)$，关于 ξ 和 η 的边际分布函数分别为 $F_\xi(x)$和 $F_\eta(y)$，则当关系式 $F(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$对一切 x 和 y 成立时，称 ξ 和 η 相互独立. 即独立随机变量的二维分布函数等于它们的边际分布函数的乘积. 若(ξ,η)存在连续密度 $p(x,y)$，且 ξ 和 η 的密度分别为 $p_\xi(x)$和$p_\eta(y)$，则 ξ 和 η 相互独立的充分必要条件是$p(x,y)=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)$能成立，其中 x,y 为任意实数. 由此得知：若连续型随机向量(ξ,η)的分布密度可表示为 $p(x,y)=f(x)g(y)$的形式，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1,\quad\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\mathrm{d}y=1,$$

则 ξ 和 η 相互独立. 若离散型随机变量 ξ 和 η 的一切可能值分别为 $x_1,x_2,\cdots x_i\cdots$，和 $y_1,y_2,\cdots,y_j,\cdots$，则 ξ 和 η 独立的充分必要条件是：对一切 i,j 有

$$P(\xi=x_i,\eta=y_j)=P(\xi=x_i)P(\eta=y_j),$$

亦即 $p(x_i,y_j)=p_\xi(x_i)p_\eta(y_j)$.

随机变量的数字特征

随机变量的数字特征(numerical characteristics of random variables)　概率论的基本概念之一. 指由随机变量的分布函数所确定的某些参数，它能反映随机变量某方面的特征. 最常用的数字特征有数学期望、方差、各阶矩、半不变量和相关系数等，它们分别反映随机变量取值的平均值、离散程度或相关程度等统计特征.

数学期望(mathematical expectation)　简称期望，亦称平均值. 随机变量的重要数字特征之一. 指反映随机变量取值的平均水平的量. 随机变量 ξ 的数学期望常用 $E\xi,E(\xi),M\xi$ 或 $M(\xi)$表示.

1. 有限总体的总体平均数，也称该有限总体的数学期望.

2. 若 ξ 是离散型随机变量，它的概率分布列为 $P(\xi=x_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots)$，若

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_ip_i$$

绝对收敛，则

$$E\xi=\sum_{i=0}^{\infty}x_ip_i$$

称为 ξ 的数学期望. 若 ξ 只取有限个值，则应把级数改为有限和. 若 ξ 是连续型随机变量，概率密度函数是 $f(x)$，且积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

为 ξ 的数学期望. 若 φ 是 ξ 的连续函数，则随机变量 $\varphi(\xi)$的数学期望是

$$E(\varphi(\xi))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设 $X=(\xi,\eta)$是二维随机向量，当 X 是离散型随机向量时，其联合分布为 $P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$. 又 $g(x,y)$是实变量 x,y 的单值函数，若

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij}<\infty,$$

则 $Y=g(\xi,\eta)$ 是离散型随机变量，它的数学期望为

$$EY = E(g(\xi,\eta)) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

当 X 是连续型随机向量，且 $Y=g(\xi,\eta)$ 是连续函数，(ξ,η) 的联合密度函数为 $f(x,y)$ 时，Y 的数学期望为

$$EY = E\{g(\xi,\eta)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

数学期望有以下重要性质：

1. 常量的数学期望等于这个常量本身，即 $E(c)=c$，c 为常量.

2. 常量与随机变量的乘积的数学期望等于这个常量与随机变量的数学期望的乘积. 即

$$E(c\xi) = cE(\xi).$$

3. 两个随机变量之和的数学期望等于这两个随机变量的数学期望之和. 即

$$E(\xi+\eta) = E(\xi) + E(\eta).$$

4. 若随机变量 ξ 与 η 相互独立，则

$$E(\xi\eta) = E(\xi)\cdot E(\eta).$$

5. 两个随机变量乘积的数学期望的绝对值的平方不大于这两个随机变量各自平方后的数学期望之积，即

$$|E(\xi\cdot\eta)|^2 \leqslant E(\xi^2)\cdot E(\eta^2).$$

此不等式称为施瓦兹不等式.

前面性质中所涉及的数学期望都存在. 其中性质 3 和 4 可以推广到任意有限个随机变量的情况. 即 $E(\xi+\eta+\cdots+\zeta)=E(\xi)+E(\eta)+\cdots+E(\zeta)$；若 $\xi,\eta,\cdots,\zeta$ 是相互独立的，则

$$E(\xi\cdot\eta\cdot\cdots\cdot\zeta) = E(\xi)\cdot E(\eta)\cdot\cdots\cdot E(\zeta).$$

方差(variance)　随机变量的重要数字特征之一. 指反映随机变量的取值与其数学期望偏离程度的量. 因随机变量类型的差异，常有以下几种定义：

1. 设 ξ 为离散型随机变量，其数学期望 $E(\xi)$ 存在，若

$$D(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}[x_i - E(\xi)]^2 p_i < \infty,$$

则 $D(\xi)$ 称为 ξ 的方差.

2. 设 ξ 为连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$，且数学期望为

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

存在，则

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}[x - E(\xi)]^2 f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

称为 ξ 的方差.

3. 一般地，若随机变量 ξ 的数学期望为 $E(\xi)$，则数值 $D(\xi)=E[\xi-E(\xi)]^2<\infty$ 称为 ξ 的方差. 无论随机变量 ξ 是离散型或连续型，若方差 $D(\xi)$ 存在，则称方差的算术根 $\sqrt{D(\xi)}$ 为 ξ 的标准差，或均方差、根方差.

方差有如下性质：

1. 常数 c 的方差为零，即 $Dc=0$.

2. 常数 c 与随机变量 ξ 乘积的方差等于随机变量 ξ 的方差乘以常数 c 的平方. 即 $D(c\xi)=c^2D\xi$.

3. 两个相互独立的随机变量 ξ 与 η 之和(或差)的方差，等于它们的方差之和. 即

$$D(\xi\pm\eta) = D\xi + D\eta.$$

4. 随机变量与常量之和(或差)的方差，等于这个随机变量的方差. 即 $D(\xi\pm c)=D\xi$.

均方差(mean square deviation)　见“方差”.

标准差(standard deviation)　见“方差”.

矩(moment)　随机变量的重要数字特征之一. 设随机变量 ξ 的概率分布为 F，若 $(\xi-a)^n$ 的数学期望存在，则 $E(\xi-a)^n(n=1,2,\cdots)$ 称为随机变量 ξ 或概率分布 F 的 n 阶矩. 当 $a=0$ 时，$E(\xi^n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 称为 ξ 或 F 的 n 阶原点矩. 当 $a=E(\xi)$ 时，则 $E\{[\xi-E(\xi)]^n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 称为 ξ 或 F 的 n 阶中心矩. 一阶原点矩即数学期望，二阶中心矩即方差. 由于下列计算式：

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,\quad E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x;$$

$$E\xi^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i,\quad E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

与物理学中惯性矩和静力矩的计算式相似，这里借用了物理学中矩的名称.

原点矩(origin moment)　见“矩”.

中心矩(central moment)　见“矩”.

混合矩(mixed moment)　描述两个随机变量之积的数学期望的数字特征. 若 ξ,η 为随机变量，并且 $E(|\xi^k\eta^l|)<\infty$(k 和 l 是自然数)，则 $\xi^k\eta^l$ 的数学期望 $E(\xi^k\eta^l)$ 称为 ξ 和 η 的 $k+l$ 阶混合矩. 若 $E(|\xi-E\xi|^k\cdot|\eta-E\eta|^l)<\infty$，则 $E[(\xi-E\xi)^k(\eta-E\eta)^l]$ 称为 ξ 和 η 的 $k+l$ 阶混合中心矩. 当 $k=l=1$ 时，

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)]$$

称为 ξ 与 η 的协方差. 协方差是阶数为 1+1 的混合中心矩.

混合中心矩(central mixed moment)　见“混合矩”.

协方差(covariance)　亦称相关矩，又称二阶混合中心矩. 两个随机变量之间线性联系程度的数字度量. 若随机变量 ξ 与 η 的数学期望 $E\xi$ 和 $E\eta$ 都存在，且 $E(|\xi\eta|)<\infty$，则 $E[(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)]$ 称为 ξ 与 η 的协方差，记为 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$，或记为 $\sigma_{\xi,\eta}$. 当 ξ,η 均为离散型随机变量，且 (ξ,η) 的分布列为 $P(\xi=x_i,\eta=y_j)=p_{ij}$ 时，

$$\text{cov}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i - E\xi)(y_j - E\eta)p_{ij}.$$

当 ξ,η 均为连续型随机变量，且 (ξ,η) 的密度函数为 $f(x,y)$ 时

$$\text{cov}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)(y-E\eta)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

相关矩(correlation moment)　即“协方差”.

二阶混合中心矩(second-order central mixed moment)　即“协方差”.

相关(correlation)　亦称相关关系. 是描述两个随机变量的取值之间关系的常用术语. 若在两个随机变量 ξ 与 η 所取的值之间存在着既有某种规律性而又不十分确定的关系，则称这两个随机变量 ξ 与 η 之间存在着相关关系. 例如，儿童的身高一般随年龄的增大而增加，但二者之间又不存在一个在各个时期对所有儿童都适用的关系，就属于这种情况. 为了反映随机变量之间的这种关系，概率论中对于任意两个随机变量 ξ 与 η，引进了相关系数 $\rho_{\xi,\eta}$ 的概念(参见“相关系数”). 严格地说，当 $\rho_{\xi,\eta}\neq 0$ 时，称 ξ 与 η 相关；$\rho_{\xi,\eta}=0$ 时，称 ξ 与 η 无关. 当 $\rho_{\xi,\eta}>0$ 时，称 ξ 与 η 正相关，这时 η 之值随着 ξ 之值增大而有增大的趋势；当 $\rho_{\xi,\eta}<0$ 时，则称 ξ 与 η 负相关，这时 η 有随 ξ 增大而减小的趋势(注意这里说的仅是数量关系，而非因果关系).

正相关(positive correlation)　见“相关”.

负相关(negative correlation)　见“相关”.

相关系数(correlation coefficient)　反映随机变量之间线性关系的密切程度的数字特征. 设随机变量 ξ,η 的方差 $D\xi,D\eta$ 存在且大于 0，则

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

称为 ξ 与 η 的相关系数. 由此定义知，随机变量 ξ 与 η 的相关系数就等于随机变量 ξ 与 η 的协方差除以它们的均方差的乘积所得的商.

两个随机变量的相关性有如下性质：

1. 任意两个随机变量 ξ 与 η 的相关系数的绝对值不大于 1，即 $|\rho_{\xi,\eta}|\leqslant 1$.

2. 当且仅当 ξ 与 η 之间存在线性关系 $\eta=k\xi+b$ 的概率为 1 时，它们的相关系数的绝对值等于 1，即

$$\rho_{\xi,\eta} = \begin{cases} 1 & (k>0), \\ -1 & (k<0). \end{cases}$$

由此可知，当一个变量增大时另一个变量有按线性关系增大($k>0$)或减小($k<0$)的趋势. 当相关系数愈接近于 1 或 -1 时，这种趋势就愈明显.

3. 独立随机变量的相关系数为零，这时称 ξ 与 η 不相关. 若 ξ 与 η 相互独立，则有 $\rho_{\xi,\eta}=0$，即 ξ 与 η 不相关.

不相关(uncorrelation)　见“相关系数”.

大数定律与中心极限定理

大数定律(law of large numbers)　亦称大数法则，或称大数定理. 概率论与统计学的基本定律之一. 在对大量随机现象的重复试验和观察中，随着试验次数的增多，往往出现某种几乎必然的规律性. 大数定律通常是指，在一定条件下，一个随机变量序列的算术平均值收敛于所希望的平均值的各种定律. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 是随机变量序列，令

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n},$$

若存在常数序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 使得对于任意正数 ε，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{\xi}_n - a_n| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

则称序列 $\{\xi_n\}$ 服从弱大数定律. 常简称大数定律；若对上述随机变量序列 $\{\xi_n\}$，存在常数序列 $\{a_n\}$，使

$$P(\lim_{n\to\infty}(\bar{\xi}_n - a_n) = 0) = 1,$$

则称序列 $\{\xi_n\}$ 服从强大数定律. 大数定律从理论上说明了频率相对于概率的稳定性，样本均值相对于数学期望的稳定性，它为统计学中从样本出发来估计总体分布参数提供了理论依据.

大数法则(law of large numbers)　即“大数定律”.

大数定理(theorem of large numbers)　即“大数定律”.

切比雪夫大数定律(Chebyshev law of large numbers)　一种重要的大数定律. 在一个相互独立的随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 中，若 $E\xi_k$ 存在，且 $D\xi_k\leqslant C<\infty(k=1,2,\cdots)$，则对任意 $\varepsilon>0$，皆有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

这时，称 $\{\xi_n\}$ 服从切比雪夫大数定律. 此大数定律表明，对同一随机变量 ξ 的 n 次独立观察值 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的平均，收敛于它的数学期望 $E(\xi)$. 在统计学中，就依据这一点而取多次重复观测的算术平均作为 $E(\xi)$ 的较精确的估计. 切比雪夫(Чебышев, П. Л.)于 1887 年发表的论文《概率论的两个定理》中提出了此定律.

马尔可夫大数定律(Markov law of large numbers)　一种弱大数定律. 若随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 满足马尔可夫条件

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \to 0,$$

则对任意 $\varepsilon>0$，皆有

$$\lim_{n\to\infty}P(|\bar{\xi}_n - E(\bar{\xi}_n)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

这时称 $\{\xi_n\}$ 服从马尔可夫大数定律. 马尔可夫

(Марков, A. A.)认真研究了切比雪夫大数定律，并利用切比雪夫不等式给出了此定律的证明.

泊松大数定律(Poission law of large numbers) 一种应用广泛的弱大数定律. 在独立试验序列中，事件 A 在第 k 次试验中出现的概率为 p_k，若前 n 次试验中事件 A 出现的次数为 μ_n，则对任意 $\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\right|\geqslant\varepsilon\right)=0.$$

这时称随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 服从泊松大数定律. 泊松(Poisson, S.-D.)在论文《关于判断的概率之研究》中，给出了此大数定律，最初他只是作为雅各布第一·伯努利(Bernoullis, Jacob Ⅰ)的二项式定律的近似而导出的，而现在它已成为分析放射现象、运输量以及一般分布等问题的基础.

伯努利大数定律(Bernoulli law of large numbers) 泊松大数定律的特殊情形. 在重复独立的伯努利试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率为 p，而前 n 次试验中事件 A 出现的次数为 μ_n，则对任意 $\varepsilon>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0.$$

这是泊松大数定律当 $p_k=p$ 的特殊情形. 上式说明 μ_n/n 依概率收敛于 p. 这一结论表明，对任意小的正数 ε，只要 n 充分大，频率 μ_n/n 与概率 p 发生大于 ε 的偏离的机会很小，即大多数试验只使 μ_n/n 与 p 发生较小的偏离. 雅各布第一·伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)在他所著《猜度术》一书中给出并证明了上述定律.

马尔可夫不等式(Markov inequality) 用于求概率上界的重要不等式. 若随机变量 ξ 只取非负值，它的数学期望为 $E(\xi)$，则对任意实数 $a>0$ 有下列马尔可夫不等式

$$P(\xi\geqslant a)\leqslant\frac{E(\xi)}{a}.$$

马尔可夫不等式的重要性在于，当仅知道概率分布的均值时，它能得到概率的界限. 例如，设随机变量是某厂一周的产量，如果只知这周产量的均值为 50，求该厂这周产量将超过 75 的概率. 由马尔可夫不等式得

$$P(\xi\geqslant 75)\leqslant\frac{E(\xi)}{75}=\frac{50}{75}=\frac{2}{3}.$$

马尔可夫(Марков, A. A.)在其《概率演算》中给出并证明了此不等式.

切比雪夫不等式(Chebyshev inequality) 用于证明弱大数定律的重要工具. 对任何具有有限方差的随机变量 ξ，任给 $\varepsilon>0$，都有

$$P(|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫不等式对随机变量的分布并无特殊要求，仅利用 ξ 的方差 $D\xi$ 来对 ξ 的取值与 $E\xi$ 发生较大偏离的概率做出估计，因而有较广泛的实用性. 如果 $f(x)$ 为非负递增函数，且期望 $Ef(\xi)$ 存在，不等式

$$P(\xi\geqslant a)\leqslant\frac{Ef(\xi)}{f(a)}$$

亦称为切比雪夫不等式. 比安内梅(Bienaymé, I.-J.)在 1853 年的论文中已提出类似的表述，但未给出证明，切比雪夫(Чебышев, П. Л.)读了比安内梅的论文后对此产生了兴趣，经研究后于 1867 年给出更明确的表述和证明.

辛钦大数定律(Khintchine law of large numbers) 一种弱大数定律. 即以 n 次测量值的算术均值代替需测值的理论根据，因而有重要应用价值. 若 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列，ξ_i 有有穷的数学期望 a，则对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{\xi}_n-a|\geqslant\varepsilon)=0,$$

其中 $\bar{\xi}_n$ 为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的平均值. 这时称 $\{\xi_n\}$ 服从辛钦大数定律. 它表明随观察次数 n 的增大，随机变量观察值的平均

$$\bar{\xi}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

依概率收敛于随机变量的数学期望. 要指出的是，辛钦大数定律并未假定 ξ_i 的方差存在. 辛钦(Хинчин, A. Я.)在 1929 年发表的论文中首次给出并证明了作为强大数定律先声的弱大数定律，因而，此定律亦称辛钦弱大数定律.

弱大数定律(weak law of large numbers) 见“大数定律”.

中心极限定理(central limit theorem) 概率论的重要定理之一. 指概率论中讨论随机变量序列部分和的分布，如何能近似于正态分布的一类定理的总称. 它是概率论的重要内容，也是统计学的基石之一. 若相互独立的随机变量序列 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 有有限期望 $a_i=E\xi_i$ 和方差 $b_i^2=D\xi_i$ $(i=1,2,\cdots)$，记

$$B_n^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \text{ 和 } \eta_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i-a_i}{B_n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

凡在各种条件下证明序列 $\{\eta_n\}$ 对每个 x 有

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n\leqslant x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u,$$

即证明 η_n 的分布收敛于标准正态分布的定理，都称为中心极限定理. 这是 1920 年由波利亚(Polya, G.)首先提出并使用的. 中心极限定理从理论上证明了某个量受到大量互相独立的随机因素的影响，而每个因素在总影响中又都很微小，则这个量必服从或近似地服从正态分布. 中心极限定理有广泛的实用性，例如，测量误差可看成一个随机变量，它们共同影响着测量的结果，而每一个影响测量结果的

因素作用又都是微小的，则这个变量是服从正态分布的.

棣莫弗-拉普拉斯定理(De Moivre-Laplace theorem)　数学史上发现最早的中心极限定理.它确定了二项随机变量的渐近正态性质.在 n 重伯努利试验中，若事件 A 出现的次数为 μ_n，每次试验中 A 出现的概率为 $P(A)=p$，则有：

1.对任意的有限区间$[a,b]$，满足不等式

$$-\infty < a \leqslant x_k = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b < \infty$$

的所有 k，一致地有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(\mu_n = k)}{\dfrac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}} = 1.$$

这称为棣莫弗-拉普拉斯局部极限定理.

2.对 $a,b(-\infty<a<b<\infty)$一致地有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

这称为棣莫弗-拉普拉斯积分极限定理.

上述两定理统称为棣莫弗-拉普拉斯定理.数学史上最早提出的中心极限定理，就是讨论 n 重伯努利试验中，事件 A 出现的次数 μ_n 的分布渐近于正态分布的问题.1718 年，棣莫弗(De Moivre,A.)发表的《机遇论》是概率论早期的重要著作，书中对 n 重伯努利试验的局部极限定理的特殊情况，即 $p=1/2$作了讨论.1812 年，拉普拉斯(Laplace,P.-S.)在《概率的分析理论》一书中总结了概率论所有已经得到的成果，并将此定理推广到一般情形.

棣莫弗-拉普拉斯局部极限定理(De Moivre-Laplace local limit theorem)　见“棣莫弗-拉普拉斯定理”.

棣莫弗-拉普拉斯积分极限定理(De Moivre-Laplace integral limit theorem)　见“棣莫弗-拉普拉斯定理”.

强大数定律(strong law of large numbers)　见“大数定律”.常见的强大数定律有：

1.波莱尔强大数定律.若 n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数为 μ_n，事件 A 的概率 $P(A)=p$，则有

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{n} = p\right) = 1.$$

即 μ_n/n 以概率 1 收敛于 p.波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)在任巴黎大学教授期间，于 1909 年引进可数事件集的概率，填补了古典概型和几何概型之间的空白.当时，他还证明了上述强大数定律当 $p=1/2$时是成立的，以后才证明了对一般的 p 定理亦成立.

2.柯尔莫哥洛夫强大数定律.若$\{\xi_k\}$是独立同分布的随机变量序列，且存在有限数学期望 $\mu=E\xi_k$，则

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \mu\right) = 1,$$

或者设$\{\xi_k\}$是相互独立的随机变量序列，且 $D\xi_k<\infty$ $(k=1,2,\cdots)$.若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty,$$

则有

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i) = 0\right\} = 1.$$

其中 $E\xi_i$，$D\xi_i$ 分别表示 ξ_i 的数学期望和方差.上述两式都表明在一定条件下，随观察次数 n 的增大，随机变量观察值的平均

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

是以概率 1 收敛于随机变量的期望.此两定律都是柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А.Н.)于 1928 年首次给出并证明.

波莱尔强大数定律(Borel strong law of large numbers)　见“强大数定律”.

柯尔莫哥洛夫强大数定律(Kolmogorov strong law of large numbers)　见“强大数定律”.

林德伯格-莱维中心极限定理(Lindeberg-Lévy central limit theorem)　亦称独立同分布随机变量的中心极限定理.它是大样本统计推断理论依据之一.该定理断言：若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是独立同分布的随机变量序列，并且有(有限的)数学期望 $E\xi_i=a$ 和方差 $D\xi_i=\sigma^2(i=1,2,\cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)}{\sqrt{n}\,\sigma} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

由随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 标准化以后所得的随机变量

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)$$

的分布函数，当 $n\to\infty$时的极限为标准正态分布，因而当 n 很大时可以把独立同分布随机变量 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$之和 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 近似地当做正态变量.这在统计学中很有用，使得这个定理成为处理大样本的重要工具.由它还可推出棣莫弗—拉普拉斯定理.

统计学概论

总体(population)　统计学的基本概念之一.在用统计方法研究大量同类现象的规律性时，常把被研究的对象的全体称为总体或母体，而把要研究的每一个对象，也就是组成总体的每一个基本单元称

为个体. 由于数学研究的是对象的数量特征,所以对统计学中所说的个体,实指被研究对象的某一项或几项数量指标,而总体就是这些数值的集合. 例如,在调查某地区学龄儿童的健康状况时,可以确定每个儿童的身高及体重(两个数值)作为个体,而这时的总体就是该地区所有学龄儿童的这两项指标. 在研究某厂生产的灯泡的使用寿命时,则在确定时间范围内(一月或一年)该厂生产的所有灯泡的寿命是总体,每个灯泡的寿命就是个体. 由此看来,总体可看做一个可取不同数值的变量,其取值有随机性(例如随意选取的灯泡的寿命). 因此在统计学中,一个总体就用一个随机变量 ξ 来描写. 这个随机变量可以是一维的(如上例中的灯泡寿命),也可以是多维的(如上例中儿童的身高及体重),每个个体就是这个随机变量可取的值. 这个随机变量 ξ 的概率分布函数,就是总体 ξ 的分布. 任何个体的数值都可以通过试验等手段获得,而由于各种原因,总体的情况则未知或不可能直接了解到(例如不可能将所有灯泡在出厂前都使用直到报废,以确定它们的准确寿命),从而必须由总体中按照一定的原则抽取一部分个体(参见"抽样"),由从这一部分个体了解到的信息去推测、估计总体的情况,或检验对总体所作的一些假设是否可靠. 统计学的任务就是从描写总体的随机变量所取到的有限个数值出发,运用数学的方法,去研究确定这个随机变量的概率分布及各种统计特征.

个体(object) 见"总体".

总体分布(population distribution) 一种分布函数. 即描写总体的随机变量的概率分布函数. 它一般是未知的,或只知它的类型,但所包含的一些参数待定.

总体容量(size of population) 统计学术语. 指构成总体的所有个体(元素)的个数.

总体均值(population mean) 亦称总体平均数. 刻画总体取值的平均水平的特征数. 总体中所有个体的算术平均值称为总体均值,记为 μ. 若总体 ξ 中共有 n 个个体 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,则

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

当总体容量非有限时,总体均值就是描写总体随机变量的数学期望.

总体平均数(population mean) 即"总体均值".

总体方差(population variance) 刻画总体中各个体与总体均值偏离程度的数字特征. 总体中各个体与总体均值的差的平方的平均数称为总体方差,记为 σ^2. 若总体 ξ 中共有 n 个元素 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,且 μ 为总体均值,则

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2.$$

总体方差的算术平方根 σ 称为总体标准差

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2}.$$

总体标准差只有在总体元素有限时可以计算,当总体中元素无限时常用样本标准差估计.

总体标准差(standard deviation of population) 见"总体方差".

总体特征模(population characteristic modulus) 统计学术语. 总体均值和总体方差的统称.

样本(sample) 亦称子样、抽样的结果. 统计学的基本概念之一. 从总体 ξ 中随机地抽取 n 个个体 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,称$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为总体 ξ 的一个样本. 样本中个体的数目 n 称为样本容量. 由于每个 ξ_i($i=1,2,\cdots,n$)从总体 ξ 中被抽出的随机性,所以必须把每个 ξ_i 都视为随机变量,容量为 n 的样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$则视为 n 维随机向量,而对一次抽取得到的 n 个具体确定的数值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的观察值,简称样本值. 一般地说,一个样本值就是一个 n 元有序数组. $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$所有可能取的全体样本值的集合,称为样本空间,它是抽样理论中的一个基本空间. 样本空间的样本值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$就是样本空间中的点,称为样本点. 人们常用"从总体 ξ 中抽取样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$"这一术语,是指从总体中随机地抽取容量为 n 的样本,并用 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 表示. 因此 ξ 及 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 都是随机变量,$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是 n 维随机向量. 当总体相当大时,只可能从总体中抽取部分个体即样本来研究,从样本的研究中对总体的特性做出估计与推断.

样本容量(size of sample) 简称样本量,见"样本".

样本值(sample value) 见"样本".

样本点(sample point) 见"样本".

抽样(sampling) 统计学的基本概念之一. 在实际工作中,为了了解总体的某些数字特性,常常从总体中按一定的法则抽取部分个体为样本来进行观测,用统计的方法进行分析,从中获取关于总体的信息. 这种从总体中抽取样本的过程称为抽样. 为了能由抽取的样本对总体的概率分布和数字特征进行估计和推断,必须使抽取的样本能全面地反映总体的情况,因而抽样必须遵循两条原则:

1. 随机原则:即总体中每一个个体有同等机会被抽入样本,这样才能保证样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 中的每一个都与总体 ξ 有相同分布.

2. 独立性原则:即样本中每个分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是相互独立的随机变量,也就是说样本的每一分量

的取值并不影响其他分量的取值.

满足以上两个原则的抽样称为简单随机抽样，用简单随机抽样抽取的样本，称为简单随机样本.

简单随机抽样(simple random sampling) 见“抽样”.

简单随机样本(simple random sample) 见“抽样”.

统计量(statistic) 统计学的基本概念之一.若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是容量为n的简单随机样本，而函数$T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是随机变量且不含未知参数，则称此函数为统计量.具体地，是根据样本计算出，能代表样本数据的某种性质，如集中趋势、离散程度、相关程度等特征的各种量.例如，样本均值、样本标准差、样本相关系数等.统计量的分布称为抽样分布.

顺序统计量(ordered statistics) 亦称次序统计量.一种常用的统计量.设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是从总体$\xi$中抽取的容量为$n$的样本，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是样本的一组观察值.将观察值的各分量按大小递增顺序排列，并把最小的记为$x_{(1)}$，第2小的记为$x_{(2)}$，依此类推，直到最大的记为$x_{(n)}$，得到$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$.如果其中有两个观察值$x_i$和$x_j$的值相等，它们二者的顺序则无先后之分，可以相邻排列.当样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的观察值为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$时，定义$\xi_{(k)}$取值$x_{(k)}$，由此得到的$\xi_{(1)},\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)}$称为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的一组顺序统计量，必然有$\xi_{(1)}\leqslant\xi_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{(n)}$，其中$\xi_{(1)}$总是取样本观察值中的最小值，即

$$\xi_{(1)}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i,$$

故随机变量$\xi_{(1)}$称为最小顺序统计量.而$\xi_{(n)}$总是取样本观察值中的最大值，即

$$\xi_{(n)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i,$$

故随机变量$\xi_{(n)}$称为最大顺序统计量.

最小顺序统计量(smallest ordered statistic) 见“顺序统计量”.

最大顺序统计量(largest ordered statistic) 见“顺序统计量”.

分布参数(parameter of distribution) 统计学的基本概念之一.指统计学中用以区别分布函数族$\{F_\theta|\theta\in\Theta\}$中的各个分布的指标$\theta$的函数$g(\theta)$和分布的数字特征，如总体均值、总体标准差、总体相关系数等.参数的所有可能值组成的集合Θ称为参数空间.参数一般不易获得，可根据反映总体情况的样本求出的统计量去估计它.这种由样本对总体参数作推断，正是统计推断经常要进行的工作.

参数空间(parameter space) 见“分布参数”.

频率分布表(table of frequency distribution) 亦称频数分布表，又称次数分布表.一种统计学数表.指统计学中表示样本数据频率分布规律的表格.今以275名学生的数学考试成绩为例，作频率分布表如下：

分　组	频数(f)	频　率	向上累积频　率	向下累积频　率
95—100	9	0.033	1.000	0.033
90—94.9	11	0.040	0.967	0.073
85—89.9	39	0.142	0.927	0.215
80—84.9	43	0.156	0.785	0.371
75—79.9	40	0.145	0.629	0.516
70—74.9	39	0.142	0.484	0.658
65—69.9	33	0.120	0.342	0.778
60—64.9	31	0.113	0.222	0.891
55—59.9	15	0.054	0.109	0.945
50—54.9	11	0.040	0.055	0.985
45—49.9	3	0.011	0.015	0.996
40—44.9	1	0.004	0.004	1.000
合　计	275	1.000	—	—

制作频率分布表的步骤如下：

1.求全距(全距亦称极差).从数据中找出最大值M和最小值L，并求出它们的差.本例中最大值$M=100$，最小值$L=42$，故全距为$M-L=100-42=58$.从全距可以初步了解数据的差异幅度，同时亦为决定组距与组数提供了依据.

2.决定组距与组数.组数D和组距K之间有关系式$D=(M-L)/K$.本例中取$K=5$，则$D=(M-L)/K=58/5=11.6\approx12$，故分为12组.

3.决定组限.组限就是表明每组界限的两个数值，其中每组的起点数值称为下限，终点数值称为上限.为了避免样本数据落在分点上，本例是将上一组的下限减去0.1作为下一组的上限，如第二组的下限为45，则以45－0.1＝44.9作为第一组的上限.余类推.

4.列频率分布表.其中落在各个小组内的数据个数即为频数(或称次数)，常用f表示.每一小组的频数与样本容量的比值即为频率.

5.累积频率.将各组的频率由下往上逐一相加，称为向上累积频率；同样，若是由上往下逐一相加，则称为向下累积频率.

频率分布表中的统计项目可以根据需要有所取舍，例如有的表中还设计了组中值、累积频数、组中值与频数的乘积等.

频数分布表(table of frequency distribution) 即“频率分布表”.

频率直方图(relative frequency histogram) 亦称频率分布直方图.统计学中表示频率分布的图形.在直角坐标系中，用横轴表示随机变量的取值，横轴上的每个小区间对应一个组的组距，作为小矩

形的底边；纵轴表示频率与组距的比值，并用它作小矩形的高，以这种小矩形构成的一组图称为频率直方图. 于是

$$\text{小矩形的面积}=\text{组距}\times\frac{\text{频率}}{\text{组距}}=\text{频率}.$$

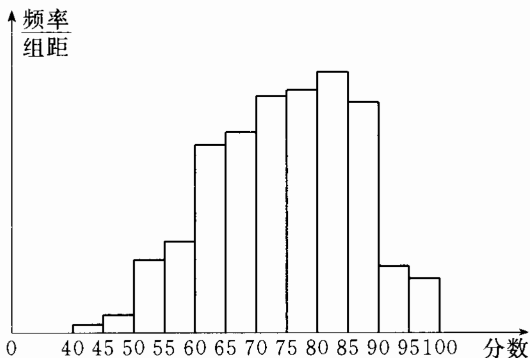
因此，所有矩形面积之和等于频率的总和，即等于1. 在频率直方图中，

$$\text{小矩形的高}=\frac{\text{频率}}{\text{组距}}=\frac{1}{\text{组距}\times\text{样本容量}}\times\text{频数},$$

因为组距与样本容量都是常数，则

$$\frac{1}{\text{组距}\times\text{样本容量}}$$

也是常数，所以小矩形的高与频数成正比，利用这个



性质来确定各小矩形的高比较方便. 今以275名学生的数学成绩（参见“频率分布表”）为例，作频率直方图（如图）. 对连续型随机变量的观察值，当观测数据无限增多组距逐渐缩小时，频率直方图各矩形的顶边将接近于该连续型随机变量的概率密度曲线.

样本数字特征（sample numerical characteristics） 亦称样本特征值. 统计学的基本概念之一. 指统计学中描述随机样本的某些特征的数字. 在实际问题中，总体数字特征往往是未知的，只能从样本的数字特征入手，去推断总体的数字特征，从而了解总体的某些数学性质. 常用的样本数字特征有两类：

1. 表示样本观察值的位置特征的，如样本均值、样本加权均值、样本 k 阶原点矩等.

2. 表示样本观察值离散特征的，如样本方差、样本极差、样本 k 阶中心距等.

样本特征值（sample characteristic value） 即“样本数字特征”.

样本分布函数（sample distribution function） 亦称经验分布函数. 统计学中的基本概念之一. 设 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是从总体 ξ 中随机抽取的容量为 n 的样本，当顺序统计量 $\xi_{(1)},\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)}$ 的值固定时，对任何实数 x，函数

$$F_{(n)}(x)=\begin{cases}0 & (x<\xi_{(1)}),\\ \dfrac{k}{n} & (\xi_{(k)}\leqslant x<\xi_{(k+1)}),\\ 1 & (x\geqslant\xi_{(n)}).\end{cases}$$

$$(k=1,2,\cdots,n-1),$$

称为总体 ξ 的样本分布函数. 函数 $F_{(n)}(x)$ 是单调、非降、右连续的，且若 $\xi_{(k)}>\xi_{(k-1)}$，则它在 $x=\xi_{(k)}$ 处有间断点. $0\leqslant F_{(n)}(x)\leqslant 1$，且满足分布函数所要求的性质. 对于给定的 x，$F_{(n)}(x)$ 是样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 中事件 $\xi<x$ 发生的频率. 当样本容量 n 无限增大时，$F_{(n)}(x)$ 以概率1关于 x 一致地收敛于该样本的分布函数 $F(x)$. 只要 n 足够大，样本分布函数 $F_{(n)}(x)$ 与总体分布函数 $F(x)$ 就只有很小的差别，即可用 $F_{(n)}(x)$ 来近似表达总体分布函数 $F(x)$. 样本分布函数的各阶矩就是各阶样本矩.

经验分布函数（empirical distribution function） 即“样本分布函数”.

集中趋势量数（measures of concentration tendency） 简称集中量数. 亦称位置量数. 统计学的基本概念之一. 指统计学中反映样本频率分布基本特征的一类统计量. 它是反映样本频率分布中大量数据向哪一点集中这种趋势的量. 其功用如下：

1. 它是一组数据的代表数值，可以用来说明一组数据全貌的一个方面的特征，即它们的典型情况.

2. 它可用来进行组间比较，以确定两组不同数值的数据之间的数值差别.

常用的集中趋势量数有算术均值，加权均值，几何均值，中位数，众数等.

集中量数（measures of concentration tendency） 集中趋势量数的简称.

位置量数（location measure） 即“集中趋势量数”.

样本均值（sample mean） 亦称样本算术均值. 统计学的基本概念之一. 指统计学中反映样本数据集中趋势的统计量. 若从总体 ξ 中取得容量为 n 的样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则统计量

$$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

称为样本均值. 样本均值就是样本一阶原点矩，它反映了总体均值的有关信息. 通常用样本均值去估计总体均值，样本容量越大，这种估计越准确. 若样本的观察值为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 则 $\bar{\xi}$ 的观察值记为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

样本均值的观察值 $\bar{x}$ 有下列数学性质：

1. 样本均值的观察值 $\bar{x}$ 与样本容量的乘积等于样本各数据的总和.

2. 样本观察值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中每个数据都增加或减少数值 a，等于 $\bar{x}$ 也增加或减少 a.

3. 样本观察值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中每个数据都乘以或除以数值 a，等于 $\bar{x}$ 也乘以或除以 a.

4. 样本观察值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中各数据与 $\bar{x}$ 的

离差之和为 0.

5. 样本观察值($x_1,x_2,\cdots,x_n$)中各数据与 $\bar{x}$ 的离差平方之和为最小.

样本算术均值(sample arithmetic mean) 即"样本均值".

样本加权均值(sample weighted mean) 亦称加权算术均值.统计学的基本概念之一.指统计学中反映样本数据集中趋势的统计量.若($\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$)是从总体 ξ 中抽取的容量为 n 的随机样本,其中 ξ_i 出现的频数为 $f_i,i=1,2,\cdots,n$,则

$$W=\frac{f_1\xi_1+f_2\xi_2+\cdots+f_n\xi_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}.$$

称为样本加权均值.其中 f_i 称为 ξ_i ($i=1,2,\cdots,n$)的权数.而把 $f_i/(f_1+f_2+\cdots+f_n)$称为 ξ_i 的相对权数,或称为 ξ_i 的比重.所有相对权数之和为 1.

加权算术均值(weighted arithmetic mean) 即"样本加权均值".

相对权数(relative weighted number) 见"样本加权均值".

样本几何均值(sample geometric mean) 亦称对数均值.统计学的基本概念之一.指统计学中反映样本数据集中趋势的统计量.总体 ξ 中随机抽取的容量为 n 的样本 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的连乘积的 n 次正方根称为样本几何均值.常用符号 M_g 表示:

$$M_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\xi_i},$$

当样本容量 $n>3$ 时,为了避免繁琐的数字计算,常将上式两边取对数,即

$$\lg M_g=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lg\xi_i.$$

从上式中可以看出:样本几何均值的对数等于各随机变量的对数的样本均值.

样本几何均值有如下性质:

1. 同一样本的几何均值小于样本均值,仅当样本中各数据相同时,它们相等.

2. 样本的各个数据中若有一个数据为零,则样本几何均值为零.

对数均值(logarithmic mean value) 即"样本几何均值".

样本调和均值(sample harmonic mean) 亦称倒数均值.统计学的基本概念之一.指统计学中反映样本数据集中趋势的统计量.若($\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$)是从总体 ξ 中随机抽取的容量为 n 的样本,则

$$Mh=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}},$$

称为 ξ 的样本调和均值.样本调和均值等于样本中各变量倒数的样本均值的倒数.

倒数均值(mean of inverse number) 即"样本调和均值".

样本中位数(sample median) 亦称中数.统计学中反映样本数据集中趋势的统计量.若从总体 ξ 中抽取容量为 n 的样本($\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$),当顺序统计量 $\xi_{(1)},\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)}$的值固定时,位于顺序统计量正中间的那个变量称为样本中位数,常用符号 Md 表示.当 n 为奇数时,以 $\xi_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ 为样本中位数;当 n 为偶数时,以 $\xi_{\left(\frac{n}{2}\right)}$ 或 $\xi_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ 中的任一个为中位数.但习惯上常取这二者的平均值为样本中位数.样本中位数可作为总体中位数的估计量.

中数(mean) 即"样本中位数".

众数(mode) 亦称范数,又称密集数.统计学中反映样本值集中趋势的统计量.一组样本数据(即样本值)中出现次数最多的一个数值称为众数.它常用符号 Mo 表示.众数有粗略众数与理论众数两种.若资料已经过分组、归类,整理成频率分布表,则表中含有最大频数之组的组中值即为众数.这种分组后由观察法定出的众数称为粗略众数,其所以"粗略",是因为它是以假定这一组内频数分配均匀为前提的.粗略众数很不稳定,若在数据分组时,改变了组距的大小,粗略众数亦随之而改变,因此,统计中采用较少;用插入法计算出的众数称为理论众数,理论众数的数值很稳定,但计算比较复杂.在一组样本数据中,如果每个数据出现的次数都相同,就说这组数据无众数.如果有两个(或两个以上)数据出现的次数都最多,且出现的次数相同,就说这两个(或多个)数值都是众数,此种情形称为复众数,在次数分布中是多峰的.如果只有一个众数则是单峰的.

寻求众数的常用方法有下面几种:

1. 观察法.若数据已归类,则出现频数最多的数据即为众数;若数据已分组,则频数最多的那一组的组中值即为众数.用观察法求得的众数,一般是粗略众数.

2. 金氏插入法求众数.其计算公式为

$$Mo=L+\frac{f_b}{f_a+f_b}\cdot i$$

或

$$Mo=U-\frac{f_a}{f_a+f_b}\cdot i,$$

式中 L 为众数所在组的精确下限,U 为众数所在组的精确上限,f_a 为与众数组下限相邻组的频数,f_b 为与众数组上限相邻组的频数,i 为组距.

3. 皮尔逊经验法求众数.其计算公式为

$$Mo=\xi-3(\bar{\xi}-Md)$$

式中 $\bar{\xi}$ 为样本均值,Md 为中数.用皮尔逊公式计算所得众数近似于理论众数,常称为皮尔逊近似众数.众数是皮尔逊(Pearson,K.)最先提出并在生物统计学中使用的.以上是数据出自于离散型随机变量

时求众数的方法. 对于连续型随机变量 ξ,若概率密度函数为 f,且 f 恰有一个最大值,则此最大值称为 ξ 的众数. 有时也把 f 的极大值称为众数;f 有两个以上极大值时,亦称为复众数.

范数(norm) 即"众数".

密集数(number of density) 即"众数".

粗略众数(crude mode) 见"众数".

理论众数(theoretical mode) 见"众数".

复众数(Bi-modal) 见"众数".

差异量数(measures of dispersion) 亦称变异量数. 又称离散趋势量数. 统计学的基本概念之一. 指表示样本数据偏离中间数值的趋势的量数,或者说它是反映样本频率分布离散程度的量数. 差异量数大,表示各数值分布的范围广且参差不齐;差异量数小,表示各数值较集中、整齐,波动的范围幅度小. 因此,集中量数的代表性如何,可由差异量数得到反映. 差异量数愈大,则集中量数的代表性愈小;差异量数愈小,则集中量数的代表性愈大. 所以,考察某种分布的差异量数,还有助于对集中量数的理解. 常用的差异量数有:极差,四分位差,平均差,方差,标准差等.

变异量数(measures of dispersion) 即"差异量数".

离散趋势量数(measures of discrete tendency) 即"差异量数".

极差(range) 亦称两极差,又称全距. 统计学中反映样本值离散程度的统计量. 设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是从总体 ξ 中随机抽取的容量为 n 的样本,$\xi_{(1)}$,$\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)}$是样本的顺序统计量,则样本的最大顺序统计量 $\xi_{(n)}$和最小顺序统计量 $\xi_{(1)}$之差 $R=\xi_{(n)}-\xi_{(1)}$,称为样本 ξ 的极差. 它反映了样本数据的波动幅度. 在正态总体中,极差的期望与总体的标准差只相差一个仅依赖于样本容量的常数因子. 在质量管理中,常用极差的平均值乘上适当的常数因子来估计正态总体中的标准差. 如果样本数据已分组,设 x_n 为最高组的组中值,x_1 为最低组的组中值,相减即得极差;或以最高组的上限 x_n 减去最低组的下限 x_1 亦为极差. 由于极差是由两个极端数值决定,若样本分布中两极端数值有异常,都将影响极差的大小,所以极差是一个不可靠和不稳定的差异量数. 因此,极差常用于预备性检查,目的在于粗略地了解样本数据的分散情况,以便确定数据分组的方法.

全距(range) 即"极差".

四分位差(quartile deviation) 简称四分差,亦称半内四分距. 统计学中反映样本数据离散程度的量数. 若用三个点把整个样本分布分为四部分,各部分数据的个数相等,三个分点自左至右依次称为第 i 四分位数,记为 $Q_i(i=1,2,3)$. 则第 3 四分位数减第 1 四分位数之差的一半,称为四分位差,常用符号 Q 表示:

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}.$$

其计算方法有下面两种情况:

1. 求未分组数据的四分位差. 先把样本数据按大小顺序由小到大排列,然后将样本容量除以 4,确定四分位数的位置,找出代表 Q_3 和 Q_1 的数据代入上述公式即可.

2. 求已分组数据的四分位差,要先计算出 Q_3 与 Q_1 两点的数值代入公式. 关于从分组资料求 Q_3 与 Q_1 有下面公式

$$Q_3=L+\frac{\frac{3n}{4}-F_2}{f_{Q_3}}\cdot i,$$

$$Q_1=L+\frac{\frac{n}{4}-F_2}{f_{Q_1}}\cdot i.$$

其中 L 为该四分位数所在组的下限,f_{Q_3},f_{Q_1}分别为 Q_3,Q_1 所在组的数据个数,F_2 为向上累加到该四分位数所在组的数据个数,i 为组距,n 为全部数据的个数(即样本容量). 若分布形式为正态,中数 Q_2 应在 Q_1 与 Q_3 的正中间,即 $Q_3-Q_2=Q_2-Q_1$. 若 $Q_3-Q_2<Q_2-Q_1$,则分布形式为负偏态,若 $Q_3-Q_2>Q_2-Q_1$,则分布形式为正偏态. 四分位差的优点是意义明晰,容易理解,它的抽样稳定性虽不如标准差,但若数据是按大小顺序排列的,或已按组距分了组的,则易于计算也是它的优点. 当数据分布中有极端数据存在,或要用数据的中间部分来说明差异情况时,都可用四分位差. 当数据的频率分布两端有不确定的组距时,其他差异量数无法计算,而四分位差却可以求得. 但四分位差和全距一样,难以反映全部变量分布的差异情况,不能用它作进一步的计算,基本上限制在描述统计的范围内. 只在当它的特点发挥好作用而标准差起消极作用时,才予以采用.

四分差(quartile deviation) 四分位差的简称.

半内四分距(semi-interquartile range) 即"四分位差".

样本平均差(sample mean deviation) 统计学中反映样本分布对其中央数值(平均数或中位数)偏离和分散程度的量数. 样本数据中各量数对其平均数或中位数之差的绝对值之和的平均数称为样本平均差,常用符号 $A.D$ 或 $M.D$ 表示. 具体计算方法有下述两种:

1. 求未分组样本数据的平均差公式为

$$A.D=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\bar{\xi}|}{n},$$

式中 ξ_i 为样本值，$\bar{\xi}$ 为样本均值，n 为样本容量.

2. 求已分组样本数据的平均差公式为

$$A.D=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i|m_i-\bar{\xi}|}{n}.$$

式中 m_i 为第 i 组的组中值，f_i 为第 i 组的频数，$\bar{\xi}$ 为样本均值，n 为样本容量. 样本平均差的优点是容易理解，易于计算，能说明样本分布中全部数值的差异情况. 若各个数据要适当加权，或者要求计算较快的差异量数，可选用平均差，其缺点是它只使用离差的绝对值，不太合理，不适合代数方法的处理，致使其用途受到限制.

百分位差(percentile deviation)　一种差异量数. 指用百分位数的差距来描述样本数据偏离中间数值趋势的差异量数. 把按大小顺序排列的样本数据用 99 个点将其分为 100 等份，每个点所在位置的数值称为百分位数. 常用符号 $P_m(m=1,2,\cdots,99)$ 表示. 并称 P_1 为第 1 百分位数，P_2 为第 2 百分位数……P_{99}为第 99 百分位数.

百分位数的计算方法有下面两种情况：

1. 求未分组数据的百分位数. 先用公式

$$p_m=\frac{m(n+1)}{100}\quad(m=1,2,\cdots,99).$$

求出 P_m 所在的位置数 p_m(式中 n 为样本容量). 然后用公式 $P_m=L_{[p_m]}+\{p_m\}\times(L_{[p_m]+1}-L_{[p_m]})$求出第 m 个百分位数. 式中 P_m 为第 m 百分位数，$\{p_m\}$为 p_m 的小数部分，$[p_m]$为 p_m 的整数部分，$L_{[p_m]+1}$和 $L_{[p_m]}$分别为 P_m 所在位置的后一位和前一位的样本数据值(即样本中的第$[p_m]+1$ 位和第$[p_m]$位数值). 例如，已知 120 名学生的数学考试成绩按顺序排列如下：

42	42	45	46	50	50	51	54	54	54	54	54
55	55	56	56	57	58	58	59	59	60	62	62
62	62	63	63	64	64	64	64	65	66	66	67
67	68	68	68	68	68	68	68	69	69	69	69
69	70	72	72	72	72	72	72	72	73	73	73
73	73	73	74	74	74	74	74	74	74	74	74
75	75	76	76	76	76	77	77	77	78	78	78
79	79	79	79	79	79	80	81	82	82	82	82
82	83	83	83	83	84	84	84	84	84	85	86
86	87	88	88	89	90	90	92	93	94	94	98

求 P_{12}和 P_{72}的百分位差？用前面公式求得 $P_{12}=55.52$和 $P_{72}=79$ 后得所求的百分位差为：

$$P_{72}-P_{12}=79-55.52=23.48.$$

2. 求已分组数据的百分位数. 已分组数据求百分位数的公式为：

$$P_m=L+\frac{\frac{m\cdot n}{100}-F_2}{f}\cdot i$$

或
$$P_m=U-\frac{n\left(1-\frac{m}{100}\right)-F_1}{f}\cdot i,$$

式中 P_m 为第 m 百分位数，L 为 P_m 所在组的下限，U 为 P_m 所在组的上限，f 为 P_m 所在组的频数，n 为总次数(即样本容量)，F_1 为大于 U 的累加次数，F_2 为小于 L 的累加次数.

样本方差(sample variance)　统计学中常用的反映离散趋势的统计量. 设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是从总体 ξ 中随机抽取的容量为 n 的样本，且 $\bar{\xi}$ 为样本均值，则统计量

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2=\frac{1}{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-n\bar{\xi}^2\Big]$$

称为样本方差. 但也有用 $1/(n-1)$来取代上式中的系数 $1/n$ 的. 当 n 充分大时，两者的计算结果无甚差异. 但当 n 较小时，用 $1/(n-1)$代替 $1/n$ 则有无偏性的优点. 因此，这样定义的样本方差是总体分布方差的无偏估计量. 样本方差反映了样本取值的离散程度，样本方差越大，样本数值的波动越大、越分散；样本方差也反映总体方差的有关信息，常用来估计总体方差. 它的算术平方根称为样本标准差. 标准差一词是皮尔逊(Pearson，K.)在生物统计学中最先提出并使用的.

样本标准差(sample standard deviation)　见“样本方差”.

变差系数(coefficient of variation)　亦称变异系数. 随机变量的特征之一. 指标准差对平均数的百分比. 样本标准差 S 与样本均值 $\bar{\xi}$ 的比. 记为 C. V，即

$$\mathrm{C.V}=\frac{S}{\bar{\xi}}\cdot 100\%=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}}{\bar{\xi}}\cdot 100\%$$

称为变差系数(参见“样本均值”和“样本方差”). 利用变差系数，就可比较样本均值有差异的各种变量的分散情况. 即使方差的绝对数值较大，但若相对于测定值很小，仍可认为随机变量 ξ 取值不是很分散的，变差系数即基于此提出. 变差系数是皮尔逊(Pearson，K.)在 1896 年的论文《回归·遗传和随机交配》中给出的.

变异系数(coefficient of variation)　即“变差系数”.

样本矩(sample moments)　一种基本统计量. 设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是从总体 ξ 中随机抽取的容量为 n 的样本，$F_n(x)$是样本分布函数，统计量

$$A_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \mathrm{d}F_n(x) \quad (r = 1,2,\cdots)$$

称为样本 r 阶矩或称样本 r 阶原点矩. 统计量

$$B_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^r = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \bar{x})^r \mathrm{d}F_n(x) \quad (r = 1,2,\cdots)$$

称为 r 阶样本中心矩. 样本的原点矩和中心矩统称样本距. 当 $r=1$ 时 $A_1=\bar{\xi}$, 即样本均值; 当 $r=2$ 时 $B_2=S^2$, 即样本方差. 样本矩的概念还可类似地推广到多维总体, 它们常用以作总体相应矩的估计.

样本原点矩(sample origin moment)　见"样本矩".

样本中心矩(sample central moment)　见"样本矩".

样本偏度(sample skewness)　一种基本统计量. 样本三阶中心矩除以样本二阶中心矩的 3/2 次幂的商, 记为 Sk, 即

$$Sk = \frac{B_3}{(B_2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2\right]^{3/2}}.$$

样本偏度常用作总体偏度的估计量和检验总体分布正态性的统计量. 而总体偏度是一个描述总体分布不对称性的数字特征. 正态分布是左右对称的, 因而它的偏度为零.

样本峰度(sample kurtosis)　一种基本统计量. 样本四阶中心矩除以样本二阶中心矩平方的商再减去 3, 记为 Ku, 即

$$Ku = \frac{B_4}{(B_2)^2} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2\right]^2} - 3.$$

样本峰度常用以作总体峰度的估计量. 正态分布的峰度为零. 非正态分布的峰度是以正态分布的峰度为标准来描述其分布密度形状为陡峭或平坦的一个数字特征. 样本的峰度和偏度都是作为检验总体分布正态性的统计量.

参数估计与假设检验

参数估计(estimation of parameters)　统计学的重要概念之一. 运用从总体抽取的随机样本对总体分布中的未知参数值做出估计, 称为参数估计. 它是统计推断的一种基本方法. 当总体分布函数的形式已知时, 往往有一个或多个参数为未知, 如何从样本出发构造一些统计量来对总体的未知参数进行估计; 或者总体的分布类型为未知时, 有几个数字特征如数学期望、方差、中位数等需要估计, 这都是参数估计问题. 参数估计研究的是估计的方法和评价这些方法优劣的准则. 根据样本构造一个统计量, 用以对总体参数进行估计, 称为点估计; 有时不是要求对参数做出定值估计, 而是把根据样本构造的两个统计量作为一个区间的两个端点, 使这个区间包含参数真值的概率不小于一个预先给定的数 $1-\alpha(0<\alpha<1)$, 称为参数的区间估计. 由于总体参数是常数, 而从样本构造的估计量和区间估计的端点都是统计量, 统计量随着样本的变化而变化, 所以如何构造具有各种优良性质的估计量, 以及怎样衡量这些估计量的优劣就是参数估计所要研究的重要内容.

点估计(point estimation)　一种基本的参数估计. 设 $F(x,\theta)$ 为总体 ξ 的分布函数, 其中 x 是变元, θ 为未知参数, $\theta\in\Theta$, Θ 为参数空间, $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为总体 ξ 的一个随机样本. 今由样本构造一个不带未知参数的统计量 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 来作总体未知参数 θ 或 θ 的函数 $g(\theta)$ 的估计量. 一般 θ 或 $g(\theta)$ 是总体的某个特征值, 如数学期望、方差、相关系数等. θ 或 $g(\theta)$ 通常取实数值或为 k 维实向量, 因 k 维实向量可表为 k 维欧氏空间中的点, 故称估计量 $\hat{\theta}$ 为 θ 或 $g(\theta)$ 的点估计. 由样本观察值计算出的估计量之值称为估计值, 是用来估计总体参数的近似值. 例如, 某灯泡厂对所生产灯泡的使用寿命进行测定, 由于每个灯泡的使用寿命总是不同的, 所以灯泡使用寿命 ξ 是一个随机变量, 要求估计该厂所产灯泡的平均使用寿命 μ, 则 μ 就是需要估计的参数. 为此, 从该厂所生产的灯泡中抽出 n 个灯泡作使用寿命的测定, 测得这 n 个灯泡的寿命分别为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 由大数定律知, 当 n 足够大时, 样本平均值 $\bar{\xi}$ 将与 $\mu=E(\xi)$ 十分接近, 因此, 就可以把样本平均寿命 $\bar{\xi}$ 作为总体 ξ 的平均寿命 μ 的估计量, 即 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\bar{\xi}$. 常用的构造估计量的方法有矩法、最大似然法、最小二乘法、贝叶斯法、最小 χ^2 法、极小极大化法等. 各种估计方法所得出的估计有不同的优良性质. 衡量优良性质的准则有无偏性、一致性、有效性等.

区间估计(interval estimation)　见"参数估计". 所谓区间估计主要是根据置信度求置信区间(参见"置信区间").

置信区间(confidence interval)　统计学的基本概念之一. 指由样本根据置信度确定的一个区间. 设 $F(x,\theta)$ 是总体 ξ 的分布函数, x 是变元, θ 是参数. 给定了一个概率数值 $1-\alpha$, 再由样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 确定两个参数值 $\hat{\theta}_1$ 及 $\hat{\theta}_2$, 使得对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$, 满足

$$P(\hat{\theta}_1 \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha \ (0 < \alpha < 1),$$

则随机区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 称为 θ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间. $1-\alpha$ 称为区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 的置信概率, 或称置信系数, 又称

置信度，简称信度. α 称为显著性水平. $\hat{\theta}_1$ 及 $\hat{\theta}_2$ 称为 θ 的 $(1-\alpha)$ 置信限，分别称 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 为置信下限及置信上限. 置信区间这个名词在直观上可以理解为：对于"区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 包含 θ"这个推断，可以给予一定程度的相信，其相信程度则由置信系数 $1-\alpha$ 来表示. 置信区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 是随机区间，是因为这个区间的置信限 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 都是由随机样本确定的，每组不同的样本值确定不同的区间，因此 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是随机变量，以随机变量为端点组成的区间自然称为随机区间. 若反复多次以相同的容量进行抽样试验，则每组样本值都确定一个区间，在这样多的区间中有可能包含 θ 真值，也有可能不包含 θ 真值，其中包含 θ 真值的约占 $1-\alpha$，而不包含 θ 真值的约占 α. 如果设 $\alpha=0.05$，就是说作 100 次容量为 n 的抽样试验，其中约有 5 次试验所确定的区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 不包含 θ 真值，约有 95 次试验所确定的区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 是包含 θ 真值的. 奈曼(Neyman, J.)于 1934 年创立一种严格的区间估计理论，定义了可信区间估计概念.

置信系数(confidence coefficient)　见"置信区间".

置信概率(confidence probability)　见"置信区间".

置信度(confidence limits)　见"置信区间".

置信限(confidence limits)　见"置信区间".

估计优良准则(optimal criterion of estimation)　评价参数估计优良性的标准. 对于同一个总体参数 θ 的估计，用不同的统计量(不同的统计方法)去估计它，所确定的估计量和置信区间是不同的. 如何来衡量它们的优劣呢？由于统计量取值的随机性，所以不能以一次取值定其优劣，而必须从概率和统计的观点出发，建立一些衡量的准则，称这些准则为估计优良准则. 常用以衡量点估计的优良准则有无偏性准则、一致性准则、有效性准则等，衡量区间估计的优良准则有一致最精确准则、一致最精确无偏性准则、平均长度最短准则等. 如果把参数估计用于统计决策，还可采用统计决策理论中的优良准则(如同变性准则).

无偏估计(unbiased estimation)　一种优良点估计. 在点估计中对估计量 $\hat{\theta}$ 的基本要求就是 $\hat{\theta}$ 围绕被估参数 θ 而摆动，其数学期望应等于被估参数. 设总体 ξ 的概率分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 x 为变元，θ 为未知参数，$\theta\in\Theta$，Θ 称为参数空间. $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为取自总体 ξ 的一个随机样本，而 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是参数 θ 的估计量，若关系式

$$E[\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)]=\theta$$

成立，其中 $E[\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)]$ 表示数学期望，则 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 称为 θ 的无偏估计量，并称 $\hat{\theta}$ 具有无偏性. 例如，估计总体平均值 μ 时，若以样本平均值 $\bar{\xi}$ 为估计量，则可算得 $\bar{\xi}$ 的数学期望 $E(\bar{\xi})=\mu$，这说明 $\bar{\xi}$ 是总体平均值 μ 的无偏估计量. 当 $n\to\infty$ 时，对一切 $\theta\in\Theta$，若有

$$\lim_{n\to\infty}E[\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)]=\theta,$$

则称 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为 θ 的渐近无偏估计量. 具有上述无偏性的估计称为无偏估计. 无偏估计量 $\hat{\theta}$ 与 θ 的偏差的平均值随使用次数的增多而趋于零. 因此，无偏性只有在多次重复使用中，各次误差相互抵消，才能显出其优良性. 无偏估计并不总是存在的，如服从二项分布的总体 $B(n,p)$，$0<p<1$，则 $1/p$ 的无偏估计就不存在. 有时，无偏估计虽然存在，但不够合理. 又有些问题中，无偏估计很多，则其优良性由它们的方差来决定，方差越小越优良.

渐近无偏估计(asymptotically unbiased estimator)　见"无偏估计".

有效性(efficiency)　统计学术语. 指参数估计的一种优良准则. 总体分布所含参数 θ 的一个好的估计量 $\hat{\theta}$ 的基本要求是 $\hat{\theta}$ 密集地围绕被估参数 θ 而摆动. 由切比雪夫不等式推知，随机变量 $\hat{\theta}$ 取值落在它的期望 $E\hat{\theta}$ 邻近的概率与这个随机变量 $\hat{\theta}$ 的方差有关，因此，好的估计量 $\hat{\theta}$ 还应有尽可能小的方差，这就是估计的有效性. 估计总体参数时，若有两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$，就需要比较哪一个更密集在 θ 附近，如果 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更密集在 θ 附近，就认为 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 优良. 它们的优良性由其方差来衡量，方差越小越优良. 设它们的方差分别为 $D(\hat{\theta}_1)$ 和 $D(\hat{\theta}_2)$，若不等式 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$ 成立，则称估计量 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

一致估计(consistent estimator)　亦称相合估计和相容估计. 一种优良点估计. 设总体 ξ 的概率分布函数为 $F(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$ 为未知参数，若可估函数 $g(\theta)$ 估计量 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 当 n 趋于无穷时，在某种意义下收敛于 $g(\theta)$，则称 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是 $g(\theta)$ 在这种收敛意义下的一致估计. 它要求作为估计量的统计量，当样本容量无限增大时，在某种意义下，收敛于待估计参数的真值. 按收敛的意义不同将一致估计分为两种：若当样本容量 $n\to\infty$ 时，对任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)-g(\theta)|\leqslant\varepsilon\}=1,$$

则 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 称为 $g(\theta)$ 的弱一致估计；若有

$$P\{\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=g(\theta)\}=1,$$

则 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 称为 $g(\theta)$ 的强一致估计. 一致估计是点估计中最基本的大样本准则. 例如，正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本均值 $\bar{\xi}$ 就是 $E(\xi)$ 的一致估计，因为根据大数定律，对任给 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-E(\xi)\right|>\varepsilon\right\}=0$$

成立. 这就表明 $\bar{\xi}$ 是 $E(\xi)$ 的弱一致估计.

相合估计(consistent estimator) 即"一致估计".

相容估计(consistent estimator) 即"一致估计".

弱一致估计(weak consistent estimator) 见"一致估计".

强一致估计(strong consistent estimator) 见"一致估计".

矩估计法(estimation by the method of moments) 亦称数字特征法.求估计量的一种常用方法.以样本矩的某一函数代替总体矩的同一函数来构造估计量的方法称为矩估计法.因为样本可确定一个经验分布函数,由这个经验分布函数可确定样本的各阶矩.而样本又是从总体中随机抽取的,样本的分布及其各阶矩都在一定程度上反映了总体参数的特征,当样本容量 n 无限增大时,样本矩与相应的总体矩任意接近的概率趋于1,因而可用样本矩代替总体矩构造一个含有未知参数的方程或方程组,方程的解就给出总体参数的估计量.设总体 ξ 具有概率分布函数 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$,其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 是未知参数.若取自总体 ξ 的一个样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的 k 阶矩 $E(\xi^k)$ 存在,则

$$E(\xi^i)=\varphi_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^i dF(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\ (1\leqslant i\leqslant k),$$

为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数.而 i 阶样本矩为

$$\bar{\xi}^i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j^i\ (1\leqslant i\leqslant k).$$

使同阶的总体矩与样本矩相等,即令

$$\Phi_i(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\bar{\xi}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j^i\ (i=1,2,\cdots,k),$$

就得到包含 k 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的 k 个方程.此方程组的解 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$ 就可作为总体参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的估计量.这是参数估计中最为古老的一种估计法.例如,设服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的总体为 ξ,其总体均值和总体方差分别为 μ 和 σ^2,即未知参数 $\theta=(\mu,\sigma)$.变异系数 $\sigma/\mu(\mu\neq 0)$ 是总体一阶原点矩 μ 和二阶中心矩 σ^2 的函数,而样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的一阶原点矩和二阶中心矩分别为

$$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \quad 和 \quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2,$$

而用 $\sqrt{\hat{\sigma}^2}/\bar{\xi}$ 去估计 σ/μ 就是典型的矩估计法.矩估计法是皮尔逊(Pearson,K.)于1894年首次提出的.

数字特征法(method of numerical characteristics) 即"矩估计法".

最大似然估计(maximum likelihood estimation) 一种重要而普遍的求估计量的方法.设已知总体 ξ 的概率分布密度函数 $f(x;\theta)$,则总体 ξ 的样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的联合概率分布密度函数为

$$\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

若固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,将其视为 θ 的函数,记为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$$

称为似然函数.它可视作随机变量 θ 取值的概率(这是不严格说法).若 $\theta=\hat{\theta}$ 时 $L(\theta)$ 取到最大值,这表明在随机变量 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 已取值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的情况下,参数 θ 取值 $\hat{\theta}$ 的概率最大,因此,可把 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量.即若 $L(\hat{\theta})=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$,则 $\hat{\theta}$ 称为参数 θ 的最大似然估计值.用样本 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 代替观察值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所得的 $\hat{\theta}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量.上述估计就称为最大似然估计.

由微积分知求最大似然估计量的具体做法,就是在已知样本值的条件下,求方程

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial\theta}=0 \tag{1}$$

的解.因为 $\ln L(\theta)$ 与 $L(\theta)$ 有相同的极值,而一般求 $\ln L(\theta)$ 的极值点比求 $L(\theta)$ 的极值点更容易,所以常用求方程

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=0 \tag{2}$$

的解以代之.此方程也可写成

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i;\theta)}\cdot\frac{\partial f(x_i;\theta)}{\partial\theta}=0. \tag{3}$$

上面(1)～(3)式称为似然方程,或称为最大似然方程.例如,为了估计正态分布 $N(\mu;\sigma^2)$ 中的参数 μ 和 σ^2 而提出的估计量 $\bar{\xi}$ 和 $\hat{\sigma}^2$,就是 μ 和 σ^2 的最大似然估计量.最大似然估计是在总体分布类型为已知的条件下估计未知参数的一种较好的方法.在一般条件下,最大似然估计是渐近有效的和渐近正态分布的.有时由于似然方程复杂,难于求解,常借助数值计算以寻求最大似然估计值,而难于写出估计量的函数表达式.

最大似然估计法是费希尔(Fisher,R.A.)于1912年首次提出,并于1921年和1925年的工作中加以发展使其更臻于完善.它在统计推断中无需有关事前概率的信息,克服了贝叶斯法的致命的弱点,是统计学史上一大突破.

似然函数(likelihood function) 见"最大似然估计".

似然方程(likelihood equation) 见"最大似然估计".

线性估计(linear estimator) 一种简便的参数估计方法.设总体 ξ 有概率分布密度函数 $f(x;\theta)$,θ

为未知参数. 由取自总体 ξ 的样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的线性函数

$$\sum_{i=1}^{n} a_{in}\xi_i$$

构成的估计量,称为线性估计,它可用作总体的某些参数的估计量. 另外,样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的一个顺序统计量 $\xi_{(1)},\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)}$的线性函数

$$\sum_{i=1}^{n} a_{in}\xi_{(i)}$$

亦称为线性估计. 样本中位数就是一例. 设样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是按大小顺序排列的,定义居中的一个数 $\tilde{\xi}$ 的观察值为中位数,并记为

$$\tilde{\xi}=\begin{cases}\xi_{k+1} & (n=2k+1),\\ \frac{1}{2}(\xi_k+\xi_{k+1}) & (n=2k),\end{cases}$$

则 $\tilde{\xi}$ 是样本$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的函数. $\tilde{\xi}$ 可用来估计总体均值 μ,即 $\hat{\mu}=\tilde{\xi}$. 线性估计由于其构造简单,计算方便,常被采用.

最小二乘估计(least square estimation)　亦称最小平方估计. 一种重要的参数估计方法. 设两个随机变量 ξ 和 η 之间有相关关系 $\eta=f(\xi;\beta)+\varepsilon$,其中 f 可以是多项式或其他连续函数,β 为未知参数,ε 为误差. 现在要用(ξ,η)的 n 组观察值(x_1,y_1),(x_2,y_2),$\cdots$,(x_n,y_n)来估计 $f(\xi;\beta)$中的未知参数 β. 由最小二乘法原理知,可以求解使观察值的误差平方和

$$\sum_{i=1}^{n}\{y_i-f(x;\beta)\}^2$$

为最小的 β. 用这种方法得到的 $f(\xi;\beta)$中的未知参数 β 的估计量,称为最小二乘估计. 如果将上述 n 组观察值视为点的坐标,就可在平面直角坐标系中得到 n 个点:$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$\cdots$,$P_n(x_n,y_n)$. 假定这些点近似地在一条直线 AB 上,这时 ξ 和 η 的相关关系可视为线性相关,其关系式为 $f(\xi;\beta)=\beta_0\xi+\beta_1$. 此即直线 AB 的方程. 设通过点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 且与 y 轴平行的直线与直线 AB 交于 $Q_1(x_1,\bar{y}_1)$ $Q_2(x_2,\bar{y}_2)$,$\cdots$,$Q_n(x_n,\bar{y}_n)$,其中 $\bar{y}_i=\beta_0x_i+\beta_1$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 设 β_0,β_1 使

$$U=\sum_{i=1}^{n}\overline{P_iQ_i}^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_i)^2$$

达到最小,为此令

$$\frac{\partial U}{\partial \beta_0}=0 \quad 和 \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_1}=0,$$

即得方程

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\beta_0+\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)\beta_1-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0,$$

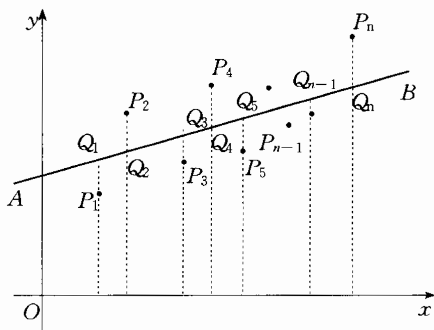
与

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)\beta_0+n\beta_1-\sum_{i=1}^{n}y_i=0.$$

此方程称为正规方程. 解此方程可求出 β_0 与 β_1 的最小二乘估计为

$$\hat{\beta}_0=\frac{n\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big)}{n\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2},$$

$$\hat{\beta}_1=\frac{\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)}{n\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)-\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2}.$$



在线性模型的参数估计问题中,最小二乘估计被广泛采用. 1795 年,年仅 18 岁的高斯(Gauss,C. F.)为计算小行星轨道,需要修正观察数据的误差而首次提出的方法. 后又被勒让德(Legendre,A.-M.)于 1806 年独立提出,并由马尔可夫(Марков,A. A.)于 1900 年加以发展,使之更臻于完善. 它主要用于线性统计模型中的参数估计.

最小平方估计(least square estimation)　即"最小二乘估计".

假设检验(hypothesis testing)　亦称统计假设检验. 统计学的基本概念之一. 假设检验的基本思路是带有概率性质的反证法. 即先对要检验的对象(如总体的某个参数)作一假设,称为原假设(或称待验假设),常用 H_0 表示. 然后确定一个适当的统计量(对于任一样本,这个统计量应有确定的值,并且它的分布应是已知的),并建立一个检验法则,在预先给定一个小概率 α(一般选取 $0\leqslant\alpha\leqslant0.05$)的情况下,利用小概率原理做出拒绝假设或者接受原假设的判断. 即如果抽样结果是小概率事件,则拒绝原假设,否则接受原假设. 这种判断是接受或否定原假设 H_0 的方法称为假设检验. 若原假设 H_0 是属于总体参数的,则称为参数假设. 若原假设 H_0 是属于总体分布的,则称为分布假设. 检验分布假设问题称为分布检验,亦称非参数检验. 例如,在总体分布为正态 $N(\mu,\sigma^2)$(μ 未知,σ 已知)的情况下,要检验总体均值 μ 等于常数 μ_0 是否可信,可分下面 6 个步骤进行:

1. 提出原假设. 本例中为 $H_0:\mu=\mu_0$.

2. 选定统计量. 一般选相应参数的估计量(参见

“参数估计”). 本例中取样本平均值

$$\xi=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

(其中$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为任一容量为 n 的样本)为检验统计量.

3. 计算统计量的值. 将随机变量$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$以样本观察值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$代入,可得统计量的值. 本例中 ξ 的观察值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

4. 确定所选统计量的概率分布. 本例中在接受原假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 时,$\sqrt{n}(\xi-\mu_0)/\sigma$ 服从 $N(0,1)$(标准正态分布).

5. 确定显著性水平(参见“显著性水平”). 即根据实际情况及要求,确定数 $\alpha(0<\alpha<1$,一般取 $\alpha=0.1,0.05,0.01$ 等),作为原假设本来为真,但却被拒绝的概率.

6. 根据显著性水平,确定 H_0 的临界域(参见“拒绝域”). 当统计量的值属于临界域,就拒绝原假设 H_0,否则接受 H_0. 本例中因 $\bar{x}$ 与 μ_0 应相差很小,故可由 $N(0,1)$的表中查出使 $P(|\xi|>c)=\alpha$ 的临界值 c,然后按照“若 $|\bar{x}-\mu_0|>c\sigma/\sqrt{n}$ 则拒绝 H_0,否则接受 H_0”的原则,决定是否接受 H_0.

分布假设(distribution hypothesis) 见“假设检验”.

分布检验(distribution test) 见“假设检验”.

检验法则(test rule) 一种检验方法. 指根据样本和预先给定的概率做出接受或拒绝原假设的具体法则. 在假设检验中,对随机变量 ξ,要根据它的样本观察值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和预先给定的显著性水平 $\alpha(0<\alpha<1)$,来做出拒绝或接受原假设 H_0 的判断的具体法则.

原假设(null hypothesis) 亦称待验假设、虚无假设、解消假设. 统计学的基本概念之一. 假设检验中,待检验的有关总体分布的一项命题的假设称为原假设,一般记为 H_0. 例如,某建筑材料的抗断强度指标是服从正态分布的,要检验采用新配方后所生产的建筑材料的强度指标是否仍服从正态分布,则得原假设 $H_0:F(x)=\Phi(x)$,这里 $F(x)$和 $\Phi(x)$分别表示原建筑材料的抗断强度指标的分布函数和按新配方生产的建筑材料的抗断强度指标的分布函数. 又如,某工业产品,国家标准次品率不得超过 2%,才能出厂,则 $H_0:p\leqslant 0.02$ 就是原假设.

待验假设(null hypothesis) 即“原假设”.

解消假设(null hypothesis) 即“原假设”.

备择假设(alternative hypothesis) 亦称研究假设. 统计学的基本概念之一. 假设检验中需要证实的有关总体分布的假设,它包含关于总体分布的一切使原假设不成立的命题. 常记为 H_a,或记为 H_1. 例如,原假设 $H_0:\mu=\mu_0$,则备择假设为 $H_a:\mu\neq\mu_0$. 又如,原假设 $H_0:\mu_1<\mu_2$,则备择假设为 $H_a:\mu_1\geqslant\mu_2$. 备择假设是原假设被否定时准备接受的假设,它是按少犯第二类错误(参见“两类错误”)来比较检验法优劣时必不可少的. 但在实际问题中,有时并不按上面所述进行严格划分,如取原假设 $H_0:p=0.04$,而取备择假设为 $H_a:p>0.04$ 或 $H_a:p<0.04$ 等.

研究假设(research hypothesis) 即“备择假设”.

检验统计量(test statistics) 假设检验中用以检验原假设的统计量. 假设检验是根据样本的信息来判断总体分布是否具有某指定的特征,就必须先提出与总体有关的命题作为假设,常称为原假设. 然后根据原假设 H_0 的内容建立适当的样本函数,此样本函数称为检验统计量,用以对原假设进行检验,原假设是被拒绝或是被接受需要根据检验统计量的分布或渐近分布来判定. 为了能够把样本观察值代入计算以求出具体数值,所建立的检验统计量应使其分布不含未知参数. 常用的检验统计量有 U,t,F,χ^2 等.

拒绝域(rejection region) 亦称否定域,又称临界域. 统计学的基本概念之一. 指在假设检验中,据以拒绝原假设的统计量的取值范围. 假设检验中根据检验统计量的分布,由给定的小概率 $\alpha(0<\alpha<1)$作为显著性水平所确定的拒绝原假设 H_0 的区间称为拒绝域. 即统计量在其中取值的概率为 α 的区域. 例如,对某检验问题,提出原假设 $H_0:\mu=\mu_0$,这里 μ 是总体 ξ 成正态分布的总体均值,μ_0 是已知数. 适当选取显著性水平 $\alpha(0<\alpha<1)$,并建立检验统计量为

$$U=\frac{\sqrt{n}(\xi-\mu_0)}{\sigma},$$

其中 σ 为已知,且 U 服从标准正态分布 $N(0,1)$. 确定临界值 u_α,即由关系式 $P(|U|\geqslant u_{\alpha/2}|)=\alpha$. 查标准正态分布表确定 $u_{\alpha/2}$的值. 然后根据样本值的计算作出判断,若 $|U|\geqslant u_{\alpha/2}$,则否定原假设 H_0,并称 $|U|\geqslant u_{\alpha/2}$为拒绝域. 反之,若 $|U|<u_{\alpha/2}$,则接受原假设,并称 $|U|<u_{\alpha/2}$为接受域,亦称容许域.

否定域(rejection region) 即“拒绝域”.

临界域(critical region) 即“拒绝域”.

接受域(acceptance region) 见“拒绝域”.

容许域(admissible region) 见“拒绝域”.

两类错误(errors of two kinds) 统计学的基本概念之一. 指假设检验中可能出现的弃真和纳伪的错误. 假设检验是根据从总体抽取的样本资料来对总体的某种特征作出判断的,而样本只能代表总

体的一部分特征，由它来推断总体特征就绝不可能有百分之百的把握，因而可能做出错误的判断.其一，原假设 H_0 本来是正确的，但判断 H_0 为不正确而产生错误，这是一种弃真错误，在统计学中称为第一类错误，或称Ⅰ型错误.其二，原假设 H_0 本来是不正确的，但判断 H_0 为正确而产生错误，这是一种纳伪错误，在统计学中称为第二类错误，或称Ⅱ型错误.它们统称为假设检验中的两类错误.这两类错误严重程度常用它们出现的概率来度量，犯第一类错误的概率常用其显著性水平 α 表示，犯第二类错误的概率常用 β 表示.如何避免这两类错误是假设检验中的困难问题.如降低显著性水平 α，即选择较高的概率为显著性水平(如令 $\alpha=0.10$ 或 0.15，甚至更高)，可以减少原假设 H_0 被接受的机会，但同时也增加了备择假设 H_a 被摒弃的机会.相应地接受域变小了，因而犯第二类错误的概率 β 也就变大.反之亦然.要同时减少这两类错误尚无万全之策.所以在实际应用中人们常采用适中的显著性水平(例如令 $\alpha=0.05$ 或 0.01 等)，以使两类错误相对减少.还可根据问题的性质或具体情况确定适当的显著性水平，例如，若摒弃某假设后果严重，则采用较高的显著性水平；反之，则选用较低的显著性水平等.在假设检验中可能犯两类错误的理论是由奈曼(Neyman，J.)和皮尔逊(Pearson，K.)合作研究时，对假设检验提出的系统理论中给出的.

第一类错误(error of the first kind)　见“两类错误”.

第二类错误(error of the second kind)　见“两类错误”.

显著性水平(level of significance)　亦称信度.表示假设检验中判断概率精度的数.在假设检验中，确定临界值或拒绝域时，控制犯Ⅰ型错误的概率 α，称为显著性水平.常取 α 为 $0.01, 0.05$ 等值.

信度(trust limits)　即“显著性水平”.

简单假设(simple hypothesis)　一种常用的最简单的假设.指假设检验中，只涉及一个分布函数的假设.例如，要检验两点分布总体中的数学期望 p 是 0.02 还是 0.03.设原假设为 $H_0: p=0.02$，则备择假设为 $H_a: p=0.03$，它们都是简单假设.

复合假设(composite hypothesis)　一种常用的最简单的假设.指在假设检验中，涉及一个以上分布函数的假设.例如，检验正态总体 $N(\mu;\sigma^2)$ 的数学期望 μ 而提出的原假设 $H_0:\mu=\mu_0$，则备择假设 $H_a: \mu>\mu_0$ 和 $\mu<\mu_0$ 都是复合假设，因为这里 H_a 中所包含的假设都涉及一族正态分布函数.

参数假设检验(parametric hypothesis test)　简称参数检验.一种常用的假设检验.在假设检验中，若原假设是属于总体分布的参数，则称为参数假设.若总体分布的类型 $F(x;\theta)$ 为已知，但参数 θ 为未知，假设检验只涉及对未知参数 θ 的检验，则称为参数检验.如 U 检验、T 检验、F 检验等都是参数检验.

参数检验(parametric test)　参数假设检验的简称.

参数假设(parametric hypothesis)　见“参数假设检验”.

非参数检验(nonparametric test)　亦称非参数假设检验.一种常用的假设检验.在参数假设检验中，待检验的假设是在总体分布的类型为已知，而总体分布的某些参数为未知的条件下进行的.但在许多场合下，总体的分布情况并不清楚，因而建立了非参数检验.在非参数检验中，待检验的假设是有关总体分布的类型、形式或其他特性，这些假设都不能明确地依赖于总体分布的有限个实参数，有关这些假设的检验统称为非参数检验，如检验正态总体的 χ^2 检验、检验相关数据差数的符号检验、差数的符号秩和检验等都是非参数检验.

显著性检验(significance test)　一种常用的假设检验.在假设检验中，不考虑备择假设，只规定原假设的检验称为显著性检验.例如，某校一年级学生的数学成绩，一般认为是服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的，为了提高教学质量抽取其中一个班的 n 名学生进行新教学方法试验后，测得这 n 名学生的平均成绩为 μ_0，在给定拒绝概率 α 为显著性水平下，检验总体的原假设 $H_0:\mu=\mu_0$，就是一个显著性检验.因为这种检验可以评价新教学方法后的学生平均成绩 μ_0 与原来的学生成绩 μ 之间是否有显著的差别.

***U* 检验**(U-test)　一种参数检验.即已知正态总体的方差，检验其数学期望的一类显著性检验.若总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中方差 σ^2 已知，而 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 是总体的随机样本，$\bar{\xi}$ 为样本均值，则检验统计量

$$U=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{\xi}-\mu)}{\sigma}$$

服从标准正态分布 $N(0,1)$.上述检验称为 U 检验，U 检验是对正态总体的数学期望 μ 进行下面几种显著性检验：

1. 原假设 $H_0:\mu=\mu_0$，拒绝域
$$|\bar{\xi}-\mu_0|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$
2. 原假设 $H_0:\mu\leqslant\mu_0$，拒绝域
$$\bar{\xi}\geqslant\mu_0+u_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$
3. 原假设 $H_0:\mu\geqslant\mu_0$，拒绝域
$$\bar{\xi}\leqslant\mu_0-u_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

其中 μ_0 是给定的常数，α 为显著性水平，u_α 为标准正态分布的上 α 分位数.

若检验中涉及两个正态总体 $N(\mu_1;\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2;\sigma_2^2)$时，其中 σ_1 和 σ_2 为已知，且 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_1})$和 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n_2})$分别为上述两个总体中容量各为 n_1 和 n_2 的随机样本，样本均值各为 $\bar{\xi}$ 和 $\bar{\eta}$，这时检验统计量为

$$U=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

则对原假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$ 的检验，亦称为 U 检验，而后者称为双总体 U 检验.

双边检验(two-sided test)　亦称双尾检验、双侧检验. 在假设检验中，用检验统计量的密度曲线和 x 轴所围成的面积的左右两边的尾部面积来构造临界区域进行检验的方法，称为双边检验. 今以 U 检验为例予以说明：当原假设为 $H_0:\mu=\mu_0$，备择假设为 $H_a:\mu>\mu_0$ 或 $\mu<\mu_0$，因而需要用双边检验，在选定的显著性水平 α 之下，将 α 所确定的摒弃区域平分为两部分而置于正态曲线的两边(如图). 即每边面积占有 $\alpha/2$，可从正态分布的双侧分位表中查出临界值，设查得的临界值为 $u_{\frac{\alpha}{2}}$，则检验的拒绝域可表为

$$(-\infty,-u_{\frac{\alpha}{2}})\cup(u_{\frac{\alpha}{2}},+\infty).$$

若计算的统计量 U 的值落入此区间(即进入图中阴影部分)则拒绝原假设 H_0；反之，接受原假设 H_0.

双尾检验(two-tailed test)　即"双边检验".

双侧检验(two-sided test)　即"双边检验".

单边检验(one-sided test)　亦称单尾检验，又称单侧检验. 在假设检验中，用检验统计量的密度曲线和 x 轴所围成面积中的单侧尾部面积来构造临界区域进行检验的方法称为单边检验. 若将采用的显著性水平 α 概率所确定的摒弃区域置于密度曲线的右边，则称为右单边检验(或称右单尾检验，右单侧检验等). 若置于密度曲线的左边，则称为左单边检验(或称左单尾检验，左单侧检验等). 今以 U 检验为例予以说明：当原假设 $H_0:\mu<\mu_0$，可将采用的显著性水平 α 概率所确定的摒弃区域置于正态曲线的右边，可从正态分布的双侧分位表中查出临界值，设查得的临界值为 u_α，则右单边检验的拒绝域为 $(u_\alpha,+\infty)$. 如果计算出的统计量 U 的值落入此区间则拒绝原假设；反之，接受原假设. 同理，若 $H_0:\mu>\mu_0$ 时，使用左单边检验，其拒绝域为 $(-\infty,-u_\alpha)$. 如果计算出的统计量 U 的值落入此区间，则拒绝原假设；反之，接受原假设.

单尾检验(one-tailed test)　即"单边检验".

单侧检验(one-sided test)　即"单边检验".

右单边检验(right one-sided test)　见"单边检验".

左单边检验(left one-sided test)　见"单边检验".

***T* 检验**(T-test)　一种参数检验. 即正态总体方差未知时检验其数学期望的一类显著性检验. 假设检验中，若总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，而 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是总体中容量为 n 的一个随机样本，样本均值为 $\bar{\xi}$，在 U 检验中总体方差是已知的，但在通常情况下这个要求是难于满足的，一个很自然的想法就是用 σ^2 的无偏估计量 S^2 去代替它，则检验统计量

$$T=\frac{\bar{\xi}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$$

服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布，上述检验称为 T 检验. T 检验可对数学期望 μ 进行显著性水平为 α 的假设检验：

1. 原假设 $H_0:\mu\leqslant\mu_0$，拒绝域为

$$\bar{\xi}\geqslant\mu_0+t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

2. 原假设 $H_0:\mu\geqslant\mu_0$，拒绝域为

$$\bar{\xi}\leqslant\mu_0-t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

3. 原假设 $H_0:\mu=\mu_0$，拒绝域为

$$|\bar{\xi}-\mu_0|\geqslant t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

上述检验都称为 T 检验. 其中临界值 $t_{\alpha/2}$为自由度是 $n-1$ 的 t 分布的上 α 分位数，其具体数值可从 t 分布表中查得.

若检验涉及两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，但它们的方差相同时，原假设为 $H_0:\mu_1=\mu_2$ 的检验也可以用 T 检验，这时检验统计量为

$$T=\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\cdot\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}},$$

其中 $\bar{\xi},\bar{\eta}$ 和 S_1^2,S_2^2 分别是取自两个正态总体其容量为 n_1 和 n_2 的样本均值和样本方差.

T 检验常用于小样本的检验，其检验统计量 T 是 20 世纪初由英国统计学家戈塞特(Gosset,W. S.)于 1908 年以学生(student)为笔名发表的关于精密样本论的研究论文中给出的，因此被命名为学生分布，亦称 t 分布.

***t* 分布**(t-distribution)　见"T 检验".

学生分布(student distribution)　见"T 检验".

自由度(degrees of freedom)　统计学的基本概念之一. 常指样本内能随意变动的变量的个数，用

符号 df 表示. 一个随机变量的自由度(df)是自由观测值的个数,即样本大小 n 减去由该样本估计的参数的个数 v,即 d$f=n-v$. 例如,对于期望为 a,方差为 1 的正态随机变量 ξ 的 n 次独立抽样 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,统计量

$$\chi^2_{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$$

服从自由度 d$f=n-1$ 的 χ^2 分布,因为以 $\bar{\xi}$ 估计 a,从而减少一个自由度.

F 检验(F-test) 一种参数检验. 即检验两个正态总体中方差的大小关系的一类显著性检验. 假设检验中,涉及两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,而 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_1})$ 和 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n_2})$ 分别是取自两个总体且容量各为 n_1 和 n_2 的随机样本,它们的样本均值分别为 $\bar{\xi},\bar{\eta}$,样本方差分别为 S_1^2,S_2^2,则检验统计量 $F=S_1^2/S_2^2$ 服从自由度为(n_1-1,n_2-1)的 F 分布. 上述检验称为 F 检验. 关于比较总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 的大小关系的原假设,有以下几种显著性水平为 α 的检验:

1. 原假设 $H_0:\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$,拒绝域为 $S_1^2/S_2^2\leqslant F_{1-\alpha}$.
2. 原假设 $H_0:\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$,拒绝域为 $S_1^2/S_2^2\geqslant F_{\alpha}$.
3. 原假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$,拒绝域为 $S_1^2/S_2^2\geqslant F_{\alpha/2}$或 $S_1^2/S_2^2\leqslant F_{1-\alpha/2}$.

其中 F_α 是自由度为(n_1-1,n_2-1)的 F 分布的上 α 分位数,具体数值可从 F 检验临界值表中查得.

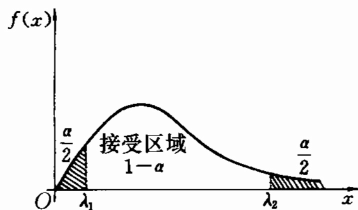
χ^2 检验(χ^2-test) 利用 χ^2 统计量进行检验的方法. 常用的有方差显著性检验,拟合良好性检验,独立性检验等. 例如,对总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其数学期望 μ 未知时对总体方差 σ^2 进行检验. 设 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是从总体抽取的容量为 n 的随机样本,则所采用的检验统计量

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\sigma_0^2} \qquad (1)$$

服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布. 上述检验称为 χ^2 检验. 其中样本均值 $\bar{\xi}$,σ_0^2 为已知数. 给定显著性水平 α,要对原假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ 进行检验,因为 χ^2 分布是不对称的,对于给定的显著性水平 α,由

$$P(\chi^2\geqslant\lambda_1)=1-\frac{\alpha}{2} \text{ 及 } P(\chi^2\geqslant\lambda_2)=\frac{\alpha}{2}$$

确定临界值 λ_1,λ_2,它们可由 χ^2 分布临界值表查出. 图中阴影部分表示拒绝域. 于是,可用统计量 χ^2 进行对 σ^2 的检验. 由样本观察值算出 χ^2 的数值,当 $\chi^2\leqslant\lambda_1$ 或 $\chi^2\geqslant\lambda_2$ 时,拒绝原假设 H_0,当 $\lambda_1<\chi^2<\lambda_2$ 时,接受原假设 H_0. 此外,对$H_0:\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ 或 $H_0:\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ 也可用上述统计量,取不同的拒绝域进行检验.



χ^2 检验由皮尔逊(Pearson,K.)于 1900 年首次提出,故 χ^2 统计量(1)称为皮尔逊公式.

皮尔逊公式(Pearson formula) 见“χ^2 检验”.

拟合良好性检验(test of goodness of fit) 亦称拟合优度检验. 一种常用的 χ^2 检验. 指假设检验中,检验总体分布为某一个或某一类具体分布 $F_0(x;\theta)$的各种检验法的总称. 最常用的拟合良好性检验有 χ^2 拟合良好性检验. 柯尔莫哥洛夫检验等. 这些检验法都属于非参数检验.

拟合优度检验(test of goodness of fit) 即“拟合良好性检验”.

χ^2 拟合良好性检验(χ^2 test of goodness of fit) 一种常用的拟合良好性检验. 指假设检验中,用 χ^2 统计量来检验总体是否服从某个已知分布,或是否服从某一类分布$\{F_\theta,\theta\in\Theta\}$,其中 θ 为未知参数,Θ 为 θ 的所有可能取值的集合(称参数空间). 例如,在检验总体是否服从已知分布 $F(x)$的问题中,把总体分为 k 个两两无公共点的区间$[\alpha_i,\alpha_{i+1})$,求出样本观察值落入每个小区间的观测频数 γ_i 和理论频数

$$\mu_i=n[F(\alpha_{i+1})-F(\alpha_i)] \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

其中 n 为样本容量. 然后计算检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\gamma_i-\mu_i)^2}{\mu_i}.$$

若 $F(\alpha_{i+1})-F(\alpha_i)>0,i=1,2,\cdots,k$,则当 $n\to\infty$时,χ^2 的渐近分布是自由度为 $k-1$ 的 χ^2 分布. 于是在样本容量 n 相当大时,可以从 χ^2 分布表查得 χ^2 的上 α 分位数 $\chi^2_{(k-1)\alpha}$,即可得到检验显著性水平为 α 的拒绝域$\{\chi^2\geqslant\chi^2_{(k-1)\alpha}\}$. 若原假设 H_0 为检验总体服从分布族$\{F_\theta;\theta\in\Theta\}$,$\theta$ 为未知参数,而 Θ 为 θ 的参数空间,只要在计算理论频数 γ_i 时,用 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$ 代替 θ 计算 χ^2 统计量,也可得到类似的拒绝域. 但此时渐近分布的自由度为 $k-l-1$,式中 l 为 θ 中独立参数的个数. χ^2 拟合良好性检验对任何分布都适合.

χ^2 拟合良好性检验由皮尔逊(Pearson,K.)于 1900 年首次提出,它是检验多项分布的一种大样本方法. 后来,费希尔(Fisher,R. A.)对其作了改进.

独立性检验(independence test) 亦称列联表独立性检验. 一种常用的 χ^2 检验. 指关于两种指标分类独立性的一种非参数检验方法. 假设有一个容量为 n 的样本,可按 A,B 两种属性分类,其中按 A 种属性分为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 共 r 类,按 B 种属性分为 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 共 k 类,排成具有 r 行 k 列的表如下:

$i \backslash j$	B_1	B_2	$\cdots$	B_k	$n_{i\cdot}$
A_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1k}	$n_{1\cdot}$
A_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2k}	$n_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	n_{r1}	n_{r2}	$\cdots$	n_{rk}	$n_{r\cdot}$
$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$\cdots$	$n_{\cdot k}$	n

此表称为 $r\times k$ 列联表.表中 n_{ij}表示样本中按属性 A 取值为第 i 部分,按属性 B 取值为第 j 部分的观察值个数($i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,k$).又令

$$n_{i.}=\sum_{j=1}^{k}n_{ij},n_{.j}=\sum_{i=1}^{r}n_{ij},$$

则可用列联表中数据检验属性 A 与属性 B 是否独立,并按如下步骤进行:

1.建立原假设 $H_0:p_1=p_2$. p_1,p_2 分别表示属性 A 和属性 B 的待检验特性.

2.将列联表中数据代入检验统计量

$$\chi^2=n\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{k}\frac{\left(n_{ij}-\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\right)^2}{n_{i.}n_{.j}}$$

进行计算.此统计量渐近地服从自由度为

$$df=(r-1)(k-1)$$

的 χ^2 分布.

3.在取定的显著性水平为 α 的情况下,查 χ^2 分布数值表,确定检验临界值 $\chi^2_{(df,\alpha)}$.

4.若 $\chi^2>\chi^2_{(df,\alpha)}$,拒绝原假设;反之,接受原假设.

方差分析与回归分析

方差分析(analysis of variance)　亦称变异数分析,又称离势分析.统计学中分析试验数据的一种基本方法.在科学实验和生产实践中,造成试验数据差异的原因可分为两个方面:一方面是由于试验条件不同造成的差异,称为条件误差;另一方面是由于存在偶然因素带来的差异,称为试验误差.为了确定某种条件对试验结果影响的大小,需要在该种条件的多个水平之下,进行多次试验,取得数据.再进行误差分析,分出条件误差和试验误差,并将两者进行比较,然后做出这种条件对试验结果的影响是否显著的结论.这种分析误差的方法,称为方差分析.按所考虑的条件或因素个数的多少可分为:单因素方差分析、双因素方差分析和多因素方差分析等.方差分析是费希尔(Fisher,R.A.)于1923年所创,已成为统计分析的常用方法.

离势分析(analysis of dispersion)　即"方差分析".

条件误差(conditional errors)　见"方差分析".

试验误差(experimental errors)　见"方差分析".

单因素方差分析(analysis of variance of singlefactor)　亦称单向方差分析,又称一元方差分析.一种常用的方差分析.它是从影响试验结果的某些因素中,找出一个因素作为造成条件误差的因素,其他因素都看做带来试验误差的因素.这样把试验所得数据,按造成条件误差的因素的水平分为若干组,称为样本组.对这些样本组的平均数之间差异的显著性进行方差分析,称为单因素方差分析.假设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 是相互独立的服从正态分布 $N(\mu_i,\sigma^2)$的 m 个有相同方差 σ^2 的总体,$(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in})$ 是第 i 个总体 X_i 的容量为 n 的样本,$x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是 X_i 的第 j 次试验结果,要求由试验得到的 m 个样本值检验原假设 $H_0:\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_m$.由于方差分析的计算过程较繁,须按照一定程序进行.其计算步骤和公式如下:

1.计算总平均值(即全部观察值的平均数)

$$\overline{X}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}.$$

2.计算总离差平方和

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X})^2.$$

3.计算组间离差平方和

$$Q_2=n\sum_{i=1}^{m}(\overline{X}_i-\overline{X})^2.$$

4.计算组内离差平方和

$$Q_1=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2.$$

5.计算组间平均离差平方和

$$Q_2/(m-1).$$

6.计算组内平均离差平方和

$$Q_1/m(n-1).$$

7.计算检验统计量

$$F=\frac{Q_2/(m-1)}{Q_1/m(n-1)}.$$

统计量 F 服从自由度为$(m-1,m(n-1))$的 F 分布.于是按选定的显著性水平 α 去查 F 检验表,找出检验临界值 λ_α,进行比较,做出显著性的判断.当 $F>\lambda_\alpha$ 时,做出拒绝原假设的判断,即认为该因素对试验结果的影响是显著的.否则作相反判断.这里的 Q_1 反映了总的试验误差的大小,Q_2 则反映了条件误差的大小.$Q=Q_1+Q_2$,即总误差是这两种误差之和.而统计量 F 则大致上反映了这两种误差的比值 Q_2/Q_1 的大小.因而在 F 的观察值较大时,说明条件误差相对于试验误差较大,在这种情况下,一般应认为该因素对试验结果影响显著.这是对方差分析方

法的直观粗糙的解释.

单向方差分析(analysis of variance of single-factor) 即“单因素方差分析”.

一元方差分析(univariate analysis of variance) 即“单因素方差分析”.

双因素方差分析(analysis of variance of two factors) 一种常用的方差分析.当影响试验结果的因素有两个时,应用统计学理论,按照试验所得的样本值去分析这些因素对试验结果的影响是否显著的方法,称为双因素方差分析.它可以分为两种情况:一种是不考虑这两个因素间的相互影响及作用,为无交互作用的;另一种是考虑这两个因素间的相互影响和作用,为有交互作用的.它们的基本方法分述如下:

1.无交互作用的双因素方差分析.设欲分析因素 A,B 对试验结果的影响,可取因素 A 的 m 个水平 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 及因素 B 的 n 个水平 $B_1,B_2,\cdots,B_n$,在每组水平搭配(A_i,B_j)之下,进行一次试验的数据为 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.这些 x_{ij}都可看做相应的随机变量(母体)X_{ij}的抽样.假定每个 X_{ij}服从方差相同的正态分布 $N(\mu_{ij},\sigma^2)$,则需要检验的假设是:

$$H_{01}:\mu_{1}.=\mu_{2}.=\cdots=\mu_{m}.=\mu,$$

其中 $$\mu_{i}.=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}(i=1,2,\cdots,m),$$

$$\mu=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij};$$

$$H_{02}:\mu._{1}=\mu._{2}=\cdots=\mu._{n}=\mu,$$

其中 $$\mu._{j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}(j=1,2,\cdots,n),$$

$$\mu=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}.$$

当 H_{01}被接受时,说明在因素 A 的不同水平下试验结果差别不大,于是做出因素 A 对试验影响不显著的判断,否则作相反判断.为检验假设 H_{01}需要建立统计量:

$$F_A=\frac{Q_A/(m-1)}{Q_E/(m-1)(n-1)},$$

其中 $$Q_A=n\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i}.-\bar{x})^2,$$

$$Q_E=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i}.-\bar{x}._{j}+\bar{x})^2.$$

而 $$\bar{x}_{i}.=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij},\quad \bar{x}._{j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_{ij},$$

$$\bar{x}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij},$$

可证 F_A 服从自由度为$(m-1,(m-1)(n-1))$的 F 分布.如果相应于显著性水平 α 的临界值为 F_α,则当 $F_A>F_\alpha$ 时拒绝原假设 H_{01},$F_A<F_\alpha$ 时接受原假设 H_{01},类似地可建立统计量:

$$F_B=\frac{Q_B/(n-1)}{Q_E/(m-1)(n-1)},$$

其中 $$Q_B=m\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}._{j}-\bar{x})^2,$$

而 $$\bar{x}._{j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_{ij},$$

(其余如 Q_E,$\bar{x}$,同前)以检验假设 H_{02},F_B 服从自由度为$(n-1,(m-1)(n-1))$的 F 分布.从而同理可判断因素 B 对试验结果的影响是否显著.

2.有交互作用的双因素方差分析.这时不同的是,为了判断因素 A,B 的交互作用对试验结果的影响,必须在它们的各个水平的搭配$(A_i,B_j)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,都进行多次试验(设为 p 次,$p\geqslant 2$).设全部试验数据为$\{x_{ijk}\}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant p)$,它们分别取自方差相同的正态母体 $N(\mu_{ij},\sigma^2)$.这时需要检验的假设除了无交互作用情形的 H_{01},H_{02}之外,还有

$$H_{03}:\mu_{i}.+\mu._{j}-\mu_{ij}=\mu$$
$$(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant p)$$

拒绝或接受假设 H_{03},分别给出因素 A,B,$A\times B$ 对试验结果的影响显著和不显著的判断.为了检验这三个假设 H_{01},H_{02},H_{03},所需要建立的统计量与前一情形略有不同.这时,为检验 H_{01},可用统计量

$$F_A=\frac{S_A/(m-1)}{S_E/mn(p-1)},$$

它服从自由度$(m-1,mn(p-1))$的 F 分布.为检验 H_{02}可用统计量

$$F_B=\frac{S_B/(n-1)}{S_E/mn(p-1)},$$

它服从自由度$(n-1,mn(p-1))$的 F 分布.为检验 H_{03}需用统计量

$$F_{A\times B}=\frac{S_{A\times B}/(m-1)(n-1)}{S_E/mn(p-1)},$$

它服从自由度$((m-1)(n-1),mn(p-1))$的 F 分布.其中

$$S_A=np\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_{i}..-\bar{x})^2,$$

$$S_B=mp\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}._{j}.-\bar{x})^2,$$

$$S_{A\times B}=p\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_{ij}.-\bar{x}_{i}..-\bar{x}._{j}.+\bar{x})^2,$$

$$S_E=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij}.)^2,$$

而

$$\bar{x}_{i}..=\frac{1}{np}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}x_{ijk},\quad \bar{x}._{j}.=\frac{1}{mp}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}x_{ijk},$$

$$\bar{x}_{ij\cdot} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}, \qquad \bar{x} = \frac{1}{mnp}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk},$$

以上的 $S_A,S_B,S_{A\times B}$和 S_E 与试验数据的离差平方和

$$Q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2\text{(无交互作用时)}$$

或 $$Q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk}-\bar{x})^2\text{(有交互作用时)}$$

有很简单的关系，$Q=Q_A+Q_B+Q_E$（无交互作用）或 $Q=Q_A+Q_B+Q_{A\times B}+Q_E$. 因此，由直观分析可见，$Q_A$ 和 Q_B 分别反映了因素 A 和 B 水平的变化引起的误差，$Q_{A\times B}$反映了因素 A 和 B 交互作用引起的误差，而 Q_E 则反映了随机因素引起的误差. 从而上述的统计量 $F_A,F_B,F_{A\times B}$反映了各种条件误差与试验误差相比的大小，由其取值能够判断试验条件的变化对结果有无显著的影响. 这是从直观上对双因素方差分析方法的粗糙解释.

回归分析(regression analysis)　统计学的一个分支. 又是统计学中处理两个或多个随机变量之间相关关系的一种数学方法. 对于相关的随机变量（参见"相关"及"相关系数"），虽然找不出它们之间的确定性关系，但在大量的偶然性中蕴藏着必然性的规律，可以用统计的方法在大量的实践和观察中找到这种规律. 这类统计规律称为回归关系. 有关回归关系的计算理论和方法称为回归分析，它已发展成为统计学的一个重要分支，在工农业生产和科学研究中都有广泛的应用. 研究两个变量间的回归关系称为一元回归分析，确定多个变量间的回归关系称为多元回归分析. 回归分析的主要内容是：

1. 从试验或观测数据出发，确定适当的回归方程，或检验某种确定的回归方程是否合用.
2. 对回归方程中的未知参数进行估计.
3. 检验有关这些参数的假设.
4. 对随机误差 ε 的影响程度进行估计，最常用的是估计 ε 的方差 σ^2.
5. 利用已建立的回归方程进行预测和控制.

回归是高尔顿(Galton,F.)在 1889 年发表的有关遗传学的论文中首次提出的. 他在研究祖先与后代身高之间的相互关系中，发现后代的身高有返归种族平均高度的趋势，他把这种趋势命名为回归原理，此即回归在遗传学上的含义. 在统计学中回归一词的含义已扩展为：凡是由一个变量的变化推测另一变量的变化，都可称为回归.

回归关系(regression relation)　见"回归分析".

线性回归(linear regression)　亦称直线回归. 回归分析中最基本的情形. 设有 k 个变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 和随机变量 Y，而 Y 的值可以分解为两部分，一部分是由于 $X_i(i=1,2,\cdots,k)$的影响，表示为 $f(X_1,X_2,\cdots,X_k;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$，$f$ 为已知函数，称为回归函数. 其中 $\beta_i(i=1,2,\cdots,p)$是由观察数据估计的未知参数. 另一部分是随机误差 ε. 故一般的回归模型可表示为 $Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_k;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)+\varepsilon$. 通常回归方程可由所研究问题的有关理论给出，或根据经验数据和数学处理上去选择. 最常用的形式是 $Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\cdots+\beta_kX_k$，它是待定参数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k$ 的线性函数，故称为线性回归，β_i 称为 Y 对 X_i 的线性回归系数，$i=1,2,\cdots,k$. 寻求各种回归中未知参数的有力工具是最小二乘法. 若回归函数 $f(X_1,X_2,\cdots,X_k;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$不是未知参数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 的线性函数时，则称此回归为非线性回归. 当线性回归中的自变量 X_k 的个数 $k=1$ 时，则称此回归为一元线性回归，$k=2$ 时称为二元线性回归，$k\geqslant 2$ 时称为多元线性回归.

直线回归(line regression)　即"线性回归".

非线性回归(nonlinear regression)　见"线性回归".

一元线性回归(univariate linear regression)　见"线性回归".

散布图(scatter diagram)　亦称散点图，又称分布图. 表示随机变量 Y 与自变量 X 之间相关关系的图形. 设 X 与 Y 代表两个有相关关系的变量，对于自变量 X 的一组不全相同的值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，当 $X=x_i(i=1,2,\cdots,n)$时，随机变量 Y 所取的值为 y_i，$i=1,2,\cdots,n$，这样就得到 n 对样本观察值(x_1,y_1)，$(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$. 在平面直角坐标系中，诸点$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$的散布位置所构成的图形称为散布图. 两变量 X 与 Y 之间的相关形态与程度如何，可从散布图中得到近似的认识.

散点图(scatter diagram)　即"散布图".

分布图(scatter diagram)　即"散布图".

回归直线(regression straight line)　线性回归的几何表示. 指两个变量间的回归关系为线性关系时，回归方程的图形. 设 X,Y 是两个随机变量，如果由(X,Y)的一组观察数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$作出的各点大致散布在某一条直线附近，便可设 X,Y 之间的回归关系为线性关系，回归方程为 $Y=a+bX$. 回归分析将给出在某种意义下 a,b 的最佳数值，从而大致确定 X 与 Y 的关系. 而若 X 与 Y 的关系确实是 $Y=a+bX$，则当 X 取值 x_i 时 Y 的值应为 $\hat{y}_i=a+bx_i$，它与相应的观察值 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$之间的总偏差可由

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$$

的大小反映出来. 于是可在 a,b 可以取的所有数值当中，取使得 $Q(a,b)$达到最小值的那一组. 这种确定 a,b 的方法称为最小二乘法. 按照求极值的方法

（注意对 $Q(a,b)$ 来说，a,b 是自变量，其余为常量），可以得出：$a=\bar{y}-b\bar{x}$，其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}$$

（l_{xy}和 l_{xx}分别表示最后一式的分子和分母）. 实际计算中，可先算 b 后算 a.

相关系数的检验（test of correlation coefficients） 线性统计推断中对相关系数的显著性检验. 从回归直线建立的过程知道（参见"回归直线"），对任何一组试验观察数据 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，不管 X 与 Y 之间是否确实存在线性关系，都可以用最小二乘法求得 Y 对 X 的回归直线方程. 如果 X 与 Y 之间根本没有线性相关关系，则所求得的回归直线方程也就没有实际意义了. 因此，必须用相关系数

$$\rho=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}\qquad(1)$$

进行显著性检验（其中 l_{xy},l_{xx},l_{yy}的意义，参见"回归直线"）. 由回归直线方程的建立过程知

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2,\qquad(2)$$

可推得 $Q=(1-\rho^2)l_{yy}$. 因 $Q\geqslant0$，故 $(1-\rho^2)l_{yy}\geqslant0$，而

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\geqslant0,$$

故 $|\rho|\leqslant1$. 由(2)式看出，当 $|\rho|$ 越接近于 1 时，Q 就越接近于 0，说明 X 与 Y 越接近于线性关系；当 $|\rho|=1$ 时，即 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 都落在一条直线上；当 $|\rho|$ 越接近于 0 时，则 Q 的值越大，这时 X 与 Y 之间有非线性关系或者无关系. 因此，$|\rho|$ 的大小反映了 X 和 Y 之间的关系与线性关系接近的程度，而这只有在对相关系数 ρ 进行显著性检验后才能判定. 其检验步骤如下：

1. 将试验所得样本观察值 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 列表整理后代入(1)式计算相关系数 ρ.

2. 给定显著性水平 $\alpha(\alpha=0.01$ 或 $0.05)$，按自由度 $df=n-2$ 的数值从相关系数检验表中查出相应的临界值 ρ_α.

3. 比较 $|\rho|$ 与 ρ_α 的大小. 若 $|\rho|\geqslant\rho_\alpha$，则认为 X 与 Y 之间存在线性相关关系，并称 ρ 在水平 α 下显著；若 $|\rho|<\rho_\alpha$，则认为 X 与 Y 之间不存在线性相关关系，并称 ρ 在水平 α 下是不显著的.

有些问题不要求做出回归直线，只需了解变量间是否线性相关，就可用样本相关系数检验.

剩余标准差（residual standard deviation） 统计学的基本概念之一. 因变量 Y 与拟合的回归方程在 x_i 处的值之差的平方和

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-a-b\bar{x})^2=bl_{xy}$$

称为回归平方和，它是由自变量 X 的变化而引起的. 又

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=l_{yy}-bl_{xy}$$

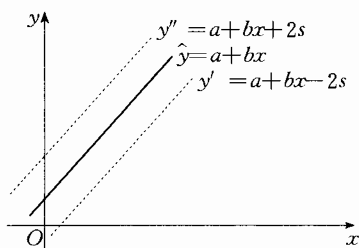
称为剩余平方和，或称残差平方和，它是由试验误差以及其他未加控制的因素引起的，它的大小反映了试验误差及其他因素对试验结果的影响. 剩余平方和除以它的自由度所得的商

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2},$$

称为剩余方差，或称剩余均方. 它是排除了 X 对 Y 的线性影响后（或者说当 X 固定时），衡量 Y 随机波动大小的一个估计量. 它的值愈小，表示所建立的回归方程愈符合实际. 它的算术平方根

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}}=\sqrt{\frac{(1-\rho^2)l_{yy}}{n-2}}$$

称为剩余标准差，它描述回归直线的精度，可以用来衡量所有随机因素对 Y 的观察值的平均变差的大小.



对于试验范围内的每个 x，有 95.4%的 y 值落在两条平行直线 $y'=a+bx-2s$ 和 $y''=a+bx+2s$ 之间（如图）；有 99.7%的 y 值落在两条平行直线

$$y'=a+bx-3s,\ y''=a+bx+3s$$

之间.

回归平方和（regression sum of squares） 见"剩余标准差".

剩余平方和（residual sum of squares） 见"剩余标准差".

剩余方差（residual variance） 见"剩余标准差".

回归预测（regression forecasting） 回归方程的一项重要应用. 所谓预测就是对给定的 X 值，估计 Y 值将落在什么范围. 设变量 X,Y 有线性关系，且线性回归方程 $\hat{y}=a+bx$ 的拟合度是较好的，但由于 X,Y 并非确定性关系，故对任意 $x=x_0$，不能

精确地求得相应的 y_0 值.不过将 $x=x_0$ 代入回归直线方程可计算出 y_0 的估计值 $\hat{y}_0=a+bx_0$,那么用 $\hat{y}_0$ 作为 y_0 的估计值时,需从概率统计的角度确定其偏差程度有多大.即当 $x=x_0$ 时,在给定的显著性水平 α 下,找出正数 δ,使得能够推断实际观察值 y_0 以 $1-\alpha$ 的概率落在区间 $(\hat{y}_0-\delta,\hat{y}_0+\delta)$ 内,即

$$P(\hat{y}_0-\delta<y_0<\hat{y}_0+\delta)=1-\alpha.$$

当随机变量 X,Y 的观察值为 (x_i,y_i),$i=1,2,\cdots,n$,在 n 充分大时,由中心极限定理知道,对于每个确定的 $x=x_0$,y_0 是具有某正态分布的随机变量.根据正态分布的性质知,此分布的数学期望为 $\hat{y}_0$,标准差近似等于剩余标准差 S.亦即随机变量 y_0 近似服从正态分布 $N(\hat{y}_0,S)$,因而它们之间有下述关系:区间 $\hat{y}_0\pm S$ 包含 y_0 的概率约为 68%;区间 $\hat{y}_0\pm 2S$ 包含 y_0 的概率约为 95%;区间 $\hat{y}_0\pm 3S$ 包含 y_0 的概率约为 99.7%.于是对于任一固定的 $x=x_0$,有 95% 的把握断言区间 $(\hat{y}_0-2S,\hat{y}_0+2S)$ 包含 y_0,这个区间称为 Y 的概率为 0.95 的预测区间.即

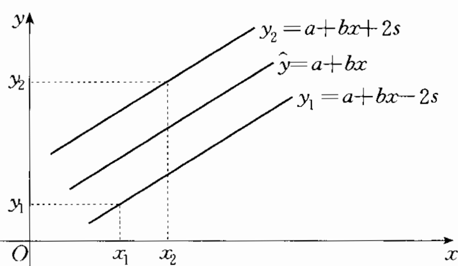
$$P(\hat{y}_0-2S<y_0<\hat{y}_0+2S)=95\%,$$

同样,可以有 99.7%的把握断言区间 $(\hat{y}_0-3S,\hat{y}_0+3S)$ 包含着 y_0.即

$$P(\hat{y}_0-3S<y_0<\hat{y}_0+3S)=99.7\%.$$

由此可见,S 愈小,则从回归方程预测 Y 的值就愈精确.因而可以把剩余标准差作为预测精度的标志.从"剩余标准差"条的图中看出,中间的实直线是由试验观察数据 X 与 Y 得到的回归直线 $\hat{y}=a+bx$,上侧虚直线是 $y''=a+bx+2s$,下侧虚直线是 $y'=a+bx-2s$.则可预料,在全部可能出现的 Y 值中,大约有 95%的点落在两条虚直线所夹的范围内.

回归控制(regression control) 回归方程的一项重要应用.利用拟合性好的回归方程对自变量 X 的取值进行控制,以确保 Y 值被包含在指定的范围内.上述控制称为回归控制.它是回归预测问题的逆问题.如果希望 Y 值被包含于区间 (y_1,y_2) 之内,则 X 值的控制区间可以从下图中虚线所示的对应关系确定.



令

$$y_1=a+bx_1-2s \quad (1)$$

$$y_2=a+bx_2+2s \quad (2)$$

可解出 x_1,x_2.但只有 $y_2-y_1>4s$ 时,所求控制区间才有意义.

一元非线性回归(univariate nonlinear regression) 亦称一元曲线回归.一种简单的非线性回归.它是将有非线性关系的两个随机变量进行适当的变换,转化成线性关系的一类回归分析.回归函数的形式为 $Y=f(X,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$,$f$ 不是待定参数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 的线性函数.这时由试验数据所得诸点 (x_i,y_i),$(i=1,2,\cdots,n)$ 在平面直角坐标系中的散布图形成曲线.在实际问题中,两个变量之间的回归关系大多数都是非线性的.其中有的可先作适当的变量替换,使两个新变量成线性回归,再应用最小二乘法求出新变量的线性回归方程,最后还原到原来的变量,即可得到所要求的一元非线性回归方程.这类问题通常称为化曲线为直线的回归问题.其化法可按如下步骤进行:

1.确定 X 与 Y 之间的内在关系的函数类型.若难于根据专业知识(从理论上推导或根据以往积累的实际经验)来确定两个变量之间的函数关系时,常根据试验所得观察数对的散布图的分布形状及其特点,选择适当的曲线来拟合这些试验数据.

2.通过变量替换,化曲线方程为直线方程,然后用线性回归方法求出它.

3.还原到原来的变量,即可得到所要求的一元非线性回归方程.

最后必须指出:各种回归方程的适用范围,一般只局限于原来观测数据的变动范围,而不能随意外推.在必须进行外推的情况下,也要十分小心,一定要在实际中对所得结果进行检验,看是否合理.

一元曲线回归(univariate curve regression) 即"一元非线性回归".

二元线性回归(binary linear regression) 有两个自变量的线性回归.设随机变量 Y 与变量 X_1,X_2 存在相关关系,若 X_1,X_2 固定时,Y 服从正态分布,$(x_{1i},x_{2i},y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 (X_1,X_2,Y) 的 n 个观察值,亦可由最小二乘法确定一个线性回归方程

$$\hat{Y}=b_0+b_1X_1+b_2X_2, \quad (1)$$

因 Y 与 X_1,X_2 之间是相关的,所以把散布点集 $(x_{1i},x_{2i},y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 描绘在空间直角坐标系中,则这 n 个点的散布图构成一个空间点集,称为三维空间散布图.用最小二乘法可以求得拟合 (X_1,X_2) 与 Y 两者间关系的最佳之线性方程,即用方程(1)表示的这样一个平面,它使在诸点 (x_{1i},x_{2i}) 的观察值 y_i 与相应 $\hat{Y}$ 值之间的离差平方和为最小.称此平面为 Y 对 X_1,X_2 的回归平面.上述回归分析称为二元线性回归.其中 b_0 为常数项,而 b_1,b_2 分别称为 Y 对 X_1 与 X_2 的偏回归系数.要确定回归平面必须选取使离差平方和

$$Q(b_0,b_1,b_2)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_{1i}-b_2x_{2i})^2$$

达到最小的一组 b_0,b_1,b_2. 用求偏导数的方法可得到 b_0,b_1,b_2 满足的正规方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial b_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_{1i}-b_2x_{2i})=0,\\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_{1i}-b_2x_{2i})x_{1i}=0,\\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_2}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_{1i}-b_2x_{2i})x_{2i}=0.\end{cases}$$

常数项 b_0 由下式:$b_0=\overline{Y}-b_1\overline{X}_1-b_2\overline{X}_2$ 确定. 其中 $\overline{Y},\overline{X}_1,\overline{X}_2$ 分别为其观察值 y_i,x_{1i},x_{2i} 的平均数,即

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\overline{X}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i},\overline{X}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{2i}.$$

为了简化上述方程组的形式,令:

$$l_{11}=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\Big)^2;$$

$$l_{22}=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}^2-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{2i}\Big)^2;$$

$$l_{12}=l_{21}=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{2i}\Big);$$

$$l_{1Y}=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}y_i-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{1i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big);$$

$$l_{2Y}=\sum_{i=1}^{n}x_{2i}y_i-\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{2i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big).$$

则正规方程组可写成

$$\begin{cases}l_{11}b_1+l_{12}b_2=l_{1Y},\\ l_{21}b_1+l_{22}b_2=l_{2Y}.\end{cases}$$

解此方程组,则可求得 b_1 和 b_2 的值为:

$$b_1=\frac{l_{1Y}l_{22}-l_{2Y}l_{12}}{l_{11}l_{22}-l_{12}^2};\qquad b_2=\frac{l_{2Y}l_{11}-l_{1Y}l_{21}}{l_{11}l_{22}-l_{12}^2}.$$

三维空间散布图(tri-dimensional scatter diagram) 见“二元线性回归”.

回归平面(regression plane) 见“二元线性回归”.

偏回归系数(partial regression coefficient) 见“二元线性回归”.

正规方程组(normal system of equations) 见“二元线性回归”.

复相关系数(multiple correlation coefficient) 亦称多重相关系数. 二元以上线性回归方程的显著性检验中的重要概念. 在多元线性回归中用复相关系数检验回归效果的好坏,或者说衡量随机变量 Y 与自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 的线性关系的密切程度. 设自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 和随机变量 Y 是相关的,n 次试验所得它们的观察值为$(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{mk};y_k)(k=1,2,\cdots,n)$,而线性回归方程为

$$\hat{Y}=b_0+b_1X_1+b_2X_2+\cdots+b_mX_m.$$

式中 b_0 为常数项,$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为回归系数,则可用样本观察值来计算复相关系数 R,其计算公式为

$$R=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\overline{x}_i)(y_k-\overline{y})b_i}{\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2}}.$$

多元线性回归(multivariate linear regression) 一种较复杂的线性回归. 有两个以上(包含两个)自变量的线性回归,称为多元线性回归. 设影响变量 Y 的自变量共有 m 个:$X_1,X_2,\cdots,X_m$. 若通过 n 次试验得到它们的 n 组观察值为$(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{mk};y_k)$,$k=1,2,\cdots,n$. 如果变量 Y 与 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 之间是相关的,则可用 m 元线性回归方程 $\hat{Y}=b_0+b_1X_1+b_2X_2+\cdots+b_mX_m$ 拟合. 式中的偏回归系数 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 必须满足下面正规方程组

$$\begin{cases}b_0=\overline{Y}-b_1\overline{X}_1-b_2\overline{X}_2-\cdots-b_m\overline{X}_m,\\ l_{11}b_1+l_{12}b_2+\cdots+l_{1m}b_m=l_{1Y},\\ l_{21}b_1+l_{22}b_2+\cdots+l_{2m}b_m=l_{2Y},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ l_{m1}b_1+l_{m2}b_2+\cdots+l_{mm}b_m=l_{mY}.\end{cases}$$

其中 $\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k,\overline{X}_i=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,m)$,

$$l_{ij}=l_{ji}=\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\overline{X}_i)(x_{jk}-\overline{X}_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,m),$$

$$l_{iY}=\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-\overline{X}_i)(y_k-\overline{Y})\quad(i=1,2,\cdots,m),$$

$$l_{mY}=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{Y})^2.$$

又设上述只含 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的线性方程组的系数矩阵和其逆矩阵分别为

$$L=\begin{bmatrix}l_{11}&l_{12}&\cdots&l_{1m}\\ l_{21}&l_{22}&\cdots&l_{2m}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ l_{m1}&l_{m2}&\cdots&l_{mm}\end{bmatrix},$$

$$L^{-1}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1m}\\ c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2m}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mm}\end{bmatrix}.$$

则回归系数可用向量表示为 $\boldsymbol{b}=L^{-1}\boldsymbol{l}_y$,其中

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\tau},\boldsymbol{l}_Y=(l_{1Y},l_{2Y},\cdots,l_{my})^{\tau}.$$

撰　稿　王怀安　王新年　田范基　刘　策　杨焕萍
谷世菁　张天德　林正炎　昂盛炳　冀振斌
审　阅　刘秀芳　林正炎　常心怡　常学将

数 学 符 号 表

数学符号表编写说明

《数学辞海》第一至五卷正文之后，均附有数学符号表，提供读者查阅之用. 本表所收符号比较齐全，除包含“中国数学物理名词委员会”审定的《数学物理符号表》中的全部数学符号外，还收入了国内外数学界已普遍使用的数学符号，总共列入数学符号 1158 个.

一些新兴学科，如小波分析、分形几何、数理语言学、机器证明等，都是 20 世纪中叶以后发展起来的，这些学科的数学符号在国际国内还不统一，《数学辞海》将其收入，仅供读者参考.

本表所收数学符号并非仅限于《数学辞海》的正文，有的符号虽然在本辞书的正文中(如模糊数学中的一些专用数学符号)未曾出现，但由于这些符号已经广泛应用于国内外的教学、科研、工程技术中，因此亦作了适当的搜集，以飨读者.

数学符号表的体例：数学符号表共设五个横栏，依次为符号栏、中文名称栏、英文名称栏、意义或举例栏、备注栏.

数学符号的编排分类：《数学辞海》共六卷，包含数学科学的 100 多个分支学科或专题项目，所涉及的数学符号种类繁多. 为便于读者查找而采取分类编排. 因此，本表将数学符号按学科类型分为以下 7 类：

1. 算术与数论：算术中包括最常用的数学符号，如＋，－，×，÷，＝，≠等，它的应用范围遍及所有分支学科. 数论则包括初等数论、代数数论、解析数论、几何数论等.

2. 逻辑与集合：包括数学基础、形式逻辑、数理逻辑、集合论、公理集合论、序与格等.

3. 几何与拓扑：包括平面几何、立体几何、平面三角、球面三角、解析几何、高等几何、微分几何、凸集几何、距离几何、一般拓扑学、代数拓扑学与流形拓扑学等.

4. 代数学：包括初等代数、高等代数、布尔代数、线性代数与多重线性代数、环与代数、模与同调代数、群及其推广、域与伽罗瓦理论、李群与李代数、范畴论与代数 K 理论、代数几何、奇点理论与突变理论等.

5. 分析学：包括数学分析、实变函数论、复变函数论、多复变与复空间、测度论、泛函分析、变分法、函数逼近论、调和分析、流形上的分析、位势论、凸分析、非标准分析、小波分析、分形几何、常微分方程、偏微分方程、积分方程与函数方程、动力系统、特殊函数等.

6. 概率统计：包括组合学、概率论、随机过程、统计学等.

7. 应用数学：包括计算数学、模糊数学、生物数学、经济数学、数学物理与理论物理、运筹学、系统理论、控制理论、通信与信息理论、测绘学、力学、天文学、数理语言学等.

数学符号表的编排顺序：本表所列数学符号，大体上按它们在《数学辞海》中出现的先后顺序编排. 由于很多数学符号的含义及使用范围比较复杂，若要准确地归入哪一类，实际上是很困难的，因而制订下列编排原则：

1. 多学科共用符号，将其编入最先出现的分支学科中. 例如，运算符号＋，－，×，÷等，是所有学科共用的，就编入本表最前面的学科——算术中.

2. 同形同义的符号，就只在某一分支学科符号表内出现一次. 例如，符号“R”在集合论中表示实数集，而在代数学和分析学中也表示实数集，其意义是相同的，就将符号“R”只列入集合论的符号表，而在代数学和分析学的符号表中不再出现.

3. 同形而不同义的符号，则分别列入相应分支学科. 如“Im”在初等代数中表示复数的虚部，而在集合论和代数学中则表示映射的像，就将其分别列入各个学科的符号表中；又如“k”在应用数学中表示高斯常数，在微分几何中表示曲率，而在特殊函数中则表示贝克函数，这样便分别将其列入应用数学、微分几何、特殊函数的符号表中.

4. 异形同义的符号，首先将《数学物理符号表》中核定的符号列入符号栏，而将其异形符号列入备注栏，如几何中将 Rt∠列于符号栏，而将曾用符号 rt∠和 R∠列入备注栏；其次，凡目前国际国内用法尚未统一的异形同义符号，如代数中的“A^T”，“A'”都表示矩阵 A 的转置矩阵，则一同列于符号栏.

5. 过去用过，而现在少用或不用的数学符号，本表将其列入备注栏，以利读者阅读古旧数学资料时参考.

算术和数论(Arithmetic & Number theory)

符 号	中文名称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
$+$	加号;正号	plus ;positive	例如,$+2$ 即正 2;$a+b$ 即 a 与 b 相加	正号常可略去不写
$-$	减号;负号	minus ;negative	例如,-1 即负 1;$a-b$ 即 a 与 b 的差	
$\pm$	正或负;加或减	positive or negative;plus or minus	例如,± 2,即正 2 或负 2;$a \pm b$ 即 a 加或减 b	
$\mp$	负或正;减或加	negative or positive;minus or plus	例如,∓ 2 即负 2 或正 2;$a \mp b$ 即 a 减或加 b	
$\times$, $\cdot$	乘号	multiple sign	例如,2×3 即 2 乘 3;$a \cdot b$ 即 a 乘 b	乘号在括号前或字母间常可略去
$\div$, $-$, $/$	除号;分数(式)线	sign of division, fraction stroke	$a \div b$, $\frac{a}{b}$, a/b,即 a 除以 b, b 分之 a	
$:$	比	ration	$a:b$ 即 a 比 b	
$\mid$	整除	exact division	$a \mid b$ 即整数 a 整除整数 b	
$\nmid$	不能整除	nonaliquot	$a \nmid b$ 即整数 a 不能整除整数 b	
$\parallel$	限界整除	bound exact division	$a^k \parallel b$ 即 a^k 能整除 b,但 a^{k+1} 不能整除 b	$a^k \mid b$,且 $a^{k+1} \nmid b$
$[\,,\cdots,]$	最小公倍数	least common multiple	$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数	亦可用 LCM 表示
$(\,,\cdots,)$	最大公约数	greatest common divisor	$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数	亦可用 GCD 表示
a^n	a 的 n 次方(幂)	a to the power n	例如,5^4 即 5 的 4 次方(幂)	当 $n=2,3$ 时,分别称平方、立方
$\sqrt{\ }$	平方根号	square root sign	$\sqrt{a}$ 即 a 开平方	
$\sqrt[n]{\ }$	n 次根号	n-th root sign	$\sqrt[n]{a}$ $(n\geqslant 2)$即 a 开 n 次方	当 $n=3$ 时,称 a 开立方
$\lvert\ \rvert$	绝对值;模	absolute value;modules	$\lvert a \rvert$表示 a 的绝对值或模	亦可用 abs a 表示
$=$	等号	equal sign	$2+3=5$	
$\neq$	不等号	inequality sign	$2+3\neq 4$	
$\equiv$	恒等号	identity symbol	$a\equiv b$ 即 a 恒等于 b	
$<$	小于	less than	$a<b$ 即 a 小于 b	
$>$	大于	greater than	$a>b$ 即 a 大于 b	
$\gtrless$	大于或小于	greater than or less than	$a\gtrless b$ 即 $a>b$ 或 $a<b$	
$\lessgtr$	小于或大于	less than or greater than	$a\lessgtr b$ 即 $a<b$ 或 $a>b$	
$\leqslant$	小于或等于;不大于	less than or equal to	$a\leqslant b$ 即 a 小于或等于 b,或 a 不大于 b	一般不用符号"$\leqq$"
$\geqslant$	大于或等于;不小于	greater than or equal to	$a\geqslant b$ 即 a 大于或等于 b,或 a 不小于 b	一般不用符号"$\geqq$"
$\ll$	远小于	much less than	$a\ll b$ 即 a 远小于 b	
$\gg$	远大于	much greater than	$a\gg b$ 即 a 远大于 b	
$\approx$	约等于	approximately equal	$a\approx b$ 即 a 约等于 b	曾用$\doteq$,现已不用
$\triangleq$	相当于	equivalent to	1 cm$\triangleq$10 km 表示图上 1 cm 相当于实际距离 10 km	曾用$\Leftrightarrow$,现已不用
$\propto$	成正比	is direct ratio to	$a\propto b$ 表示 a 与 b 成正比	
$\sim$	数值范围	numerical range	例如,5~10 即由 5 至 10	现已不用"—"
.	小数点	decimal point	例如,8.59 即 8 又 100 分之 59	小数点记于个位数字后的下足
$\dot{}\ \dot{}$	循环小数	recurring decimal	$2.4\dot{2}3\dot{1}$ 即 2.423 123 123 1…	记于循环节的首末位数字上方

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
%	百分号	sign of percent	例如,5%即百分之五,亦即 5/100	
‰	千分号	sign of permillage	例如,5‰即千分之五,亦即 5/1000	
( )	圆括号	parenthesis	例如,5−(2+1)	亦称小括号
[ ]	方括号	square brackets	例如,3[5−(2+1)]	亦称中括号
{ }	花括号	brace	例如,2{3[5−(2+1)]−2}	亦称大括号
——	括线	vinculum	例如,$(\overline{8-2}\times 3)\div 2$,以 8−2 的差乘 3…	相当于小括号
∞	无穷大	infinity	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ 即函数$\frac{1}{x}$当 x 趋近于 0 时无限地增大	亦称无限或无限大
$a\overset{\text{def}}{=}b$	a 以 b 为定义	a is definition equal to b	例如,$a\overset{\text{def}}{=}b^n$ 即用 b^n 代表 a	亦可用$a\overset{\text{d}}{=}b$或$a:=b$表示
d	公差	common difference	等差数列任相邻两项之差(后项减前项)均相等,这个共同的差 d 称为此数列的公差	
q	公比	common ratio	等比数列任相邻两项之比(后项比前项)均相等,这个共同的比 q 称为此数列的公比	
S_n	数列前 n 项和	sum of the first n terms	例如,等差数列 $a,a+d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$,前$n$项之和 $S_n=na+\frac{n(n-1)}{2}d$	
Δ	判别式	discriminant	例如,实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$	利用 Δ 可判别该方程根的状况
$E(x),[x]$	整数部分记号	symbol of integral part	表示不超过 x 的最大整数.例如,$[1.2]=1$, $[-1.2]=-2$	亦记为 ent(x),来自法文 entier
$\{x\}$	小数部分记号	symbol of decimal part	$\{x\}$只能是 0 或正的纯小数,它满足:$0\leqslant\{x\}<1$,例如,$\{1.2\}=0.2$, $\{-1.2\}=0.8$	亦称分数部分记号,亦记为$\{x\}$
$\sum\limits_{n\leqslant x}$	整数求和号	sign of integers summation	对不超过 x 的正整数 n 求和.例如,$\sum\limits_{n\leqslant 6}n=1+2+3+4+5+6=21$	
$\sum\limits_{n<x}$	整数求和号	sign of integers summation	对小于 x 的正整数 n 求和.例如,$\sum\limits_{n<6}n=1+2+3+4+5=15$	
$\sum\limits_{p\leqslant x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对不超过 x 的素数 p 求和.例如,$\sum\limits_{p\leqslant 7}p=2+3+5+7=17$	
$\sum\limits_{p<x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对小于 x 的素数 p 求和.例如,$\sum\limits_{p<7}p=2+3+5=10$	
$\sum\limits_{d\mid n}$	除数求和号	sign of divisor summation	对 n 的所有不同因子 d 求和.例如,$\sum\limits_{d\mid 6}d=1+2+3+6=12$	
$\prod\limits_{d\mid n}$	除数求积号	sign of divisor mensuration	对 n 的所有不同因子 d 求积.例如,$\prod\limits_{d\mid 6}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$	
$\sum\limits_{p\mid n}$	素除数求和号	sign of prime divisor summation	对 n 的所有不同素因子 p 求和.例如,$\sum\limits_{p\mid 6}=2+3=5$	
$\prod\limits_{p\mid n}$	素除数求积号	sign of prime divisor mensuration	对 n 的所有不同素因子 p 求积.例如,$\prod\limits_{p\mid 6}=2\cdot 3=6$	
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	总和号	sign of grand sum	求对 x_i 从 x_1 连加到 x_n 的总和,即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$	
$\prod\limits_{i=1}^{n}$	连乘号	sign of continued product	求对 x_i 从 x_1 连乘到 x_n 的积,即 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1x_2\cdots x_n$	
$a\equiv b(\bmod n)$	模 n 同余	congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数相同	
$a\not\equiv b(\bmod n)$	模 n 不同余	non-congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数不同	
$\underline{\equiv}$	恒等同余	identity congruence	$f(x)\underline{\equiv}g(x)\ (\bmod p)$,即整系数多项式 f 与 g 的对应系数均模 p 同余	亦可记为 $f(x)\equiv_x g(x)(\bmod p)$
$\underline{\not\equiv}$	不恒等同余	non-identity congruence	$f(x)\underline{\not\equiv}g(x)\ (\bmod p)$,即 $f(x)$与 $g(x)$的对应系数均模 p 不同余的	亦可记为 $f(x)\not\equiv_x g(x)(\bmod p)$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$a^{-1}(\mathrm{mod}\,n)$	模 n 的逆	inverse of modulo-n	与 a 相乘后用 n 除余数是 1 的整数. 例如, $2^{-1}(\mathrm{mod}\ 5)=3$, $3^{-1}(\mathrm{mod}\ 4)=3$	这是一个同余类
$r \bmod n$	模 n 的同余类	congruence class of modulo-n	包含 r 的模 n 的同余类. 例如, $2(\mathrm{mod}\ 5)=\{\cdots,-8,-3,2,7,12,\cdots\}$	亦称剩余类
$\mathbf{Z}_n$	剩余类环	residue class ring	模 n 的全体剩余类对类的加法和乘法组成的环	
$\left(\frac{a}{p}\right)$	勒让德符号	Legendre's symbol	$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次剩余}(\mathrm{mod}\,p)\\ -1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次非剩余}(\mathrm{mod}\,p)\\ 0, & p\mid a\end{cases}$	p 为奇素数, a 为整数
$\left(\frac{a}{m}\right)$	雅可比符号	Jacobi's symbol	$\left(\frac{a}{m}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a}{p_i}\right)$ ($m=p_1p_2\cdots p_k$, p_i 为素数, $(m,a)=1$)	当 m 为奇素数时即勒让德符号
$\left(\frac{d}{m}\right)$	克罗内克符号	Kronecker's symbol	$\left(\frac{d}{m}\right)=\prod_{r=1}^{v}\left(\frac{d}{p_r}\right)$ (d 为非平方数, p_r 为素数, $m=\prod_{r=1}^{v}p_r$)	
$d(n)$	除数函数	divisor function	$d(n)$ 表示 n 的正因子的个数. 例如, $d(12)=6$	亦可用 $\tau(n)$ 或 $T(n)$ 表示
$d_k(n)$	广义除数函数	generalized divisor function	$d_k(n)=\sum_{n_1n_2\cdots n_k=n}1=\sum_{m\mid n}d_{k-1}(m)$	
$\sigma(n)$	除数和	sum of divisor	表示正整数 n 的所有正因数的和. 例如, $\sigma(6)=1+2+3+6=12$	亦可用 $S(n)$ 表示
$\sigma_\lambda(n)$	广义除数和	generalized sum of divisor	$\sigma_\lambda(n)=\sum_{d\mid n}d^\lambda$. 例如, $\sigma_3(4)=1^3+2^3+4^3$	$\sigma_0(n)=d(n)$ 为除数函数; $\sigma_1(n)=\sigma(n)$ 为除数和
$P(n)$	正因数之积	product of positive divisors	$P(n)=\prod_{d\mid n}d$. 例如, $P(6)=1\cdot2\cdot3\cdot6=36$	
$\Phi(n)$	欧拉函数	Euler's function	表示小于正整数 n, 且与 n 互素的正整数的个数. 例如, $\Phi(6)=2$	亦可记为 $\varphi(n)$
$\mu(n)$	默比乌斯函数	Möbius function	$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n \text{ 能被素数的平方整除时},\\ (-1)^r, & \text{当 } n \text{ 为 } r \text{ 个相异素数之积时}\end{cases}$	
$\Lambda(n)$	曼戈尔特函数	Von Mangoldt function	$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n \text{ 为素数 } p \text{ 的正乘方};\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\Lambda_1(n)$	曼戈尔特函数 I	Von Mangoldt function I	$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{若 } n \text{ 是一素数的 } m(>0) \text{ 次乘方},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\omega(n)$	相异素因数个数	different prime factor numbers	例如, $\omega(24)=\omega(2^3\cdot3)=1+1=2$, 即 24 有 2 个不同的素因数	
$\Omega(n)$	素因数个数	prime factor numbers	表示正整数 n 的所有素因数的个数. 例如, $\Omega(24)=\Omega(2^3\cdot3)=3+1=4$	
$\lambda(n)$	刘维尔函数	Liouville's function	$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$	
$\pi(x)$	素数个数符号	symbol of the prime numbers	表示不超过正实数 x 的素数个数. 例如, $\pi(10)=4$	
$\chi(n)$	特征函数	characteristic function	对模 m 之一特征 $\chi(n)$ 仅在 $(n,m)=1$ 时有定义, 且 $\chi(1)\neq0$; 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$, 则 $\chi(a)=\chi(b)$; $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$	若 $(n,m)>1$ 时, 则 $\chi(n)=0$
$p(n)$	整数分拆函数	integral partition function	把正整数 n 分成若干个正整数的和, 称为 n 的一种分拆, 以 $p(n)$ 表示分拆的种数. 例如, $p(4)=5$. 若限定分拆中的加数不超过 r, 则这类分拆数以 $p_r(n)$ 表示	
$\bar{U}(n)$	奇分拆	odd partition	$\bar{U}(n)$ 为把 n 分为奇数个互异数之和的分拆数	
$E(n)$	偶分拆	even partition	$E(n)$ 为把 n 分为偶数个互异数之和的分拆数	
$N(\mathfrak{m})$	模 $\mathfrak{m}$ 的矩	moment of module $\mathfrak{m}$	将所有线性型依 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ 分类, 则分类的个数称为模 $\mathfrak{m}$ 的矩. 若模 $\mathfrak{m}$ 对应于方阵 A, 则 $N(\mathfrak{m})=\det A$	
$\vartheta(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\vartheta(x)$ 表示对不大于 x 的素数的对数求和	
$\psi(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p$, 而 $\Lambda(n)$ 为曼戈尔特函数	

符 号	中文名称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
$\zeta(s)$	黎曼ζ函数	Riemann ζ-function	$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$,其中$s$为实部大于1的复数	
∂°	多项式的次数	degree of a polynomial	$\partial^\circ f=n$,表示多项式$f(x)$的次数为n	亦可表示成$\deg f=n$
max( )	最大数	maximum number	$\max(a,b,\cdots,c)$即$a,b,\cdots,c$中的最大数	
min( )	最小数	minimum number	$\min(a,b,\cdots,c)$即$a,b,\cdots,c$中的最小数	
$\overset{L}{=\!=}$	左结合	left association	$A\overset{L}{=\!=}B$表示存在模方阵U,使$A=UB$,并称方阵B左结合于方阵A	
$[\ ,\cdots,\ ]$	有限连分数	finite continued fraction	$[a_0,a_1,\cdots,a_N]=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots+\frac{1}{a_N}$,即有理数化成的连分数	无理数化成的连分数为无限连分数
Δ	判别式	discriminant	$\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$表示$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的判别式;$\Delta=\Delta(R(\theta))$表示代数数域$R(\theta)$的判别式	
ind n	指数	index	如果$n\equiv g^a(\mathrm{mod}\ m)$,则称$a$为$n$对于模$m$且以$g$为底的指数,记为$a=\mathrm{ind}_g n$,简记为ind n	亦可用$\delta_m(a)$表示a对模m的指数
$x^k\equiv n(\mathrm{mod}\,p)$	k次剩余	residue of degree-k	$x^k\equiv n(\mathrm{mod}\,p)(p\times n)$有解,则$n$称为$p$的$k$次剩余	
$d(A)$	A的密率	density of A	$d(A)=\inf\limits_{n\geqslant 1}\frac{A(n)}{n}$,即集$A$的密率为$A(n)/n$(一切$n\geqslant 1$)的下确界	$A(n)$表示A中不大于n的正整数的个数
$\delta^*(A)$	A的渐近密率	asymptotic density of A	$\delta^*(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$,即集$A$的渐近密率为$A(n)/n$当$n\to\infty$的极限值	
$\left(\frac{a,b}{m}\right)$	和数符号	sum symbol	设$m>1,a,b$都是整数,令$\left(\frac{a,b}{m}\right)=\sum\limits_x e^{2\pi i\frac{ax+bx'}{m}}\left(x'\equiv\frac{1}{x}(\mathrm{mod}\ m)\right)$,其中$x$是通过与模$m$简化的剩余系	
$(a,b)=\pm 1$	希尔伯特符号	Hilbert symbol	设k^*表示域k的单位群,又$a,b\in k^*$,则$(a,b)=\begin{cases}1, & 若\ z^2-ax^2-by^2=0\ 在\ k^3\ 中有非零解,\\ -1, & 其他情形\end{cases}$	
$\{a,b,c\}$	二元二次型	2-ary quadratic form	用$\{a,b,c\}$表示二元二次型$ax^2+bxy+cy^2$,其中a,b,c为整数	
$g(k)$	小$g(k)$	small $g(k)$	设k为一固定正整数,对任意正整数n,不定方程$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$总有解的最小正整数$s$	
$G(k)$	大$G(k)$	large $G(k)$	设k为一固定正整数,对充分大的正整数n,不定方程$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$总有解的最小正整数$s$	
$S(\alpha)$	α的迹	trace of α	设$R(\theta)$为n次代数域,$\alpha^{(1)}=\alpha\in R(\theta),\alpha^{(k)}(k=2,3,\cdots,n)$为$\alpha$的共轭数,则$S(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$称为$\alpha$的迹	
$N(\alpha)$	α的范数	norm of α	$N(\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$为$\alpha$的范数	亦称矩
$N(k)$	等幂和	sum of equal powers	使$x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$的最小正整数$s$记为$N(k)$,其中$y_1,y_2,\cdots,y_s$不是$x_1,x_2,\cdots,x_s$的重组	
$M(k)$	强等幂和	strong sum of equal powers	使$x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$,并使$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_s^{k+1}\neq y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\cdots+y_s^{k+1}$的最小正整数$s$用$M(k)$表示	
$S(a,\chi)$	特征和	character sum	$S(a,\chi)=\sum_{n=1}^{m}\chi(n)e^{2\pi ian/m}$	
$S(n,m)$	高斯和	Gauss sum	$S(n,m)=\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi ix^2n/m}$,其中$(n,m)=1$	
$F(s)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$	亦称$F(s)$为$f(n)$的演成函数
M_p	梅森数	Mersenne number	形如2^p-1(p为素数)的素数称为梅森数,记为M_p.例如,$M_2=3,M_3=7$	
F_n	费马数	Fermat number	形如$2^{2^n}+1$的数称为费马数,例如,$F_2=17$	F_5不是素数

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\equiv$	重模同余式	double module congruence expression	$f(x) \equiv g(x)$ (modd $p,\varphi(x)$) 表示系数以素数 p 为模,又 $\varphi(x)$ 整除 $f(x)-g(x)$,称为重模同余式	亦称重模为双模
$Q(x)$	无平方因子数	number of noninclusion square divisor	不超过 x 的无平方因子数的个数. 例如,$Q(10)=6$	
$V(n)$	同余式的解数	number of solutions of congruence expression	同余式 $x^2 \equiv -1$ (mod n) 之解数	
$R(x)$	圆内整点数	number of circle lattice point	表示圆 $u^2+v^2 \leqslant x$ 内的整点数	
$F(x)$	朗伯级数	lambert series	$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{x^n}{1-x^n}$ 称为朗伯级数	
$[\alpha_1,\cdots,\alpha_q]$	理想数	ideal number	$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数,$R(\vartheta)$ 中形如 $\eta_1\alpha_1+\eta_2\alpha_2+\cdots+\eta_q\alpha_q$($\eta_i$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数)的整数所成之集合为理想数	
$[1]$	单位理想数	unit ideal number	表示单扩域 $R(\vartheta)$ 中全体整数组成之集合	
$\tau(n)$	拉马努金函数	Ramanujan function	表示 cusp 型 $F(s)=(2\pi)^{-12}\triangle(Z)$ 的第 n 个系数. 称 $n \mapsto \tau(n)$ 为拉马努金函数	
$L(s,\chi)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	表示狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\chi(m)n^{-s}$,其中 $m \geqslant 1$ 为整数,χ 为 mod m 特征	
$G_k(\Gamma)$	艾森斯坦级数	Eisenstein series	设 Γ 是 C 格,则称 $G_k(\Gamma)=\sum_{\gamma\in\Gamma}'\frac{1}{\gamma^{2k}}$ 为指标是 k 的艾森斯坦级数,其中 $\sum'$ 表示对 Γ 的非零元素求和	
$\theta_\Gamma(Z)$	塞他函数	theta function	$\theta_\Gamma(Z)=\sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i Z(x\cdot x)}$ 称为二次模 Γ 的塞他函数	

逻辑与集合(Logic & Sets)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\forall$	全称量词	universal quantifier	$\forall x \in A$, $p(x)$,表示命题 $p(x)$ 对于每一个属于 A 的 x 为真	亦可简记为 $\forall x$, $p(x)$
$\exists$	存在量词	existential quantifier	$\exists x \in A$, $p(x)$,表示存在 A 中的元素 x 使 $p(x)$ 为真	$\exists^1$(或 $\exists!$)表示存在一个且只有一个元素使 $p(x)$ 为真
$\wedge$	合取符号	conjunction sign	$p \wedge q$ 即 p 和 q	
$\vee$	析取符号	disjunction sign	$p \vee q$ 即 p 或 q	
$\neg$	否定符号	negation sign	$\neg p$ 即 p 的否定,非 p	
$\rightarrow,\Rightarrow$	推断符号	implication sign	$p\rightarrow q$, $p \Rightarrow q$ 表示:若 p 则 q, p 蕴含 q	亦可用 $q \leftarrow p$, $q \Leftarrow p$
$\leftrightarrow,\Leftrightarrow$	等价符号	equivalence sign	$p \leftrightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ 表示 $p \Rightarrow q$,且 $q \Rightarrow p$, 即 p 等价于 q	亦称充分必要条件
$\models$	真值符号	truth sign	$\models A \rightarrow B$ 表示由命题 A 推出命题 B 为真	
$\models\!\dashv$	可逆真值符号	invertible truth sign	$A \models\!\dashv B$(或 $\models A \leftrightarrow B$)表示 $A \models B$,且 $B \models A$,意即 A 真则 B 真,且 B 真则 A 真	亦即 A,B 具有相同的真值
$\vdash$	断定符号	predicative sign	$p \vdash q$ 表示 q 随 p 来,p 是或从一公理而来,或 p 是同语反复	
$\in$	属于	belongs to	$x \in A$ 表示 x 属于 A,即 x 是集 A 的一个元(素)	集合 A 可简称为集 A
$\not\ni$	不包含	noninclusion	$A \not\ni x$ 表示集合 A 不包含元素 x	
$\bar{\in}$, $\notin$	不属于	nonmembership	$y \notin A$, $y \bar{\in} A$ 表示 y 不属于 A,y 不是集 A 的一个元(素)	亦可记为 $A \bar{\ni} y$,或 $A \not\ni y$
$\{,\cdots,\}$	集合号	sign of set	$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示由诸元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的集	亦可用 $\{x_i, i\in I\}$,这里 I 表示指标集
$\{\mid\}$	集合号	sign of set	$\{x\in A \mid p(x)\}$ 即使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元(素)组成的集	亦可用 $\{x \in A: p(x)\}$ 表示集

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\varnothing$	空集	the empty set	$\varnothing$表示没有元(素)的集	$\varnothing$是丹麦文字母，读"欧"
$\mathbf{N}$	非负整数集	nonnegative integers set	$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$	$\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\cdots\}$
$\mathbf{Z}$	整数集	integers set	$\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$	$\mathbf{Z}_+$表示正整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集	rational numbers set	由全体有理数组成的集合	$\mathbf{Q}_+$表示正有理数集合
$\mathbf{R}$	实数集	real numbers set	由全体实数组成的集合	$\mathbf{R}^n$表示n维实空间
$\mathbf{C}$	复数集	complex numbers set	由全体复数组成的集合	$\mathbf{C}^n$表示n维复空间
$\mathbf{R}^+$	正实数集	positive real numbers set	由全体正实数组成的集合	$\mathbf{R}^-$表示负实数集
$\mathbf{R}^*$	扩张的实数集	expanding system of the real numbers	把两个理想点$+\infty,-\infty$加进实数系所得的集	亦称扩张的实数系
$\subsetneqq$	真包含于	proper inclusion	$B\subsetneqq A$表示A的子集B真包含于A	亦可用$\subset$表示
$\subseteq$	包含于	inclusion	$B\subseteq A$表示B是A的子集，即B的每一个元素均属于A	
$\not\subset$	不包含于	noninclusion	$C\not\subset A$表示C不是A的子集	亦可用$\nsubseteq$表示
$\supsetneqq$	真包含	proper inclusion	$A\supsetneqq B$表示A真包含B	
$\supseteq$	包含	inclusion	$A\supseteq B$表示B是A的子集	亦可用$\supset$表示
$\not\supset$	不包含	noninclusion	$A\not\supset C$表示A不包含C	亦可用$\nsupseteq$表示
$\cup$	并集，和集	union	$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$，称为$A$与$B$的并集，或称为$A$与$B$的和集	
$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$	诸并集	unions	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，即诸集$A_1,A_2,\cdots,A_n$的并集	亦可用$\bigcup_{i=1}^{n}$，$\bigcup\limits_{i\in I}$或$\bigcup_{i\in I}$等记法，其中I表示指标集
$\cap$	交集	intersection	$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$，称为$A$与$B$的交集	
$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	诸交集	intersections	$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，即诸集$A_1,A_2,\cdots,A_n$的交集	亦可用$\bigcap_{i=1}^{n}$，$\bigcap_{i\in I}$或$\bigcap\limits_{i\in I}$等记法，其中I为指标集
$\dotplus$	集合的直和	direct sum of sets	若集合A与B不相交，则A与B的并集$A\cup B$称为A与B的直和，记为$A\dotplus B$	亦称不交并
$\dot{\sum}$	广义直和	generalized direct sum	若f是标号集A到集族$\{X\}$的一一对应$(f:a\to X_a)$，且当$a\neq b$时，总有$X_a\cap X_b=\varnothing$，则记为$\dot{\sum\limits_{a\in A}}X_a$，并称为集族$\{X\}$的广义直和	
$\setminus$	差集	difference	$A\setminus B$表示所有属于A但不属于B的元的集，称为A与B的差集	
$\triangle$	对称差	symmetric difference	$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$称为$A,B$的对称差	亦可记为$A\dot{-}B$或$A\ominus B$
U	全集	total set	$A=U$表示A为全集，即全集中所有元素x都属于A	亦可用IΩV表示
$\complement$	余集，补集	complementary set	$\complement_U A=\{x\mid x\in U\wedge x\notin A\}$，即全集$U$中子集$A$的余集或补集	亦可用$\complement A$表示．曾用A^c表示
$\langle\ ,\ \rangle$	有序偶，偶	ordered pair	$\langle a,b\rangle$表示a,b的有序偶	亦可记为(a,b)
$\langle,\cdots,\rangle$	有序元组	elements of ordered	$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$称为有序$n$元组	亦可记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
$\times$	笛卡儿积	Cartesian product	$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$称为$A$与$B$的笛卡儿积或卡氏积,	$\overbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}^{n个}$记为$A^n$．亦称直积
card	基数，势	cardinal number	card(A)表示集A中诸元的个数，称为A的基数或势	亦可记为$\overline{\overline{A}}$或$\lvert A\rvert$
$\aleph_0$	基数，势	cardinal number	$\aleph_0$表示无限可数集的基数	是希伯来文第一个字母，读Alef
$\sim$	对等	equivalent	$A\sim B$表示集A与集B对等	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\mapsto$	元素间的对应	correspond between to elements	在映射下元素间的对应符号，例如，整数集的映射 $\varphi(x)=x^2$ 可表示成 $\varphi: x\mapsto x^2$	
$\to$	映射	mapping	$f: A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$ 表示 f 是集 A 到集 B 的映射	
f^{-1}	逆映射	inverse mapping	设 f 是集 A 到 B 的一个双射，则用 f^{-1} 表示 B 到 A 的 f 的逆映射. $f^{-1}f$ 是 A 的恒等映射	亦可用 f_l^{-1}, f_r^{-1} 表示左、右逆映射
R	关系	relation	aRb 表示 a 与 b 有关系 R	
$\not R$	无关系	non-relation	$a\not R b$ 表示 a 与 b 没有关系 R	亦称关系补
$\overline{R}$	反关系	anti-relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $\overline{R}=X\times Y-R$ 为 R 的反关系	亦称否定关系、补关系
R^{-1}	逆关系	inverse relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $R^{-1}\subseteq Y\times X$ 为 R 的逆关系	当且仅当 xRy 时有 $yR^{-1}x$
[ ]	等价类	equivalent class	设 R 是集合 A 上的等价关系，$x\in A$，则称 $[x]_R$ 为 R 的等价类，它是由 A 中那些能使 xRy 成立的所有元素 y 组成的子集	
/	商集	quotient set	设 R 为集 A 的一个等价关系，则商集 A/R 即由一切等价类组成的集合	
$\mathscr{P}$ 或 $\mathfrak{B}$	幂集	power set	用 $\mathscr{P}A$ 或 $\mathfrak{B}A$ 表示集 A 的所有子集组成的集，称为 A 的幂集	
$f\vert_B$	收缩，限制	restriction	设 f 是集合 A 上的一个映射，$B\subseteq A$，则 f 也可看成 B 上的一个映射称为 f 在 B 上的限制或收缩	
$\circ$	合成，复合	composite	$g\circ f$ 表示映射 f 和 g 的合成或复合	
limsup	上极限	superior limit	limsup A_n 表示序列 A_n 的上极限	亦可记为$\overline{\lim}$
liminf	下极限	inferior limit	liminf A_n 表示序列 A_n 的下极限	亦可记为$\underline{\lim}$
lim	极限	limit	$\lim A_n$ 表示序列 A_n 的极限	
$\varinjlim$	归纳极限	inductive limit	$\varinjlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的归纳极限	
$\varprojlim$	射影极限	projective limit	$\varprojlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的射影极限	
dom	定义域	domain of definition	若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则称 A 为映射 f 的定义域，记为 dom f	亦可记为 D(f)
ran f	值域	range	$f(A)=\mathrm{ran}f$. 若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则 $f(A)$ 为映射 f 的值域	亦可记为 R(f) 或记为 ran(f)
fld	关系域	domain of a relation	$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$，即关系 R 的域等于 R 的定义域和值域的并集	
codom	陪域	co-domain	若 f 是从集 A 到集 B 的一个映射，则称集 B 是映射 f 的陪域，记为 $B=\mathrm{codom}f$	亦称上域
lmf	像	image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，用 Imf 表示 A 中所有元素的像构成的集，称为 f 的像集	
$f^{-1}(\ )$	全原像	all inverse image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，B 中元素 b 的全体逆像组成的集合 $f^{-1}(b)$，称为 b 的全原像	亦称原像
$\leqslant$	弱序关系	weak order relation	$a\leqslant b$, $a,b\in A$ 即集 A 存在弱序关系	
$<$	强序关系	strong order relation	$a<b$, $a,b\in A$ 即集 A 存在强序关系	
I_A	恒等映射	identity mapping	表示集 A 的每个元素都对应到自身的映射，称为恒等映射	亦称恒等对应. 亦可记为 e_A 或 id A
$\hookrightarrow$; em	嵌入映射	embedding	$A\hookrightarrow B$ 或 emAB 表示 $A\to B$ 的嵌入映射	
n_R	自然映射	natural mapping	n_R 把 A 的一个元素 a 映射成它的等价类 $[a]_R$	亦称正规映射，典则映射
$ub_R(B)$	B 的上界	upper bound of B	$a=ub_R(B)$ 表示 a 是 B 的上界，B 是半序集的子集	
$Lb_R(B)$	B 的下界	lower bound of B	$a=Lb_R(B)$ 表示 a 是 B 的下界，B 是半序集的子集	
ord	一切序数的类	class of every ordinals	表示一切序数构成的类	
cf	共尾度	cofinality	cf α 表示 α 的共尾度	
$K^{<k}$	强极限基数	strong cardinal number of the limit	$K^{<k}=\lim\limits_{\alpha\to K}K^\alpha$，其中 K 为正则的强极限基数	

几何与拓扑(Geometry & Topology)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\overline{AB}$, AB	[直]线段 AB	segment	表示自点 A 到点 B 的直线段	"直"常略去不写
∠	角	angle	∠AOB 表示角 AOB	
∡	有向角	directed angle	∡ AOB 表示有向角 AOB	
°	度	degree	21°表示 21 度	
′	分	minute	21°13′表示 21 度 13 分	
″	秒	second	21°13′23″表示 21 度 13 分 23 秒	
⌢	弧	arc	$\overset{\frown}{AB}$表示弧 AB. 当$\overset{\frown}{AB}$为圆弧时,可用$\overset{\frown}{AB}°$ 表示圆弧 AB 对应的度数	
rad	弧度	radian	rad1, radπ 分别表示 1 弧度、π 弧度	rad1≈57°17′45″; radπ=180°
‾	密位	mil	例如,25‾, 274‾表示 25 密位,274 密位	常用在军事数学中度量角的单位符号
π	圆周率	ratio of the circumference of a circle to its diameter	π≈3.141 592 6…表示圆周长与直径的比	英文名称亦可简记为 number π
Rt∠	直角	right angle	等于 90°的角称为直角,记为 Rt∠=90°	曾经记为 rt∠或R∠
△	三角形	triangle	△ABC 表示 A,B,C 三点连线构成的三角形	
⊿	直角三角形	right angle triangle	⊿ ABC 表示直角三角形 ABC	亦可记为 Rt△ABC
▱	平行四边形	parallelogram	▱$ABCD$ 表示平行四边形 $ABCD$	
▭	矩形	rectangle	▭$ABCD$ 表示矩形 $ABCD$	
□	正方形	square	□$ABCD$ 表示正方形 $ABCD$	
⏢	四边形	tetragon	⏢ $ABCD$ 表示任意四边形 $ABCD$	任意二字常略去
◇	菱形	rhombus	◇$ABCD$ 表示菱形 $ABCD$	又名 diamond
⊙	圆	circle	⊙O 表示圆 O	
r,R	半径	radius	从圆心到圆周上任一点的线段称圆的半径,常用 r 或 R 表示	
d,D	直径	diameter	过圆心作任意一条直线,圆内部分的线段称该圆的直径,常用 d 或 D 表示	
C	周长	perimeter	若圆的半径为 r,则周长 $C = 2\pi r$	
//	平行	parallel	AB//CD 表示线段 AB 平行于 CD	
∦	不平行	non-parallel	AB∦CD 表示直线 AB 与 CD 不平行	
$\underline{//}$	平行且相等	parallel and equal	$AB\underline{//}CD$ 表示线段 AB 与 CD 平行且相等	
⊥	垂直	perpendicular	AB⊥CD 表示线段 AB 垂直于 CD	
≌	全等	congruence	△ABC≌△DEF 表示△ABC 全等于△DEF	
∽	相似	similar	△ABC∽△DEF 表示△ABC 相似于△DEF	
∵	因为	because	∵代表"因为"二字	
∴	所以	therefore	∴代表"所以"二字	
⊻	等角多边形	equiangular polygon	⊻$AB\cdots E$ 表示等角多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
⊥̲	等边多边形	equilateral polygon	⊥̲$AB\cdots E$ 表示等边多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
α-MN-β	二面角	dihedral angle	平面 α 和平面 β 相交于直线 MN 所成的角	
P-$AB\cdots E$	棱锥	pyramid	顶点是 P、底面多边形是 $AB\cdots E$ 的棱锥	
$AB\cdots E$-$A'B'\cdots E'$	棱柱	prism	上底面是多边形 $AB\cdots E$,下底面是多边形 $A'B'\cdots E'$ 的棱柱	长方体、棱台的记法和此记法类似

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
S	面积	area	$S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积；$S_{球冠}$ 表示某个球冠的面积	
V	体积	volume	$V_{P\text{-}ABC}$ 表示三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积；$V_{拟柱体}$ 表示某个拟柱体的体积	
$\vert\ \vert$	距离	distance	$\vert AB\vert$ 表示 A,B 两点间的距离或 AB 线段的长	亦可用 AB 或小写的拉丁字母表示
sin	正弦	sine	$\sin x$ 为 x 的正弦函数	
cos	余弦	cosine	$\cos x$ 为 x 的余弦函数	
tan	正切	tangent	$\tan x$ 为 x 的正切函数	亦可用 $\text{tg}\, x$ 表示
cot	余切	cotangent	$\cot x$ 为 x 的余切函数	亦可用 $\text{ctg}\, x$ 表示
sec	正割	secant	$\sec x$ 为 x 的正割函数	
csc	余割	cosecant	$\csc x$ 为 x 的余割函数	曾用 $\text{cosec}\, x$ 表示
vers	正矢	versedsine	$\text{vers}\, x$ 为 x 的正矢函数	$\text{vers}\, x=1-\cos x$，现已不用
covers	余矢	coversedsine, versedcosine	$\text{covers}\, x$ 为 x 的余矢函数	$\text{covers}\, x=1-\sin x$，现已不用
$\sin^m x$	正弦函数的 m 次方	sine function to the m-th power	$\sin^3 x$ 为 $\sin x$ 的立方	其他三角函数和双曲函数的 m 次方的表示法类似
$\arcsin x$	反正弦主值	principal value of inverse sine	$y=\arcsin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\text{Arcsin}x$
$\arccos x$	反余弦主值	principal value of inverse cosine	$y=\arccos x\ (0\leqslant y\leqslant\pi)$	一般值表示成 $\text{Arccos}\, x$
$\arctan x$	反正切主值	principal value of inverse tangent	$y=\arctan x\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\text{Arctan}x$
$\text{arccot}\, x$	反余切主值	principal value of inverse cotangent	$y=\text{arccot}\, x\ (0<y<\pi)$	一般值表示成 $\text{Arccot}x$
$\text{arcsec}\, x$	反正割主值	principal value of inverse secant	$y=\text{arcsec}\, x\left(0\leqslant y\leqslant\pi,\ 且\ y\neq\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\text{Arcsec}x$
$\text{arccsc}\, x$	反余割主值	principal value of inverse cosecant	$y=\text{arccsc}\, x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\ 且\ y\neq 0\right)$	一般值表示成 $\text{Arccsc}x$
T	周期	periodic	$f(x+T)=f(x)$，T 为最小正周期. $T=\pi$ 表示以 π 为周期	
x,y,z	笛卡儿坐标	Cartesian coordinates	$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$ 与 $\boldsymbol{e}_z$ 及 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 组成范化正交右手坐标系	
ρ,φ,z	圆柱坐标	cylindrical coordinates	圆柱坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, z=z$	
r,θ,φ	球面坐标	spherical coordinates	球面坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$	
$\boldsymbol{a},\vec{a}$	向量或矢量 $\boldsymbol{a}$	vector $\boldsymbol{a}$	常用 x,y,z 或 x_1,x_2,x_3 表示笛卡儿坐标，则 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，简记为 $\boldsymbol{a}=x_i\boldsymbol{e}_i$	印刷常用黑体 $\boldsymbol{a}$，书写常用 $\vec{a}$ 表示
$\vert\boldsymbol{a}\vert$	向量的模（绝对值，长度）	module of a vector (absolute value, length)	向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$ 的模依次记为 $\vert\overrightarrow{M_1M_2}\vert$，$\vert\boldsymbol{a}\vert$，$\vert\vec{a}\vert$. 向量的大小称为向量的模	
$\overrightarrow{AB}$	向量 AB	vector AB	表示始点为 A，终点为 B 的向量或有向线段	
$\boldsymbol{e}_a$	单位向量	unit vector	$\boldsymbol{e}_a=a/\vert a\vert$ 表示 a 方向的单位向量	亦称幺向量
$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$	在笛卡儿坐标轴方向的单位向量	unit vector on the Cartesian axial coordinates	$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 表示直角标架；$[O;\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z]$ 表示仿射标架，其中 O 为坐标原点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为基向量	
$\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	Cartesian component of a vector $\boldsymbol{a}$	设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$，其中 $\boldsymbol{a}_x=x\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{a}_y=y\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{a}_z=z\boldsymbol{e}_z$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$	标量积或数量积、内积、点积	scalar product, inner product, dot product	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum a_ib_i$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=\vert\boldsymbol{a}\vert^2$	亦可表示成 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$、$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$、$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	向量积、外积、叉积	vector product, exterior product, cross product	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所决定平面的向量，且 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ 三矢量成右手系. $\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，其中 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角	
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$	混合积	mixed product	向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积定义为由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量为邻边组成的平行六面体的有向体积	亦可表示成 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
k	斜率	gradient	直线 $y=kx+b$ 中，k 称为斜率	
e	离心率	eccentricity	在圆锥曲线的极坐标方程中，$r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$，$e$ 称为离心率	亦称偏心率.
a	半长轴	semimajor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，a 称为半长轴	
b	半短轴	semiminor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，b 称为半短轴	
$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$	向量空间的张量积	tensor product of vector spaces	若 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量空间，$\boldsymbol{W}$ 是 m 维向量空间，则 $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$ 是 $n\times m$ 维向量空间的二阶张量	
$\boldsymbol{T}_s^r$	张量	tensor	设 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量空间，其对偶空间的二阶张量为 $\boldsymbol{V}^*$，张量积 $V_s^r=\underbrace{\boldsymbol{V}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{V}}_{r}\otimes\underbrace{\boldsymbol{V}^*\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{V}^*}_{s}$ 的元素称为 (r,s) 型张量	
$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$	群的张量积	tensor product of groups	设 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 是群，$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}=F(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})/R(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ 称为 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 的张量积	
$T_{xx},T_{xy},\cdots,T_{zz}$; T_{ij}	二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的笛卡儿分量	Cartesian component of tensor $\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}=T_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+T_{xy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y+\cdots,T_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x$ 为分张量，	
$\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$	二阶张量积或并矢积	tensor product dyadic product	两个二阶张量 T 与 S 的张量积 $T\otimes S$ 是具有分量 $T_{ij}S_{kl}$ 的四阶张量	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$	两个二阶张量的内积	inner product	$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$ 表示两个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的内积. 它是具有分量 $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S})_{ik}\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}S_{jk}$ 的二阶张量	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$	矢量对张量的内积	inner product	$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$ 表示二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的内积. 它是具有分量 $(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a})_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}a_j$ 的矢量	
$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$	标量积	scalar product	$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$ 表示两个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的标量积. 它具有标量 $(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S})\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_i\sum\limits_j T_{ij}S_{ji}$	
$\overline{\overline{\wedge}}$	透视对应	perspective correspondence	点列 $s(A,B,C,\cdots)$ 与线束 $S(a,b,c,\cdots)$ 是透视的，记为 $s(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}S(a,b,c,\cdots)$	
$\overline{\wedge}$	射影对应	projective correspondence	若 $[\pi]$ 与 $[\pi']$ 是两个一维基本形，则它们之间的射影对应记为 $[\pi]\overline{\wedge}[\pi']$	
$\div$	分离	separation	点 A,B 与点 C,D 是分离的，记为 $A,B\div C,D$	
$\overline{\overline{\cdot\cdot}}$	不分离	nonseparation	点 A,B 与点 C,D 是不分离的，记为 $A,B\ \overline{\overline{\cdot\cdot}}\ C,D$	
J, $*$	联	join	设 $s=v_0\cdots v_m$ 是 K 的生成复形，$t=w_0\cdots w_n$ 是 L 的生成复形，令 $s*t=v_0\cdots v_mw_0\cdots w_n$，则所有单形 $s*t$ 和它们的面组成的集合是一个单纯复形，称为 K 和 L 的联，记为 $K*L$	亦可记为 $J(K,L)$ 或 KJL
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$	向量函数	vector function	曲线或曲面的参数方程写成向量的形式.	亦称矢函数
$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t)$	导向量	derived vector	$\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ 是向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导向量，有时以弧长 s 为参数的导向量表示成 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$	亦称微商或导矢
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	微分	differential	设 $\boldsymbol{r}(t)$ 同上，若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 处的改变量 $\Delta r=A\Delta t+o(\Delta t)$（$A$ 为固定向量），则称 A 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点的微分	
$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$	n 阶导向量	n-th derivative	$\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)$ 在 t 点的导向量称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点的 n 阶导向量	
$\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}$	n 阶微分	n-th differential	$\mathrm{d}^{n-1}r$ 在 t 点的微分称为 $r(t)$ 在 t 点的 n 阶微分	
$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x_i}$	偏导向量	partial derived vector	若 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$，则 $\boldsymbol{r}_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 的偏导向量	亦称偏导矢

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\boldsymbol{T}(s)$	单位切向量	unit tangent vector	$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$表示曲线 C 在一点处的单位切向量，其中 s 为曲线 C 的弧长参数	亦可表示成 $\boldsymbol{\alpha}(s)$
$\boldsymbol{N}(s)$	主法向量	principal normal vector	$\boldsymbol{N}(s)=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\rvert}$ 表示曲线 C 在一点处的主法向量，$\boldsymbol{N}(s)$指向曲线 C 凹入的方向	亦可表示成 $\boldsymbol{\beta}(s)$
$\boldsymbol{B}(s)$	副法向量	binormal vector	$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$表示曲线 C 在一点处的副法向量	亦称从法向量．表示成 $\gamma(s)$
$\{P;\boldsymbol{T};\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$	活动标架	Frenet frame	$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ 依次构成右手系，它们构成一个标架，称为曲线 C 在 P 点的活动标架或弗雷内标架	
k	曲率	curvature	曲率 k 是表示曲线弯曲程度的量．曲率 k 越大，曲线弯曲程度越大，曲率小，曲线弯曲程度小	直线的曲率为 0
τ	挠率	torsion	挠率是表示空间曲线扭翘程度的量．挠率的绝对值大，曲线扭翘程度大，挠率的绝对值小，曲线扭翘程度小．平面曲线的挠率为 0	
$k_r(s)$	相对曲率	relative curvature	表示平面曲线弯曲程度和弯曲方向的量	
i_r	旋转指标	rotation index	$i_r=\frac{1}{2\pi}\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$ 表示平面闭曲线 C 的旋转指标，它是曲线 C 的切线像$(r=\boldsymbol{T}(s))$在单位圆周上环绕的圈数	若 C 是平面简单闭曲线，则 $i_r=\pm1$
$\boldsymbol{n}$	单位法向量	unit normal vector	曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,v)$ 上一点 $P(u,v)$ 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$	式中各量均在$(\boldsymbol{u},v)$取值．$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$ 依序构成右手系
E,F,G,g_{ij}	曲面的第一类基本量	fundamental quantities of first kind for surfaces	对曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第一类基本量分别为 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v.$ $g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\quad(i,j=1,2)$	$E>0,\ G>0,$ $EG-F^2>0$
Ⅰ	曲面的第一基本形式	first fundamental form of a surface	$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$	第一基本形式是正定的，它决定曲面的内蕴性质
L,M,N,L_{ij}	曲面的第二类基本量	fundamental quantities of second kind for surfaces	对曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第二类基本量分别为 $L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},N=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}.$ $L_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2)$	
Ⅱ	曲面的第二基本形式	second fundamental form of a surface	$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$	
k_n	法曲率	normal curvature	曲面 S 在 P 点沿方向 $\boldsymbol{a}$ 的法截线曲率可作为曲面在该点的法曲率 k_n	其绝对值相等
K_c	全曲率	total curvature	$K_c=\int_0^l k(s)\mathrm{d}s$ 表示曲线 C 的全曲率	
K_r	相对全曲率	relative total curvature	$K_r=\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$ 表示曲线 C 的相对全曲率	
K	总曲率	Gaussian curvature	$K=k_1k_2$ 表示曲面 S 在点 P 的弯曲情况．曲面上的点可按总曲率的符号进行分类．$K>0$ 的点是椭圆点，$K<0$ 的点是双曲点，$K=0$ 的点是抛物点	亦称高斯曲率．式中 k_1,k_2 为其对应的主曲率
H	平均曲率	mean curvature	表示曲面 S 在点 P 的平均曲率	亦称中曲率
e,f,g	曲面的第三类基本量	fundamental quantities of third kind for surfaces	对曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第三类基本量分别为 $e=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,f=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,g=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$	
Ⅲ	曲面的第三基本形式	third fundamental form of a surface	$\mathrm{III}=\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=e\mathrm{d}u^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g\mathrm{d}v^2$	
$[jk,i]$	第一类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the lst kind	$[jk,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$	亦可表示成 Γ_{jki}
$\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}$	第二类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the 2nd kind	$\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$	亦可表示成 $\Gamma^k_{ij}=g^{kl}\Gamma_{ijl}\Gamma^k_{ij}$，也称为联络系数
k_g	测地曲率	geodesic curvature	曲面 S 上的曲线 C 在某一点 P 的切平面上的投影线的曲率可作为曲线 C 的测地曲率	其绝对值相等
exp	指数映射	exponential map	指数映射 $\exp:T_P\rightarrow S$ 是曲面 S 上 P 的切平面 T_P 的切向量与曲面 S 上点的对应关系．若 $\boldsymbol{v}\in T_P$，过 P 沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向作测地线 C，在 C 上取点 M，使 $\overset{\frown}{PM}=\lvert\boldsymbol{v}\rvert$，则 $\exp\boldsymbol{v}=M$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
τ_g	测地挠率	geodesic torsion	在曲面S上过一点P作以单位切向量α为初始方向的测地线$C:u=u(s),v=v(s)$,测地线C在P点的挠率称为曲面S在P点关于α方向的测地挠率	$\tau_g=\left(\alpha,n,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\right)$
$\mathscr{N}$	高斯映射	Gauss map	以曲面S的单位法向量$\boldsymbol{n}(u,v)$作为向量函数,表示单位球面S^2,高斯映射$\mathscr{N}:S\to S^2$是曲面S与相应的球面S^2之间的对应关系	亦称曲面的球面表示
$\deg\mathscr{N}$	高斯映射度	Gauss mapping degree	$\deg\mathscr{N}=\frac{1}{2}\chi(S)$表示高斯映射度,它由曲面拓扑所决定,其中$\chi(S)$表示欧拉示性数	
$\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}$	坐标邻域	coordinate neighborhoods	U_α是微分流形M的开集,φ_α是微分流形U_α到$\mathbb{R}^n$的开子集的同胚	
C^∞	C^∞相容	C^∞ compatible	$U\cap V\neq\varnothing,\varphi\circ\psi^{-1}$和$\psi\circ\varphi^{-1}$是$\mathbb{R}^n$的开子集$\varphi(U\cap V)$和$\psi(U\cap V)$的$C^\infty$微分同胚.称$(U,\varphi)$和$(V,\psi)$是$C^\infty$相容的	
L_XY	李导数	Lie derivative	$(L_XY)_p=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}((\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p)$ $=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}\|_{t=0}$	
R^l_{ijk}	黎曼曲率张量	Riemannian curvature tensor	$R^l_{ijk}=\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk}-\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik}+\Gamma^l_{ih}\Gamma^h_{jk}-\Gamma^l_{jh}\Gamma^h_{ik}$和$R_{ijkl}=R^h_{ikl}g_{K}$均称为黎曼曲率张量	亦称第二类克里斯托费尔符号
Ric	里奇曲率张量	Ricci curvature tensor	$\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum_i R(e_i,X,Y,e_i)$,即里奇曲率张量是一个(0,2)型张量场.由对称性知 $\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Ric}(Y,X)$	
C_{ijkl}	共形曲率张量	conformal curvature tensor	$C_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}\{R_{ik}g_{il}-R_{il}g_{il}+R_{jl}g_{ik}-R_{jk}g_{il}\}+\frac{s}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{il}-g_{il}g_{jk})$	亦称外尔张量
P^l_{ijk}	射影曲率张量	projective curvature tensor	$P^l_{ijk}=R^l_{ijk}-\frac{1}{n-1}(\delta^l_kR_{ij}-\delta^l_jR_{ik})$称为射影曲率张量	
d	外微分算子	exterior differential operator	对于任意$\omega_1,\omega_2\in A^p(M)$:1.$\mathrm{d}(\omega_1+\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1+\mathrm{d}\omega_2$;2.$\mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge\mathrm{d}\omega_2$;3.若$f\in A^0(M)$.则$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0$	若$f\in A^0(M)$,则$\mathrm{d}f$恰是f的微分
$Z^p(M,R)$	光滑p次闭形式空间	space of smooth p-closed differential form	$Z^p(M,R)=\{\omega\|\omega$是流形$M$上的光滑$p$次闭形式$\}$表示光滑$p$次闭形式空间	
$B^p(M,R)$	光滑p次恰当形式空间	space of smooth p-exact differential form	$B^p(M,R)=\{\omega\|\omega$是流形$M$上的光滑$p$次恰当形式$\}$表示光滑$p$次恰当形式空间	
$H^p(M,R)$	德·拉姆上同调群	de Rham cohomology group	表示流形M的第p个德·拉姆上同调群.$H^p(M,R)$中的元素称为同调类	亦称第p个德·拉姆上同调空间
$\int_M\omega$	形式积分	integral of forms	$\int_M\omega=\sum_i\int_M f_i\circ\omega$	
∇	仿射联络	affine connection	设M是n维C^∞流形,$\Gamma(TM)$为M上的C^∞向量场空间.M上的仿射联络是指映射$\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$,满足四条公理	
$\nabla_{X_p}Y$	共变导数	covariant derivative	令$P\in M,X_P\in T_P(M).Y$为M上的C^∞向量场.定义$\nabla_{X_p}Y=(\nabla_XY)_P$	亦称协变微商
$K(X,Y)$	截面曲率	sectional curvature	对任意两个不共线的切向量$X,Y\in T_PM$, $K(X,Y)=-\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-[g(X,Y)]^2}$	当$\dim M=2$时,$K(X,Y)$恰好是M在P点的高斯曲率
$R(X,Y)$	曲率算子	curvature operator	$R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_YZ)-\nabla_Y(\nabla_XZ)$ $-\nabla_{[X,Y]}Z\ (X,Y,Z\in\Gamma(TM))$	
$\triangle$	拉普拉斯-贝尔脱拉米算子	Laplace-Bertrami operator	$\triangle f=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$	
$S_p(2n)$	辛群	symplectic group	设(V,ω)是一个辛空间,(V,ω)的自同构的全体构成群$\mathrm{GL}(V)$的一个子群记为$\mathrm{SP}(V,\omega)$,特别地,标准辛空间(K^{2n},ω)的自同构群记为$S_p(2n,K)$.若$K=R$,则把$S_p(2n,K)$简记为$S_p(2n)$,并称为$2n$维辛群	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$E(f)$	能量	energy	设 M,N 为黎曼流形，$f:M\to N$ 为光滑映射，f 的能量定义为：$E(f)=\frac{1}{2}\int_M \lvert \mathrm{d}f\rvert^2 * 1$，其中 $*1$ 为 M 的体积元	
$e(f)$	能量密度	energy density	符号条件同上，$e(f)=\frac{1}{2}\lvert \mathrm{d}f\rvert^2$	
∂M	流形的边界	boundary of a manifold	带边流形 M 中全体边界点的集	
T_PM	切空间	tangent space	微分流形 M 在 P 点处的全体切向量的集记为 T_PM，称为 M 在 P 处的切空间	T_PM 是实 $\dim M$ 维向量空间
f_{*P},T_Pf	在一点处的切映射	tangent map at a point	$f:M\to N$ 是可微映射，$f_{*P}:T_PM\to T_{f(P)}N$ 称为可微映射 f 在 $P\in M$ 处的切映射	若 f 是微分同胚，则 $\forall P\in M,f_{*P}$ 是同构
TM	流形的切丛	tangent bundle of manifold	(TM,π,M) 称为微分流形 M 的切丛，简称 TM 为 M 的切丛	
Tf	切映射	tangent map	设 $f:M\to N$ 是流形 M 到 N 的可微映射，$Tf:TM\to TN$ 称为 f 的切映射	若 $f:M\to N$ 是微分同胚，则 $Tf:TM\to TN$ 亦然
$\xi\oplus\eta$	向量丛的惠特尼和	Whitney sum of vector bundles	ξ,η 分别是 n 维，k 维向量丛，$\tilde{\pi}:E(\xi)\oplus E(\eta)\to B$ 为自然投射. $(E(\xi)\oplus E(\eta),\tilde{\pi},B)$ 是 $n+k$ 维向量丛，称为 ξ 与 η 的惠特尼和	亦可看成积丛 $\xi\times\eta$ 由对角映射 $f:B\to B\times B$ 决定的诱导丛
$\chi(\xi)$	欧拉数	Euler number	设 $\xi=(E,\pi,M)$ 是 n 维定向向量丛，则零截面的自交数称为向量丛 ξ 的欧拉数	当 $\xi=TM$ 时，$\chi(\xi)$ 就是 M 的欧拉示性数
$U^{\perp}(t)$	正交分量	orthogonal component	表示分向量场 $U(t)$ 与测地线 γ 正交的分量	
$T_x^{\perp}M$	法空间	normal space	表示 M 在 x 处的法空间，正交于切空间 T_xM	
$\nabla^{\perp}$	法联络	normal connection	若 M 是黎曼流形，则 $\nabla^{\perp}$ 表示 M 上的法联络	
$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$	正交投影	orthogonal projection	表示 $\tilde{R}(X,Y)Z$ 在 M 的法丛 $N(M)$ 上的投影. 式中 $\tilde{R}$ 是 $\tilde{M}$ 的曲率张量	
(X,d)	度量空间	metric space	赋予度量 d 的集合 X 称为度量空间	亦称距离空间
$(X,\mathscr{T})$	拓扑空间	topological space	确定了拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合 X 称为拓扑空间	
$\bar{A}$, cl$A$	闭包	closure	包含 A 的所有闭集的交集称为 A 的闭包，它是包含 A 的最小闭集	
$b(A)$,BdA	边界	boundary	A 的全体边界点组成的集合称为 A 的边界	亦可记为 A^b,∂A
Int A,A^i	内部	interior	集 A 的全部内点组成的集合称为 A 的内部	亦可记为 $\mathring{A}$ 或 A°
$U(a,\delta)$	邻域	neighborhood	$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径	
$\mathring{U}(a,\delta)$	去心邻域	deleted neighborhood	$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$ 称为点 a 的去心的 δ 邻域	
$\mathscr{U}(x)$	邻域系	neighborhood system	点 x 的邻域的全体称为 x 的邻域系	
$X\vee Y$	拓扑空间的楔和	wedge sum of topological spaces	设 X,Y 为两个带有基点的拓扑空间. x_0,y_0 分别为 X,Y 的基点. 子空间 $X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y\subset X\times Y$ 称为 X 和 Y 的楔和	
$X\wedge Y$	拓扑空间的碎积	smash product of topological spaces	商空间 $X\times Y/X\vee Y$ 称为 X,Y 的碎积	
$V_{n,k}$	斯蒂弗尔流形	Stiefel manifold	$V_{n,k}=\{(e_1,e_2,\cdots,e_k)\mid e_i\in R^n,e_i\cdot e_j=\delta_{ij}.1\leqslant i,j\leqslant k\}$ 在 $R^n\times\cdots\times R^n$($k$ 个)的诱导拓扑之下，$V_{n,k}$ 为一个紧致流形，称为斯蒂弗尔流形	
$B_{\varepsilon}(a)$	开球	open ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0,B_{\varepsilon}(a)=\{x\in X\mid d(a,x)<\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 开球	亦可记为 $B(a,\varepsilon)$
$\bar{B}_{\varepsilon}(a)$	闭球	closed ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0,\bar{B}_{\varepsilon}(a)=\{x\in X\mid d(a,x)\leqslant\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 闭球	亦可记为 $\bar{B}(a,\varepsilon)$
$\delta(M)$	直径	diameter	设 M 为度量空间 (X,d) 的子集，定义 $\delta(M)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in M\}$，称为集 M 的直径	亦可记为 diam$M$
$A^d,d(A)$	导集	derived set	集 A 的一切聚点的集称为 A 的导集	
A^e,ext(A)	外部	exterior	集 A 的全体外点组成的集合称为 A 的外部，记为 A^e 或 ext(A)	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\mathrm{Ind}X$	大归纳维数	large inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间 X,Y 同胚，则 $\mathrm{Ind}X=\mathrm{Ind}Y$	亦称布劳威尔 - 切赫维数
$\mathrm{ind}\ X$	小归纳维数	small inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间 X,Y 同胚，则 $\mathrm{ind}X=\mathrm{ind}Y$	亦称门杰 - 乌雷松维数
$\varprojlim\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$	逆极限	inverse limit	逆系 $\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$ 的逆极限	亦可记为 $\varprojlim X_\alpha$
$\varepsilon(A)$	凸包络	convex envelope	X 内所有包含 A 的凸集之交称为 A 的凸包络	
$\simeq$	同伦	homotopy	若 $f,g:X\to Y$ 都是连续映射，$I=[0,1]$，且存在连续映射 $H:X\times I\to Y$，使得对所有 $x\in X$，$H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$，则 f,g 称为同伦映射，记为 $f\simeq g:X\to Y$	这里 H 称为从 f 到 g 的一个同伦或伦移
$\approx$	同胚	homeomorphism	$f:X\to Y$ 是连续映射，且 f 的逆映射连续，则称 f 为同胚，亦称空间 X 与 Y 同胚，记为 $X\approx Y$	亦称拓扑映射、拓扑变换
$\Vert\ \Vert$	范数	norm	$\Vert x\Vert$ 表示赋范空间中 x 的范数或实空间中向量 α 的赋值. 记为 $\Vert\alpha\Vert$	欧氏空间的向量 x 的长度概念的推广
E^n	n 维欧氏空间	n-dimensional Euclidean space	$E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$，规定度量 $d=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	亦可记为 R^n
P^n	n 维射影空间	n-dimensional projective space	域 F 上的 n 维射影空间常记为 FP^n，简记为 P^n，当 F 是实数域时记为 $\mathbb{R}P^n$；当 F 是复数域时记为 $\mathbb{C}P^n$. 若 F 是四元数域 $\mathbb{H}$. 记为 $\mathbb{H}P^n$	
S^n	n 维球面	n-dimensional sphere	$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:\lvert x\rvert=r\}$	
T^n	n 维环面	n-dimensional torus	圆 S^1 自身的 n 次拓扑乘积. 记为 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$	
$C_q(\ ,\ )$	链群	chain group	K 是复形，$C_q(K,Z)$ 称为 K 的 q 维链群	亦可简记为 $C_q(K)$
H_n	n 维同调群	n-dimensional homology group	$H_n(K,A)=Z_n(K,A)/B_n(K,A)$ 表示复形 K 的以 A 为系数群的 n 维同调群	
H^n	n 维上同调群	n-dimensional cohomology group	$H^n(X,A)=Z^n(K,A)/B^n(K,A)$ 表示复形 K 以 A 为系数群的 n 维上同调群	
$\check{H}^n$	n 维切赫上同调群	n-dimensional Čech cohomology group	$\check{H}^n(X)=\varinjlim H^n(N_\lambda)$ 表示 X 的 n 维切赫上同调群	
$\check{H}_n$	n 维切赫同调群	n-dimensional Čech homology group	$\check{H}_n(X)=\varprojlim H_n(N_\lambda)$ 表示 X 的 n 维切赫同调群	
π_n	n 维同伦群	n-dimensional homotopy group	$\pi_n(X)$ 是映射 $(S^n,s_0)\to(X,x_0)$ 的同伦类集合	
$\pi_{n+k}(S^n)$	稳定同伦群	stable homotopy group	悬垂同态 $E:\pi_{n+k}(S^n)\to\pi_{n+k+1}(S^{n+1})$，当 $n>k+1$ 时为同构，称为球面的第 k 个稳定同伦群	悬垂同态亦称同纬像同态
∂	边缘算子	boundary operator	∂c 表示 c 的边缘	
δ	上边缘算子	coboundary operator	δf 表示 f 的上边缘	
sq	斯廷罗德方形运算	Steenrod square	$Sq^i(x,y)=\sum_{j+k=i}Sq^j(x)Sq^k(y)$ 即 x 的斯廷罗德方形运算	
$\mathscr{P}$	斯廷罗德幂运算	Steenrod power	$\mathscr{P}_p^r(xy)=\sum_{i+j=r}\mathscr{P}_p^i(x)\mathscr{P}_p^j(y)$ 即 x 的斯廷罗德 p 次幂运算	亦可记为 St_p^r
$\smile$	上积	cup product	$z_1\smile z_2$ 表示 z_1 和 z_2 的上积	
$\frown$	卡积	cap product	$z_1\frown z_2$ 表示 z_1 和 z_2 的卡积	
$\omega\wedge\eta$	外积	exterior product	表示微分形式 ω,η 的外积. $\omega\wedge\eta=A_{k+l}(\omega\otimes\eta)$. 其中 A_{k+1} 是反对称化算子，ω 是 k 次矢量，η 是 l 次矢量，$\omega\wedge\eta$ 是 $(k+l)$ 次外矢量	
mesh	复形的网径	mesh diameter of a complex	单纯复形 K 中诸单形直径的最大值称为复形的网径，即 $\mathrm{mesh}=\max_{\sigma\in K}\{\Vert x-y\Vert\mid x,\ y\in\sigma\}$	
deg	映射度	degree of mapping	设 $f:S^n\to S^n$ 是映射，α 是 $H_n(S^n)$ 的生成元，则 $f_*(\alpha)=\rho\alpha$. 其中整数 ρ 称为 f 的映射度. 记为 $\rho=\deg(f)$	亦称拓扑度，又称布劳威尔度
rel	相对于	relative	rel A 表示相对于 A	

符 号	中 文 名 称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
C	连续函数空间	continuous function space	$C[a,b]$表示$[a,b]$上连续函数的全体	
L^p	p 次可积函数空间	integrable function space of order p	$L^p(\Omega,\mathscr{B},\mu)(\infty>p\geqslant 1)$是测度空间$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$上可测而且 p 次可积函数的全体	
C^n	C^n 类函数空间	C^n class function space	$C^n[a,b](\infty>n\geqslant 1)$是$[a,b]$上 n 阶连续可微函数的全体	
C^∞	C^∞类函数	function of class C^∞	对于所有 r,函数 f 是 C^r 类的.亦称 f 是光滑的	
C^∞	C^∞映射	C^∞ mapping	W,N 是微分流形,$F:W\to N,\psi\circ F\circ\varphi^{-1}P:\varphi(U)\to\psi(V)$ 是 C^∞ 的.U,V 分别是 W,N 的坐标邻域	
L^∞	本性有界可测函数	essentially bounded function space	$L^\infty(\Omega,\mathscr{B},\mu)$表示 Ω 上(关于 μ)本性有界可测函数全体	
T_2	豪斯多夫空间	Hausdorff space	设 X 为拓扑空间,若 X 的任意两个不相同的点都有不相交的开邻域则称 X 为豪斯多夫空间	亦称 T_2 空间
R^∞	希尔伯特空间	Hilbert space	设 $x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots).x,y\in R^\infty$,定义 $d=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$,则$(R^\infty,d)$称为希尔伯特空间	
Y^X	函数空间	functional space	表示所有连续函数 $f:X\to Y$ 的集合	
$N_{K,U}$	紧致开拓扑	compact open topology	$N_{K,U}=\{f:f(K)\subset U\}$,其中 $K\subset X$ 紧致,$U\subset Y$ 为开集	
e_a^n	n 维胞腔	cell of dimension n	e_a^n 是空间 X 的子集	
CW	CW 复形	CW-complex	一个空间 X 中的 CW 复形是满足闭包有限和诱导弱拓扑两项条件的胞腔复形	
$L(p,q)$	透镜空间	lens spaces	$L(p,q)=s^3/Zp$	
WHE	弱同伦等价公理	weak homotopy equivalence axiom	若 $f:X\to Y$ 是弱同伦等价关系,则 $f_*:k_n(X,x_0)\to k_n(Y,f(x_0))$ 是同构	
$\widetilde{KO}(X)$	$\widetilde{KO}$群	$\widetilde{KO}$-group	表示 X 上实向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{K}(X)$	$\widetilde{K}$ 群	$\widetilde{K}$-group	表示 X 上复向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{KS}_p(X)$	$\widetilde{KS}_p$ 群	$\widetilde{KS}_p$-group	表示 X 上四元向量丛的所有稳定等价类集合	
$K(s)$	K 群	K-group	表示由半群的同态 $\varnothing:S\to K(s)$ 诱导的 abelian 群	
$KO(X)$	KO 群	KO-group	$KO(X)\cong\widetilde{KO}(X)\oplus KO(\{x_0\})$	
$K(X)$	K 群	K-group	$K(X)\cong\widetilde{K}(X)\oplus K(\{x_0\})$	
$KS_p(X)$	KS_p 群	KS_p-group	$KS_p(X)\cong\widetilde{KS}_p(X)\oplus KS_p(\{x_0\})$	
$M_1\sim M_2$	流形的协边	cobordism of manifolds	设 M_1,M_2 都是紧致(无边)微分流形,若存在紧致带边流形 W 与微分同胚 $\partial W\cong M_1\times(0)\cup M_2\times(1)$,则称 M_1 与 M_2 协边	
MSO_n	定向协边群	oriented bordism group	表示所有定向协边类的集合	亦称 Thom 群
MO_n	非定向协边群	unoriented bordism group	表示所有非定向协边类的集合	亦称 Thom 群
MSO_*	分次交换环	graded commutative ring	$MSO_*=\sum MSO_n$	
MO_*	分次交换代数	graded commutative algebra	$MO_*=\sum MO_n$	
$MSO_n(X,A)$	定向奇异协边群	oriented singular bordism group	表示(X,A)中定向奇异协边类的集合	
$MSO_*(X,A)$	分次右模	graded right module	$MSO_*(X,A)=\sum MSO_n(X,A)$	
$MSO_n(Pt)$	一点的协边群	bordism group of a point	$MSO_n(Pt)=MSO_n$	
$\widetilde{MSO}_n(X)$	约化群	reduced group	表示增广同态 $\varepsilon_*:MSO_n(X)\to MSO_n(pt)$ 的核	
$MO_n(X,A)$	非定向奇异协边群	unoriented bordism group	表示(X,A)中非定向奇异协边类的集合	
$MO_*(X,A)$	分次模	graded module	$MO_*(X,A)=\sum MO_n(X,A)$	

代数学(Algebra)

符 号	中 文 名 称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
max	最大或极大	maximum	$y_{\max}=a$ 表示 y 的最大(极大)值等于 a	
min	最小或极小	minimum	$y_{\min}=b$ 表示 y 的最小(极小)值等于 b	
!	阶乘	factorial	$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$	规定 $0!=1$
!!	双阶乘	double factorial	$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)$; $(2n+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n+1)$	
$(a)_n$	始于 a 的 n 个实数之积	product of the n-real numbers by the beginning at a	例如, $(\sqrt{2})_4=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)$	a 为实数,n 为自然数
C_n^p 或 $\binom{n}{p}$	二项式系数,组合数	binomial coefficient, combinatorial numbers	表示从 n 个元素中每次取出 p 个元素的所有不同组合的总数	
P_m^n 或 A_m^n	选排列	selections permutation	$P_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}=m(m-1)\cdots(m-n+1)$	
P_m 或 A_m	全排列	all permutation	$P_m=m!$	
H_m^n	重复组合	combination with repetition	$H_m^n=C_{m+n-1}^n=\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$	
$\cup_m^n$	有重复的排列	permutation with repetition	$\cup_m^n=m^n$,即从 m 个相异元素中每次取出 n 个元素允许重复排列的排列总数	亦可记为 $\|\|_m^n=m^n$
R_m^n	环排列	circular permutation	$R_m^n=\dfrac{P_m^n}{n}=C_m^n(n-1)!\ (m\leqslant n)$. 当 $m=n$ 时,$R_m^m=(m-1)!$	亦可用 $R_{m平}^n$ 和 $R_{m立}^n$ 分别表示平面环排列与空间环排列
i	虚数单位	imaginary unit	$\mathrm{i}=\sqrt{-1}\ (\mathrm{i}^2=-1)$	电工技术中常用 j
z	复数记号	symbol of complex number	$z=a+b\mathrm{i}$ 即实部为 a,虚部为 b 的复数	
$\mathrm{Re}\, z$	z 的实部	real part of z	$z=a+b\mathrm{i}\ (\mathrm{Re}\, z=a)$	
$\mathrm{Im}\, z$	z 的虚部	imaginary part of z	$z=a+b\mathrm{i}\ (\mathrm{Im}\, z=b)$	
$\|z\|$	z 的模	modulus of z	$z=a+b\mathrm{i}\ (\|z\|=\sqrt{a^2+b^2})$	亦可用 mod z 表示
$\arg z$	z 的辐角	argument of z	$\varphi=\arg z$ 即复数 z 的辐角为 φ,$0<\varphi\leqslant 2\pi$	
$\bar{z}$	z 的共轭复数	conjugate complex number of z	设 $z=a+b\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 称为 z 的共轭复数	亦可用 z^* 表示
$\mathrm{sgn}\, z$	z 的单位模函数	signum z	$\mathrm{sgn}\, z=\begin{cases} z/\|z\| & (z\neq 0),\\ 0 & (z=0)\end{cases}$	
$\det A$	方阵的行列式	determinant of a square matrix	设 A 为方阵,则 $\det A$ 表示 A 的行列式	A 的行列式亦可用 $\|A\|$ 表示
$\\|A\\|$	范数	norm	矩阵 A 的范数为 $\\|A\\|=(\mathrm{Tr}(AA^{\dagger}))^{\frac{1}{2}}$	范数有各种定义
$A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$	矩阵	matrix	$A_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列的矩阵,$(a_{ij})_{m\times n}$ 表示 (i,j) 元素是 a_{ij} 的 m 行 n 列矩阵	
diag{…} 或[…]	对角矩阵	diagonal matrix	表示主对角线上元素为 $d_{11},d_{12},\cdots,d_{nn}$,其余元素全为零的方阵	
I 或 E	单位矩阵	unit matrix	表示主对角线上的元素都是 1,其他元素都是零的方阵,用 I 或 E 表示,称为单位矩阵	
A^{-1}	方阵 A 的逆	inverse of the square matrix A	设方阵 A 的行列式 $\|A\|\neq 0$,则 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$,其中 I 为单位方阵	
A^{T} 或 A'	A 的转置矩阵	transposed matrix of A	把矩阵 A 的行换成同序数的列,得到的新矩阵,称为 A 的转置矩阵	亦可表示成 $\tilde{A}$
$A\geqslant 0$	非负矩阵	nonnegative matrix	实矩阵 A 中每个元素都是非负的	
$A>0$	正矩阵	positive matrix	实矩阵 A 中每个元素都是正的	
α^*	不增向量	nonincreasing vector	设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个实向量. 若 $a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列且满足 $a_1^*\geqslant a_2^*\geqslant\cdots\geqslant a_n^*$,则称 $\alpha\triangleq(a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*)$ 是 α 的不增向量	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\prec$	优于	major than	设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个非负实向量,如果$a_1^*\leqslant b_1^*,\cdots,a_1^*+a_2^*+\cdots+a_{n-1}^*\leqslant b_1^*+b_2^*+\cdots+b_{n-1}^*$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,则称$\boldsymbol{\beta}$优于$\boldsymbol{\alpha}$,记为$\boldsymbol{\alpha}\prec\boldsymbol{\beta}$	
Per A	积和式	formula of sum of products	A是$m\times n$复矩阵,$m\leqslant n$,$\mathrm{Per}\,A=\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{m}a_{i\sigma(i)}$称为$A$的积和式,其中$\sum$是对$\{1,2,\cdots,m\}$到$\{1,2,\cdots,n\}$的一切映射$\sigma$求和	
$\sigma(A)$	A的元素的和	sum of elements of A	表示矩阵A的所有元素之和	
$\rho(A)$	谱半径	spectral radius	设A为n阶复矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为其全部特征根,则$\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|\lambda_i\|$称为$A$的谱半径	
(i,j)	(i,j)元素	(i,j) element	表示矩阵或行列式第i行第j列交叉位置上的元素	亦称(i,j)分量
A_{ij}	代数余子式	algebraic complement minor	在一个行列式中,(i,j)元素的代数余子式	
A^*	伴随矩阵	adjoint matrix	由n阶方阵A的所有元素的代数余子式A_{ij}为元素所构成的n阶方阵(A_{ij}置于第j行第i列交叉位置上)	亦可用$\tilde{A}$或 adj A表示
$\bar{A}$	增广矩阵	augmented matrix	在一个线性方程组的系数矩阵中,再在最后增加由常数项构成的列,所得到的矩阵	亦可用$\tilde{A}$表示
E_{ij}	矩阵单位	matrix unit	(i,j)元素是1,其余元素全是零的矩阵. 其中,$i=1,2,\cdots,m$;$j=1,2,\cdots,n$	多指方阵
TrA	方阵的迹	trace of a square matrix	方阵A的主对角线上所有元素之和	亦称追迹
rank (A)	矩阵的秩	rank of matrix	矩阵(不一定是方阵)A中不等于零的子式的最大阶数称为A的秩,零矩阵的秩规定是零	亦可用$r(A)$、"秩A"或"A秩"表示
$M_n(F)$,$F^{n\times n}$ $F_{n\times n}$,F_n	n阶全阵环	total matrix ring of order n	域F上全体n阶方阵对方阵的加法和乘法组成的环	更一般地,可把域F换成任意环R
$A\otimes B$	矩阵的直积	direct product of matrices	设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{r\times s}$,则$mr\times ns$矩阵称为A与B的直积,记为$A\otimes B$	亦称 Kronecker 积.
$\dotplus$	方阵的直和	direct sum of a square matrix	设A为nk阶方阵.若A中表示成主对角线是k个n阶方阵$A_1,A_2,\cdots,A_k$,而其余块全为零的分块,则称A为$A_1,A_2,\cdots,A_k$的直和,记为 $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_k$	
$\bar{A}$	A的复共轭矩阵	complex conjugate matrix of A	将复矩阵A的每个元素换成共轭复数所得矩阵记为$\bar{A}$,称为矩阵A的复共轭矩阵	
$\overline{A^+}$, $\overline{A^H}$	埃尔米特共轭矩阵	Hermitian conjugate matrix	矩阵A的复共轭矩阵$\bar{A}$的转置矩阵$\overline{A'}$,称为A的埃尔米特共轭矩阵	
A^+, A^H	埃尔米特矩阵	Hermitian matrix	若n阶矩阵A与它的转置共轭矩阵$\overline{A'}$相等,则A称为埃尔米特矩阵	
δ_{ik}	克罗内克δ	Kronecker's delta	$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k),\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$	
$R[x]$	多项式环	polynomial ring	系数属于环R、未知量(不定元)为x的全体多项式,对于多项式的普通加法和乘法组成的环	如果R有单位元1,则规定$x^0=1$
$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	n元多项式环	n-ary polynomial ring	系数属于环R,未知量为$x_1,x_2,\cdots,x_n$(不相关不定元)的全体多项式,对于多元多项式的普通加法和乘法组成的环	如果环R有单位元1,则规定$x_i^0=1$,且$x_ix_j=x_jx_i$
deg $f(x)$	多项式的次数	degree of a polynomial	表示多项式$f(x)\neq0$中系数不为零的项中最高次项的次数	亦可用$\partial^\circ f(x)$表示
$\Phi_n(x)$	分圆多项式	cyclotomic polynomial	$\Phi_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\xi_i)$称为$n$次分圆多项式,其中$\xi_1$,$\xi_2,\cdots,\xi_{\varphi(n)}$为$n$次原根	
$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$	初等对称多项式	elementary symmetrical polynomials	例如,x_1,x_2,x_3的初等对称多项式为:$\sigma_1=x_1+x_2+x_3$,$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$,$\sigma_3=x_1x_2x_3$	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))$	最高公因式	highest common factor	首系数为1且次数最高的公因式	亦称最大公因式
$[f_1(x),\cdots,f_n(x)]$	最低公倍式	least common multiple	首系数为1且次数最低的公倍式	亦称最小公倍式

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(f(x),g(x))=1$	互素	coprime	多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式是 1	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$	两两互素	mutually prime	多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 中每两个都是互素的	
$F(x)$	有理分式域	rational traction field	域 F 上所有有理分式 $f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$ 关于有理分式的加法和乘法所组成的域	
$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	行向量	row vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一横行的 n 元向量	
$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$	列向量	column vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一纵列的 n 元向量	
$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$	反序数	inverted sequence number	n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中反序个数的总和. 例如 $\tau(231)=2,\tau(321)=3$	亦称逆序数
$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$	k 循环	k-cyclic(permutation)	即将 i_1 变为 i_2,i_2 变为 i_3,$\cdots$,i_k 变为 i_1,而别的元素不动的置换	
$\operatorname{sgn}\sigma$	置换的符号数	symbol number of permutation	设 σ 是一个置换,令 $\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases}+1 & (\sigma\text{是偶置换}),\\-1 & (\sigma\text{是奇置换})\end{cases}$	
(i,j)	对换	transposition	即将数码 i 变为 j,j 变为 i,而别的数码不动的置换	
K^n	向量空间	vector space	以 K 为基域的 n 元向量的集合 K^n. 称为 K 上的向量空间或线性空间	当 $K=R$ 时记为 R^n,当 $K=\mathrm{C}$ 时记为 C^n,有时表示成 V
$\alpha\perp\beta$	正交向量	orthogonal vectors	内积为零的两个向量	
$\alpha\perp W$	向量与子空间正交	a vector cut a subspace orthogonally	欧氏空 间中向量 α 与子空间 W 中每个向量都正交	亦可表示成 $(\alpha,W)=0$
$V_1\perp V_2$	正交子空间	orthogonal subspaces	V_1 与 V_2 是欧氏空间的两个子空间,若 V_1 中每个向量与 V_2 中每个向量都正交,则称 V_1 与 V_2 为正交子空间	
$W^\perp$	正交补	orthogonal complement	W 是欧氏空间 V 的一个子空间,$W^\perp$ 表示 V 中与 W 正交的一切向量所构成的子空间	
$\varphi\|W$	诱导变换	induced transformation	φ 是线性空间 V 的一个线性变换,子空间 W 对 φ 不变,则 φ 在 W 上的限制称为 φ 在 W 中的诱导变换	
$\leqslant$	子群	subgroup	$H\leqslant G$ 即 H 是群 G 的子群	亦可用 $<$ 表示子群或真子群
$\trianglelefteq$	正规子群	normal subgroup	$N\trianglelefteq G$ 即 N 是群 G 的正规子群	亦可用 $\triangleleft$ 表示正规子群或正规真子群
$\exp(G)$	有限群的指数	exponent of a finite group	设 G 是有限群,使 $a^n=1\ (\forall\ a\in G)$ 的最小正整数 n,称为 G 的方次数	
$O_p(G)$	极大正规 p 子群	maximal normal p-subgroup	群 G 的极大正规子群且为 p 子群	
M^G	正规闭包	normal closure	群 G 的包含子集 M 的最小正规子群	
M_G	子集的核	core of subset	设 M 是群 G 的子集,则 G 的包含在 M 中的所有正规子群生成的子群称为 M 的核	
$H\operatorname{char}G$	特征子群	characteristic subgroup	群 G 的在 G 的任意自同构下不变的子群	
$\mathrm{Syl}_p(G)$	西洛 p 子群	sylow p-subgroup	表示有限群 G 的一个西洛 p 子群,其中 p 是素数	
$S(G)$	基座	socle	群 G 的所有极小正规子群之积	
$\mathrm{Fit}(G)$	菲廷子群	Fitting subgroup	群 G 的所有幂零正规子群之积	
$R_u(G)$	幂幺根基	unipotent radical	代数群 G 的最大连通正规幂幺子群	
$R(G)$	代数群的根基	radical of an algebraic group	代数群 G 的最大连通正规可解子群	
$\otimes,\times$	群的直积	direct product of groups	$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 或 $G=G_1\otimes G_2\otimes\cdots\otimes G_n$ 表示群 G 是群 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的直积	群的直积有内外之分. 但在同构意义下可互相转化
$[X,Y]$	李括号	Lie bracket	$[X,Y]_p(f)=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H \ltimes K$	半直积	semidirect product	$G/\overline{N} \cong F$,其中 $\overline{N}$ 是与 N 同构的正规子群,$G = \overline{F}\overline{N}$,其中 $\overline{F}$ 是与 F 同构的子群.$\overline{F} \cap \overline{N} = \{e\}$ 此时 G 称为 N 与 F 的半直积	
$\mathrm{N}_G(H)$	正规化子	normalizer	群 G 中所有可与子群 H 交换的元素组成的集合	定义子集 S 的正规化子为 $\mathrm{N}_G(S)$
$\mathrm{C}_G(H)$	中心化子	centralizer	群 G 中所有与子群 H 的每个元素可交换的元素组成的集合	亦可表成 $\mathrm{Z}_G(H)$
C_a	元素的中心化子	centralizer of an element	设 a 是群 G 的一个元素,则 G 中所有与 a 可交换的元素组成的集合	亦可记为 $\mathrm{C}(a)$
$C(G)$	群的中心	center of a group	群 G 中与 G 的每个元素都可换的元素组成的集合	$C(G)$ 即 $\mathrm{C}_G(G)$. 亦可用 $Z(G)$ 表示
$[a,b]$	换位子	commutator	群 G 中二元素 a 与 b 的换位子是指 G 中元素 $a^{-1}b^{-1}ab$,即$[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$	换位子亦可定义为 $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$
G',(G,G)	换位子群	commutator group	由群 G 的一切换位子所生成的子群	亦称 G 的导出群或导群,并记为 $D(G)$
$[A,B]$	A 与 B 的换位子群	commutator subgroup of A and B	A,B 是群 G 的两个子集. 由所有换位子$[a,b]$($a \in A$, $b \in B$) 所生成的子群	
$(G:H)$, $[G:H]$ 或 $\|G:H\|$	子群的指数	index of a subgroup	子群 H 在群 G 中左(或右)陪集的个数. 例如, $H = \{(1),(12)\} \subset S_3$, $(S_3:H) = 3$	$(G:H)$可能有限,也可能无限
$\Phi(G)$	弗拉蒂尼子群	Frattini subgroup	群 G 的所有极大子群的交	
$S(M)$,S_M	对称群	symmetric group	集合 M 的全体双射变换对变换乘法所组成的群,M 可以是无限集	亦可表成 $\mathrm{sym}(M)$
S_n	n 次对称群	symmetric group of degree n	设 $\|M\| = n$,则 M 上的对称群即 M 的全体双射变换对变换乘法组成的群,称为 n 次对称群	一般取 $M = \{1,2,\cdots,n\}$
A_n	交错群	alternating group	n 次对称群 S_n 中全体偶置换组成的群,称为 n 次交错群,简称交错群	亦称交代群
p^{∞}	p^{∞} 型群	group of p^{∞}-type	$G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$,其中 G_n 为所有 p^n(p 是素数) 次单位根对乘法组成的群. 凡与 G 同构的群均称为 p^{∞} 型群	亦称半循环群
$C(p^{\infty})$	普吕费尔加群	prùfer additive group	设 p 是一固定素数,则所有形如 a/p^n(n 为任意正整数,a 为任意整数)的有理数组成加群,它对于其子群 Z(整数加群)的商群(或称差群)称为普吕费尔加群	
$\|a\|$	元素的阶	order of the element	设 a 是群的元素. 使 $a^n = e$ 的最小正整数 n,称为 a 的阶或周期. 若这样的 n 不存在,则称 a 的阶是 ∞ 或 0	亦可用 $\circ(a)$ 表示
$\|G\|$	群的阶	order of a group	群 G 中所包含的元素的个数. 例如,$\|S_3\| = 6$;整数加群 Z 的阶为 ∞,即 $\|\mathrm{Z}\| = \infty$	群 G 的阶也可记为 $\mathrm{Ord}(G)$, 而有限群 G 的阶也记为$[G:1]$
$\langle S\rangle$	由 S 生成的子群	generated subgroup by S	$\langle S\rangle$ 是群 G 中包含子集 S 的最小的子群,亦即 G 中包含 S 的所有子群的交. 亦用(S)表示	当 $S = \{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 时,常记为$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
$\mathrm{Tor}G$	扭子群	torsion subgroup	群 G 的所有有限阶元素组成的子群,称为 G 的扭子群	亦称周期子群或挠子群
$\langle a\rangle$	循环群	cyclic group	由一个元素生成的群称为循环群. 即 $\langle a\rangle = \{\cdots a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,\cdots\}$	亦可用(a) 表示循环群
C_n	n 阶循环群	cyclic group of order n	由一个阶为 n 的元素生成的循环群	
C_{∞}	无限循环群	infinite cyclic group	由一个阶为无限的元素生成的循环群记为 C_{∞}	
$\rightarrowtail$	单同态	monomorphism	若 φ 是模 A 到 B 同态映射,而且又是单射时,记为 $A \overset{\varphi}{\rightarrowtail} B$ 或 $\varphi{:}A \rightarrowtail B$	多用在同调代数中模的同态上
$\twoheadrightarrow$	满同态	surjective homomorphism	若 φ 是模 A 到 B 的同态映射,而且又是满射时,记为 $A \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} B$ 或 $\varphi{:}A \twoheadrightarrow B$	多用在同调代数中模的同态上
$\leftrightarrow$, $\rightleftharpoons$	双射	bijection	表示集合 M 与 $\overline{M}$ 间一个双射. 例如,设 $M = \{1,2,3,\cdots\}$,$\overline{M} = \{2,4,6,\cdots\}$,则 $\varphi{:}n \leftrightarrow 2n$ 是双射	
$\simeq$	同态	homomorphism	$G \overset{\varphi}{\simeq} \overline{G}$ 表示 φ 是群 G 到群 $\overline{G}$ 的一个同态. 有时也简记为 $G \simeq \overline{G}$	在环或其他代数系也有类似说法

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\cong$	同构	isomorphism	$G\cong\overline{G}$，表示群 G 与群 $\overline{G}$ 同构，即群 G 到群 $\overline{G}$ 存在一个保持运算的双射	对环、域、模等代数系的同构，亦用符号 $\cong$，$\backsimeq$ 或 $\simeq$ 表示同构
a^{φ}	元素的像	image of an element	φ 是集合 A 到 B 的一个映射，$a\in A$. 元素 a 在映射 φ 之下的像，一般用 $\varphi(a)$ 表示. 亦用 a^{φ} 或 $a\varphi$ 表示	
G_a	稳定子群	stable subgroup	设 G 是 n 元集 $\Omega=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上的置换群，$a\in\Omega$，则 $G_a=\{g\mid g\in G,a^g=a\}$，即 G 中一切使 a 不动的置换组成的集合	G_a 是群 G 的一个子群
a^G	像的集合	set of image	设 G 是 n 元集 $\Omega=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上的置换群，$a\in\Omega$，则 $a^G=\{a^g\mid g\in G\}$	a^G 是 Ω 的一个子集，且 $\|G\|=\|G_a\|\cdot\|a^G\|$
End G	自同态半群	endomorphism semigroup	群 G 的全体自同态对变换的乘法组成的半群	亦可记为 $E(G)$
Aut G	自同构群	automorphism group	群 G 的全体自同构对变换乘法组成的群	亦可简记为 $A(G)$
Inn$G$	内自同构群	inner automorphism group	G 是群，$a\in G,\tau_a:x\to axa^{-1}$ 是 G 的一个内自同构. G 的全体内自同构组成一个群，称为 G 的内自同构群	亦可简记为 $I(G)$. 也把 axa^{-1} 写成 $a^{-1}xa$
Out(G)	外自同构群	group of outer automorphisms	群 G 的自同构群 Aut(G) 对于 G 的内自同构群 Inn(G) 的商群，称为 G 的外自同构群	
$R(G)$	右正则表示	right regular representation	G 为群，G 上一切置换 $\tau_g=\begin{pmatrix}x\\xg\end{pmatrix}$ $(g\in G)$ 组成的集合，称为群 G 的右正则表示	$R(G)$ 是 G 上对称群的子群
Hol$G$	全形	holomorph	$S(G)$ 为群 G 上的对称群，$R(G)$ 为 G 的右正则表示，$R(G)$ 在 $S(G)$ 中的正规化子称为群 G 的全形	
$\mathrm{GL}_n(F)$，$\mathrm{GL}(n,F)$	一般线性群	general linear group	域 F 上全体 n 阶可逆方阵对乘法组成的群，称为域 F 上的一般线性群，它与域 F 上的 n 维空间 V 的全体可逆线性变换组成的乘群 GL(V) 同构，故 GL(V) 亦称一般线性群	
$\mathrm{PGL}_n(F)$	射影一般线性群	projective general linear group	域 F 上 n 次一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 关于其中心所得的商群，称为 F 上射影一般线性群	
$\mathrm{SL}_n(F)$，$\mathrm{SL}(n,F)$	特殊线性群	special linear group	表示域 F 上行列式等于 1 的全体 n 阶方阵对乘法组成的群	$\mathrm{SL}_n(F)$ 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的正规子群
$\mathrm{PSL}_n(F)$	射影特殊线性群	projective special linear group	特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(F)$ 关于其中心所得的商群，称为域 F 上的射影特殊线性群	
$O_n(F,S)$	正交群	orthogonal group	F 是特征不为 2 的域，S 是 F 上任意一个固定的 n 阶可逆对称矩阵，$O_n(F,S)=\{A\mid A\in F_{n\times n}$ 且 $A'SA=S\}$ 是一个群，称为 F 上(由 S 定义的)n 次正交群	
$O(n)$，O_n	实正交群	real orthogonal	由实数域上所有 n 阶正交方阵$(A'=A^{-1})$对乘法组成的群，称为 n 次实正交群	
SO(n)	旋转群	rotation group	由实数域上所有行列式等于 1 的 n 阶正交方阵对乘法组成的群，称为 n 次旋转群	
$\mathrm{PO}_n(F,S)$	射影正交群	projective orthogonal group	正交群 $O_n(F,S)$ 关于其中心的商群	
$\mathrm{SP}_{2n}(F,J)$	辛群	symplectic group	J 是域 F 上 $2n$ 阶可逆交错矩阵 $F_{2n\times 2n}$ 中满足 $A'JA=J$ 的一切 A 组成的群，称为 F 上的 $2n$ 次辛群	
$\mathrm{PSP}_{2n}(F,J)$	射影辛群	projective symplectic group	辛群 $\mathrm{SP}_{2n}(F,J)$ 关于其中心的商群	
$U_n(F,K)$	酉群	unitary group	元素为复数的 n 阶酉矩阵的全体关于矩阵的乘法组成群，称为 n 维酉群	
SU	特殊酉群	special unitary group	$U(u)$ 中行列式等于 1 的所有矩阵形成 $U(u)$ 的正规子群，称为特殊酉群	
Spin	旋量群	spinor group	与 SO(n) 局部同构的单连通李群称为旋量群	
$\langle R,+,\cdot\rangle$	环	ring	非空集合 R 关于运算"+"与"·"组成的环记为$\langle R,+\cdot\rangle$，也常简记为 R	
$\leqslant$	子环	subring	$S\leqslant R$ 表示 S 是环 R 的子环	亦可用 $<$ 表示子环或真子环
Char R	特征(数)	character	R 为任意环. 使 $na=0(\forall\ a\in R)$ 的最小正整数 n，称为 R 的特征. 若这样的 n 不存在，称 R 的特征为 ∞ 或 0，例如，Char$Z_n=n$，Char$Z=\infty$	亦称特征数，环 R 的特征亦用 ch$R$ 表示

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$U(R)$,R^*	单位群	unit group	R是有单位元的环,R的全体单位(即可逆元)对R的乘法组成群,称为R的单位群.例如,整数环$\mathbf{Z}$的单位群为$U(\mathbf{Z})=\{1,-1\}$	R的单位群亦称R的乘群
R^0	逆环	inverse ring	R为环.如果保持R的加法不变,而乘法改为$a\circ b=ba$,则R对于原加法和新乘法$\circ$也组成环,称为R的逆环	亦称反环,并记为R^{op}
$\mathbf{Z}[i]$	高斯整环	Gaussian integral domain	由一切复数$a+bi$ $(a,b\in\mathbf{Z})$所组成的数环	
$R[G]$	群环	group ring	设R是有单位元的环,G为群,一切有限和$\sum a_ix_i(a_i\in R,x_i\in G)$关于其(类似于多项式的)加法与乘法组成的环	亦可记为$R(G)$,RG或GR
$F(G)$	群代数	group algebra	域F和群G构成的群环$F[G]$,再加上F中元素与有限和$\sum a_ix_i(a_i\in F,x_i\in G)$的乘法而得到的$F$上的代数	
$J(R)$	雅各布森根	Jacobson radical	环R的所有本原理想的交,称为R的雅各布森根.当R无本原理想时,规定:$J(R)=R$	亦简称J根,有多种定义方法
$\trianglelefteq$	理想	ideal	$I\trianglelefteq R$表示I是环R的理想	亦可用$\triangle$表示理想或真理想
$\langle a\rangle$	主理想	principal ideal	环中包含元素a的最小理想	亦可用(a)表示
$\oplus$或$\dotplus$	环的直和	direct sum of rings	$R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_n$或$R=R_1\dotplus R_2\dotplus\cdots\dotplus R_n$,即环$R$是$R_1,R_2,\cdots,R_n$的直和	对于加群的直积也常称为直和;又子空间的直积,都常用$\oplus$或$\dotplus$表示
$\sqrt{A}$	理想的根	radical of an ideal	A为交换环R的理想.$\sqrt{A}=\{a\mid a\in R,\exists\ n$使$a^n\in A\}$($n$与$a$有关),称为理想$A$的根	亦称理想A的根基
$\langle S\rangle$	由S生成的理想	generated ideal by S	S是环R的一个子集,$\langle S\rangle$是R中包含S的最小理想,亦即R中包含S的所有理想的交	当$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$时,常记为$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
AB	理想的积	product of ideals	A,B是环R的理想,则一切有限和$\sum a_ib_i(a_i\in A,b_i\in B)$组成$R$的一个理想,称为理想$A$与$B$的积	AB是由一切元素$ab(a\in A,b\in B)$生成的理想
$A:B$	理想的商	quotient of ideals	设A,B是交换环R的理想,则R中满足$xB\subseteq A$的一切元素x组成R的理想,称为A与B的商	
$O:B$	零化理想	annihilating ideal	设B是交换环R的理想,则R中满足$xB=0$的一切元素x组成的理想,称为B的零化理想	当R为非交换时,$O:B$是R的左理想
$l(S)$,ann S_l	左零化子	left annihilator	环R中使$rS=0$的一切r组成的集合	$l(S)$是R的左理想
$r(S)$,ann S_r	右零化子	right annihilator	环R中使$Sr=0$的一切r组成的集合	$r(S)$是R的右理想
N_K	克德根	Köthe radical	环R的最大幂零元理想,称为R的克德根,简称K根	
N_Q	近似诣零根	quasi-nil radical	环R的全部近似诣零单边理想之和,称为R的近似诣零根	
N_L	林文茨基根	Livitzki radical	环R的惟一最大局部幂零理想称为R的林文茨基根	
N_{BM}	布朗-麦柯根	Brown-Mccoy radical	环R的最大g正则理想,称为R的布朗-麦柯根	
$F(\alpha)$	单扩张	simple extension	包含域F和元素α的最小扩域	亦称单扩域
$F(S)$	域的扩张	extension of a field	E是域F的扩域,S是E的一个子集,E中包含F和S的最小域记为$F(S)$,它是域F的扩张	当$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$时,则$F(S)$记为$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$
$(E:F)$,$[E:F]$	扩域次数	degree of an extended field	E是域F的扩域,则E是域F上的向量空间.E在F上的维数称为扩域的次数或扩张次数	$(E:F)$可能有限,也可能无限
$A(E\|F)$	E在F上的伽罗瓦群	Galois group of E over F	F是域E的子域,$A(E\|F)$是E的使F的每个元素不动的全体自同构组成的群	
$E(G_1)$	子群G_1所属的域	field belong to subgroup	E是域F的扩域,又$G=A(E\|F)\geqslant G_1$,E中所有对于G_1中任一元都不动的元是E的子域,称为子群G_1所属的域	$F\subseteq E(G_1)\leqslant E$
$G(E_1)$	子域E_1所属的群	group belong to subfield	假设同上,又E_1是E的子域且$F\subseteq E_1\subseteq E$.则$G$中所有不使$E_1$中任意元变动的元素之集是$G$的子群,称为子域$E_1$所属的群	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
F_q, GF(q)	有限域	finite field	F_q 或 GF(q)表示元素个数为 q 的有限域	元素个数相同的有限域都同构
$\mathbf{Q}_p$	p 进数域	p-adic number field	表示有理数域在 p 进赋值下的完备化域	p 为素数
$\mathbf{Z}_p$	p 进整数环	ring of p-adic integers	全体 p 进整数组成的环，称为 p 进整数环	p 为素数
$K[[\ ]]$	形式幂级数环	formal power series ring	$K[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$表示系数在域 K 中的形式幂级数环	亦可表示成 $R\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
$G_rU(A)$	分次单位群	graded unit group	G 为群，$U(A)$ 是 G 分次代数 $A=\bigoplus_{g\in G} A_g$ 的单位群．A 的一切分次单位组成 $U(A)$ 的一个子群	
GS(V)	半线性变换群	semilinear transformation group	V 是域 F 上的向量空间，V 的一切非奇异半线性变换组成群，称为半线性变换群	
$J_G(M)$	雅各布森分次根	Jacobson graded radical	R 为 G 分次环，M 为分次 R 模．M 的一切分次极大模的交，称为 M 的雅各布森分次根	
δ	导子	derivation	环 R 的导子，即 R 的满足 $\delta(a+b)=\delta a+\delta b$ 与 $\delta(ab)=(\delta a)b+a(\delta b)$ 的变换 δ	
$D(A)$	A 上微分算子环	ring of differential operators over A	称 $\bigcup_{i=0}^{\infty} D^i(A)$ 为 A 上线性微分算子环	
deg A	代数 A 的次数	degree of algebra A	设 A 是域 F 上中心单代数，且 $(A:F)=m^2$，则称 m 为 A 的次数	
Ind$A$	舒尔指数	Schur index	A 是域 F 上有限维中心单代数，且 $A\cong M_n(D)$，其中 D 是 F 上可除代数，称 deg$D$ 为 A 的舒尔指数	
Bsi$A$	次理想	subideal	设 B 是代数 A 的一个子代数，若有 $B=B_0\subseteq\cdots\subseteq B_n=A$，其中 B_i 是 B_{i+1} 的理想，则称 B 是 A 的次理想	
$\triangle_T$	T 理想	T-ideal	设 I 是代数 A 的一个理想．如果对 A 的每个自同态 φ 均有 $\varphi(I)\subseteq I$，则称 I 为 A 的 T 理想	
$S^{-1}R$	分式环	ring of fractions	设 R 是有单位元的交换环，S 是 R 的乘闭子集．则一切 $a/s(\forall\ a\in R, s\in S)$ 关于分式的加法和乘法组成环，称为 R 关于 S 的分式环	
$P^{(n)}$	符号幂	symbolic power	设 P 是有单位元的交换环 R 的素理想，$S_P=R\backslash P$．称 $S_P^{-1}P^n$ 在 R 中的收缩理想为 P 的 n 次符号幂	
(x,y,z)	结合子	associator	称 $(xy)z-x(yz)$ 为非结合代数中三个元素 x,y,z 的结合子	
Der(R)	导子李环	Lie ring of derivations	结合环 R 的导子在加法与乘法$[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1$ 之下组成的李环，称为导子李环	
Corad(C)	余代数的余根	coradical of coalgebra	余代数 C 的所有单子余代数的和，称为 C 的余根	
$l(K\|F)$	F 共轭映射数	number of F-conjugate mapping	设 Ω 是域 F 的扩域 K 的代数闭包，则 K 到 Ω 的一切 F 共轭映射的个数记为 $l(K\|F)$	
tr. deg$_F K$	超越次数	transcendence degree	域 F 的扩域 K 的超越基的基数称为 K 在 F 上的超越次数	
$N_F^K(\alpha)$	α 的范	norm of α	K 是域 F 的有限次扩域，Ω 是 F 的含 K 的代数闭包；又 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射，则 $N_F^K(\alpha)=(\prod_{j=1}^{m}\sigma_j(\alpha))^{[K:F]_i}$ 称为 K 中元 α 的范	
$T_F^K(\alpha)$	α 的迹	trace of α	K 是域 F 的有限次扩域，Ω 是 F 的含 K 的代数闭包；又 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射，则 $T_F^K(\alpha)=[K:F]_i\cdot\sum_{j=1}^{m}\sigma_j(\alpha)$ 称为 K 中元 α 的迹	
X_F	正锥集	set of positive cone	X_F 表示实域 F 的全部正锥组成的集合	
$X_F(T)$	序空间	space of orderings	T 是实域 F 的一个亚正锥，$X_F(T)$ 表示 F 上所有包含 T 的正锥所组成的集合，称为亚序域(F,T)的序空间	
$H(F)$	实全纯环	real holomorphic ring	实域 F 的所有实赋值环的交是 F 的一个子环，称为 F 的实全纯环	
(F,φ)	赋值域	valued field	带有赋值 φ 的域 F，称为赋值域	带有赋值环 B 的域 F 记为(F,B)
M_R	右 R 模	right R-module	R 是有单位元的环，M_R 是右 R 模，即作用乘法为 $ar(a\in M, r\in R)$	类似地有左 R 模$_RM$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\hookrightarrow$	子模	submodule	$A \hookrightarrow M$ 表示 A 是模 M 的一个子模	
$\hookrightarrow$	小子模	small submodule	设 A 是模 M 的一个子模. 如果对 M 的任意子模 Z 有 $A+Z=M$ 必有 $Z=M$,则称 A 为 M 的小子模,记为 $A \hookrightarrow M$	即只有 M 才使 $A+M=M$ 的子模 A 称为小子模
$\overset{*}{\hookrightarrow}$	大子模	large submodule	设 A 为模 M 的子模,若对 M 的任意子模 Z 有 $A \cap Z=0$ 必有 $Z=0$,则称 A 为 M 的大子模,记为 $A \overset{*}{\hookrightarrow} M$	即只有 $\{0\}$ 使 $A \cap \{0\}=0$ 的子模 A 称为大子模
$\mathrm{Si}(M)$	奇异子模	singular submodule	设 M 为右 R 模,M 中所有使 $r_r(m) \overset{*}{\hookrightarrow} R_R$ 的 m 组成的集是 M 的子模,称为奇异子模,其中 $r_R(m)=\{r \mid r \in R, mr=0\}$	
$\mathrm{ann}_R\, x$	阶理想	order ideal	设 R 是有 1 环,M 是左 R 模,$x \in M$,记 $\mathrm{ann}_R x=\{a \in R \mid ax=0\}$,称为 x 在 R 中的阶理想	亦称为 x 在 R 中的零化子. 记为 $(0:x)$
M^+	特征模	character module	M 是左 R 模,$M^+=\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$ 对于 $(f \circ r)(x)=f(rx)(f \in M^+, r \in R, x \in M)$ 组成右 R 模,称为 M 的特征模	
$\mathrm{G.dim}(M)$	戈迪维数	Goldie dimension	若 R 模 M 有子模 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i$ 为直和且为 M 的本质子模,则称 n 为 M 的戈迪维数	
R-Mod	R 模范畴	category of R-modules	所有左 R 模构成的范畴,称为左 R 模范畴	
$H^n(X)$	上同调模	cohomology modules	令 $X: \cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$ 是环 R 上的复形,$H^n(X)=\ker d^n/\mathrm{Im} d^{n-1}$,称为 X 的上同调模	
$\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$	函子 Ext	functor Ext	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 表示 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 的右导出函子	
$\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$	函子 Tor	functor Tor	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$ 表示 $M \otimes_R -$ 的左导出函子	
$\mathrm{l \cdot Pd}_R M$	左投射维数	left projective dimension	表示 M 为左 R 模,M 的左投射维数	亦称左同调维数,记为 $\mathrm{l \cdot dh}_R N$
$\mathrm{r \cdot pd}_R N$	右投射维数	right projective dimension	表示 N 为右 R 模,N 的右投射维数	亦称右同调维数,记为 $\mathrm{r.dh}_R N$
$\mathrm{l.}gl.\mathrm{dim}\ R$	左整体维数	left global dimension	环 R 的左整体维数 $\mathrm{l.}gl.\mathrm{dim}\ R=\sup\{\mathrm{l.pd}_R M \mid M \in \mu_R\}$	
$\mathrm{r.gl.dim}\ R$	右整体维数	right global dimension	环 R 的右整体维数 $\mathrm{r.}gl.\mathrm{dim}\ R=\sup\{\mathrm{r.pd}_R M \mid M \in \mu_R\}$	
$\mathrm{l.Id}_R M$	左内射维数	left injective dimension	表示左 R 模 M 的左内射维数	
$\mathrm{r.Id}_R N$	右内射维数	right injective dimension	表示右 R 模 N 的右内射维数	
$\mathrm{l.Fd}_R M$	左平坦维数	left flat dimension	表示左 R 模 $M \neq 0$ 的左平坦维数	亦称弱左同调维数,记为 $\mathrm{w.l.dh}_R M$
$\mathrm{r.Fd}_r N$	右平坦维数	right flat dimension	表示右 R 模 $N \neq 0$ 的右平坦维数	亦称弱右同调维数记为 $\mathrm{w.r.dh}_R N$
$M_1 * M_2 * \cdots * M_n$	双积	biproduct	设 M 及 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 为 R 模. 若有模同态 $\sigma_i: M_i \to M$ 与 $\pi_j: M \to M_j$ 满足 $\pi_j\sigma_i=\delta_{ji}$ 与 $\sum \sigma_i \pi_i=1_M$,则称 $\pi_j M$ 是模 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 的双积	
$\mathrm{Obj}(K)$	对象类	class of objects	K 是一个范畴,K 的所有对象构成的类称为 K 的对象类	
$\mathrm{Mor}_K(A,B)$	(态)射集	set of morphisms	A,B 是范畴 K 的两个对象. 由 A 与 B 所决定的一个集合称为 A 与 B 的(态)射集	亦称为由 A 到 B 的射或态射
$\mathrm{Dom}(\alpha)$	(态)射的域	domain of a morphism	表示在范畴中,设 $\alpha \in \mathrm{Mor}_K(A,B)$,则称 A 为(态)射 α 的域	
$\mathrm{Cod}(\alpha)$	(态)射的上域	codomain of a morphism	在范畴中,当 $\alpha \in \mathrm{Mor}_K(A,B)$ 时,称 B 为(态)射 α 的上域	
$\mathrm{rad}(M)$	模的根	radical of a module	表示模 M 的所有极大子模的交	亦即 M 的所有小子模的和
$Soc\ (M)$	模的基座	socle of module	表示模 M 的所有极小子模的和	亦即 M 的所有大子模的交
$\ker \varphi$	核	kernel	φ 是环 R 模 A 到 B 的一个同态映射,称 B 中零元素的全体逆象 $\varphi^{-1}(0)$ 为 φ 的核	对群、环等代数系也有类似概念

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Coker φ	上核	cokernel	φ是环R模A到B的一个同态映射，商模$B/\mathrm{Im}\varphi$称为φ的上核	亦称余核
Coim φ	上象	coimage	φ是环R模A到B的一个同态映射，商模$A/\mathrm{Ker}\varphi$称为φ的上像	亦称余像
M/N	商空间	quotient space	表示两代数系M,N的商空间	
dim V	维数	dimension	表示线性空间V的维数	
V^*	对偶空间	dual space	域F上线性空间V的所有线性函数组成F上的线性空间，称为V的对偶空间	V^*即$\mathrm{Hom}_F(V,F)$
$W(A)$	矩阵的数值域	numerical range of a matrix	$A\in C^{n\times n}$，称$W(A)=\{x^*Ax\mid x\in C^n, x^*x=1\}$为$A$的数值域	
$r(A)$	矩阵的数值半径	numerical radius of a matrix	$A\in C^{n\times n}$，称$\max\limits_{Z\in W(A)}\|Z\|$为$A$的数值半径	
V_{λ_0}	特征子空间	characteristic subspace	设σ是线性空间V的一个线性变换，λ_0是σ的一个特征值，则对应于λ_0的全体特征向量和零向量组成的子空间称为特征子空间	
$T(G,x)$	对称化算子	symmetrization operator	张量空间$T_0^p(E)$或$T_p^0(E)$的线性变换$S_p=\sum\limits_{\sigma\in G_p}\sigma$称为对称化算子，其中$G_p$为置换群	
$V_x(G)$	张量对称类	symmetric class of tensors	设$\overset{m}{\otimes}V$是张量空间，x是群G的不可约特征标，$T(G,x)$是对称化算子，则称$\mathrm{Im}T(G,x)$为关于G和x的张量对称类	
Inex $V_\chi(G)$	张量对称类的指标	index of symmetric class of tensor	表示张量对称类$V_\chi(G)$的指标	
$d_G^f(A)$	广义矩阵函数	generalized matrix function	设$A=(a_{ij})$为m阶复方阵，G为S_m的子群，f是G到$\boldsymbol{C}$的任一函数，则称$d_G^f(A)=\sum\limits_{\sigma\in G}f(\sigma)\prod\limits_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}$为广义矩阵函数	
$E(V)$	外代数	exterior algebra	设V为域$K(\mathrm{char}K\neq 2)$上向量空间，$\overset{m}{\wedge}V$为K上的格拉斯曼空间，则直和$\overset{0}{\wedge}V\oplus\overset{1}{\wedge}V\oplus\cdots\oplus\overset{n}{\wedge}V$可组成$K$上代数，称为$V$上的外代数	亦称格拉斯曼代数
$\vee E$	对称代数	symmetric algebra	设E是域$K(\mathrm{char}k=0)$上的向量空间，$\vee^pE$是E的p次对称幂，则$\vee E=\bigoplus\limits_{p=0}^{\infty}\vee^pE$可组成$K$上交换代数，称为$E$上的对称代数	
S_V	对合S_V	involution S_V	设V是域K上向量空间，则包含映射$j:V\to C\ell^P$在$C_V\to C\ell^P$的代数开拓是一个对合，其中$C\ell^P$是V的克利福德代数C_V的反代数	
$\hat{\oplus}$	正交直和	orthogonal direct sum	设$U_1,U_2,\cdots,U_m$是V的向量子空间，若它们两两正交且V为其直和，则记为$V=U_1\hat{\oplus}\cdots\hat{\oplus}U_m$，称$V$为$U_i$的正交直和	
$\uplus$	格-并	lattice-union	$A\uplus B$表示两个理想A,B的格-并	
$\boldsymbol{C}^0$	对偶范畴	dual category	由范畴$\boldsymbol{C}$作出的新范畴$\boldsymbol{C}^0$：$\boldsymbol{C}^0$的对象类即$\boldsymbol{C}$的对象类，定义$\mathrm{Hom}_{C^0}(A^0B^0)=\mathrm{Hom}_C(B,A)$，并规定$f^0g^0=(gf)^0$，称$\boldsymbol{C}^0$为$\boldsymbol{C}$之对偶范畴	
Set	集范畴	category of sets	以一切集合为对象，以集合映射为态射的范畴	
Top	拓扑空间范畴	category of topological spaces	以一切拓扑空间为对象，以连续映射为态射的范畴	亦可表示成$\mathscr{T}$
Group	群范畴	category of groups	以一切群作对象，以群同态作态射的范畴	亦可表示成$\mathscr{G}$
AG	阿贝尔群范畴	category of Abelian groups	以一切阿贝尔群作对象，以阿贝尔群同态作态射的范畴	
Ring	环范畴	category of rings	以一切环作对象，以环同态作态射的范畴	亦可表示成μ_R
$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\boldsymbol{C}_\lambda$	积范畴	product category	$\{\boldsymbol{C}_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$为一个范畴集合．由它们所作出的新范畴$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\boldsymbol{C}_\lambda$为$\{\boldsymbol{C}_\lambda\}$的积范畴	
$\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$	上积	coproduct	$\{A_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$为范畴$\boldsymbol{C}$的一个对象集．若对象$B\in\boldsymbol{C}$与一态射集具有泛性质，则称$B$为$\{A_\lambda\}$的上积	

符 号	中文名称	英文名称	意义或举例	备 注
IBN	IBN 环	IBN ring	R 为环. 如果每个有限生成的 R 模的任二基中元素个数必相等,则称 R 为 IBN 环	
$(\mathscr{C},\perp)$	带积范畴	category with product	规定映射 $\perp:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 的范畴 $\mathscr{C}$ 称为带积范畴	
ΦF	纤维范畴	fibre category	$(\mathscr{C},\perp)$ 与 $(\mathscr{D},T)$ 为带积范畴, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为保积函子. 由此定义的新范畴 ΦF(对象类为 $\{(M,N,\alpha)\mid M,N\in\mathscr{C},\alpha:F(M)\cong F(N)\}$ 称为 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 的纤维范畴)	
$\mathrm{gl}(V)$	一般线性李代数	general linear lie algebra	$\mathrm{gl}(V)$ 表示域上 n 维空间 V 的所有线性变换在运算 $[A,B]=AB-BA$ 下组成的 n^2 维李代数,称为一般线性李代数	
$n(P)$	偏序集的阶	order of poset	偏序集 P 的基数称为 P 的阶	
$l(P)$	偏序集的长	length of poset	偏序集 P 中链的长的最小上界称为 P 的长	
$\mathrm{Sup}\ X$	上确界	supremum	偏序集的子集 X 的上确界	亦称最小上界. 记为 $\vee X$ 或 l. u. b. X
$\inf X$	下确界	infimum	偏序集的子集 X 的下确界	亦称最大下界. 记为 $\wedge X$ 或 g. l. b. X
$(L;\leqslant)$	格	lattice	若偏序集 L 的任二元素均有上确界和下确界,则称 L 为格	
$\Phi(L)$	弗拉梯尼子格	Frattini sublattice	表示格 L 的弗拉梯尼子格	
a^+	a 的正部	positive part of a	a 是格群的一个元素, $a^+=a\vee 0$ 称为 a 的正部	
a^-	a 的负部	negative part of a	a 是格群的一个元素, $a^-=(-a)\vee 0$ 称为 a 的负部	
$X^\perp$	极	polar	X 是格群 G 的子集, $X^\perp=\{y\in G\mid \lvert y\rvert\wedge\lvert x\rvert=0,\forall x\in X\}$,称为 X 的极	
$J\perp K$	独立 l 理想	independent l-ideal	格序群的 l 理想 J,K 若有 $J\wedge K=0$,则称 J 和 K 是独立的	
$R(G)$	康莱德根	Conrad radical	格序群 G 的一切本质性值的交是一个 l 理想,称为 G 的康莱德根	
R^+	偏序环的序	order of po-ring	R 是偏序环, $R^+=\{r\in R\mid r\geqslant 0\}$,称为 R 的序	亦称 R 的正锥
BCK	BCK 代数	BCK-algebra	一种有序代数系统	
BCI	BCI 代数	BCI-algebra	一种较 BCK 代数广泛的代数结构	
$\langle X;*,0\rangle$	双 B 代数	two B-algebra	表示 BCK 代数或 BCI 代数,二者合称双 B 代数	
A^*	稳定子	stabilizer	A 是 BCK 代数 X 的子集, $A^*=\{x\in X\mid x*a=x$ 且 $a*x=a,\forall a\in A\}$,称为 A 的稳定子	
(X,O_X)	环式空间	ringed space	带有一个环层 O_X 的拓扑空间 X,称为环式空间	
$\chi(O_X)$	欧拉-庞加莱特征标	Euler-Poincaré characteristic	n 维完备簇 X 的欧拉-庞加莱的特征标定义为 $\chi(O_X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim_k H^i(X,O_Z)$	
$K(X)$	小平维数	Kodaira dimension	X 是 n 维完备代数簇. 在 X 利用归纳法定义的维数 $K(X)$ 称为小平维数	
$R(X)$	典范环	canonical ring	X 为光滑射影簇, ω_E 为其典范层, X 的典范环为 $R(X)=\bigoplus_{n\geqslant 0}H^0(X,\omega_X^{\otimes n})$	
$\mathrm{Pic}(X)$	皮卡群	Picard group	环式空间 (X,O_X) 的可逆层的同构类组成的群(运算由可逆层的张量积所诱导),称为 X 的皮卡群	
$\mathrm{Pic}^0(X)$	皮卡簇	Picard variety	X 是代数闭域 K 上的射影光滑代数簇, $\mathrm{Pic}(X)$ 中包含 O 的分支是一个射影概形,它的既约结构是一个阿贝尔族,称为 X 的皮卡簇	
$\mathrm{Alb}(Z)$	阿尔班尼斯簇	Albanese variety	X 是射影光滑代数簇. X 的皮卡簇的对偶阿贝尔簇称为 X 的阿尔班尼斯簇	
$G_{n,m}$	格拉斯曼簇	Grassmannian variety	一个 n 维线性空间的所有 m 维线性子空间的集合称为一个格拉斯曼簇	亦称格拉斯曼流形或格拉斯曼空间
$\mathrm{Flag}(n_1,n_2,\cdots,n_r)$	旗簇	flag variety	V 是 n 维向量空间, $n=n_1>n_2>\cdots>n_r>0$. 则 V 的所有由子空间组成的指标为 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的旗的集合,称为一个旗簇	
$\times$	叉积	cross product	a,b 的叉积等于 a,b 的对称差的补运算,即 $a\times b=(a\triangle b)'$	这里 $a,b\in B$, B 称为布尔集

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
c	胞腔度	cellularity	$cA=\sup\{\|x\|\|x$ 是其中的一个两两不相交的族}. 称为布尔代数 A 的胞腔度	
sat A	浸润度	saturation	$\mathrm{sat}A=\min\{u\|u$ 是基数且对 A 的每个两两不相交的族 x 有 $\|x\|<u\}$ 表示 A 的浸润度，它是一个正则基数，式中 $\|x\|$ 表示 x 的基数	
π	稠密度	density	$\pi B=\min\{\|x\|\|x\subseteq B$ 在 B 中稠密} 表示 X 在布尔代数 B 中的稠密度	
Id	理想	ideal	Id(B)表示布尔代数 B 中的全体理想	布尔代数 B 中的每个理想记为 I，有限集的理想记为 fin
Sub	子代数	subalgebra	Sub$A$ 表示无限布尔代数 A 的一切子代数所构成的集合	sub(B)表示布尔代数 B 的子代数所构成的格
Ult	超滤子	ultrafilter	Ult$A$ 表示无限布尔代数 A 的超滤子的全体	
Filt	滤子	filter	Filt$A$ 表示无限布尔代数 A 的一切滤子所构成的集合	
$\sum$	最小上界	least upper bound	$\sum^B M$ 表示 M 在布尔代数 B 中的最小上界，其中 M 是 B 的子集	
clop	闭开代数	clopen algebra	拓扑空间 X 的所有闭开集，用 clop$X$ 表示，构成 X 上的集合代数称为 X 的闭开代数	
RO( )	正则开代数	regular open algebra	$\mathrm{RO}(x)=\{u\|u\subseteq X$ 且 $r(u)=u\}$，其中 $r(u)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(u))$ 是 u 的正则化	
Bai	贝尔代数	Baire algebra	$\mathrm{Bai}X=\{a\subseteq X\|a$ 有贝尔性质}，其中 a 是拓扑空间 X 的子集，存在 X 的一个开集 u，使对称差 $a\triangle u$ 是贫集	
A↾a	相对代数	relative algebra	$A\upharpoonright a=\{x\|x\in A$ 且 $x\leqslant a\}$ 表示 A 关于 a 的相对代数. 式中 A 是布尔代数，且 $a\in A$	亦称因子代数
pred(t)	前趋集合	predecessor set	偏序集 $(T,\leqslant_T)$ 是一棵树，且所有的 $t\in T$，集合 pred(t)是由 $<_T$ 决定的一个良序集合	
Tor	挠积	torsion product	$\mathrm{Tor}_n(M,N)$ 是 M 和 N 的挠积	
Ext	扩张	extension	$\mathrm{Ext}^n(M,N)$ 是 M,N 的扩张	

分析学(analysis)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
(a,b)	开区间	open interval	表示 a 与 b 之间(不包括端点 a 与端点 b) 的一切实数组成的集合	亦可用 $]a,b[$ 表示
$[a,b]$	闭区间	closed interval	表示 a 与 b 之间(包括端点 a 与端点 b) 的一切实数组成的集合	
$(a,b]$	左半开区间	left half open interval	表示 a 与 b 之间(不包括端点 a 但包括端点 b) 的一切实数组成的集合	亦可用 $]a,b]$ 表示
$[a,b)$	右半开区间	right half open interval	表示 a 与 b 之间(包括端点 a 但不包括端点 b) 的一切实数组成的集合	亦可用 $[a,b[$ 表示
e^x 或 $\exp x$	指数函数	exponential function	表示以 e 为底，以 x 为指数的函数，可写成 $y=\mathrm{e}^x$ 或 $y=\exp x$	在同一场合中，只用其中一种符号
e	超越数	transcendental number	$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\ 281\ 828\ 459\cdots$	通常作为自然对数的底
$\log_a x$	对数函数	logarithmic function	表示以 a 为底，自变量为 x 的对数函数，可写成 $y=\log_a x$	
$\ln x$	自然对数	natural logarithm	表示以 e 为底，自变量为 x 的对数函数	
$\lg x$	常用对数	common logarithm	表示以 10 为底，自变量为 x 的对数函数	
$\mathrm{lb}\ x$	2 为底的对数	logarithm to the base 2	表示以 2 为底，自变量为 x 的对数函数	亦可记为 $\log_2 x$
$\mathrm{sh}\ x$ 或 $\sinh x$	双曲正弦	hyperbolic sine	$\mathrm{sh}\ x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
ch x 或 cosh x	双曲余弦	hyperbolic cosine	$\mathrm{ch}\, x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	
th x 或 tanh x	双曲正切	hyperbolic tangent	$\mathrm{th}\, x=\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	
coth x	双曲余切	hyperbolic cotangent	$\coth x=\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	
sech x	双曲正割	hyperbolic secant	$\mathrm{sech}\, x=\frac{1}{\mathrm{ch}\, x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$	
csch x 或 cosech x	双曲余割	hyperbolic cosecant	$\mathrm{csch}\, x=\frac{1}{\mathrm{sh}\, x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$	
arsh x	反双曲正弦	inverse hyperbolic sine	$\mathrm{arsh}\, x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-\infty<x<+\infty)$	亦可用 arsinh$x$ 表示
arch x	反双曲余弦	inverse hyperbolic cosine	$\mathrm{arch}\, x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$	亦可用 arcosh x 表示
arth x	反双曲正切	inverse hyperbolic tangent	$\mathrm{arth}\, x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$	亦可用 artanh x 表示
arcoth x	反双曲余切	inverse hyperbolic cotangent	$\mathrm{arcoth}\, x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ (\vert x\vert>1)$	
arsech x	反双曲正割	inverse hyperbolic secant	$\mathrm{arsech}\, x=\ln(1\pm\sqrt{1-x^2})-\ln x(0<x\leqslant 1)$	
arcsch x	反双曲余割	inverse hyperbolic cosecant	$\mathrm{arcsch}\, x=\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\ln x$	亦可用 arcosech x 表示
$f(x)$	函数	function	如 $y=f(x)$ 表示以 x 为自变量的一元函数	
$f(x_1,\cdots,x_n)$	n 元函数	n-ary function	表示以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量的 n 元函数	
Grf	图像	graph	表示函数 f 的图像	
$f(x)\vert_{x=a}$	函数值	function value	表示函数 $f(x)$ 在点 a 处的函数值，即 $f(x)\vert_{x=a}=f(a)$	
$f(x)\vert_a^b$ 或 $[f(x)]_a^b$	函数值的差	difference of the function value	表示函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$端点处函数值的差，即 $f(x)\vert_a^b=f(b)-f(a)$ 或$[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$	这种表示法常用于定积分的计算
const	常值函数	constant function	若 $f(x)=c$，则称 $f(x)$是常值函数，记为 const$f$	亦简记为 $f(x)=c$
$I(x)$	恒等函数	identity function	表示对 D 中一切 x 都有 $I(x)=x$	
$g\circ f$	复合函数	composite function	表示由函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 复合而成的函数，即 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$	亦称合成函数
$\to$	趋于或收敛于	converges to	$x\to a$ 表示 x 无限接近 a；$x_n\to a$ 表示序列$\{x_n\}$收敛于 a	$x\not\to a$ 表示 x 不趋于 a，$x_n\not\to a$ 表示序列$\{x_n\}$不收敛于 a
$\rightrightarrows$	一致收敛	uniformly convergent	$f_n\rightrightarrows f$ 表示 f_n 在 D 内一致收敛于 f，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}\vert f_n(x)-f(x)\vert=0$	
$\downarrow$，$\searrow$	单调递减	monotone decreasing	随自变量 x 的增加，函数值 $f(x)$ 逐渐减少	
$\uparrow$，$\nearrow$	单调增加	monotone increasing	随自变量 x 的增加，函数值 $f(x)$ 逐渐增加	
$\simeq$	渐近等于	asymptotically equal to	在某极限过程中，值可以无限接近的两个函数．如当 $x\to a$ 时，$\frac{1}{\mathrm{sim}(x-a)}\simeq\frac{1}{x-a}$.	在无穷小量比较时，表示等价无穷小，记为～
$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	极限	limit	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 表示当 x 趋于 a 时，$f(x)$无限接近于 b. 右极限和左极限分别记为：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$	亦可记为：当 $x\to a$ 时，$f(x)\to b$
$O(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=O(g(x))$意为$\vert f(x)/g(x)\vert$在行文所述的极限中有上界	比较无穷小量时，表示同阶无穷小
$o(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=o(g(x))$表示在行文所述的极限中 $f(x)/g(x)\to 0$	比较无穷小量时，表示高阶无穷小
Δx	增量	increment	$\Delta x=x-x_0$ 表示自变量 x 的增量	亦称 x 的改变量

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	导函数或微商	derived function	函数 f 的改变量与自变量 x 的改变量之比，当自变量改变量 Δx 趋于零时的极限表示为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	亦可用 f' 或 $\mathrm{D}f$ 来表示. 简称导数
$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}$	导函数值	value of derived function	函数 $f(x)$ 在某点 a 的导数值. 记为 $\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}$ 或 $\left(\frac{\mathrm{d}f'}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}$	亦可用 $f'(a)$ 或 $\mathrm{D}f(a)$ 来表示
$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$	n 阶导数	derivative of n-order	对 $f(x)$ 连续求 n 次一阶导数. 记为 $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $f^{(n)}$. 当 $n=2,3$ 时，常用 f'', f''' 来代替，称为 2 阶、3 阶导数. 如自变量是时间 t，常用 $f''(t)$ 来代替 $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$	亦可用 $f^{(n)}$ 或 $\mathrm{D}^n f$ 来表示
$\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $\partial_x f$	偏导数或偏微商	partial derivative	对多元函数的其中一个自变量 x 求导数，其他变量暂视为常数所得的结果	亦可用 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\cdots}$ 或 f_x 表示
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 或 f_{xy}	混合偏导数	mixed partial derivative	先对 x 求导，再对 y 求导，即 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$，	
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 或 f_{xx}	二阶偏导数	partial derivative of 2-order	对 x 连续求二阶导数，其他变量视为常数	
$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n\partial y^m}$	$m+n$ 阶偏微商	partial derivative of $(m+n)$-order	函数 f 先对 x 求 n 次偏微商，再对 y 求 m 次偏微商	
$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$	函数行列式	functional determinant	表示 u,v,w 对 x,y,z 的函数行列式，其中 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ 都是多元函数	亦称雅可比行列式(Jacobian 行列式)
$\mathrm{d}f$	全微分	total differential	$\mathrm{d}f(x_2,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$	
${}^*\mathrm{R}$ 或 R^*	扩张的实数系	extended real number system	把 $+\infty$ 与 $-\infty$ 加到实数系所得的数系	亦可记为 $[-\infty,+\infty]$
$\{a_n\}$	数列	sequence of number	表示数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$	
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$	无穷级数	infinite series	无穷数列的各项用加号连结而成的表达式	
$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$	叠级数	iterated series	各项均为级数的级数，其中 $\{a_{mn}\}$ 称为二重序列	亦称累级数
$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$	二重级数	double series	把二重序列的项 a_{mn} 按任意次序排列并用加号连结得到的表达式	
$\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$	无穷乘积	infinite product	把无穷序列 $u_1,u_2,\cdots,u_n\cdots$ 的各项连乘	
$f(a-0)$	左极限	left limit	$f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$	
$f(a+0)$	右极限	right limit	$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$	
$f'_-(x)$	左导数	left derivative	$f'_-(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$f'_+(x)$	右导数	right derivative	$f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$	黎曼上积分	Riemann upper integral	$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\sup\limits_{P\in\mathscr{F}} S_P(f)$	
$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$	黎曼下积分	Riemann lower integral	$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\inf\limits_{P\in\mathscr{F}} S_P(f)$	
$\int_{D\subset\mathrm{R}^n} f(x)\mathrm{d}x$	n 重积分	n-fold integral	$\int_{D\subset\mathrm{R}^n} f(x)\mathrm{d}x=\iiint\limits_D\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$	
Vf	变分	variation	$Vf=f_1(x)-f(x)$	
V 或 Var	变差	variation	$V_a^b f$ 或 $\mathrm{Var}_{[a,b]}f$ 表示函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差，当 $a=b$ 时，定义 $V_a^a f=0$；当 $V_a^b f<\infty$ 时，称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数	
δJ	泛函 J 的变分	variation of the functional J	泛函 $J[Y]$ 的一阶变分 $\delta J=\left(\frac{\partial J[Y]}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Lip 或 lip	李普希茨条件	Lipschitz condition	$f\in \mathrm{lip}\alpha$ 或 $f\in \mathrm{Lip}\alpha$ 表示函数 f 满足 α 阶李普希茨条件	
Δf	一阶向前差分	forward difference of first-order	$\Delta f(x_i)=f(x_i+h)-f(x_i)$	
$\Delta^2 f$	二阶向前差分	forward difference of second-order	$\Delta^2 f(x_i)=\Delta f(x_i+h)-\Delta f(x_i)$	
$\Delta^n f$	n 阶向前差分	forward difference of n-order	$\Delta^n f(x_i)=\Delta^{n-1}f(x_i+h)-\Delta^{n-1}f(x_i)$	
∇f	一阶向后差分	backward difference of first-order	$\nabla f(x_i)=f(x_i)-f(x_i-h)$	
$\nabla^2 f$	二阶向后差分	backward difference of second-order	$\nabla^2 f(x_i)=\nabla f(x_i)-\nabla f(x_i-h)$	
$\nabla^n f$	n 阶向后差分	backward difference of n-order	$\nabla^n f(x_i)=\nabla^{n-1}f(x_i)-\nabla^{n-1}f(x_i-h)$	
δf	一阶中心差分	centered difference of first-order	$\delta f(x_i)=f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\delta^2 f$	二阶中心差分	centered difference of second-order	$\delta^2 f(x_i)=\delta f(x_i+\frac{h}{2})-\delta f(x_i-\frac{h}{2})$	
$\delta^n f$	n 阶中心差分	centered difference of n-order	$\delta^n f(x_i)=\delta^{n-1}f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\delta^{n-1}f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\int f(x)\mathrm{d}x$	不定积分	indefinite integral	$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，C 是任意常数	
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	定积分	definite integral	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中 $\lambda=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$	
P. V. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	柯西主值	Cauchy principal value	$P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$ 或 $P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}f(x)\mathrm{d}x$	
$\int_C,\int_S,\int_V,\oint$	积分号	sign of integration	$\int_C,\int_S,\int_V,\oint$ 分别表示沿曲线 C，沿曲面 S，沿体积 V 以及沿闭曲线或闭曲面的积分	
$C(z),S(z)$	菲涅耳积分	Fresnel integral	$C(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，$S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$	
$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	二重积分	double integral	二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上的积分	
$\mathrm{Li}(x)$ 或 $\mathrm{li}(x)$	对数积分	logarithmic integral	$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$，高斯用函数 $\frac{1}{\log t}$ 表示在大整数 t 附近的素数分布的平均密度	
$\mathrm{Ei}(x)$	指数积分	exponential integral	$\mathrm{Ei}(x)=\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$，当 $x<0$ 时，在 $t=0$ 处取积分主值	在量子力学中有重要应用
$\mathrm{Si}(x)$	正弦积分	sine integral	$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{Ci}(x)$	余弦积分	cosine integral	$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{sgn}\ x$	符号函数	sign function	当 $x\in\mathbb{R}$ 时，$\mathrm{sgn}\ x=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x<0);\end{cases}$ 当 $x\in\mathbb{C}$ 时，$\mathrm{sgn}\ x=\begin{cases}\frac{x}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$	亦称克罗内克函数
ε_{ijk}	列维-齐维塔符号	Levi-Civita symbol	$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的偶排列}),\\ -1 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的奇排列}),\\ 0 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的真重复排列})\end{cases}$	
$\varepsilon(x)$	单位阶跃函数或称赫维赛德函数	unit step function or Heaviside function	$\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ 视作广义函数时的定义为 $\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	亦可用 $\mathrm{H}(x)$ 表示

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$f*g$	f 与 g 的卷积	convolution of f and g	$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$，式中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 内的绝对可积函数	
sn x cn x dn x	雅可比椭圆函数	Jacobi elliptic function	$\mathrm{sn}\,x=\sqrt{e_1-e_3}\dfrac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$；$\mathrm{cn}\,x=\dfrac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}$； $\mathrm{dn}\,x=\dfrac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$，其中 $x=u\sqrt{e_1-e_3}$	
$\wp(x)$	外尔斯特拉斯椭圆函数	Weierstrass's elliptic function	$\wp(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sum\limits_{\omega\neq 0}\left(\dfrac{1}{(x-\omega)^2}-\dfrac{1}{\omega^2}\right)$	
B_n 或 b_n	伯努利数	Bernoulli's numbers	解析函数 $(e^z-1)^{-1}$ 在 $z=0$ 附近的罗朗级数展开式 $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n)!}z^{2n-1}$， 则称式中系数 B_n 为伯努利数	
supp f 或 spt f	函数的支集	support of function	若 Ω 是局部紧空间，则 Ω 上函数 f 的支集是 Ω 中的集合 $\{x\mid f(x)\neq 0\}$ 的闭包，表示成 supp$f$	
$\delta(x)$	狄拉克函数	Dirac δ-function	质量分布在区域 Ω 的总量为 $\iiint\limits_{\Omega}\delta_{M_0}(M)\mathrm{d}M=\begin{cases}1 & (M_0\in\Omega),\\ 0 & (M_0\overline{\in}\Omega),\end{cases}$ 称这样的函数为 $\delta(x)$ 函数，它在每一点的值 $\delta_{M_0}(M)=\begin{cases}0 & (M_0\neq M),\\ \infty & (M_0=M)\end{cases}$	亦称 δ 函数
am x	振幅函数	amplitude function	在形如 $I_\varphi(au)=\iint e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$ 的振荡积分中，$a(x,\theta)$ 称为振幅函数	
$\Gamma(x)$	伽马函数	gamma function	$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\ (x>0)$， $\Gamma(n+1)=n!\ (n=0,1,2,\cdots)$	亦称 Γ 函数
$\gamma(x)$	不完全伽马函数	incomplete gamma function	$\gamma(x)=\int_0^{\lambda}e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$；$\gamma(x)=\int_{\lambda}^{\infty}e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$，其中 x>0	在统计学和分子结构论中常用
$B(x,y)$	贝塔函数	beta function	$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$，$(x,y\in\mathbf{R};x>0,y>0)$；$B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$	亦称 β 函数
$\Psi(x)$	普西函数	psi function	$\Psi(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln\Gamma(x))$ 是函数方程 $\Psi(x+1)-\Psi(x)=\dfrac{1}{x}$，$\Psi(1)=-c$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\Psi(x+n)-\Psi(1+n))=0$ 的解	亦称 Ψ 函数
$F(k,\varphi)$	第一类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the first kind	$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k,\varphi)$	第二类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the second kind	$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\varphi)$	第三类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the third kind	$\Pi(n,k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$K(k)$	第一类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the first kind	$K(k)=F(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k)$	第二类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the second kind	$E(k)=E(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\pi/2)$	第三类完全椭圆积分	complete elliptic inlegral of the third kind	$\Pi(n,k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$P_l(x)$	勒让德多项式	Legendre polynomial	方程 $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$ 的特解， $P_l(x)=\sum\limits_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\dfrac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$P_l^m(x)$	关联勒让德函数	associated Legendre function	方程 $(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$ 的特解，$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$ $(l,m=0,1,2,\cdots;m\leqslant l)$	
$T_n(x)$	第一类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 1st kind	方程$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 的特解，$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
$U_n(x)$	第二类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 2nd kind	方程$(1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0$ 的特解，$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
$L_n(x)$	拉盖尔多项式	Laguerre polynomial	方程 $xy''+(1-x)y'+ny=0$ 的特解，$L_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
$H_n(x)$	埃尔米特多项式	Hermite polynomial	方程 $y''-2xy'+2ny=0$ 的特解，$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$	
H_c	超平面	hyperplane	$H_c=\{x\in\mathrm{R}^n:\langle a,x\rangle=c\}$，式中 c 为实数，a 为 R^n 中的非零元	
$F(a;b;c;x)$	超几何函数	hypergeometric function	方程 $x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$ 的特解，$F(a;b;c;x)=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称超比函数
$F(a;c;x)$	合流超几何函数	hypergeometric function of confluent type	方程 $xy''+(c-x)y'-ay=0$ 的特解，$F(a;c;x)=1+\frac{a}{c}x+\frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称汇合型超几何函数或库默尔函数
$J_l(x)$	第一类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+xy'+(x^2-l^2)y=0$ 的特解，$J_l(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{l+2k}}{k!\Gamma(l+k+1)}$	
$N_l(x)$	第二类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 2nd kind	$N_l(x)=\lim_{k\to l}\frac{J_k(x)\cos k\pi-J_{-k}(x)}{\sin k\pi}$. 它是贝塞尔方程的第二解，可由第一类柱贝塞尔函数定义	亦称柱汉克尔函数
$H_l^{(1)}(x)$ $H_l^{(2)}(x)$	第三类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 3rd kind or cylindrical Hankel function	$H_l^{(1)}(x)=J_l(x)+\mathrm{i}N_l(x)$，$H_l^{(2)}(x)=J_l(x)-\mathrm{i}N_l(x)$. 它们是第一类和第二类柱贝塞尔的线性组合，是贝塞尔方程的两个线性无关解	亦称柱汉克尔函数
$I_l(x)$ $K_l(x)$	修正的柱贝塞尔函数	modified cylindrical Bessel function	方程 $x^2y''+xy'-(x^2+l^2)y=0$ 的特解，$I_l(x)=\mathrm{i}^{-l}J_l(\mathrm{i}x)$，$K_l(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}^{l+1}[J_l(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}N_l(\mathrm{i}x)]$	亦称变形的柱贝塞尔函数
$j_l(x)$	第一类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0$ 的特解，$j_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$	
$n_l(x)$	第二类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 2nd kind	$n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(x)$	亦称球诺伊曼函数，也记为 $y_l(x)$
$h_l^{(1)}(x)$ $h_l^{(2)}(x)$	第三类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 3rd kind	$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+\mathrm{i}n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$，$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-\mathrm{i}n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$	修正的球贝塞尔函数，分别记为 $i_l(x)$ 与 $k_l(x)$
∇	矢量微分算子	operator of vector differentiation	$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$	亦称哈密顿算子
grad，∇	梯度	gradient	若 $f:D(\subseteq\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}$，则 f 在 $\boldsymbol{a}\in D$ 的梯度为 $\mathrm{grad}f(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$	
div，$\nabla\cdot$	散度	divergence	若向量函数 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(P,Q,R)$ 连续可微，则向量场的散度为 $\mathrm{div}\boldsymbol{f}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$	
rot，$\nabla\times$	旋度	rotation	$\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$ 是三维向量函数，$\boldsymbol{f}$ 的旋度为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Δ,∇^2	拉普拉斯算子	Laplacian operator	$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	亦称调和算子
$\square$	达朗贝尔算子	d'Alembertain operator	$\square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	c 为电磁波在真空中的传播速度
D	微分算子	differential operator	即 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=Df(t)$，$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}=D^2f(t)$，…，$\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}=D^nf(t)$	
Λ	拓扑双曲不变集	topological hyperbolic set	$f:M\to M$ 是微分同胚. f 的不变闭子集 $\Lambda\subset M$ 称为拓扑双曲不变集	
Diff′	微分同胚空间	differential homeomorphic space	Diff′(M)表示 M 全体微分同胚构成的空间	
Homeo	同胚空间	homeomorphic space	Homeo(M)表示 M 的全体同胚构成的空间	
Proj	射影基向量	base vector of projective	Proj$k$ 表示 P—标架的第 k 个基向量	
Ob	阻碍集	obstruction sets	Ob(S)表示向量场 S 的阻碍集	
Log$z$	对数函数	logarithmic function	$w=\mathrm{Log}z=\log\lvert z\rvert+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，z 为复数	
$\sin z$	复变正弦函数	sine function of a complex variable	$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，式中 z 为复变数. 当 z 为实数时与数学分析中的正弦函数的定义一致	
$\cos z$	复变余弦函数	cosine function of a complex variable	$\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，式中 z 为复变数. 当 z 为实数时与数学分析中的余弦函数的定义一致	
$\tan z$	复变正切函数	tangent function of a complex variable	$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$	
Arc $\sin z$	复变反正弦函数	inverse sine function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\sin z=-\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$，式中 z 为复变数，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}$	
Arc $\cos z$	复变反余弦函数	inverse cosine function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\cos z=-\mathrm{i}\log(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2})$，式中 z 为复变数	
Arc tan$z$	复变反正切函数	inverse tangent function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\tan z=\frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}$，式中 z 为复变数	
L(z)	分式线性变换	fractional linear transformation	$\mathrm{L}(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，式中 a,b,c,d 都是复常数，且 $ad-bc\neq0$	若 a,b,c,d 都是实数，且 $ad-bc>0$ 称此为富克斯变换
(a,b,c,d)	交比	cross ratio	$(a,b,c,d)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$，式中 a,b,c,d 是任意四个互异的复数	亦称非调和比
$n(\gamma;a)$	环绕数	winding number	点 a 关于 γ 的环绕数，$n(\gamma;a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}$，式中 γ 是一条可求长的闭路径，a 点不在 γ 上	亦称指示数或卷绕数
Res$f(z)$	留数	residue	在 $f(z)$ 的孤立奇点 a 的去心邻域内的罗朗级数展开式中，$1/(z-a)$ 项的系数为 c_{-1}，即 $\underset{z=a}{\mathrm{Res}}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\substack{\lvert z-a\rvert=\rho\\(0<\rho<R)}}f(z)\mathrm{d}z$	亦称残数
$L(s)$	拉普拉斯变换	Laplace transform	$f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $L(s)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$	
$F(\xi)$	傅里叶变换	Fourier transform	$f(x)$ 的傅里叶变换为 $F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x$	
$F_c(\xi)$	傅里叶余弦变换	Fourier cosine transform	$f(x)$ 的傅里叶余弦变换为 $F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\xi x\mathrm{d}x$	
$F_s(\xi)$	傅里叶正弦变换	Fourier sine transform	$f(x)$ 的傅里叶正弦变换为 $F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\xi x\mathrm{d}x$	
$M(z)$	梅林变换	Mellin transform	$f(x)$ 的梅林变换为 $M(z)=\int_0^\infty f(x)x^{z-1}\mathrm{d}x$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H(\xi)$	汉克尔变换	Hankel transform	$f(x)$ 的 v 阶汉克尔变换为 $H(\xi)=\int_0^{\infty}xf(x)J_v(\xi x)\mathrm{d}x$	
$G(n)$	勒让德变换	Legendre transform	$f(x)$ 的勒让德变换为 $G(n)=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x$	
$\mathrm{erf}(z)$	概率积分	probability integral	$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\mathrm{erfc}(z)$	余概率积分	complement probability in- tegral	$\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\Phi c(z)$	正态概率积分	normal probability inte-gral	$\Phi_c(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{u}}\mathrm{d}u$	
${}_pF_q$	超几何级数	hypergeometric series	超几何级数的一般形式是 ${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n z^n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n n!}$	
E_n 或 γ	欧拉常数	Euler constant	$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ $\approx 0.5772156649015328606065 1209\cdots$	
$\{f,D\}$	解析函数元素	holomorphic function el-ement	复平面上的区域 D 连同在其内全纯的一个函数 $f(z)$，合成为解析函数元素	简称函数元素
$k(z)$	克贝函数	Koebe function	$k(z)=z(1-z)^{-2}$，$k_\theta(z)=\mathrm{e}^{i\theta}k(\mathrm{e}^{i\theta}z)$，$\beta=\lim_{n\to\infty}\lvert a_n\rvert/n\leqslant 1$。其中 $k(z)$ 是 S 类上许多泛函极值问题的极值函数，称 $k_\theta(z)$ 为克贝函数的旋转	
$I_p(r)$	哈代凸性函数	Hardy's convexity func-tion	$I_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lvert f(r\mathrm{e}^{i\theta})\rvert^p\mathrm{d}\theta\quad(0<r<R)$	
B	布洛赫常数	Bloch's constant	$B=\inf\{\beta(f)\mid f\in\mathscr{F}\}$，式中 $\beta(f)=\sup\{r\mid r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含的单叶圆的半径$\}$	已经证明 $\sqrt{3}/4\leqslant B\leqslant 0.47$
L	兰道常数	Landau's constant	$L=\inf\{\lambda(f),f\in\mathscr{F}\}$，式中 $\lambda(f)=\sup\{r\mid r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含圆的半径，$f\in\mathscr{F}\}$	已经证明 $0.5\leqslant L\leqslant 0.54326$
$M(\Gamma)$	曲线族 Γ 的模	module of a family of curves Γ	$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in p(\Gamma)}\int_D\rho^2\lvert\mathrm{d}z\rvert$，其中 Γ 是平面区域 D 上的若尔当曲线族，ρ 是定义在 D 上的非负波莱尔函数	
$\mathrm{M}(f(\Gamma))$	拟共形映射	quasiconformal mapping	f 满足 Beltrami 微分方程 $f_{\bar z}=\mu f_z$，称 f 为 μ 共形映射，如 $\lVert\mu\rVert_\infty<1$，则称 f 为拟共形映射	亦称拟保角映射
$w(z,a,D)$	调和测度	harmonic measure	a 关于区域 D 的调和测度 $w(z,a,D)$ 是 z 对 (a,b) 的视角. $w(z,a,D)=\frac{1}{\pi}\arg\frac{b-z}{a-z}$	$0\leqslant w(z,x,d)\leqslant 1$
$g(z,a)$ 或 $\mathrm{G}(z,a)$	格林函数	Green's function	函数 $g(z,a)$ 在 D 内奇点 a 的格林函数 $g(z,a)=\log\left\lvert\frac{z-\bar a}{z-a}\right\rvert$	
$\mathrm{E}(z,p)$	外尔斯特拉斯基本因式	Weierstrass basis factor	$E(z,p)=(1-z)\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\}$	
$T(r,f)$	奈望林纳特征函数	Nevanlinna's character-istic function	满足 $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=\infty$ 的 $T(r,f)$ 是 $f(z)$ 的奈望林纳特征函数	亦称奈望林纳记号，可记为 $T(r)$
$n(r,a)$	a 点个数	number of a-point	$n(r,a)$ 是方程 $f(x)=a$ 在 $\lvert z\rvert\leqslant r$ 内解的个数(包括计算重数)	
$\delta(a)$	亏量	defect	$w(z)$ 关于 a 的亏量 $\delta(a)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,a)}{T(r,w)}$	亦称亏值
$\mathring{T}(r,w)$	球面特征函数	spherical characteristic function	$\mathring{T}(r,w)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{A(t,w)}{t}\mathrm{d}t$，式中 $w(z)$ 为代数体函数	
$M(r,f)$	整函数的最大模	maximum modulus of entire function	$f(z)$ 的最大模 $M(r,f)=\max_{\lvert z\rvert\leqslant r}\lvert f(z)\rvert$；$f(z)$ 的 p 次整函数的模 $M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lvert f(r\mathrm{e}^{i\theta})\rvert d\theta\right)^{1/p}(0<p<+\infty)$；超越整函数 $f(z)$ 的最大模 $M_\infty(r,f)=\max_{\lvert z\rvert=r}\lvert f(z)\rvert_{p=+\infty}$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$B(z)$	布拉施克乘积	Blaschke product	$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lvert a_n\rvert}{a_n}\left(\frac{a_n-a}{1-\bar{a}_n z}\right)$，式中 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 是复数序列，$0<a_n<1$	
H^p	哈代空间	Hardy space	所有哈代函数构成的空间，即 $H^p(D)=\{f\mid f(z)$ 在 D 内解析，$\sup\limits_{0\leqslant r<1}\left(\int_0^{2t}\lvert f(re^{i\theta})\rvert^p d\theta\right)^{1/p}<+\infty\}$，其中 $D=\{z\mid \lvert z\rvert<1\}$	H^p 是由哈代于1915年提出的
$S(z)$	奇异内函数	singular inner function	$S(z)=\exp\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\}d\mu(t)\}$，式中 $\mu(t)$ 是非减的有界变差函数，其导数几乎处处等于零	
$F(z)$	外函数	outer function	$F(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\lvert f(e^{it})\rvert dt\right\}$	
BMOA	有界平均振荡解析函数类	analysis function class of the bounded mean oscillating	$\mathrm{BMOA}(D)=\{f\mid f(z)$ 是单位圆周 T 上的可积函数，$u(e^{i\theta})$ 的积分 $\sup\limits_{T\subset I}\frac{1}{\lvert I\rvert}\int_I f(u-u_I)d\theta<+\infty\}$，式中 u 为单圆周 T 上的可积函数，I 是 T 的子弧，$\lvert I\rvert$ 是 I 的长度	
B_n	$\mathbf{C}^n$ 中单位球	unit ball in a $\mathbf{C}^n$	$B_n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid \lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+\cdots+\lvert z_n\rvert^2<1\}$	
$\mathrm{Aut}(D)$	域的全纯自同构群	holomorphic automorphism group of a domain	表示域 D 的全纯自同构的全体组成的群．它是 D 上的拓扑变换群	
∂D	域的边界	boundary of a domain	域 D 和它的闭包 $\bar{D}$ 的差集，即 $\partial D=\bar{D}\backslash \dot{D}$	
$\mathrm{Hol}(D)$	全纯复线性空间	holomorphic complex linear space	表示 D 上所有全纯函数构成的复线性空间	
$\bar{\partial}$	$\bar{\partial}$ 算子	$\bar{\partial}$-operator	$\bar{\partial}:C^1(D)\to L_{\mathfrak{P}}^2,u\mapsto\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ 称为 $\bar{\partial}$ 算子	
$H(z,\bar{z})$	正定埃尔米特方阵	positive definite Hermitian matrix	$H(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}h_{11}(z,\bar{z})&\cdots&h_{1n}(z,\bar{z})\\ \vdots&&\vdots\\ h_{n1}(z,\bar{z})&\cdots&h_{nn}(z,\bar{z})\end{pmatrix}$，式中 $h_{jk}(z,\bar{z})$ 在拓扑积 $\varphi_a(U_x)\times\overline{\varphi_a(U_a)}$ 上全纯	互逆正定埃尔米特方阵记为 $\tilde{H}(z,\bar{z})$
$B_\mu^2(M)$	可测复线性空间	measurable complex linear space	$B_\mu^2(M)=\mathrm{Hol}(M)\cap L_\mu^2(M)$，其中 M 为 n 维复流形，$\mu$ 为 M 上任给的测度	
$N(\Omega)$	奈望林纳函数类	Nevanlinna function class	Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的对称域，b 是特征边界，若 $\Omega\to\mathbf{C}f$ 在 Ω 中全纯，且满足 $\sup\limits_{0<r<1}\int_b\log^+\lvert f(r,\zeta)\rvert d\sigma(\zeta)<+\infty$，则 f 属于奈望林纳函数类	
$\beta(\Omega)$	布洛赫空间	Bloch space	Ω 上全体布洛赫函数的集合，称为布洛赫空间．Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中齐线性有界域	
$\rho(\ ,\ )$	点集的距离	distance between two point sets	$\rho(A,B)=\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\{\rho(x,y)\}$	
F_σ	F_σ 型集	set of type F_σ	表示可数个闭集的并集	F_σ 是波莱尔集
G_δ	G_δ 型集	set of type G_δ	表示可数个开集的交集	G_δ 是波莱尔集
$mE;\lvert E\rvert$	勒贝格测度	Lebesgue measure	若 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为勒贝格可测集，则 E 的勒贝格外测度称为勒贝格测度	
$m^*(E);\lvert E\rvert_e$	勒贝格外测度	Lebesgue outer measure	$m^*(E)=\inf\{\sum\limits_{i\in\mathbf{N}}\lvert I_i\rvert\mid\{I_i\}$ 为覆盖 E 的可数个开集$\}$	
$m_*(E);\lvert E\rvert_i$	勒贝格内测度	Lebesgue inner measure	$m_*(E)=\sup\{m(F)\mid F$ 为闭集，且 $F\subset E\}$	
$\aleph_0$	可列集的势	cardinal number of countable set	每一个无穷集的势都是某个阿列夫，自然数集的势是 $\aleph_0$	
$\aleph$ 或 C	连续集的势	cardinal number of continuous set	与区间[0,1]对等的集的势记为 N 或 C．连续集的势 $C=2^{\aleph_0}$	亦称基数
CH	连续统假设	continuum hypothesis	康托尔猜测：实数集的一切无穷子集或者与自然数集等势或者与连续统等势	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
GCH	广义连续统假设	generalized continuum hypothesis	假设：1. 对任一序数 α，$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$； 2. 对任二无穷势 κ,λ，若 $\kappa\leqslant\lambda\leqslant 2^{\aleph}$，则 $\lambda=\kappa$ 或者 $\lambda=2^{\aleph}$	
$H_\alpha(E)$	豪斯多夫测度	Hausdorff measure	$H_\alpha(E)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\sup\limits_{\varepsilon>0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)$，其中，$H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\inf\sum\limits_k\delta(E_k)^\alpha$，且 $\delta(E_k)$ 为 R^n 的子集 E_k 的直径	
$\psi(x)$	狄利克雷函数	Dirichlet function	$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理点},\\0, & x\text{ 为无理点}\end{cases}$	亦可用 $D(x)$ 表示
$\chi(n)$或 $\chi_q(n)$或 $\chi(n)\bmod q$	狄利克雷特征	Dirichlet character	整数集上的函数 $\chi(n)=\begin{cases}\exp\left[2\pi\left(\frac{mr}{c}+\frac{m_0r_0}{c_0}+\frac{m_1r_1}{c_1}+\cdots+\frac{m_sr_s}{c_s}\right)\right] & ((n,q)=1)\\0 & ((n,p)>1)\end{cases}$	亦称 q 的特征
$\{A,B\}$	泊松符号	Poisson symbol	$\{A,B\}=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial\xi_j}\frac{\partial B}{\partial x_j}-\frac{\partial B}{\partial\xi_j}\frac{\partial A}{\partial x_j}\right)$	亦称泊松括号
$\|I\|$	I 区间的体积	volume of I-interval	E 为 R^n 中的有界点集，I 为包含 E 的任何有界区间，则以 $\|I\|$ 表示区间 I 的体积	
a. e. p. p.	几乎处处	almost everywhere	若命题 $P(x)$ 与集合 $E\subset\mathrm{R}^n$ 有关，且零集 $E_0\subset E$，对于任意 $x\in E\backslash E_0$，$P(x)$ 均成立，则称$P(x)$ 在 E 上几乎处处成立，记为 $P(x)$a. e. 或 $P(x)$p. p.	a. e. 是英文 almost everywhere 的首字母；$p.\ p.$ 是法文 presque partout 的首字母
$M(x)$	上极限函数	upper limit function	$M(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}M(x,\delta)$，其中 $M(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的上确界	
$m(x)$	下极限函数	lower limit function	$m(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}m(x,\delta)$，其中 $m(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的下确界	
$\chi_A(x)$	集合的特征函数	characteristic function of a set	$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\0 & (x\notin A)\end{cases}$	
ap $\overline{\lim}$	近似上极限	approximate upper limit	ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\inf\limits_{E}\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x)$	
ap $\underline{\lim}$	近似下极限	approximate lower limit	ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=(\sup\limits_{E}\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x))$	
ap lim	近似极限	approximate limit	ap $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 表示 ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=$ ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$	
$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$	勒贝格积分	Lebesgue integral	若 $f(x)$ 是可测集 $E\subset\mathrm{R}^n$ 上的(L) 可测函数，则称 $(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 为勒贝格积分	简称 L 积分
$D^-f(x_0)$	左上导数	left upper derivative	$D^-f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_-f(x_0)$	左下导数	left lower derivative	$D_-f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D^+f(x_0)$	右上导数	right upper derivative	$D^+f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_+f(x_0)$	右下导数	right lower derivative	$D_+f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$\ll$	绝对连续	absolute continuity	$\gamma\ll\mu$ 表示广义测度 γ 关于 μ 是绝对连续的. 即当 $\|\mu\|(A)=0$ 时有 $\gamma(A)=0$，其中 $\|\mu\|$ 是 μ 的全变差	
$\perp$	相互奇异	mutually singular	$\gamma\perp\mu$ 表示 γ 与 μ 是相互奇异的，即存在两个不相交的可测集 A 与 B 使得 $\Omega=A\cup B$，且对任意可测集 E，有 $\|\mu\|(A\cup E)=\|\gamma\|(B\cap E)=0$，其中 $\|\gamma\|$，$\|\mu\|$ 分别是 γ 和 μ 的全变差	
$(\Gamma)\int_0 x(t)\mathrm{d}\mu$	盖尔范德积分	Gelfand integral	设 $x(t)$ 为 Ω 到巴拿赫空间 X 的向量函数，若对 $\forall f\in X^*$，当 $f(x(t))$ 在 Ω 上可积时必存在 $x^{**}\in X$ 使 $x^{**}=\int_\Omega f(x(t))\mathrm{d}\mu$，则称 x^{**} 为盖尔范德积分	亦称盖尔范德意义下的弱* 积分

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu$	佩蒂斯积分	Pettis integral	若$\int_A f(x(t))\mathrm{d}\mu = f(x_A)$，则$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu = x_A$	亦称弱积分
$(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	博赫纳积分	Borchner integral	1. 若 $x(t)$ 是 Ω 上可测函数，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\mu(A_K)$； 2. 对于一般的强可测函数 $x(t)$，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}(B)\int_\Omega x_n(t)\mathrm{d}\mu$.	
$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	伯克霍夫积分	Birkhoff integral	$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \bigcap_\Delta J(x,\Delta)$，其中 $J(x,\Delta)$ 是 $\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)x(t_i) \mid t_i \in A_i\}$ 的凸闭包	
$\mathscr{U}_g^*(E)$	$(L\text{-}S)$外测度	$(L-S)$outer measure	$\mathscr{U}_g^*(E) = \inf\{\sum_{K\geqslant 1}\mathscr{U}_g(I_k) \mid \{I_k\}$ 为可数个覆盖 E 的左开右闭区间$\}$	
$\mathscr{U}_g(E)$	$(L\text{-}S)$测度	$(L-S)$measure	当任意点集 T 能分解成 E 内部分 $T\cap E^i$ 和 E 外部分 $T\cap E^c$ 时，相应的$(L\text{-}S)$外测度具有可加性，则 E 称为 $g(x)$的$(L\text{-}S)$可测集，此时外测度 $\mathscr{U}_g^*(E)$就称为 E 的由分布函数$g(x)$引出的$(L\text{-}S)$测度	
$(L\text{-}S)\int_E$	$(L\text{-}S)$积分	$(L\text{-}S)$integral	$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_E f^+(x)\mathrm{d}g(x) - \int_E f^-(x)\mathrm{d}g(x)$，其中 $f^+(x)$，$f^-(x)$分别为 $f(x)$正部和负部，且至少有一个有极限	$(L\text{-}S)$积分是勒贝格-斯蒂尔切斯积分的简称
$D(*)\int_a^b$	狭义当茹瓦积分	Denjoy integral in the restricted sense	$(D(*))\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，其中 $F(x)$ 是狭义一般绝对连续函数，且在$[a,b]$ 上 $F'(x) = f(x)$ *a. e.*	狭义当茹瓦积分是勒贝格积分和黎曼积分的一种推广
$D_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似导数	approximate derivative	$D_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\underline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似下导数	approximate lower derivative	$\underline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\overline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似上导数	approximate upper derivative	$\overline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
Π_K	庞特里亚金空间	Pontrjagin space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = k < +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为具有正(负)指标的庞特里亚金空间	
π	克莱因空间	Klein space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为克莱因空间	
$\rho(T)$	正则集	Regular set	设T是空间X的线性算子，如果$\lambda I - T$是正则算子，那么称λ为T的正则点. 复平面上正则点全体称为正则集	亦称豫解集
$\sigma(T)$或$\mathrm{sp}(T)$	谱集	spectrum	$\rho(T)$ 的余集 $C\backslash\rho(T)$. $\sigma_P(T)$，$\sigma_a(T)$，$\sigma_r(T)$，$\sigma_c(T)$ 分别表示点谱、近似点谱、剩余谱、连续谱	
$\deg(T,\Omega,P)$	拓扑度	topological degree	映射T在区域Ω上关于P点的拓扑度是一个整数，它是方程 $T(x) = P$ 在 Ω 中解的"代数个数"的某种稳定的度量	
$F((x))$	形式幂级数域	domain of formal power series	由 F 上关于 X 的形式幂级数 $\alpha(x) = q_r x^r + q_{r+1}x^{r+1} + \cdots$ $(q_r \neq 0, r \in Z)$ 按照通常加、乘运算组成一个域	
$\delta(x)$	狄拉克 δ 函数	Dirac δ-function	$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & (x=0), \\ 0 & (x\neq 0). \end{cases}$	
$e\subset(A)$	平衡包	equilibrium hull	包含 A 的最小平衡集称为 A 的平衡包	
$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	佩龙积分	Perron integral	$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \inf\{U(b)\} = \sup\{V(b)\}$，其中 $U(x)$ 和 $V(x)$ 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的上函数和下函数	$f(x)$ 在$[a,b]$上的佩龙积分值和勒贝格积分值相等
$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	瓦尔德积分	Wald integral	$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_G(G(b)) - (G(a)) = \inf(H(b) - H(a))$，其中 $H(x)$，$G(x)$ 各为 $f(x)$ 的瓦尔德上、下函数	瓦尔德积分与佩龙积分等价

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	亨斯托克积分	Henstock integral	一种定积分，亨斯托克积分包括(R)积分，也包括(L)积分	
$(M)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	马克仙积分	Mcshane integral	一种定积分，马克仙积分与勒贝格积分等价	
$f_n \xrightarrow{L^p} f$	L^p的强收敛	strong convergence in L^p	若$f_n(x),f(x)\in L^p(E),(1\leqslant p<+\infty,n=1,2,\cdots,)$，且存在$\\|f_n-f\\|_p\to 0(n\to\infty)$，则称$\{f_n(x)\}$强收敛于$f(x)$	亦称按L^p范数收敛于$f(x)$
$f_n \xrightarrow{W} f$	L^p的弱收敛	weak convergence in L^p	若$f_n(x),f(x)\in L^p(E),g(x)\in L^q(E),(1<p,q<+\infty,n=1,2,\cdots,)$且$1/p+1/q=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$成立，则称$\{f_n(x)\}$弱收敛于$f(x)$	
l^p	l^p空间	l^p space	所有满足$\\|x\\|_p=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^p)^{1/p}<+\infty$的数列$x$组成之集	
l^∞	l^∞空间	l^∞ space	满足$\|x_n\|\leqslant M<+\infty(n=1,2,\cdots,)$的所有数列之集．$x$的范数由$\\|x\\|_\infty=\sup\limits_n\{\|x_n\|\}$定义	
$\Lambda(\psi)$	洛伦茨空间	Lorentz space	$\Lambda(\psi)=\{f\in S[0,1]\mid \\|f\\|<+\infty\}$称为洛伦茨空间	
L_Φ	奥尔里奇空间	Orlicz space	所有使得 $\\|f\\| = \inf\left\{\lambda>0\mid\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\lambda^{-1}\|f(t)\|)\mathrm{d}t\leqslant 1\right\}<+\infty$ 成立的$\mathbb{R}$上的可测函数f之集	
ent	拓扑熵	toplogical entropy	这是用于拓扑动力学中的一个概念	
$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	雅可比多项式	Jacobi polynomials	$[-1,1]$上关于权$\omega(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$的正交多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\dfrac{1}{n!2^n\omega(x)\mathrm{d}x^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n\omega(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$	
$r_n(x)$	拉德马赫尔函数	Rademacher functions	$r_n(x)=\mathrm{sig}\ n\sin 2^{n+1}x\quad(0\leqslant x\leqslant 1,n=1,2,\cdots)$	
$W_n(x)$	沃尔什函数	Walsh functions	$W_n=r_{k_1}(x)r_{k_2}(x)\cdots r_{k_p}(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$	
$B_n(f,x)$	伯恩施坦多项式	Bernstein polynomial	$B_n(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$	亦称伯恩施坦算子
$H_\varepsilon(A)$	度量熵	metric entropy	设A是巴拿赫空间X的紧子集，A的ε覆盖$\{U_k\}_{k=1}^n$，令$N_\varepsilon(A)=\min n$，则$H_\varepsilon(A)=\log N_\varepsilon(A)$	
$H_\varepsilon^X(A)$	A关于X的熵	entropy of A with respect to X	设A是巴拿赫空间X的紧子集，A的ε网$\{x_k\}_{k=1}^p$，令$P_\varepsilon(A)=\min P$，则$H_\varepsilon^X(A)=\log P_\varepsilon(A)$	
$C_\varepsilon(A)$	容量	capacity	设A是巴拿赫空间X的紧子集，A的$\varepsilon\gamma$分离$\{y_k\}_{k=1}^m$，令$M_\varepsilon(A)=\max m$，则$H_\varepsilon(A)=\log M_\varepsilon(A)$	
L_n	勒贝格常数	Lebesgue constant	$L_n=\dfrac{4}{\pi^2}\log(n+1)+o(1)$	
$\deg(\pi)$	分歧阶	ramification order	使π在A_k恒为1的最小整数k	
PX	X的子集簇	subsets of X	集合X的一切子集组成的集合	亦称幂集合
Δ	对称差	symmetric difference	$A\Delta B$的对称差指属于A但不属于B，或属于B但不属于A的一切元素组成的集合	
$P\cdot P\cdot P$	近乎处处	approximately everywhere	设$P=P(x)$是一个与x无关的性质，如果使P不成立的点全体所成之集A为零内容集，则称P是近乎处处成立的	
$q\cdot P\cdot$	拟乎处处	quasi-everywhere	设$P=P(x)$是一个与x无关的性质，如果A为零外容集，则称P是拟乎处处成立的	
$\mathrm{cap}(G)$	χ容量	χ-capacity	对于相对紧的开集G，记$\mathrm{cap}(G)=\int\mathrm{d}\sigma_G$，其中$\sigma_G$是由$R_{\omega x}^G=\chi^*\sigma_G$所确定的惟一测度	
U_K^μ	位势	potential	测度μ的K位势为 $U_K^\mu=\int_\Theta K(x,y)d\mu(y)\quad(x\in\Omega)$	
U_α^μ	里斯位势	Riesz potential	对于位势U_K^μ，当$\Omega=R^n(n\geqslant 3),0<\alpha<n,\kappa(x,y)=\|x-y\|^{\alpha-n}$时，称为里斯位势	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
U_2^a	牛顿位势	Newtonian potential	对于里斯位势 $\alpha = 2$ 时，称为牛顿位势	
(f,g)	内积	inter product	$(f,g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}u(x)$	
σ	舒伯特符号	Schubert symbol	$\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 表示 n 个整数组成的一个序列，其中 $1 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n \leqslant m$	
Lin E	线性包	linear hull	$\mathrm{Lin}\,E = \{x \mid x = \sum_{y\in E} \lambda_y y, \lambda_y \in R$，有限个不为零$\}$	Lin$E$ 亦表示凸集 E 的支撑子空间
affE	仿射包	affine hull	$\mathrm{aff}E = \{x \mid x = \sum_{y\in E} \lambda_y y, \lambda_y \in R$，有限个不为零，$\sum_{y\in E} \lambda_y = 1\}$	
coneE	锥包	cone hull	$\mathrm{cone}E = \{x \mid x = \lambda y, y \in E, \lambda > 0\} = \bigcup_{\lambda>0} \lambda E$	
coE	凸包(凸集)	covex hull	$\mathrm{co}E = \{x \mid x = \sum_{y\in E} \lambda_y y, \lambda_y \in [0,1]$，有限个不为零，$\sum_{y\in E} \lambda_y = 1\}$	
clcoE	闭凸包	closed convex hull	以 C 为内集的全体闭包凸集的交	
epif	上图	epigraph	$\mathrm{epi}f = \{(x,a) \in X \times R \mid f(x) \leqslant \alpha\}$	
K	核	kernel	$C \subset R^n, \forall\, y \in C, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，满足 $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ 的全体 $x \in C$ 的集合称为 C 的核	
exp C	暴露点集	exposing point set	C 的全体暴露点的集合	
ext C	极点集	extreme point set	C 的全体极点的集合	
$f'(x:y)$	单边方向导数	one-side directional derivative	$f'(x:y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \dfrac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}$	
$\partial f(x)$	次微分	subdifferential	$f(x)$ 在 X 的次梯度的全体	
$I_V(M)$	奇点的指标	index of critical points	V 的孤立奇点 M 沿曲线 C_r 的旋转数	
u. a. p.	一致概周期函数	uniformly almost periodic functions	设 $f(t,x) \in C(\mathrm{R} \times D, E^n)$，$S$ 是 D 的紧集，若对任给序列 $\{a'_n\}$，存在子序列 $\{a_n\} \subset \{a'_n\}$，使 $T_a f(t,x) = \lim_{n\to\infty} f(t+a_n, x)$ 在 $R \times S$ 上一致地成立，则称 $f(t,x)$ 是一致概周期函数，$x \in D$	
a. a. p.	渐进概周期函数	asymptotically almost periodic functions	如果 $\varphi(t)$ 有分解式 $\varphi(t) = p(t) + q(t)$，其中 $p(t)$ 是 R 上的概周期函数，$q(t)$ 是定义在 R^+（或 R^-）上的连续函数，当 $t \to +\infty$ 或 $(t \to -\infty)$ 时有 $q(t) \to 0$，则称 $\varphi(t)$ 是 R^+（或 R^-）上的渐进概周期函数	
RFDE(f)	滞后型泛函微分方程	retarded function differential equation	$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x(t), x(t-h_1), \cdots, x(t-h_m))$. $(h_1, h_2, \cdots, h_m$ 是正定数，$h_1 < h_2 < \cdots < h_m)$	RFDE 是英文名中四个单词的第一个字母
H. S.	哈密顿系统	Hamilton's system	指形如 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$，$H = H(p,q,t)$ 的一阶偏微分方程	亦称典型系统或正则系统
$\int^x a(s)\mathrm{d}s$	反导数	antiderivative	表示 $a(x)$ 的反导数	

概率统计(Probability & Statistics)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
P, P_r	概率	probability	$P(E)$表示事件 E 的概率，$P_r(\xi)$表示事件 ξ 的概率	$P_{n,m}$ 表示在 n 次独立实验中出现 m 次事件的概率
$P(\mid)$	条件概率	conditional probability	$P(A\mid B)$表示发生了事件 B 的条件下，事件 A 的概率	
E,M	期望（或均值）	expectation (or mean)	$E\xi$,$M\xi$ 表示随机变量 ξ 的期望(或均值)	亦可记为 $E(\xi)$，$M(\xi)$
D, σ^2	方差	variance	$D\xi$，$\sigma^2\xi$ 表示随机变量 ξ 的方差	亦可记为 $D(\xi)$，$\sigma^2(\xi)$，Varξ

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
cov	协方差	covariance	$\mathrm{cov}(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的协方差	或记为$\sigma_{\xi,\eta}$
$E(\mid)$, $M(\mid)$	条件期望（或条件均值）	conditional expectation or conditional mean	$E(\xi\mid y)$, $M(\xi\mid y)$表示随机变量ξ关于条件y的条件期望（或均值）	
ρ, r	相关系数	correlation coefficient	$\rho(\xi,\eta)$, $\rho_{\xi,\eta}$, $r(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的相关系数	在不致误会时，亦可记为ρ或r
Ω	基本事件空间	elementary event space	Ω是由n个基本事件$\omega_i(i\in\mathrm{N})$构成的基本事件空间，即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$	
$F_n(\ )$	频率	frequency	频率$F_n(A)$等于频数$f_n(A)$与试验总次数n之比，即 $F_n(A)=\frac{f_n(A)}{n}$	
$F(\mid)$	条件分布函数	conditional distribution function	ξ和η为随机变量，则称$F(y\mid x)$为在$\xi=x$条件下η的条件分布函数	
ν_k	k阶原点矩	origin moment of the k-th order	ξ的k阶原点矩$\nu_k=E(\xi^k)$	
μ_k	k阶中心矩	central moment of the k-th order	ξ的k阶中心矩$\mu_k=E(\xi-E\xi)^k$	
α_k	k阶原点绝对矩	origin absolute moment of the$k$-th order	ξ的k阶原点绝对矩$\alpha_k=E\lvert\xi\rvert^k$	
β_k	k阶中心绝对矩	central absolute moment of the k-th order	ξ的k阶中心绝对矩$\beta_k=E\lvert\xi-E\xi\rvert^k$	
$E(\ )$	混合矩	mixed moment	若$E\lvert\xi^k\eta^l\rvert<\infty$, $k,l\in\mathrm{N}$，则称$E(\xi^k\eta^l)$为ξ和η的$k+l$阶混合矩	
$E[\ ]$	中心混合矩	central mixed moment	若$E(\lvert\xi-E\xi\rvert^k\lvert\eta-E\eta\rvert^l)<\infty$，且$k,l\in\mathrm{N}$，则称$E[(\xi-E\xi)^k(\eta-E\eta)^l]$为$\xi$和$\eta$的$k+l$阶中心混合矩	
$B(n,p)$	二项分布	binomial distribution	分布列为$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ $(0<p<1, q=1-p, k=0,1,2,\cdots,n)$	
$NB(m,p)$	负二项分布	negative binomial distribution	密度函数为$p_x=\Gamma(m+x)[\Gamma(m)x!]^{-1}p^mq^x$（$m$为整数，$0<p<1$, $q=1-p$, $x=0,1,2,\cdots$）	
$G(p)$ 或$g(k;p)$	几何分布	geometric distribution	密度函数为 $p_x=pq^x(0<p<1, q=1-p, x=0,1,2,\cdots)$	
$H(N,n,p)$	超几何分布	hypergeometric distribution	密度函数为$p_x=\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$（$x$为整数，$N$, Np, n为正整数，$N\geqslant n$, $0\leqslant x\leqslant Np$, $0\leqslant n-x\leqslant Nq$, $0<p<1$, $q=1-p$）	
$M(n;p_1,\cdots,p_{k+1})$	多维超几何分布	multiple hypergeometric distribution	密度函数为$p_{x_i}=\binom{Np_1}{x_1}\cdots\binom{Np_{k+1}}{x_{k+1}}\Big/\binom{N}{n}$（$i=1,2,\cdots,k+1$），$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$是整数，$N,Np_1,\cdots,Np_{k+1},n$是正整数，$x_{k+1}=n-(x_1+\cdots+x_k)$, $p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}>0$）	
$P(\lambda)$ 或$P(k;\lambda)$	泊松分布	Poisson distribution	分布列为$p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda>0, k=0,1,2,\cdots)$	
$U(a,b)$ 或$U[a,b]$	均匀分布	uniform distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}1/(b-a) & (a\leqslant x\leqslant b),\\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$ 其中$a<b$为常数	
$N(\mu,\sigma^2)$	正态分布	normal distribution	密度函数为$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $(-\infty<x<+\infty, \sigma>0, \mu$为常数)	亦称高斯分布
$C(\lambda,\mu)$	柯西分布	Cauchy distribution	密度函数为$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$，其中$x$为实数，$\lambda>0$, μ为常数	
$\Gamma(\lambda,r)$	伽马分布	gamma distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中$r>0$, $\lambda>0$为常数	亦可记为$G(\lambda,r)$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$e(\lambda)$	指数分布	exponential distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0),\end{cases}$ 其中 λ 为常数	亦可记为 $e(\mu,\sigma)$
$W(\lambda,\alpha)$	韦布尔分布	Weibull's distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha}) & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，$\alpha>0$ 为常数	
$\chi^2(n)$	χ^2 分布	Chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{(n-2)/2}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为正整数	
$\mathrm{Ln}(\mu,\sigma^2)$	对数正态分布	logarithmic normal distribution	密度函数为 $P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-a)^2/2\sigma^2} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $a,\sigma>0$ 为常数	
$t(n)$	学生分布	Student's distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$， 其中 n 为正整数	亦称 t 分布
$F(n_1,n_2)$	F 分布	F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\dfrac{n_1}{2},\dfrac{n_2}{2}\right)}n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}(n_2+n_1x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n_1,n_2 为正整数	
$E(\alpha,\beta)$	极值分布	extremal distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left\{\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right\}$， 其中 x,α 均为实数，β 为常数	
$\chi^2(n,\lambda)$	非中心 χ^2 分布	non-central chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left\{-\left(\dfrac{x+\lambda}{2}\right)\right\}}{2^{n/2}}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{x^{\frac{n}{2}+j-1}\lambda^j}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+j\right)2^{2j}j!} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为自由度；$\lambda>0$ 为非中心参数	
$t(n,\delta)$	非中心 t 分布	non-central t-distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{n^{n/2}\exp(-\delta^2/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)(n+x^2)^{(n+1)/2}}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)\left(\dfrac{\delta^m}{m!}\right)\left(\dfrac{2x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{n}{2}}$， 其中 n 为自由度，δ 为实数，且是非中心参数	
$F(m,n;\lambda)$	非中心 F 分布	non-central F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{\lambda}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda m x}{2}\right)^k\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+k\right)k!(mx+n)^{\frac{m+n}{2}+k}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 m,n 为二自由度，λ 为非中心参数	
$X_1^{(n)}$	最小顺序统计量	smallest order statistics	$X_1^{(n)}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最小者	
$X_n^{(n)}$	最大顺序统计量	largest order statistics	$X_n^{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最大者	
$\bar{x}$	样本均值	sample mean	$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_n(x)$	
s^2	样本方差	sample variance	$s^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2\mathrm{d}F_n(x)$	
a_k	样本 k 阶原点矩	sample origin moment of the k-th order	$a_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F_n(x)\quad(k=2,3,\cdots)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
b_k	样本 k 阶中心矩	sample central moment of the k-th order	$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^k\mathrm{d}F_n(x)$ $(k=2,3,\cdots)$	
μ	总体均值	population mean	$\mu=E(X)$	
σ^2	总体方差	population variance	$\sigma^2=D(X)=E(X-\mu)^2$	
α_k	总体 k 阶原点矩	population origin moment of the k-th order	$\alpha_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F(x)$	
μ_k	总体 k 阶中心矩	population central moment of the k-th order	$\mu_k=E(X-\mu)^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k\mathrm{d}F(x)$	
Md	样本中位数	sample median	$\mathrm{Md}X=\begin{cases}X_{k+1}, & 若\ n=2k+1,\\ (X_k+X_{k+1})/2, & 若\ n=2k\end{cases}$	亦可用 $\tilde{X}$ 表示
Sk	样本偏度	sample skewness	样本三阶中心矩除以样本二阶中心矩的3/2次幂的商，即 $\mathrm{Sk}=\frac{b_3}{(b_2)^{3/2}}$	亦称样本偏态或偏态系数
Kur	样本峰度	sample kurtosis	样本四阶中心矩除以样本二阶中心矩的平方再减去3，即 $\mathrm{Kur}=\frac{b_4}{(b_2)^2}-3$	亦称样本峭度
$\mathrm{d}f$, f	自由度	degree of freedom	$\mathrm{d}f_A$，f_A 表示因素 A 的自由度	
$E_x(s)$	特征函数	characteristic	函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX}$ 的数学期望，即 $E_x(s)=M[\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX}]$	
$H[x]$	熵	entorpy	离散型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log_a P_i$；连续型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\log_a f(x)\mathrm{d}x$	
$f(k;r,p)$	帕斯卡分布式	Pascal distribution	分布函数为 $f(k;r,p)=C_{k-1}^{r-1}p^rq^{r-1}\quad(k=r,r+1,\cdots)$	
$P_{i.}$ 或 $P_{.j}$	边缘概率	boundary probability	离散型随机变量的边缘概率分布式为 $P_{i.}=\sum_j P_{ij}$，$P_{.j}=\sum_i P_{ij}$	
$N(\mu,\Sigma)$ 或 $N_n(\mu,\Sigma)$	多维正态分布	normal distribution	N 维正态分布的密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\lvert\Sigma\rvert}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)\}(x\in\mathrm{R}^n)$	
S_n^*	S_n 的标准化	standardization of S	$S_n^*=\sum_{k=1}^{n}(X_k-a_k)/S_n$	
ω	样本点	sample point	随机试验的每一个可能的结果	亦称基本事件
ϕ	不可能事件	non-probability event	随机试验不可能发生的结果	
E^n	伯努利试验	Bernoulli trials	随机试验 E 只有两个可能的结果，并且其概率为 p，q，其中 $q=1-p$，把 E 独立地重复 n 次试验构成了一个试验	亦称伯努利概型
σ_ξ	标准差	root-mean square deviation	方差的平方根	亦称根方差
CL	中线	middle line	表示控制图中中线	
UCL	上控制线	upper control linear	表示控制图中上控制线	
LCL	下控制线	lower control linear	表示控制图中下控制线	
$(n\mid C)$	抽检方案	sampling inspection plan	表示子样的容量为 n 和允许的不合格数为 C	
T	寿命	longevity	对任一特定个体(产品或生命体)，从某个标准时间起在规定时间 t 内失效(或死亡)	
$R(t)$	可靠度	reliability	产品在规定的条件下，规定的时间内，完成规定功能的概率	
ρ_r	可靠寿命	reliability life	使可靠度等于给定值 r 的时间	$\rho_{0.5}$称为中位寿命
$\lambda(t)$	失效率	failure rate	产品工作到 t 时刻后单位时间内发生失效的概率	
MTBF	平均无故障工作时间	mean time between failures	平均寿命对可修复产品	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
MTTF	失效前的平均工作时间	worked mean time before failure	平均寿命对不可修复产品	
PDF	概率分布函数	probability distribution function	$F(x)=P(\xi(\omega)<x), x\in(-\infty,+\infty)$	简称分布函数
MLE	极大似然估计	maximum likelihood estimate	使似然函数 $L(p)$ 达到极大值的参数 P	
$\hat{\theta}$	估计量	estimator	当区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 以某一指定的概率包含 θ 时，称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为函数 θ 的区间估计	
R	样本极差	sample range	$R=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}-\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示取样本中最大值与最小值之差	亦称样本范围，又称样本全距
H_0	原假设	null hypothesis	假设检验中，对有关总体需要作出判断的待检验的命题的假设	亦称零假设
H_1, H_a	备择假设	alternative hypothesis	假设检验中，异于原假设的另一假设	亦称择一假设
u, λ, t	临界值	critical value	u_α，λ_α, t_α 表示置信度为 α 的临界值	
Q	离差平方和	sum of squares of deviations	总离差平方和 $Q=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2$； 组内离差平方和 $Q_1=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$； 组间离差平方和 $Q_2=n\sum\limits_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-\bar{x})^2$； 因素 A 的离差平方和 $Q_A=n\sum\limits_{i=1}^{n}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2$； 误差平方和 $Q_E=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$	
*	显著性标记	significance marked	* 表示作用显著．* * 表示作用高度显著	
$\times$	交互作用	interaction	$A\times B$ 表示因素 A,B 的交互作用	
$L(\ \ )$	正交表示标记	orthogonal layout marked	$L_4(2^3)$ 表示二水平三因素，需作四次试验的正交表示	
vec	列拉直算子	operator of according to columns draw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按列依次拉直排序，即 $\mathrm{vec}(A)=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{nm})$	
ran	行拉直算子	operator of according to rowsdraw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按行依次拉直排序，即 $\mathrm{ran}(A)=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1m},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2m},\cdots,a_{nm})$	

应用数学（Applied mathematics）

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\underset{\sim}{A}$	模糊子集	fuzzy subset	$\underset{\sim}{A}=\{x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mid x\in X\}$，其中集 X 为论域，$\forall\ x\in X$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]$ 是模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数	亦称模糊集、弗晰集、不分明集、乏晰集等
$\vee$	模糊子集的上确界	supremum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigvee\limits_{t\in T}a_t=\sup\{a_t\mid t\in T\}$	
$\wedge$	模糊子集的下确界	infimum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigwedge\limits_{t\in T}a_t=\inf\{a_t\mid t\in T\}$	
$\overset{\wedge}{+}$	代数和	algebraic sum	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\overset{\wedge}{+}\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ $=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
$\cdot$	代数积	algebraic product	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
$\oplus$	有界和	bounded sum	$a\oplus b=\min(a+b,1)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0, p>0$
$\otimes$	有界积	bounded product	$a\otimes b=\max(a+b-1,0)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0, p>0$
$\overset{+}{\varepsilon}$	爱因斯坦和	Einstein's sum	$a\overset{+}{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+ab}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0, p>0$
$\dot{\varepsilon}$	爱因斯坦积	Einstein's product	$a\dot{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0, p>0$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\overset{\vee}{\gamma}$	伽玛和	gamma sum	$a\overset{\vee}{\gamma}b=\frac{a\overset{\wedge}{+}b-(1-\gamma)ab}{\gamma-(1-\gamma)(1-ab)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$
$\dot{\gamma}$	伽玛积	gamma product	$a\dot{\gamma}b=\frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a\overset{\wedge}{+}b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$
$\overset{\vee}{p}$	雅格和	Yager sum	$a\overset{\vee}{p}b=\min(1,(a^p+b^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$
$\hat{p}$	雅格积	Yager product	$a\hat{p}b=1-\min(1,((1-a)^p+(1-b)^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$
$\sqcup$	取大运算	operation of fetch large	$\underset{\sim}{m}\sqcup\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\vee y$，$\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{n}$ 分别表示模糊数，即 $\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/x$，$\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{n}}(x)/y$	
$\sqcap$	取小运算	operation of fetch small	$\underset{\sim}{m}\sqcap\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\wedge y$	
$\neg$	减法运算	operation of subtraction	$\neg\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/(1-x)$	
$\rightsquigarrow$	模糊映射	fuzzy mapping	$f:X\rightsquigarrow Y$ 表示从 X 到 Y 的模糊函数	不同的场合中，模糊函数常有不同的定义
$\ominus$	有界差	bounded difference	$(A\ominus B)(x)=\max\{0,A(x)-B(x)\}$	
$\underset{\sim}{\leqslant}$	小于等于的放宽	relax restrictions of less or equal	$Ax\underset{\sim}{\leqslant}b\ (x\geqslant0)$ 表示约束条件 $Ax\leqslant b,x\geqslant0$ 的软化	
$D_{\rm fix}$	不动度	fixed degree	$D_{\rm fix}(x,F)=\alpha$，表示 x 关于模糊映射 $F:X\rightsquigarrow\mathscr{F}(X)$ 的不动度为 α，$\mathscr{F}(X)$ 表示 X 上所有模糊集组成的集	
e^*	绝对误差	absolute error	$e^*=x^*-x$，式中 x 表示精确值，x^* 为 x 的近似值	常简称误差
ε^*	误差限	limit of approximate value	$\|x^*\|<\varepsilon^*$，式中 x^* 为 x 的近似值，ε^* 为近似值 x^* 的误差限	
e_r^*	相对误差	relative error	$e_r^*=\frac{e^*}{x^*}$，式中 x 表示精确值，e^* 表示 x 的绝对误差，e_r^* 表示相对误差，它表示误差 e^* 关于近似值 x^* 的近似程度	
ε_r^*	相对误差限	limit of relative error	$\|e_r^*\|<\varepsilon_r^*$，式中 e_r^* 表示相对误差	
δ	最大相对误差	maximal relation error	$\|e_r^*\|=\frac{\|e^*\|}{\|x^*\|}\leqslant\delta$，式中 x^* 表示近似值，e^* 和 e_r^* 分别表示绝对误差和相对误差，取不等式成立的最小数 δ 为最大相对误差	
σ	标准误差	standard error	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n}}$，式中 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2$ 为误差平方和	
η	平均误差	mean error	$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\bar{x}\|}{n}$，式中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是算术平均值	
v_i	离差	dispersion	$v_i=x_i-\bar{x}\quad(i=1,2,\cdots,n)$	
ν	概率误差	probabilistic error	$P(\|\alpha\|\leqslant\nu)=1/2$ 表示数 α 的绝对值大于它的误差和小于它的误差出现的可能性一样大	
PS	多项式组	polynomial set	PS 表示由有限个非零多项式构成的集合	
Zero(•)	多项式的公共零点集	zero points set of polynomials	Zero (PS)表示多项式组 PS 中的多项式的公共零点集	
Res	结式	resultant	$\mathrm{Res}(p,q,x)=a_n^kb_k^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(\alpha_i-\beta_j)$，式中 α_i,β_j 分别是多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的根，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 分别为 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\bar{\cup}$	合一运算	unification	$a\bar{\cup}b=a$,式中 a,b 均为原子,当且仅当 $a=b$ 时成立,否则 $a\bar{\cup}b$ 为空,集合论中的并运算是合一运算的特殊情况.	当原子不可分解时,合一的结果等于并集
R	羡余度	redundancy	$R=1-\dfrac{H_\infty}{H_0}$,式中 R 表示语言的羡余度,H_∞ 是极限熵,H_0 是语言成分等概率不相关时的熵	亦称冗余度
$E_t^{(p)}$	p 次指数平滑值	exponential smoothing value of pth	$E_t^{(1)}=\alpha\sum(1-\alpha)^i E_{t-i}^{p-1}$ $(p=2,3,\cdots)$,其中 $\alpha(1-\alpha)^i$ $(i=0,1,2,\cdots)$ 为当期序列值的影响权数,α 的一般范围在区间[0.1,0.5]内,适当选取 α 的值是保证预测的关键	当 $p=1$ 时即为一次指数平滑值 $E_t^{(1)}$
$\omega_t^{(p)}$	p 次加权平滑值	weight smoothing value of pth	$w_t^{(p)}=\alpha_0\sum_{i=1}^{\infty}d_i w_{t-i}^{p-1}$ $(t=\cdots,-1,0,1,\cdots,T)$,其中 $\alpha_i(i=0,1,2,\cdots)$ 为当期序列值的影响权数,$\alpha\in[0.1,0.5]$	当 $p=1$ 时为一次加权平滑值
VIF	协方差扩大因子	amplification factor of covariance	$\mathrm{VIF}(\hat{\beta}_i)=\dfrac{1}{1-R^2}$,式中 $\hat{\beta}_i$ 为线性回归模型 $y=X\beta+\varepsilon$ 中 X 的第 i 个消费者预算参数 β_i 的估计值,R 为 X 的多重相关系数	
$r_u(x)$	风险厌恶度量	risk aversion measure	$r_u(x)=-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$,式中 u 为消费者的效用函数,自变量 x 可理解为收入	亦称 Arrow-Pratt 风险厌恶度量
S	价格单纯形	price simplex	$S=\{\boldsymbol{p}\in\mathrm{R}^l \mid p_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^{l}p_k=1\}$,式中 R^l 是商品空间,$\boldsymbol{p}$ 表示价格向量	
β_i	预算映射	budget mapping	$\beta_i(p)=\{x\in X_i \mid p\cdot x\leqslant p\cdot e_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)\}$,式中 $\beta_i(p)$ 和 X_i 分别表示第 i 个消费者的预算映射和消费集,π_j 是第 j 个生产者的利润函数	
a_{ij}	直接消耗系数	direct consumption coefficient	$a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,x_{ij} 表示第 i,j 两个部门的流量,x_j 表示第 j 个部门的总产品量	
b_{ij}	完全消耗系数	total consumption coefficient	$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{is}a_{sk}a_{kj}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{it}a_{ts}a_{sk}a_{kj}+\cdots(i,j=1,2,\cdots,n)$,式中 a_{ij} 是直接消耗系数,b_{ij} 表示第 j 个产品部门对第 i 种产品的完全消耗系数	
c_{ij}	完全需求系数	total demand coefficient	$c_{ii}=1+b_{ij}c_{ij}-b_{ij}(i\neq j)$,表示产品部门提供单位最终产品对所有产品部门产品的需求量,b_{ij} 表示第 i,j 两个产品部门之间的完全消耗系数,c_{ij} 表示第 j 个产品部门产出单位最终产品对第 i 个产品部门的需求量	
d_{ij}	投资系数	investment coefficient	动态投入产出模型中常用的统计指标,$d_{ij}=\dfrac{k_{ij}^t}{x_j^{t+1}-x_j^t}$,表示在 $t+1$ 时第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 部门增加单位产品需要第 i 投资部门在时间 t 供给第 j 部门产品的数量.k_{ij}^t 表示 t 时 i 投资部门供给 j 部门产品总量,x_j^t 表示 j 部门 t 时的产品总量	
$L_{项}$	时滞	time lag	$L_{项}=[\alpha_1(n-0.5)+\alpha_2(n-1.5)+\cdots+\alpha_n 0.5]/100$ 为项目投资时滞,其中 α_i 为第 i 年投资占总投资的比重,n 为建设周期	
$L_{年}$	时滞	time lag	$L_{年}=\sum_{i=1}^{n}I_i n_i\Big/\sum_{i=1}^{n}I_i$ 为全年总投资时滞,式中 I_i 分配到 i 部门的投资.n_i 为 i 部门以外为单位的时滞	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	应变张量	strain tensor	$\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $(i,j=1,2,3)$,x_i,x_j 表示应变张量分量,u_i,u_j 表示位移分量	
k	高斯常数	Gauss constant	k≈0.017 202 098 95	
$\triangleq$	专用等号	symbol for special use	$a\oplus b\triangleq\max\{a,b\}$;$a\otimes b\triangleq a+b$ 表示极大代数中加法和乘法的定义	

符 号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备 注
Tayl	尾部	tail	$f=J^kf+\text{Tayl}\,f$，式中 J^kf 是 f 在原点的泰勒展开式中保留 k 阶以下的多项式部分，截去的部分称为 f 的尾部，记为 Tayl f	
#()	袋	bag	$\#(x,B)$ 表示元素 x 在袋 B 中出现的次数. $\forall x\in B$，$0\leqslant\#(x,B)\leqslant1$ 时，袋 B 就蜕化为普通集合 B	
$W(s)$	传递函数	transfer function	$W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{Q(s)}{P(s)}$，式中 $Y(s)$，$U(s)$ 分别为输出量和输入量的拉普拉斯变换式，$Q(s)$，$P(s)$ 分别为 $W(s)$ 的分子、分母多项式	
cond	条件数	condition number	称 $\text{cond}\,G=\dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\geqslant1$ 为矩阵 G 的条件数，cond G 越大，矩阵 G 越趋于欠秩	
diag	对角元	diagonal element	设 $S=\text{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p)$，则称 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,p)$ 为对角矩阵 S 的对角元	
blockdiag	块对角元	block diagonal element	设 $X=\text{block diag}(\Delta_1,\cdots,\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_2,\cdots,\Delta_r,\cdots,\Delta_r)$，其中 Δ_i 为 k_i 阶方阵，则称 Δ_i 为块对角矩阵的块对角元	
arg(·)	相角	phase angle	$\arg(g(\text{j}\omega))$ 称为相角，其中 $g(\text{j}\omega)$ 为 $m\times n$ 阶复阵函数，j 为虚数单位	
conv(·)	凸包	convex hull	$\text{conv}\,f(\text{j}\omega,\Gamma)=\text{conv}\,f(\text{j}\omega,\Gamma_0)$，式中 conv(·) 表示 R^2 上的凸包，$\omega\in\mathsf{R}$，j 为虚数单位，$\Gamma_0\triangleq\{\nu\mid\nu_i=0,1;\ i=1,2,\cdots,m\}$ 为 $\nu_i(i=1,2,\cdots,m)$ 中的多仿射函数	
$\asymp$	等序关系	equals order relation	若 z_1,z_2 为两个非零复数，且 $\dfrac{z_2}{z_1}\neq0$，则记为 $z_1\asymp z_2$	
ess sup	本质上确界	essential supremum	$\text{ess}\sup\limits_{\omega}\sigma(G(\text{j}\omega))$ 表示 $m\times n$ 阶复矩阵值函数 $G(\text{j}\omega)$ 的本质上确界，即除去 ω 的一个零测子集后的上确界	
s.t	约束条件	constraint condition	$\max f=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$， $\text{s.t}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j\geqslant0 & (j=1,2,\cdots,n),\end{cases}\quad(*)$. 目标函数 max f 必须满足（$*$）中的条件	
$\overset{\text{L}}{>}$	字典序	lexicographicall order	$V\overset{\text{L}}{>}0$ 表示字典式为正的；$V\overset{\text{L}}{<}0$ 表示字典式为负的；Lex min 表示字典式最小	$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 n 维向量空间的向量
$\underline{\delta}_B$	下特征数	low characteristic number	$\underline{\delta}_B=\begin{cases}\max\left\{-\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\,\middle\vert\,\lambda_j^*<0\right\} & (\exists\ \lambda_j^*<0),\\ -\infty & (\bar{\exists}\ \lambda_j^*<0),\end{cases}$ $\underline{\delta}_B$ 称为基 B 的下特征数 λ_j,λ_j^* 为检验数	
$\bar{\delta}_B$	上特征数	above characteristic number	$\bar{\delta}_B=\begin{cases}\min\left\{-\dfrac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\mid\lambda_j^*>0\right\}, & \exists\ \lambda_j^*>0,\\ +\infty, & \bar{\exists}\ \lambda_j^*>0,\end{cases}$ $\bar{\delta}_B$ 称为基 B 的上特征数，λ_i,λ_j^* 为检验数	
⋙	等级标志关系	relation of order mark	$p_i⋙p_j$ 表示在一个单目标函数 $\min f=p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_lf_l$ 中，$p_1,p_2,\cdots,p_l$ 为等级标志关系	
$P(\cdot)$	策略	policy	P 表示最优策略. $P_{k,n}^*(x_k)$ 表示最优子策略，是初始状态为 x_k 的后部子过程所有子策略中最优者	
opt	最优值	optimum value	$\text{opt}\,v_{k,n}[x_k,P_{k,n}(x_k)]$ 表示指标函数 $v_{k,n}$ 的最优值，$P_{k,n}$ 表示子策略是从第 k 段开始到终点过程的策略	
pos	正线性组合集	set of positive linear combination	$\text{pos}A=\{\alpha\mid\alpha\in\mathsf{R}^m,\ \alpha=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_jA_j,\ \beta_j\geqslant0,j=1,2,\cdots,n\}$ 表示由矩阵 A 的各列的正线性组合组成的集合	
epi	上图	epigraph	$\text{epi}\ f=\{(x,\alpha)\mid\alpha\geqslant f(x)\}$ 表示函数 $f(x)(x\in\mathsf{R}^n)$ 的上图，若给定 epi f，则 $f(x)=\min\{x\mid(x,\alpha)\in\text{epi}\ f\}$	
/	排队记法	queueing notation	$X/Y/Z/C$ 为排队记法，其中 X,Y,Z,C 的意义依次为：1. 相继到达间隔时间的分布；2. 服务时间的分布；3. 服务台的数目；4. 允许的顾客容量	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Ls	队长期望值	team length expected value	$Ls=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的队长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Lq	队列长期望值	queueing length expected value	$Lq=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=Ls-P=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的队列长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Ws	逗留时间期望值	expected value of staying time	$Ws=E[W]=\frac{1}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的逗留时间期望值	
Wq	等待时间期望值	expected value of waiting time	$Wq=Ws-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的等待时间期望值	
G	对策	games	对策 $G=(S_1,S_2,A)$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 表示局中人 I 的纯策略集合，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 表示局中人 Ⅱ 的纯策略集合．$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示支付（赢得）矩阵	
V_G	对策值	games value	$V_G=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}$ 称为对策 $G=\{S_1,S_2,A\}$ 的值	
Te	噪声温度	noise temperature	$Te=\frac{N}{kB}(k)$，其中 N 为噪声功率，k 为玻耳兹曼常数，B 为频带宽度（Hz）	
γ	传播常数	propagation constant	$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{Z_1r_1}$，其中 α 表示衰减常数（Np/m，dB/M），β 表示相移常数（rad/m）	
Lt	传输损耗	loss of transmission	$Lt=32.45+20\lg f+20\lg d+A-G_t-G_r$，式中 f 为工作频率（MHz），d 为传输距离（km），A 为电路衰减（dB），G_t，G_r 分别为发射天线与接收天线的增益（dB）	
C	信道容量	channel capacity	$C=\max_{P(x)}I(x;y)$，其中 $P(x)$ 为输入符号概率（或概率密度），$I(x;y)$ 为互信息量	
$R(D^*)$	信源率失真函数	source rate distortional function	$R(D^*)=\min\{I(u;v)\}$，$P(v_j\|u_j)\in B_D$，其中 D^* 为信源的允许平均失真度，$I(u;v)$ 为平均互信息量	
I_A	自信息量	self-information	$I_A=\log\frac{1}{P(A)}=-\log P(A)$，式中 $P(A)$ 为随机事件 A 发生的概率，I_A 表示 A 的自信息量	
$I(x;y)$	互信息量	mutual information	$I(x;y)=\log\frac{P(x\|y)}{P(y)}$，式中 y 表示收到的消息，x 表示收到消息的某事件的信息量	
$I(X;Y)$	平均互信息量	average mutual information	$I(X;Y)=H(X)-H(X\|Y)$，其中 $H(X)$ 代表接收到输出符号集 Y 以前关于输入符号集 X 的平均不确定性；$H(X\|Y)$ 代表接收到输出符号集 Y 后关于输入符号集 X 的平均不确定性	
$\oplus$	逻辑导式运算符号	operational symbol of logical derived rule	$D(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\oplus\beta_i)$，式中 α_i，β_j 表示长度为 n 的二进制序列码元，$\alpha_i\oplus\beta_i$ 是二进制码元相加．$D(\alpha,\beta)$ 表示 α，β 对应位置上码元取值不同的个数	
$\circledast$	周期卷积	periodic convolution	$\tilde{x}_1(n)\circledast\tilde{x}_2(n)$，式中 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 表示周期长度	
Ⓝ	循环卷积	circular convolution	$\tilde{x}_1(n)$Ⓝ$\tilde{x}_2(n)$	

撰　稿　王怀安　刘宝康　杨子胥　杨德平
段　方　郝拉娣　阎崇正
审　定　李志深　陈惠津　阎崇正

条目笔画索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉字笔画方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇀(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，㇏(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩"亅"外)归为乛(折)。第一个字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画顺序排列。

一　画

二　画

三 画

四 画

五　画

六　画

七 画

八 画

九　画

十 画

十　画

十一画

十　一　画

十 二 画

十 三 画

十　四　画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十八画

十九画

其他

条目音序索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉语拼音方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一个字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的拼音字母顺序排列。

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其　他

条目西文索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出西文标题的全部条目，提供读者按西文检索使用.

2. 条目标题按起首西文字母的顺序排列（同一字母先大写，后小写）；条目标题的西文缩写，按一个词排列。其他文种亦按此原则编排。

3. 凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。

4. 若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

其　他

中外人名译名对照表

A

阿贝尔(Abel,N. H.)
阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))
阿博加斯特(Arbogast,L. F. A.)
阿布·瓦法(Abul-Wefa)
阿达马(Hadamard,J. (-S.))
阿尔·巴塔尼(al-Battānı)
阿尔·比鲁尼(al-Birūni)
阿尔·花拉子米(al-Khowārizmī,M. ibn M.)
阿尔·霍安第(al-Khojandi,A. M.)
阿尔·卡西(al-Kāshī,G. al-D. J. M.)
阿尔冈(Argand,J. R.)
阿尔哈逊(Alhazen)
阿尔希塔斯(Archytas,(T.))
阿尔泽拉(Arzelà,C.)
阿亨瓦尔(Achenwall,G.)
阿基米德(Archimedes)
阿劳格鲁(Alaoglu,L.)
阿梅斯(Ahmes)
阿涅西(Agnesi,M. G.)
阿特金(Atkin,A. O. L.)
阿廷(Artin,E.)
阿耶波多第一(Āryabhata I)
埃尔米特(Hermite,C.)
埃拉托斯特尼(Eratosthenes)
埃森洛克(Eisenlokr,A.)
埃斯特曼(Estermann,T.)
艾伦伯格(Eilenberg,S.)
艾森斯坦(Eisenstein,F. G. M.)
爱尔特希(Erdös,P.)
爱可尔斯(Echols)
爱因斯坦(Einstein,A.)
安德森(Anderson,C.)
奥尔斯姆(Oresme,N.)
奥马·海亚姆(Omar Khayyami)
奥斯特罗格拉茨基(Остроградский,M. B.)
奥特雷德(Oughtred,W.)
奥托(Otho,V.)

B

巴罗(Barrow,I.)
巴拿赫(Banach,S.)
柏拉图(Plato)
邦贝利(Bombelli,R.)
邦别里(Bombieri,E.)
贝尔(Baire,R. L.)
贝尔(Bell,G. N.)
贝尔卡(Balcar)
贝尔奈斯(Bernays,P.)
贝尔特拉米(Beltrami,E.)
贝克(Baker,A.)
贝塞尔(Bessel,F. W.)
贝特朗(Bertrand,J. L. F.)
贝叶斯(Bayes,T.)
贝祖(Bézout,É.)
比安内梅(Bienaymé,I. -J.)
比当(Budan de Boislaurent,F. F. D.)
比恩(Byrne)
比尔吉(Bürgi,J.)
比内(Binet,J. P. M.)
毕达哥拉斯(Pythagoras)
毕格尔(Beeger)
波尔查诺(Bolzano,B.)
波尔约(Bolyai,J.)
波莱尔(Borel,(F. -É. -J. -)É.)
波利亚(Polya,G.)
波士(Boose,A.)
波斯特(Post,E. L.)
伯恩施坦(Bernstein. F.)
伯恩斯坦(Бернштейн,C. H.)
伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)
泊松(Poisson,S. -D.)
博内(Bonnet, P. -O.)
布尔(Boole,G.)
布尔曼(Burmann,H.)
布赫什塔布(Бухштаб,A. A.)
布拉利·福尔蒂(Burali-Forti,C.)
布里昂雄(Brianchon,C. J.)
布里格斯(Briggs,H.)
布列纳(Brenner,G.)
布龙(Brun,V.)
布龙克尔(Brouncker,W.)
布卢门塔尔(Blumenthal,L. O.)
布罗卡尔(Brocard,P. R. J. B. H.)
布尼亚科夫斯基(Буняковский,B. Я.)

C

策梅洛(Zermelo,E. F. F.)
程大位(Cheng Dawei)
陈景润(Chen Ching-Jun)

D

达·芬奇(da Vinci,L.)
达布(Darboux,(J.-)G.)
达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)
大马士革乌斯(Damascius,(D))
大上茂乔(Oue Shigehashi)
大禹(Da Yu)
戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)
戴煦(Dai Xu)
丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)
当德兰(Dandelin,G. P.)
德·贝西(de Bessie,F. B.)
德布鲁因(de Bruijn,N. G.)
德朗布尔(Delambre,J.-B. J.)
德洛内(Delaunay,C. E.)
德·摩根(De Morgan,A.)
德萨格(Desargues,G.)
邓玉函(Terrenz,J.)
狄俄克利斯(Diocles)
狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)
狄诺斯特拉托斯(Dinostratus)
迪费(Diffie,W.)
迪克森(Dickson,L. E.)
迪尼(Dini,U.)
迪潘(Dupin,P.-C.-F.)
笛卡儿(Descartes,R.)
蒂迈欧(Timaeus)
棣莫弗(De Moivre,A.)
丁取忠(Ding Quzhong)
丢番图(Diophantus)
杜·布瓦-雷蒙(Du Bois-Reymond,P. D. G.)

E

恩波多克尔(Enbodokel)

F

法尔廷斯(Faltings,G.)
法里(Farey,J.)
法尼亚诺(Fagnano,dei. T. G. C.)
范·德·瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)
范道文(Fan Daowen)
范德蒙德(Vandermonde,A.-T.)
范迪维尔(Vandiver,H. S.)
菲涅耳(Fresnel,A. J.)
斐波那契(Fibonacci,L.)
费尔巴哈(Feuerbach,K. W.)
费拉里(Ferrari,L.)
费雷(Free)
费马(Fermat,P. de)
费希尔(Fisher,R. A.)
冯·奥佩尔(Von Oppel)
冯·诺伊曼(von Neumann,J.)
冯·施陶特(von Staudt,K. G. C.)
弗吉尔斯(Fogels,E.)
弗拉克(Vlacq,A.)
弗兰尼克(Franěk)
弗雷格(Frege,(F. L.)G.)
弗伦克尔(Fraenkel,A. A.)
弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)
傅里(Foury,E.)
傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)
富比尼(Fubini,G.)

G

伽代尔(Gardiner,W.)
伽利略(Galilei,G.)
伽罗瓦(Galois,E.)
嘎柴拉(Ghazala,M. J.)
冈特(Gunter,E.)
高尔顿(Galton,F.)
高斯(Gauss,C. F.)
戈塞特(Gossett,W. S.)
哥德巴赫(Goldbach,C.)
哥德尔(Gödel,K.)
格拉姆(Gram,J. P.)
格拉斯曼(Grassmann,H. G.)
格兰迪(Grandi,G.)
格兰特(Graunt,J.)
格雷费(Gräffe,K. H.)
格雷果里(Gregory,J.)
格列尔特(Gellert,W.)
格林(Green,G.)
格鲁帕(Grupp,F.)
公孙龙(Gong Sunlong)
古尔丁(Guldin,P.)
关孝和(Seki Takakazu)
郭守敬(Guo Shoujing)

H

哈代(Hardy,G. H.)
哈尔(Haar,A.)
哈尔莫斯(Halmos,P. R.)
哈尔佩恩(Halpern,J. D.)
哈吉斯(Hagis,P.)
哈里奥特(Harriot,T.)
哈密顿(Hamilton,W. R.)
哈塞(Hasse,H.)
哈托格斯(Hartogs,F. M.)
海尔曼(Hellman)
海伦(Heron,(A.))
海伦尼乌斯(Helenius)
海涅(Heine,H. E.)
海森伯(Heisenberg,G.)
豪斯多夫(Hausdorff,F.)
赫尔德(Hölder,O. L.)
赫尔曼(Hermann,J.)
赫尔维茨(Hurwitz,A.)
赫姆斯(Hermes,P.)
赫维赛德(Heaviside,O.)

赫谢尔(Herschel,J. F. W.)
黑塞(Hesse,L. O.)
亨廷顿(Huntington, E. V.)
华莱士(Wallace,W.)
华林(Waring,E.)
华罗庚(Hua Loo-Keng)
怀尔斯(Wiles,A.)
怀特海(Whitehead,A. N.)
惠更斯(Huygens,C.)
惠施(Hui Shi)
霍尔(Hall,A. G.)
霍尔斯(Holls,L.)
霍尔斯特德(Halsted,G. B.)
霍克(Hok,W.)
霍纳(Horner,W. G.)
霍普夫(Hopf, H)

J

基弗(Kiefer,J. C.)
吉布斯(Gibbs,J. W.)
吉拉尔(Girard,A.)
嘉当(Cartan,H.)
贾宪(Jia Xian)
杰希(Tech,T. J.)

K

卡尔达诺(Cardano,G.)
卡尔松(Carleson,F.)
卡莱曼(Carleman,T.)
卡努里(Cagnoli)
卡诺(Carnot,L. (-N. -M.))
卡诺(Karnaugh,M.)
卡佩利(Capelli,A.)
卡塞尔斯(Cassels,J. W. S.)
卡塔朗(Catalan,E. C.)
卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)
卡西尼(Cassini,G. D.)
开普勒(Kepler,J.)
凯莱(Cayley,A.)
凯皮尔曼(Kemperman)
凯特勒(Quetelet,L. -A. -J.)
康德(Kant,I.)
康托尔(Cantor,G. (F. P.))
康托尔(Cantor,M. B.)
康熙(Kang Xi)
柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,A. H.)
柯尼希(König,D.)
柯西(Cauchy,A. -L.)
柯召(Ke Zhao)
科茨(Cotes,R.)
科恩(Cohen,P. J.)
科恩(Cohen,J. H. E.)
科克(Koch,H. von)
科珀尔伯格(Koppelberg,S.)
克拉维乌斯(Clavius,C.)
克莱罗(Clairaut,A. -C.)
克莱姆(Cramer,G.)
克莱因(Klein,(C.)F.)
克雷尔(Crelle,A. L.)
克鲁尔(Krull,W.)
克罗内克(Kronecker,L.)
克诺普(Knopp,K.)
克森诺克拉底(Xenocrates,(C.))
库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)
库利奇(Coolidge,J. L.)
库默尔(Kummer,E. E.)
奎因(Quine,W. V. O.)

L

拉比(Raabe,J. L.)
拉德马赫(Rademacher,H.)
拉盖尔(Laguerre,E. N.)
拉格朗日(Lagrange,J. -L.)
拉克鲁瓦(Lacroix,S. F.)
拉马努金(Ramanujan,S. A.)
拉梅(Lamé,G.)
拉普拉斯(Laplace,P. -S.)
拉谢娃(Rasiowa,H.)
拉伊尔(La Hire,P. de)
莱布尼茨(Leibniz,G. W.)
莱克塞尔(Лексель,A. И.)
莱默(Lehmer,D. H.)
莱默斯(Lehmus,C. L.)
莱维(lévy,P.)
兰道(Landau,E. G. H.)
朗伯(Lambert,J. H.)
朗尼(Loney,S. L.)
勒贝格(Lebesgue,H. L.)
勒穆瓦纳(Lemoine,É. M. H.)
勒让德(Legendre,A. -M.)
雷蒂库斯(Rhaeticus,G. J.)
雷恩(Rahn,J. H.)
雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)
雷科德(Recorde,R.)
雷尼(Renyi,A.)
黎曼(Riemann,(G. F.)B.)
李(Lie,M. S.)
李淳风(Li Chunfeng)
李普希茨(Lipschitz,R. (O. S.))
李善兰(Li Shanlan)
李特尔伍德(Littlewood,J. E.)
李亚普诺夫(Ляпунов,A. M.)
李冶(Li Ye)
李之藻(Li Zhizao)
里贝特(Liebet,K.)
里凡斯特(Rivest)
里克特(Rickert,N. W.)
里奇(Ricci)
里歇洛(Richelot,F. J.)
利玛窦(Ricci,M.)

列维(Levi,B.)
林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)
林登包姆(Lindenbaum,A.)
林尼克(Линник,Ю. В.)
刘徽(Liu Hui)
刘瑾(Liu Jin)
刘维尔(Liouville,J.)
鲁宾(Rubin, M.)
鲁宾孙(Robinson,R. M.)
鲁多尔夫(Rudolff,C.)
鲁菲尼(Ruffini,P.)
鲁洛克斯(Reuleaux,F.)
鲁歇(Rouché,E.)
吕后(Lü Hou)
吕卡(Lucas,F. -É. -A.)
吕利埃(L'Huillier,S. -A. -J.)
吕塞(Siuse,R. -F. de.)
罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н. И.)
罗贝瓦尔(Roberval,G. P. de)
罗尔(Rolle,M.)
罗曼诺夫(Романов,Н. П.)
罗塞(Rosser,J. B.)
罗素(Russell,B. A. W.)
罗特(Rothe,P.)
罗特凯维奇(Rotkiewicz)
洛必达(L'Hospital,G. -F. -A. de)

M

马丁(Martin,D. A.)
马尔贾尼什维利(Марджанишвили,К. К.)
马尔可夫(Марков,А. А.)
马尔可夫的兄弟(Марков,В. А.)
马尔库舍维奇(Маркушевич,А. И.)
马开(Mackay)
马克思(Marx,K.)
马克劳林(Maclaurin,C.)
马斯凯罗尼(Mascheroni,L.)
迈切尔斯基(Mycielski,J.)
麦克莱恩(Maclane,S.)
麦克勒斯基(McCluskey,E. J.)
麦克诺顿(McNaughton,R.)
麦肯济(McKenzie)
曼(Mann,H. B.)
曼德尔勃罗特(Macdelbrot,B.)
曼戈尔特(Mangoldt,H. C. F. von)
毛罗利科(Maurolico,F.)
梅彀成(Mei Goucheng)
梅卡托(Mercator,N.)
梅内克谬斯(Menaechmus)
梅齐利亚克(Meziriac,C. G. B. de)
梅钦(Machin,J.)
梅森(Mersenne,M.)
梅特多鲁斯(Metrodorus)
梅文鼎(Mei Wending)
门杰(Menger,K.)
门纳劳斯(Menelaus,(A.))
蒙哥马利(Montgomery,D.)
蒙克(Monk)
蒙日(Monge,G.)
孟格尔(Münger)
米尔斯(Mills,W. H.)
米奎尔(Miqule,A.)
米里马诺夫(Mirimanov,D.)
密尔(Mill,J. S.)
闵科夫斯基(Minkowski,H.)
莫德尔(Mordell,L. J.)
莫尔(Mohr,G.)
莫尔韦德(Mollweide,K. B.)
莫莱(Morle,F. V.)
莫利(Morley,F.)
墨翟(Mo Di)
默比乌斯(Möbius,A. F.)
默滕斯(Mertens,F. C. J.)
穆尼阁(Smogolenski,J. -N.)

N

拿破仑(Napoleon,B.)
纳皮尔(Napier,J.)
纳西尔丁·图西(Nasīr al-Dīn al-Tūsī)
奈曼(Neyman,J.)
内格尔(Nagell,T.)
尼尔(Neile,W.)
尼科马霍斯(Nicomachus,(G.))
尼科米迪斯(Nicomedes)
尼可(Nicol,C. A.)
牛顿(Newton,I)
纽曼(Newman,M. H. A.)
诺特(Noether,(A.)E.)
诺伊格鲍尔(Neugebauer,O.)

O

欧多克索斯(Eudoxus,(C.))
欧几里得(Euclid)
欧拉(Euler,L.)
欧姆(Ohm,M)

P

帕普斯(Pappus,(A.))
帕乔利(Pacioli,L.)
帕塞瓦尔(Parseval,C. M. -A.)
帕施(Pasch,M.)
帕斯卡(Pascal,B.)
帕斯卡(Pascal,É.)
潘承彪(Pan Chengbiao)
潘承洞(Pan Chengdong)
庞加莱((Poincaré,(J. -)H.)
培根(Bacon,F.)
培根(Bacon,R.)
佩宾(Pepin,T.)
佩多(Pedoe,D.)

佩尔(Pell,J.)
佩奇(Page,A.)
佩亚诺(Peano,G.)
彭赛列(Poncelet,J.-V.)
皮蒂斯楚斯(Pitiscus,B.)
皮尔勒(Pierre,B.)
皮尔斯(Peirce,C. S.)
皮尔逊(Pearson,K.)
皮耶里(Pieri,M.)
婆罗摩笈多(Brahmagupta)
婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)
珀尔伯格(Koppelberg,S.)
普莱费尔(Playfair,J.)
普吕克(Plücker,J.)
普罗克洛斯(Proclus)

Q

契恩豪斯(Tschirnhaus,E. W.)
乔拉(Chowla,S.)
切比雪夫(Чебышев,П. Л.)
切萨罗(Cesàro,E.)
切瓦(Ceva,G.)
秦九韶(Qin Jiushao)
清宫俊雄(Shimiya Toshio)
琼斯(Jones,W.)

R

热尔岗(Gergonne,J.-D.)
热尔曼(Germain,S.)
瑞利(Rayleigh,J. W.)
若尔当(Jordan,M. E. C.)

S

萨凯里(Saccheri,G.)
萨穆埃尔·费马(Fermat,C. S.)
塞尔伯格(Selberg,A.)
赛尔弗里奇(Selfridge,J. L.)
三上义夫(Mikami Yoshio)
沙勒(Chasles,M.)
山谷(Mitani)
商高(Shang Gao)
孙子(Sun Zi)
施恩费尔德(Schoenfeld,L.)
施勒米尔希(Schlömilch,O.)
施罗德(Schröder, F. W. K. E.)
施尼雷尔曼(Шнирельман,Л. Г.)
施泰纳(Steiner,J.)
施泰尼茨(Steinitz,E.)
施图迪(Study,E.)
施托尔茨(Stolz,O.)
施瓦兹(Schwarz,H. A.)
施外卡特(Schweikart,F. K.)
施英策尔(Schinzel)
施蒂费尔(Stifel,M.)
舒尔(Schur,I.)
斯彼德尔(Speidell)
斯蒂尔杰斯(Stieltjes,T. J.)
斯蒂文(Stevin,S.)
斯霍滕(Schooten,F. V.)
斯科伦(Skolem,A. T.)
斯科特(Scott,W. R.)
斯吕塞(Sluse,R.-F. de)
斯洛温斯基(Slowinski,D.)
斯皮尤西波斯(Speusippus)
斯特林(Stirling,J.)
斯通(Stone, M. H.)
斯图尔特(Stewart,M.)
斯图姆(Sturm,C.-F.)
斯托克斯(Stokes,G. G.)
苏斯林(Суслин,М. Я.)
孙琦(Sun Qi)
索洛韦(Solovay, R. M.)

T

塔尔斯基(Tarski,A.)
塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)
泰勒(Taylor,B.)
泰勒斯(Thales,(M.))
泰特托斯(Theaetetus)
泰希米勒(Teichmüller,O.)
汤姆森(Thomson,J.)
汤姆森(Thomson,W. (L. K.))
汤若望(Von Bell,J. A. S.)
汤斯托尔(Tonstall,C.)
陶林努斯(Taurinus,F. A.)
特普利茨(Toeplitz,O.)
特亚尼安(Terjanian,G.)
图埃(Thue,A.)
图基(Tukey,J. W.)
托勒密(Ptolemy)
托里切利(Torricelli,E.)

W

瓦德曼(Wadmann,J.)
瓦尔菲施(Walfisz,A.)
瓦尔加(Varga)
瓦格斯塔夫(Wagstaff,S. S.)
瓦莱·普桑(Vallée-Poussin,C. de la)
瓦里尼翁(Varignon,P.)
外尔(Weyl,(C. H.)H.)
王孝通(Wang Xiaotong)
王恂(Wang Xun)
王元(Wang Yuan)
旺策尔(Wantzel,P.-L.)
威尔逊(Wilson,J.)
韦布尔(Weibull,W.)
韦达(Viete,F.)
韦塞尔(Wessel,C.)
维布伦(Veblen,O)
维恩(Venn,J.)

后　记

十八载坎坷跋涉，千余人魂牵梦萦，这部涵盖现代数学科学体系的大型工具书——《数学辞海》终于杀青付梓了，释负之余感慨良多。

上世纪 80 年代中期，随着国家改革开放的深入，华夏盛世初显，我们这些数学工作者深感教学与科研急需，且人过中年应有所建树以无愧人生，于是决意编纂一部大型数学工具书，以振兴祖国数学事业，为中华民族争光。当《数学辞海》的选题一经提出，便在国内外数学界赢得热烈反响，特别是得到了前辈名家的亲切关怀和积极支持。又经广泛调研、民主磋商和反复论证，一部集古今中外数学成就于一体的《数学辞海》总体设计方案被确定下来，我们从此踏上了始料不及的艰难历程。

立意之初，我们考虑到国家百业待兴，财力紧缺，准备不靠国家拨款，自筹资金完成这项系统工程，闯一条民间编纂大型工具书的新路。为搞好编纂工作，特地组成了民间机构——数学辞海编辑委员会及其常设联络办事机构：数学辞海编辑部，并得到国家教育部、山西省教育厅、山西省新闻出版局和山西省教育学院（现与山西大学师范学院、太原师专合并为太原师范学院）等有关部门的认可。撰稿初期，由于有 200 余所院校及科研单位几代数学工作者的热情支持和积极参与，进展尚属顺利，但随着工程的进展，要在全国范围内(包括港、台地区)的 1500 多名专家、教授之间联系落实撰稿、统稿、审稿、改稿、编辑、校对等工作，再加上绝大多数的专家、教授是利用业余时间完成以上工作的，缺乏资金来源和专业的工作人员等困难，使之民间组织的数学辞海编辑部实在不堪重负。为解决编辑活动经费，编辑部的一些人几度成为当代“武训”，四处奔走，多方求助。就这样，编辑部仍经常处在邮资、通讯和差旅费难以支付的境地。

在经历了“九九八十一难”之后，在《数学辞海》终于诞生的今天，我们深深感谢社会各界及国内外有识之士给予的慷慨捐助，特别是山西省人民政府的资助；深深感谢山西教育出版社、东南大学出版社、中国科学技术出版社和北京大学出版社给予的关键性支持。我们也不能忘记那些给我们送来 100 元、500 元、1000 元 ……的捐助者，当然更要告诉读者的是：如果您感到此书对您稍有帮助的话，请不要忘记这 1000 多名数学工作者是不计报酬、不讲条件地编纂这部工具书的，他们当中还有很多人把自己的工资捐献给编辑部，以确保数学辞海编辑部的工作不致中断。还有一些专家、教授，历经数年，甚至十几年苦心修典，往往一天伏案十五六个小时，终于积劳成疾，竟然没有亲眼看到《数学辞海》面世，就不无遗憾地离开了我们。听着他们临终遗言：“一定要尽快出版中国的《数学辞海》”，更增添了我们的一份紧迫感和责任感。

具有悠久历史的中华民族，对世界数学发展的杰出贡献，长期为世人瞩目，虽经中落，但中国当代数学科学又有了重大的进步。我们相信：在国家“科教兴国”方针指引下，中国必将再度成为数学大国，深望《数学辞海》能为实现这一宏伟目标略尽微薄之力。

《数学辞海》第一版即将面世之时，一种不名的恐惧萦绕心头，它的质量能获得读者的认可吗？能达到立意之初衷吗？希望广大读者在发现此书的种种问题时，不吝赐教。待我们稍稍喘息之后，将再邀请一批专家、教授对其进行修订，使之进一步充实提高，以期终臻完善。

数学辞海编辑部

2002 年 7 月 8 日

《数学辞海》编辑部